التكامل

■ ما هو التكامل؟

هو عملية عكسية للاشتقاق وبإجراء هذه العملية يتم إعادة $F'(x)$ المشتقة $\Leftarrow$ لتصبح $F(x)$

$$F(x) \xrightarrow[\text{فصل أول}]{\text{اشتقاق}} F'(x) \qquad F'(x) \xrightarrow[\text{تكامل}]{\text{فصل ثاني}} F(x)$$

■ إذا كان $f(x) = F'(x)$ فإن $F(x)$ يُسمى اقترانًا أصليا للاقتران $f(x)$

مثال إذا كان $f(x) = 3x^2$ فهناك عدة احتمالات للاقتران الأصلي $F(x)$

$F(x) = x^3 + 1$

$F(x) = x^3 - 3$

$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$

وهناك احتمالات لا نهائية للاقتران الاصلي لذلك تكتب بشكل عام $\underline{F(x) + C}$ حيث c ثابت

ملاحظة إذا طُلب إيجاد الاقتران الأصلي يعني كامل ولنتعلم قوانين التكامل الآن...

أوّلاً : التكامل الغير محدود :

التكامل الغير محدود وفيه يتم عمل تكامل للاقتران باستخدام قواعد التكامل.

صيغة السؤال

جد $\int f(x) \quad dx$

① اعمل تكامل : معناه

② لهذا الاقتران المشتقة (المُكامَل)

③ بدلالة استخدام الحرف (x) (متغير)

وهنا نحن نقوم بعمل تكامل وفي نهاية السطر تضع (+C) $\Leftarrow$ عليها علامة

(C : ثابت التكامل)

أستاذ : كيف ممكن أعمل تكامل للاقتران؟

عشان نعمل تكامل لأي اقتران لازم نسيطر على عناصر الخطة التالية:

⑥ قواعد التكامل (4 عادي , 2 خطي)

⑤ تجهيزات قبل التكامل

④ تجهيزات تفوق الاقترانات المثلثة

قاعدة (1)

$\int$ العدد الثابت dx

$\int k\,dx = kx + C$

عدد ثابت

أمثلة جد كل مما يلي :

3. $\int -7\,dx$	2. $\int 3\,dx$	1. $\int 6\,dx$
6. $\int -\,dx$	5. $\int -4\,dx$	4. $\int \frac{5}{2}\,dx$
9. $\int \frac{2}{3}\,dx$	8. $\int 7\,dx$	7. $\int dx$

قاعدة (2) $\int x^n\,dx$

بشرط $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$

ملاحظة

n:
- موجب ← نزيد درجة
- سالب ← ننزل درجة
- كسر ← نقلب $x^{\frac{a+b}{b}}$

أمثلة

جد تكامل كل مما يلي :

1. $\int x^2\,dx$	2. $\int x^{15}\,dx$
3. $\int x^{10}\,dx$	4. $\int x^{8}\,dx$
5. $\int x^{-7}\,dx$	6. $\int x^{-3}\,dx$
7. $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$	8. $\int x^{\frac{7}{5}}\,dx$
9. $\int x^{\frac{-5}{8}}\,dx$	10. $\int x^{\frac{-12}{5}}\,dx$
11. $\int x^{\frac{-2}{3}}\,dx$	

قاعدة (3)

$\int kx^n \, dx$

$$\int kx^n \, dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , n \neq -1$$

أمثلة

جد تكامل كل مما يلي :

1. $\int 6x^2 \, dx$	2. $\int 8x \, dx$	3. $\int 6x \, dx$
4. $\int 2x^{\frac{3}{2}} \, dx$	5. $\int 2x^{-4} \, dx$	

ملاحظة

تكامل المجموع أو الفرق

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) dx$$

يعني التكامل يوزع على الجمع والطرح ...

أمثلة

جد تكامل كل مما يلي :

1. $\int (6x^2 + 2x) \, dx$	2. $\int (2x^3 - 2x) \, dx$	3. $\int (x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}) \, dx$

4. $\int (3x^{\frac{5}{2}} + 9x^{\frac{-7}{2}} + 18)\,dx$	5. $\int (7x - 5)\,dx$	6. $\int (x^4 - 2)\,dx$
7. $\int (3 - 4x)\,dx$	8. $\int (4x + 2)\,dx$	9. $\int (2x^4 - 5x + 10)\,dx$
10. $\int (6x^2 - 4x)\,dx$	11. $\int (3 - x - 2x^5)\,dx$	12. $\int (x^{-2} + x^{\frac{5}{2}})\,dx$
13. $\int (3x^{-2} + 6x^{-\frac{1}{2}} + x - 4)\,dx$	14. $\int (10x^4 + 8x^{-3})\,dx$	15. $\int 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx$
16. $\int (8x - 10x^2)\,dx$		

■ التجهيز قبل استخدام قاعدة (2) + قاعدة (3) :

(1) إذا كانت x تحت الجذر ⟵ نكتب الجذر على شكل أس

(2) إذا كانت x في المقام ⟵ نرفعها لفوق

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \qquad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

أمثلة جد التكاملات الآتية :

1. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$	2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$	3. $\int \frac{1}{x^5}\,dx$
4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right)dx$	5. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right)dx$	6. $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\,dx$
7. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$	8. $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx$	9. $\int \left(\frac{2}{x^3} - 3\sqrt{x}\right)dx$
10. $\int \left(8x^3 + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$	11. $\int \left(\frac{7}{x^2} + \sqrt[3]{x^4}\right)dx$	12. $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)dx$

■ التجهيز في حالة القسمة أو الضرب قبل استخدام قاعدة $(3 + 2)$:

① إذا كان في ضرب بين مقدارين ⟵ وزّع ثم كامل

② إذا كانت x في المقام ⟵ وزع المقام على كل حد في البسط

مثال جد تكامل كل مما يلي :

$$1. \int (x+2)(x-2)dx$$
$$= (x^2 - 4)dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

لاحظ قاعدة
فرق بين
مربعين

$2. \int \frac{8x^3 + 5x}{x} dx$	$3. \int x\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$	$4. \int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2} dx$
$5. \int x(x^3 - 7)dx$	$6. \int (3x+2)(x-1)dx$	$7. \int \frac{2x+8}{\sqrt{x}} dx$
$8. \int \frac{4x^3 - 2}{x^3} dx$	$9. \int \sqrt{x}\,(x-1)dx$	$10. \int (2x-3)(3x-1)dx$

11. $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$	12. $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$ الجواب : $x+\frac{1}{x}+c$	13. $\int x\sqrt{x}\,dx$ الجواب : $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+c$
14. $\int x^2(1-x^3)\,dx$ الجواب : $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6+c$	15. $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$ الجواب : $-\frac{5}{4x^4}-\frac{1}{3x^3}+c$	16. $\int (x-5)(x+5)\,dx$ الجواب : $\frac{1}{3}x^3-25x+c$
17. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ الجواب : $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$	18. $\int (x-1)^2\,dx$ $=\int (x^2-2x+1)\,dx$ $=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+x+c$ $=\frac{x^3}{3}-x^2+x+c$	19. $\int (x+4)^2$ الجواب : $\frac{1}{3}x^3-4x^2+16x+c$
20. $\int x(x+1)^2\,dx$	21. $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$	22. $\int x(x-1)^2\,dx$

■ **التجهيز قبل التكامل :**

$\Leftarrow$ **إذا كان في المقام (مقدار) $[x \mp b]$**

① **نحلل** ② **نختصر** ③ **نكامل**

- **فرق بين مربعين /• مجموع مكعبين**
- **تحليل عبارة تربيعية /• إخراج عامل مشترك**

أمثلة جد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$	② $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$	③ $\int \frac{x^2-25}{x-5}\,dx$
④ $\int \frac{x^2-16}{x-4}\,dx$	⑤ $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$	⑥ $\int \frac{x^2+3x-4}{x+4}\,dx$ الجواب : $\frac{x^2}{2}+5x+c$
⑦ $\int \frac{x^2-x-6}{x-3}\,dx$	⑧ $\int \frac{x^2-5x-24}{2x-16}\,dx$	⑨ $\int \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$
⑩ $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$	⑪ $\int \frac{x^3+27}{x+3}\,dx$	⑫ $\int \frac{x^2+2x}{x+2}\,dx$

⑬ $\int \frac{2x^3+2}{x+1}\,dx$	13) $\int \frac{2x^2-2}{x-1}\,dx$	14) $\int \frac{3x^2-27}{2x+6}\,dx$

■ إيجاد الاقتران الأصلي :

تذكّر

لإيجاد الاقتران الأصلي

مثال جد اقترانًا أصليًا لكل من الاقترانات التالية : يعني اعمل تكامل

① $f(x) = x^7$ $\int x^7\,dx$ $= \frac{x^8}{8} + c$ $f(x) = \frac{x^8}{8} + c$	③ $f(x) = -10$
② $f(x) = -2x^6$ $\int -2x^6\,dx$ $= \frac{-2x^7}{7} + c$ $f(x) = \frac{-2}{7}x^7 + c$	④ $f(x) = 8x$

مهارات تفكير عُليا

اكتشف الخطأ : أوجدت رنيم ناتج التكامل $\int (2x+1)(x-1)\ dx$, وكان حلها على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)\ dx = \int (2x+1)\ dx \times \int (x-1)\ dx$$

$$= (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + c$$

اكتشف الخطأ في الحل , ثم صحّحه ...

تحدّ : جد تكامل كل مما يأتي :

① $\int (x-1)(x-3)(x+5)\ dx$

② $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2\ dx$

تبرير : إذا كان : $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right)\, dx = \frac{2}{x} + 10x + c$, فجد قيمة كل من الثابت P والثابت Q

ملخص قواعد التكامل

التجهيز قبل التكامل

مقدار × مقدار

حد × مقدار

اضرب القوسين ثم كامل

تحويل الجذر إلى أس

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

الداخل على الخارج

كسر

$\frac{\text{عدد}}{x^n}$

ارفع x فوق

$\frac{a}{x^n} = ax^{-n}$

$\frac{\text{مقدار}}{x^n}$

وزع x^n على كل حد في المقدار

$\frac{a+b}{x^n}$

$\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^n}$

$\frac{\text{مقدار}}{ax+b}$

حلل اختصر كامل

هل لديكم أي أسئلة؟

الشرط الأولي

① ايجاد قاعدة الاقتران :

تعلمنا سابقا طريقة ايجاد الاقتران الاصلي قبل اشتقاقه وذلك بـ التكامل

$f'(x)$ ← كامل ←
- $\mathrm{F(x) + C}$
- (عدد لا نهائي)
- لأن $C \in R$

ولكن في هذا الدرس هو يتحدث عن اقتران أصلي وحيد يحققه شرط معين يُسمى الشرط الأولي ، وهو الذي سيساعدنا على تحديد قيمة وحيدة لـ C وبذلك يُصح لدينا قاعدة اقتران وحيدة.

المطلوب

قاعدة الاقتران

$h(x), f(x), g(x), ...$

(كلها أشكال ممكنة لقاعدة الاقتران)

المُعطى

مشتقة الاقتران $f'(x), \frac{dy}{dx}$

أو معدل التغير

أو ميل المنحنى

(كلها اسماء مختلفة تدل على المشتقة)

+ الشرط الأولي ⇐ نقطة يمر بها المنحنى (x,y)

$f(x) = y$

طريقة الحل
- كامل
- أوجد C
- نقطة أولى + قيمة C

مثال 1 أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ومر منحناه بالنقطة $(2 , 4)$

مثال 2 أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 6x^2 + 5$ ومر منحناه بالنقطة $(1 , 9)$

مثال 3 إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ ، علمًا بأنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9 , 25)$

مثال 4 أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$ لكل مما يأتي :

$1)\ f'(x) = 3x - 2\ ;\ (-1 , 2)$

$2)\ f'(x) = x + \sqrt{x}\ ;\ (1 , 2)$

$3) f'(x) = -x(x+1)\ ;\ (-1 , 5)$

$4) f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2\ ;\ (1 , 3)$

$5) 2) f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ ;\ (4 , 5)$

مثال 5 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علمًا بأنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(2\,,4)$.

واجب بيتي في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x)=x-3\,;\ (2\,,9)$

2) $f'(x)=x^2-4\,;\ (0\,,7)$

3) $f'(x)=6x^2-4x+2\,;\ (1\,,9)$

4) $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2\,;\ (4\,,11)$

5) $f'(x)=(x+2)^2\,;\ (1\,,7)$

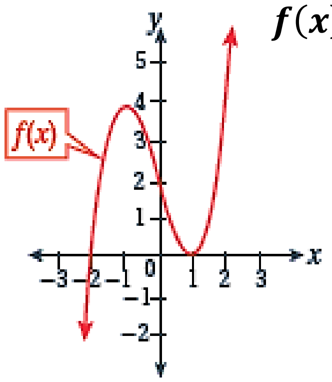
6) $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-x\,;\ (4\,,0)$

مثال 6 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=0.4x+3$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0\,,5)$.

مثال 7 إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x)=\frac{x^2+10}{x^2}$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ ، علمًا بأنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5\,,2)$.

مثال 8 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+8$ ، ومرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

مثال 9 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث: $f'(x)=3x^2-3$ ، أجد قاعدة الاقتران $f(x)$



مهارات تفكير عُليا

تحدّ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4-\frac{100}{x^2}\right)$ ، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a\,,10)$ ، حيث: $a>0$ ، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

تبرير : تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x)=ax+b$ ، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2\,,8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0\,,18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

ملاحظة

معدل التغير = ميل المماس

= يعني المشتقة

مثال 12

يُمثِّل الاقتران: $S(t)=500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق، و $S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًا. أجد $S(t)$ ، علمًا بأنَّ $S(0)=0$

أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t)=0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}$ ، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو $2\ ft$ ، فأجد $h(t)$.

0788118727

بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قُطْره y سنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dx} = 4t^{-\frac{2}{3}}\ , t > 0$ ، وكان نصف قُطْر البالون بعد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه $30\ cm$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10) قاعدة العلاقة y بدلالة t

11) نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

② مسائل حياتية عن قاعدة الاقتران:

(التكلفة والإيراد)

نفس الخطوات السابقة

تذكّر

التكلفة الحدية	قاعدة	الشرط الأولى
الايراد الحدي	اقتران التكلفة	لا يعطى بصورة
(مشتقة)	قاعدة	نقطة
	اقتران الايراد	تكلفة x هي y
	(قاعدة الاقتران)	ايراد x هو y

مثال 1

يمثل الاقتران $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل طابعة ملونة تنتجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار، أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علماً بأن تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي $JD\ 583$

مثال 2

يمثل الاقتران $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطعة تُنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار، أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علماً بأن تكلفة إنتاج 10 قطع هي $JD\ 2200$

مثال 3

الإيراد الحدّي: يُمثّل الاقتران:

$R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدّي (بالدينار)

لكل قطعة تباع من مُنتجات إحدى الشركات،

حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع

x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$،

علمًا بأنّ $R(0) = 0$.

إرشاد : يُمثّل الإيراد الحدّي مشتقة اقتران الإيراد.

3 الشرط الأولي : الحركة في مسار مستقيم

عكس sva

s(t) → v(t) → a(t)

مسافة → سرعة → تسارع

تكامل ، تكامل

$a(t) =$

$v(t) =$ نعمل تكامل

$s(t) =$ نعمل تكامل كمان مرة

■ الخطوات الي رح نعملها كل مرة للانتقال من حرف لآخر

1. C + كامل
2. ايجاد قيمة C من المعلومة

$v(0) = 3$ ، $s(0) = 5$

عوّض ، عوّض

$0 = 3$ ، $0 = 5$

3. نقطة أولى + قيمة C
4. نعوض بعدد الثواني (t) بعد كلمة (بعد مرور)

3 ثواني ⇓ نعوض 3د

ثانية واحدة ⇓ نعوض بـ 1

(t) ثانية ⇓ ما بنعوض بتركها • اقتران بدلالة t

■ ملاحظات ومصطلحات مهمة :

1. موقعة نفسها المسافة s(t)
2. السرعة الابتدائية معناها v(0) نعوض بصفر
3. الموقع الابتدائي معناها s(0) نعوض بصفر
4. جد القاعدة بعد مرور (t) ثانية هنا يكون فقط المطلوب التكامل وايجاد القاعدة دون تعويض
5. وحدات القياس (المسافة ⇐ m) / (السرعة ⇐ m/s) / (التسارع ⇐ m/s^2)

مثال 1

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = t + 2$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $11\ m$ فأجد موقع الجسيم بعد 8 ثوانٍ من بدء حركته.

مثال 2

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = 36t - 3t^2$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

مثال 3

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مثال 4

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 5

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويُعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 6t$ حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع، إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4\ m$ وكانت سرعته المتجهة $1\ m/s$ بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

مثال 6

يتحرّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $72\ m/s$ ، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من

بَدْء الحركة.

مثال 7

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويُعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 4t - 4$ حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع، إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

مثال 8

يتحرّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $3\ m$ ، وكانت سرعته المتجهة هي $1\ m/s$ بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مثال 9

يتحرّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع.

إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $2\ m/s$ ، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

التكامل المحدود

1. قواعد التكامل المحدود $\int_a^b$ هي نفسها قواعد التكامل الغير محدود $\int$

ولكن الفرق هو اجراء عملية التكامل (نعوض) بالحدود (الأرقام) لإيجاد ناتج التكامل المحدود

حدود التكامل من a إلى b

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

$$F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحد العلوي

قيمة الاقتران الأصلي عند الحد السفلي

■ خطوات الحل :

1. كامل عادي لإيجاد F(x)
2. $F(x)|_a^b$ (للتعبير عن الفرق -)
3. F(b)- F(a) (قوسين بيناتهم طرح)

عوّض علوي   عوّض سفلي

أمثلة أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

1) $\int_1^3 (8)\,dx$

2) $\int_{-1}^3 (-4)\,dx$

3) $\int_1^4 2x\,dx$

الرياضيات

4) $\int_{-2}^{3} (3x^2)\, dx$

مثال 1

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

1) $\int_{0}^{1} (2x - 5)\, dx$

2) $\int_{0}^{2} (2x^3 - 4x + 5)\, dx$

3) $\int_{-1}^{3} 3x^2\, dx$

4) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx$

5) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

6) $\int_{1}^{5} 10x^{-2}\, dx$

7) $\int_{3}^{4} (6x^2 - 4x)\, dx$

8) $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/5})\, dx$

9) $\int_{-2}^{3} (-x^2 + x - 5)\, dx$

مثال أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

(أنتبه تحتاج تجهيز)

1) $\int_{1}^{4} (8x - \sqrt{x})\, dx$

2) $\int_{-4}^{3} x(4-3x)\,dx$

3) $\int_{-1}^{2} (1-x-)(1+3x)\,dx$

.4) $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2)\,dx$

5) $\int_{1}^{3} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

6) $\int_{1}^{4} x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

7) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

8) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\,dx$

9) $\int_{1}^{4} \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

10) $\int_{0}^{6} x(6-x)\,dx$

11) $\int_{1}^{6} \left(6x-\frac{12}{x^4}+3\right)dx$

12) $\int_{1}^{2} \frac{x^2+x^3}{x}\,dx$

14) أكتشف الخطأ:

أوجد خالد ناتج التكامل:

$\int_0^2 (x^2+x)\,dx$ ،

وكان حلُّه على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}(0)^3+\frac{1}{2}(0)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$=-\frac{14}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أصحّحه.

15) أثبت

$$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

2. إيجاد مجاهيل التكامل المحدود $\int_a^b$
a أو b مجهولة

المُعطى :

$$\int_a^b f(x)\,dx = m$$

عدد مُعطى

a أو b
واحد منهم مُعطى
واحد منهم مجهول

■ خطوات الحل :

1 كامل عادي لإيجاد f(x)=m

2 $F(x)|_a^b = m$

3 F(b)-F(a)=m

بعد التعويض سيكون لديك مجهول واحد

تحولت الى معادلة ⇐ أوجد المجهول

مثال

إذا كان $\int_1^4 k\,dx = 18$ فأجد قيمة الثابت k

مثال

إذا كان $\int_{-2}^4 3k\,dx = 36$ فأجد قيمة الثابت k

مثال

إذا كان $\int_0^m 4x\,dx = 18$ فأجد قيمة الثابت m

مثال

إذا كان $\int_1^m (2x+3)\,dx = 6$ فأجد قيمة الثابت m

مثال

إذا كان $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$ فأجد قيمة الثابت k

مثال

إذا كان $\int_0^k 6x^2\,dx = 2$ فأجد قيمة الثابت k

مثال

إذا كان: $\int_1^m (6x-10)\,dx = 4$ ، فأجد قيمة الثابت m .

مثال

إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$ ، فأجد قيمة الثابت a

مثال

إذا كان: $\int_2^3 (x^2-a)\;dx = 5$ ، فأجد قيمة الثابت a

خصائص التكامل المحدود:

خاصية 1 التكامل عند نقطة

تساوي الحدود يعني صفر

$$\int_k^k f(x)\,dx = 0$$

عندما يكون الحد العلوي = الحد السفلي

الناتج صفر

1) $\int_2^2 (2x+3)\,dx$

2) $\int_{-5}^{-5} \left(2x+3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

3) $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\,dx$

خاصية 2 التبديل بين حدي التكامل

عكس الحدود عكس الاشارة

$$\int_k^m f(x)\,dx = -\int_m^k f(x)\,dx$$

عند عكس حدود التكامل – نعكس إشارة الناتج

1) $\int_0^5 f(x)\,dx = -4$ فجد

$\int_5^0 f(x)\,dx =$

2) $\int_7^3 f(x)\,dx = 10$ فجد

$\int_3^7 f(x)\,dx =$

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

3) $\int_4^1 f(x)\,dx = 4$ فجد

$\int_1^4 5f(x)\,dx =$

4) $\int_9^2 3f(x)\,dx = 6$ فجد

$\int_2^9 f(x)\,dx$

5) $\int_3^0 2f(x)\,dx = 8$ فجد

$\int_0^3 f(x)\,dx$

6) $\int_3^4 \frac{f(x)}{2}\,dx = 5$ فجد

$\int_4^3 f(x)\,dx$

خاصية 3 تكامل المجموع أو الفرق

خاصية التوزيع ← الخاصية الخبيثة عند + او -

$\int_m^k (f(x) \mp g(x))\,dx$

لازم نوزع التكامل يعني نعمل تكامل $f(x)$ وتكامل $g(x)$

$\int_m^k \left(f(x)dx \mp \int_m^k g(x)\right)dx$

(هذا نعمله تكامل محدود)

1) $\int_1^4 (f(x) + 2\,)dx = 10$ فجد

$\int_4^1 f(x)\,dx$

2) $\int_1^3 (\frac{f(x)}{2})dx = 4$ فجد

$\int_3^1 (f(x) - 5)\,dx$

0788118727

$$3) \int_{7}^{4} (2f(x))dx = -8$$ فجد

$$\int_{4}^{7} (3f(x) - 2x)dx$$

خاصية 4 تجزئة التكامل

افرط التكامل لتكاملين

فوق بعيد

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{a}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{b} f(x)\ dx$$

نفس c ، نفس c

تحت قريب

مثال 1

إذا كان $\int_0^5 f(x)\ dx = 10$

$\int_5^7 f(x)\ dx = 3$ ، فأوجد $\int_0^7 f(x)\ dx$

$$\int_{0}^{7} f(x)\ dx = \int_{0}^{5} f(x)\ dx + \int_{5}^{7} f(x)\ dx$$

$$= 10 + 3$$

$$= 13$$

مثال 2

إذا كان $\int_3^1 g(x)\ dx = 8$

$\int_3^5 g(x)\ dx = 7$ فأوجد $\int_5^1 g(x)\ dx$

$$\int_{5}^{1} g(x)\ dx = \int_{3}^{1} g(x)\ dx + \int_{5}^{3} g(x)\ dx$$

$$= 8 + -8$$

$$= -7 - 8$$

$$= -14$$

انتبه !

ماذا؟!

بعض الأمثلة تحتاج إلى تجهيز قبل الحل

مثال

إذا كان $\int_0^5 2f(x)\ dx = 10$

$\int_0^7 \frac{f(x)}{3}\ dx = -4$ ، فأوجد $\int_5^7 f(x)\ dx$

لازم نجهز من غير أرقام جوا التكامل يعني :

$$\int_{0}^{7} f(x)\ dx = -4 \times 3$$

$$= -12$$

$$\int_{0}^{5} f(x)\ dx = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_{5}^{7} f(x)\ dx = \int_{5}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{7} f(x)\ dx$$

$$= -5 + -12$$

عكسنا لأنه عكسنا الحدود

$$= -5 - 12 = -17$$

أمثلة متنوعة تشمل جميع الخواص السابقة :

مثال

إذا كان $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$ ، $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$ ، $\int_0^5 g(x)\,dx = -4$

فأجد كلاً مما يأتي:

1) $\displaystyle\int_0^5 \big(4f(x) + g(x)\big)\,dx$

2) $\displaystyle\int_5^0 5g(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx$

مثال

إذا كان $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$ ، $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ ، $\int_4^1 f(x)\,dx = 2$

فأجد كلاً مما يأتي :

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(f(x) + 3h(x)\big)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_{1}^{-1} 4h(x)\,dx$

مثال

$\int_1^2 f(x)\,dx = -4$

$\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 6$

$\int_1^5 g(x)\,dx = 8$

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي :

1) $\displaystyle\int_2^2 g(x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_5^1 \big(g(x) - 2\big)\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 \big(3f(x) + x\big)\,dx$

4) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

6) $\displaystyle\int_1^5 \big(4f(x) + g(x)\big)\,dx$

مثال

إذا كان : $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5$,

$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4$, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2$

فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1) $\int_{2}^{2} f(x)\,dx$

2) $\int_{1}^{2} (f(x) - 5)\,dx$

3) $\int_{-3}^{2} (-2f(x) + 5g(x))\,dx$

4) $\int_{2}^{-3} (g(x) + 2x)\,dx$

5) $\int_{2}^{-3} (f(x) + g(x))\,dx$

6) $\int_{-3}^{2} (4f(x) - 3g(x))\,dx$

■ تكاملات الاقترانات المتشعبة :

استخدام خاصية [تجزئة التكامل]

الاقتران المشعب هو اقتران يتشعب عند نقطة تسمى نقطة التشعب

$$f(x) = \begin{cases} \text{مقدار} , & x \geq \text{نقطة التشعب} \\ \text{مقدار} , & x < \text{نقطة التشعب} \end{cases}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\text{نقطة التشعب}} f(x)\,dx + \int_{\text{نقطة التشعب}}^{b} f(x)\,dx$$

1) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 12 , & x < 2 \\ 3x^2 , & x \geq 2 \end{cases}$ فأجد قيمة $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

2) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \leq 3 \\ 10 - x , & x > 3 \end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

3) إذا كان:

مثال

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<2 \\ 8-x & , \quad x\geq 2\end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\ dx$

---

4) إذا كان: $f(x)=\begin{cases} -x^2+5 & , \quad x<0 \\ x+5 & , \quad x\geq 0\end{cases}$

، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

---

5) إذا كان

$f(x)=\begin{cases} 1+x & , \quad x<1 \\ 2x & , \quad x\geq 1\end{cases}$ فأجد قيمة

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

تكامل اقتران القيمة المطلقة

انتبه !

اقتران القيمة المطلقة , لإيجاد تكامل القيمة المطلقة عليك أولا إعادة تعريف الاقتران وكتابته على شكل **اقتران متشعب** ثم ستستخدم خاصية التجزئة.

- **خطوات إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**

$f(x)=|ax+b|$

1. $ax+b=0$ (الداخل=0)

نقطة تشعب $x=m$

2. خط الأعداد

عكس $x<m$ ← إشارة a | m | نفس $x\geq m$ إشارة a

$+ \Leftarrow ax+b$ (الداخل كما هو)

$- \Leftarrow -(ax+b)$ (الداخل × 1-)

3. اكتبه كاقتران متشعب

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\ , x\geq \text{أو} < m \\ -(ax+b)\ , x\geq \text{أو} < m\end{cases}$$

وبعد اعادة التعريف نستخدم نفس طريقة تكامل الاقتران المتشعب

مثال

إذا كان $f(x) = |x-1|$ فأجد قيمة

$\int_0^5 f(x)\,dx$

تدريب :

a) إذا كان $f(x) = |x-3|$ فأجد قيمة

$\int_{-1}^4 f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{4} |3x-6|\,dx$$

$$\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$$

$$\int_{0}^{5} (|x+3|-5)\,dx$$

$$\int_{0}^{7} |2x-1|\,dx$$

$$\int_{-3}^{4} |x|\,dx$$

مسائل حياتية عن التكامل المحدود

إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a,b]$ فإنّ **مقدار التغير في $f(x)$** عند تغير x من a إلى b هو :

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\ dx$$

مثال

الربح الحدي $P'(x)$ مشتقة

■ المطلوب مقدار التغير في الربح

$\int_a^b P'(x)\ dx = P(b)-P(a)$

■ المبيعات من a الى b

مثال

يمثل الاقتران $P'(x)=165-0.1x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) جهاز لوحي (iPad) تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المبيعة شهرياً، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهرياً بالدينار، أجد مقدار التغير في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 1000 جهاز

⟸ الحل :

$$P(b)-P(a)=\int_a^b P'(x)\,dx$$

$$P(1100)-P(1000)$$

$$=\int_{1000}^{1100} 165-0.1x\,dx$$

$$=(165x-0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

$$(165(1100)-0.05(1100)^2)$$

$$-(165(1000)-0.05(1000)^2)$$

$$=6000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهرياً بمقدار $JD\ 6000$

مثال

مثل الاقتران $P'(x)=2x-3$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) جهاز لوحي (iPad) تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المبيعة شهرياً، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهرياً بالدينار، أجد مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 1400 جهاز

تغيُّر التكلفة : يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

سكّان : أشارت دراسة إلى أنّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

تلوُّث : يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$ ، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

هل لديكم أي أسئلة؟

المساحة

حالة 1 لا تقع بالفترة

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x + 3$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 3$

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 1$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 4$

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$ ، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$ ، و $x = 5$.

مثال 4

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = 2$.

مثال 5

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$ ، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$ ، و $x = 2$.

مثال 6

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 8x$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = 5$ ، $x = 2$

مثال 7

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 1$

حالة 2 تقع ضمن الفترة

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$ ، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$ ، و $x = 2$.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 12$ والمحور x ، والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = -1$ ، $x = -3$

حالة 3 لايوجد فترة

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - x$ والمحور x

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 5x + 4$ والمحور ، x

مثال 4

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 9x$ والمحور ، x

مثال 5

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$ ، والمحور x .

مثال 6

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$ ، والمحور x .

مثال 7

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2(2 - x)$ ، والمحور x .

مثال 8

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$ ، والمحور x

مثال 9

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = (x + 1)(x - 4)$ ، والمحور x .

مثال 10

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 2x$ والمحور x .

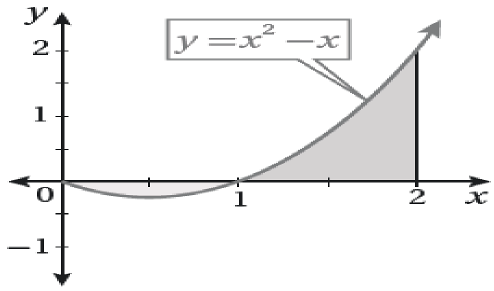
" يليقُ بِكَ أن ترتقي "

0788118727

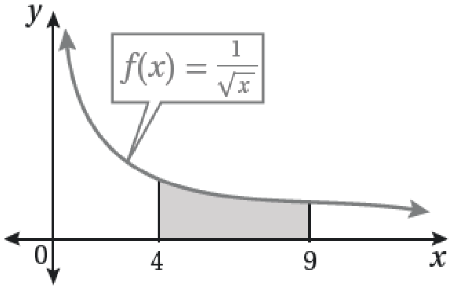
مثال

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

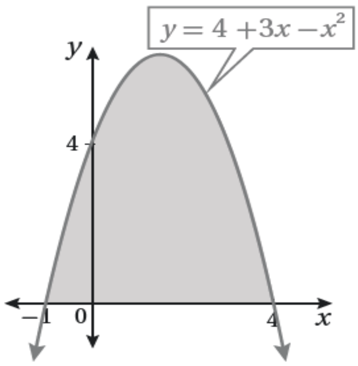
1)



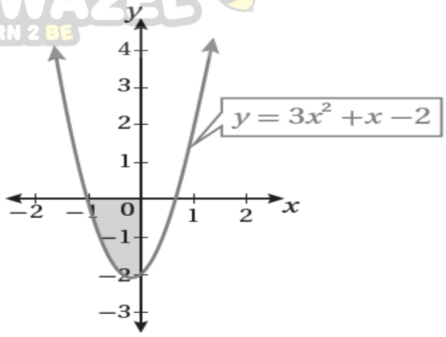
2)



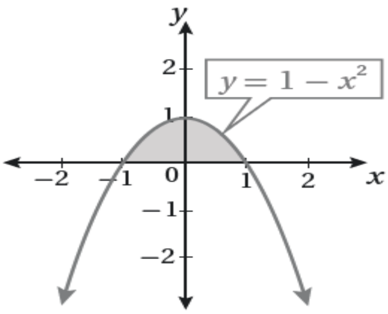
3)



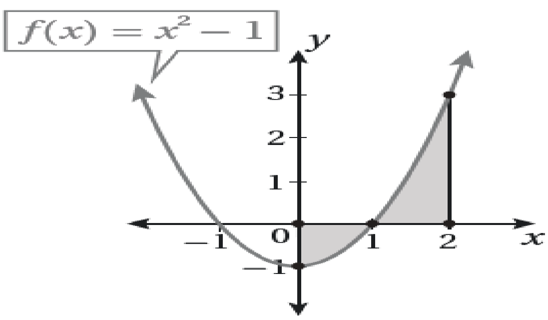
4)



5)



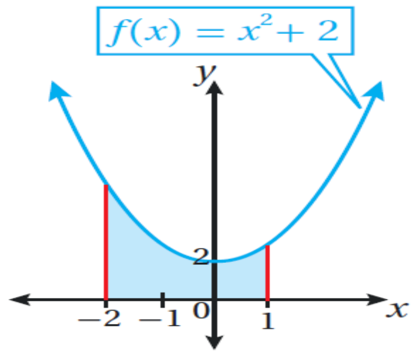
6)



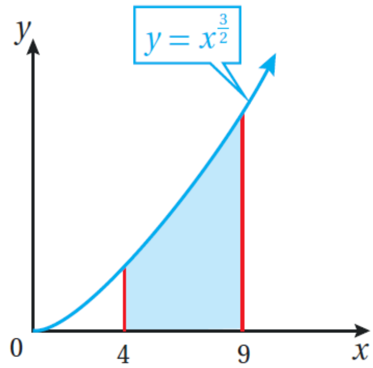
مثال

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

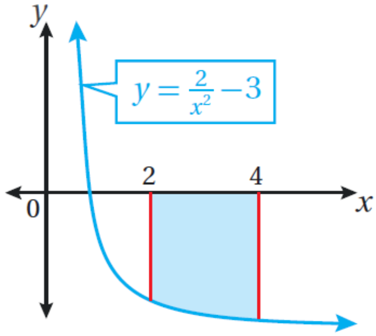
1)



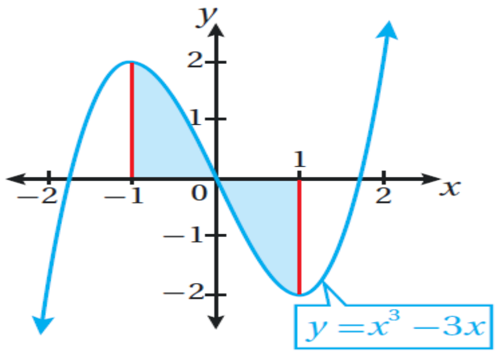
2)



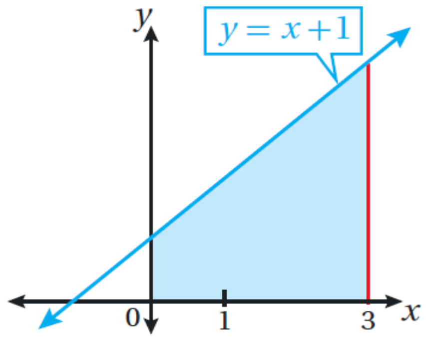
3)



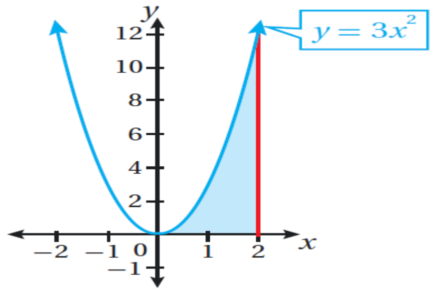
4)



5)

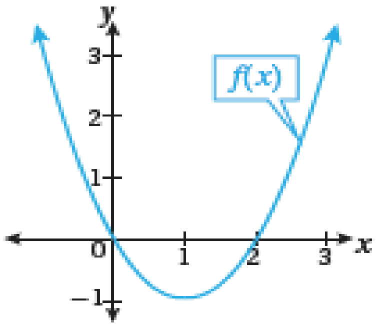


6)

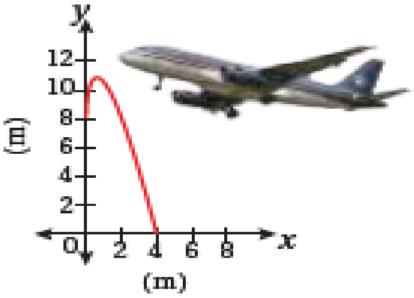


7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$

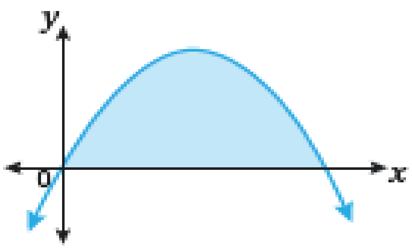
8) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.

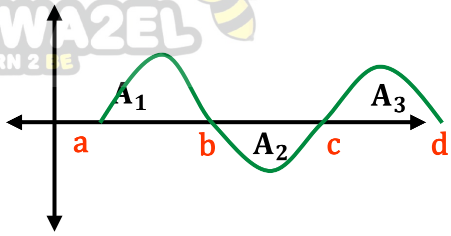


9) يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \le x \le 4$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.



تحد : يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران : $y = kx(4 - x)$ ، اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 مربعة , فأجد قيمة الثابت k .





وكانت $A_1 = 5 \; , A_2 = 13 \, , A_3 = 6$

احسب ما يلي :

① $\int_a^b f(x)dx =$

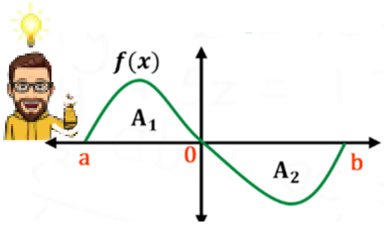
② $\int_b^c f(x)dx =$

③ $\int_a^d f(x)dx =$

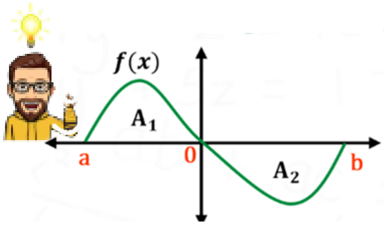
④ $\int_d^a f(x)dx =$

⑤ المساحة الكلية =

إذا كانت $\int_a^b f(x)dx = 4$ 4 , $A_1 = 9$ احسب قيمة المساحة A_2

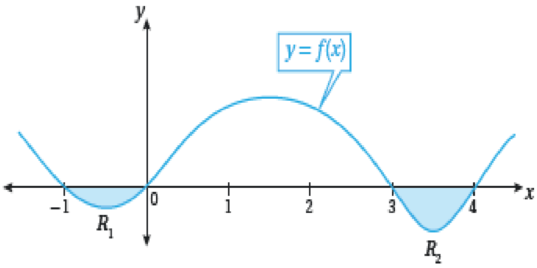


إذا كانت $\int_a^b f(x)dx = 3$, $A_2 = 7$ احسب قيمة المساحة A_2



تبرير: يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان:

$\int_0^4 f(x)\,dx = 10$ ، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ ، مُبرِّرًا إجابتي.



هل لديكم أي أسئلة؟

تكامل اقترانات خاصة

مفهوم أساسي

إذا كان a , b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، و e هو العدد النيبيري، فإنّ:

1) $\int (ax+b)^n \; dx = \frac{1\,(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

2) $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

3) $\int \sin(ax+b)\, dx$

$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

4) $\int \cos(ax+b)\, dx$

$= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

5) $\int \frac{1}{ax+b}\; dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^x + 8)\, dx$

2) $\int (5\cos x + \sqrt{x})\, dx$

3) $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

مثال 2

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$

2) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^5}\right) dx$

3) $\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)\, dx$

مثال 3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

2) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

3) $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx$

مثال 4 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 8\,e^{x}\right) dx$

2) $\int \left(\sin x - \frac{4}{x}\right) dx$

3) $\int \frac{x^3 - 7x + 2}{x^2}\, dx$

مثال 5 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (2x+7)^5\, dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

3) $\int 2e^{4x+3}\, dx$

4) $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

5) $\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$

6) $\int \frac{1}{8x-1}\, dx$

مثال 6 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (7x-5)^6\, dx$

2) $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

3) $\int 4\cos(3x-7)\, dx$

4) $\int (\sin 5x + e^{2x})\, dx$

5) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\, dx$

6) $\int \frac{5}{3x+2}\, dx$

مثال 7

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{3x^2}{x^3+5}\right) dx$

2) $\int \left(\frac{6x}{x^2+9}\right) dx$

3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$

3) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

أتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$

2) $\int \frac{9x^2}{x^3+8} dx$

3) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x} dx$

4) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$

مثال 8

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 (6e^{-3x}+12x^3)\, dx$

2) $\int_{-1}^2 (x+1)^3\, dx$

3) $\int_2^3 \frac{1}{7-2x} dx$

أتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^2 (4e^{2x}+7)\,dx$

2) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx$

3) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

أتدرّب وأحل مسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{2}+3x\right) dx$

2) $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right) dx$

3) $\int (e^x+1)^2\,dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x+2)\,dx$

5) $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right) dx$

6) $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right) dx$

7) $\int\left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right)dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$

9) $\int(\sin(2x-3)+e^{6x-4})\,dx$

10) $\int(4\cos(6x+1))\,dx$

11) $\int\left(\frac{\sin x+3\cos x}{4}-\sqrt{x^3}\right)dx$

12) $\int(e^{6x}+(1-2x)^6)\,dx$

13) $\int\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

14) $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$

15) $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\,dx$

16) $\int \frac{e^x+7}{e^x}\,dx$

17) $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\,dx$

18) $\int(4x^3+2+3\sin(5-3x))\,dx$

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\,dx$

21) $\int \frac{1 + xe^x}{x}\,dx$

22) $\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right) dx$

23) $\int_0^5 \frac{x}{x^2 + 10}\,dx$

24) $\int_3^4 (2x - 6)^4\,dx$

25) $\int (5e^x + 4)\,dx$

26) $\int (1 - e^{2x-3})\,dx$

27) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

28) $\int \frac{3}{2x - 1}\,dx$

29) $\int (5 - \sin(5 - 5x))\,dx$

30) $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x - 2}\,dx$

31) $\int \left(2x - 1 + \frac{8}{5x + 4}\right) dx$

32) $\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$

33) $\int (3x + 2)^5\,dx$

34) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

35) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x - 1)\right) dx$

36) $\int (\sin(2x+3) + \cos(3x+2))\,dx$

37) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

38) $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx$

39) $\int_0^1 e^x(4-e^x)\,dx$

40) $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

مثال

في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبين أن معدل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُمنذج بالاقتران:

$R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$ حيث $R(t)$ عدد البراميل المنتجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بدء ضخ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء عملية الضخ من البئر، علما بأن $R(0) = 0$

مثال

أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يزداد سنويا بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$ حيث $P(t)$ عدد السنوات منذ عام 2010 م، و $P(t)$ عدد السكان. أجد عدد سكان القرية عام 2020 م، علما بأن عدد سكانها عام 2010 م هو 3500 شخص.

مثال

يتحرّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم $2\ m$ ، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 5e^x \ ; \ \left(0 , \dfrac{1}{2}\right)$

2) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} \ ; \ (1 , -1)$

3) $f'(x) = e^{-x} + x^2 \ ; \ (0 , 4)$

مثال

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ ، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

1) أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

2) أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

مثال

طب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$ ، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

1) أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$

2) أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات تفكير عُليا

مثال

أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x} dx$ ، وكان حلّه على النحو المجاور.

أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أصحّحه.

$$\int \frac{1}{2x}\ dx = \int \frac{2 \times 1}{2x}\ dx$$
$$= \int \frac{2}{2x}\ dx$$
$$= \ln|2x| + c$$

الحل:

مثال

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

$$\int \sqrt{e^x}\ dx$$

$$\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x} dx$$

$$\int (x^2 + 2x + 1)^5\ dx$$

أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\ dx \qquad \int \frac{1}{(x+1)^2}\ dx$$

$$\int (x+1)^3\ dx \qquad \int \frac{1}{x+1}\ dx$$

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{d}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(e\ ,\ e^2)$

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علمًا بأنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0\ ,2)$.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = e^{-x}$; $(0\,,3)$

2) $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 4$; $(1\,,0)$

3) $f'(x) = 4e^{x} - 2$; $(0\,,1)$

مثال 1 تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

أحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$\int (3\sin 3x + 1)\ dx$

$\int (3\sin(3x + 1))\ dx$

التكامل بالتعويض

الشكل الاول :

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^2(x^3+1)^7\,dx$

2) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$

3) $\int (x+1)(x^2+2x+5)^3\,dx$

4($\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^5\,dx$

5) $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$

6) $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$

7) $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

9) $\int x^2(2x^3+5)\ dx$

10) $\int 3x\sqrt{x^2+7}\ dx$

11) $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\ dx$

12) $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\ dx$

13) $\int e^x(2+e^x)^5\ dx$

14) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\ dx$

15) $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\ dx$

الشكل الثاني :

1) $\int xe^{x^2+1}\ dx$

2) $\int x^4e^{x^5+2}\ dx$

الشكل الثالث

1) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

2) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

3) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

4) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

5) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

3) $\int (3x^2 - 1)e^{x^3 - x} \, dx$

4) $\int x^6 e^{1-x^7} \, dx$

5) $\int \cos x \, e^{\sin x} dx$

6) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx$

الشكل الرابع:

1) $\int x^4 \sin(x^5 - 8)\, dx$

2) $\int x^3 \cos(x^4 - 5)\, dx$

3) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$

مثال 3

4) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

5) $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

6) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$

7) $\int \sin^5 2x \cos 2x\ \ dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 4x(x^2 + 1)^3\, dx$

2) $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$

3) $\int_{-1}^3 8xe^{x^2}\, dx$

4) $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\, dx$

5) $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\, dx$

6) $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$ 

7) $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\, dx$

8) $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}\, dx$

9) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

10) $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

11) $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$

12) $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\,dx$

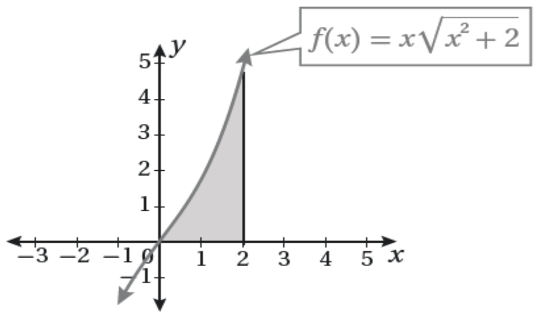
مثال

أسعار: يمثل الاقتران $P(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المبيعة بالمئات، إذا كان: $P'(x) = \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل التغير في سعر الحذاء، فأجد $P(x)$ ، علما بأن سعر الحذاء الواحد $30\ JD$ عندما يكون عدد الأحذية المبيعة 400 حذاء.

مثال

يمثل الاقتران $P(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة (بالمئات) من المنتج، إذا كان: $P'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $P(x)$، علماً بأن سعر القطعة الواحدة $75\ JD$ عندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة.

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في التمثيل البياني المجاور.



مثال

الإيراد الحدّي: يُمثّل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنّ $R(0) = 0$.

مثال

يُمثّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2\ ;\ (2\ ,10)$

2) $f'(x) = x^2e^{-0.2x^3}\ ;\ \left(0\ ,\frac{3}{2}\right)$

مثال

يتحرّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل. فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

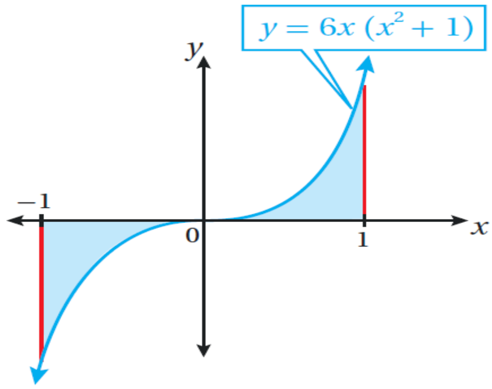
مثال

يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3) إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$ ، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

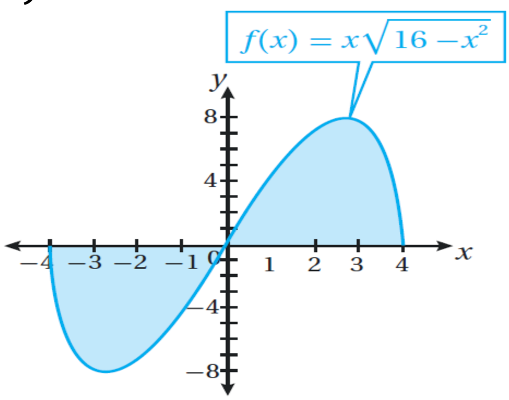
مثال

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

1)



2)



مثال

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = xe^{4-x^2}\ ;\ (-2\,,1)$

2) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}\ ;\ (0\,,-1)$

مثال

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم $4\ m$ ، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

زراعة : يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ ، علمًا بأنَّ سعره الآن JD 5000.

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى المدن يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2015 م، و$P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015 م إلى عام 2025 م.

أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\, dx$$

$$\int 3x^2 e^{1+x^3}\, dx$$

$$\int x\cos x^2\, dx$$

$$\int x(x^3+1)\, dx$$

أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\, dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\, dx = \int_0^1 8xu^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_0^1 4u^3 du$$

$$= u^4$$

$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

تحدٍّ: إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\, dx = \frac{2}{3}(e^8-1)$، فأجد قيمة الثابت k.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ هي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$

d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

2) إذا كان: $\int_0^2 kx\,dx = 6$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

3) إذا كان: $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

4) إذا كان: $\int_0^2 e^{2x}\,dx$ هي:

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

5) إذا كان: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

6) التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$ والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x - x^2)\,dx$

b) $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

c) $\int_1^0 (4x - x^2)\,dx$

d) $\int_0^1 (4x - x^2)\,dx$

مثال

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^{-1/2}\,dx$

2) $\int (8x - 10x^2)\,dx$

3) $\int \frac{5}{x^3}\,dx$

4) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

5) $\int (5x^2 - 2e^{7x})\,dx$

6) $\int \left(2x + 3e^{4x+5}\right)dx$

7) $\int \frac{x^2 - 6}{2x}\,dx$

8) $\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

9) $\int \frac{e^x}{e^x + 4}\,dx$

10) $\int 2xe^{x^2-1}\,dx$

11) $\int 4e^{x}(3+e^{2x})\,dx$

12) $\int \dfrac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\,dx$

13) $\int x\sin(3+x^2)\,dx$

14) $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\,dx$

15) $\int (x-\sin(7x+2))\,dx$

16) $\int (e^{3x}-e^{-3x})\,dx$

17) $\int \dfrac{2}{1-5x}\,dx$

مثال

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x-2$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0\,,3)$.

الإيراد الحدِّي: يُمثِّل الاقتران:
$R'(x) = 4x - 1.2x^2$
الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علمًا بأنَّ $R(20) = 30000$.

مثال

يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t-\pi)$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

مثال

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx = 4$, $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 10$, $\int_{-5}^{-1} g(x)\,dx = 11$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

2) $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\,dx$

3) $\int_{-1}^{-5} (3f(x)-g(x))\,dx$

مثال

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-2}^{3} (3x^2-4x+1)\,dx$

2) $\int_{1}^{3} \dfrac{x^3+2x^2}{x}\,dx$

3) $\int_{1}^{5} |3-x|\,dx$

4) $\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}\,dx$

5) $\int_2^5 3x(x+2)\,dx$

6) $\int_2^3 2xe^{-x^2}\,dx$

7) $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\,dx$

8) $\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$

أمثلة

1) إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4 & , \quad x<0 \\ 4-x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$

---

2) يتحرّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=5+e^{t-2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

---

3) في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x)=3x^2+6x-2\ ;\ (0\,,6)$

2) $f'(x)=\frac{\sqrt{20}}{x^2}\ ;\ (1\,,400)$

3) $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\ ;\ (1\,,1)$

4) $f'(x)=5e^x-4\ ;\ (0\,,-1)$

5) $f'(x)=x\sqrt{x^2+5}\ ;\ (2\,,10)$

---

4) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x^2-x-2$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x=-2$ ، و $x=1$.

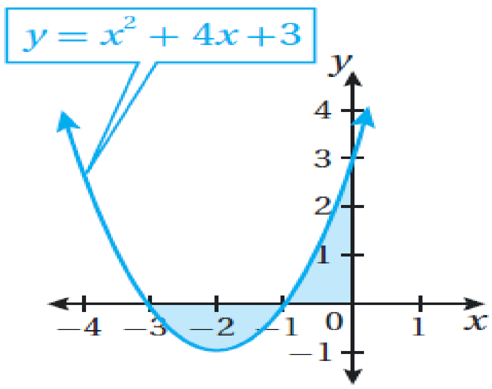
طب : يُمثّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3) إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t)=\frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$ ، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

---

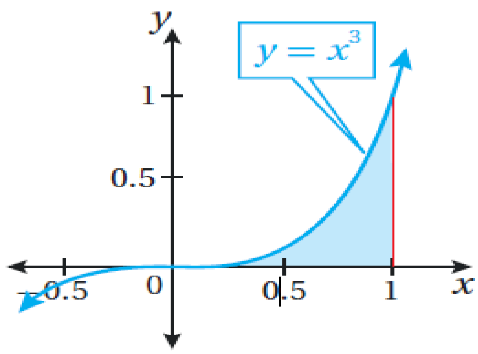
5) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=3x^2-3x$ ، والمحور x .

6) أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

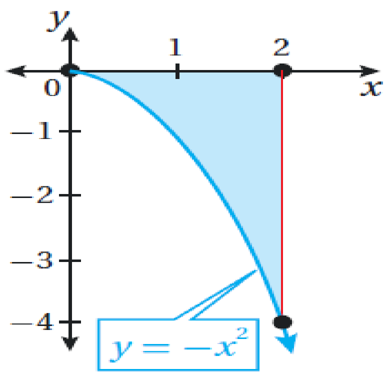
1)



2)



3)



4)