الإبداع في الرياضيات

الصف الثاني عشر الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة

المتجهات

"مكثف"

إعداد

أ.زكي غنيم
0788557325

أ.ابراهيم العقرباوي
0790082328

أولا المتّجهات في الفضاء

أولاً: المتّجهات:

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	القطعة المستقيمة	AB	القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها A و B. $A(x_1,y_1,z_1)\,,B(x_2,y_2,z_2)$ مثال: $O(0,0,0)$ نقطة الأصل ، $A(3,-2,8)\,,\ B(5,4,2)$
2	طول القطعة المستقيمة	AB	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ مثال: $AB=\sqrt{(3-5)^2+(-2-4)^2+(8-2)^2}=2\sqrt{19}$
3	منتصف القطعة المستقيمة		$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ مثال: $M=\left(\frac{3+5}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{8+2}{2}\right)=(4,1,5)$
4	المتجهة في الفضاء	$\overrightarrow{AB}$	متجه نقطة بدايته A ونقطة نهايته B.
5	الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$	$\vec{v}=\overrightarrow{AB}$	$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\rangle=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ مثال: $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\langle 5-3,4--2,2-8\rangle=\langle 2,6,-6\rangle$
6	طرق كتابة المتجهة	الصورة الإحداثية أو بدلالة متّجهة الوحدة الأساسية	$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_1\hat{\imath}+v_2\hat{\jmath}+v_3\hat{k}$ مثال: $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\langle 2,6,-6\rangle=\begin{pmatrix}2\\6\\-6\end{pmatrix}=2\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-6\hat{k}$
7	متّجهات الوحدة الأساسية	$i\ hat:\ \hat{\imath}$ $j\ hat:\ \hat{\jmath}$ $k\ hat:\ \hat{k}$	في اتجاه محور x الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{\imath}=\langle 1,0,0\rangle$. في اتجاه محور y الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{\jmath}=\langle 0,1,0\rangle$. في اتجاه محور z الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{k}=\langle 0,0,1\rangle$.
7	مقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$	$\lvert\vec{v}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $=\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2}$ مثال: $\lvert\vec{v}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(2)^2+(6)^2+(6)^2}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$
8	متّجهة الموقع للنقطة A	$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$	$\overrightarrow{OA}=\langle x_1,y_1,z_1\rangle-\langle 0,0,0\rangle=\langle x_1,y_1,z_1\rangle$ تحديد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل مثال: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\langle 3,-2,8\rangle-\langle 0,0,0\rangle=\langle 3,-2,8\rangle$

أولاً: العمليّات على المتَّجهات:

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	جمع / طرح المتّجهات " هندسيّا "	$\vec{a} \pm \vec{b}$	1) أرسم المتجهة $\vec{a}$. 2) ارسم المتجهة $\vec{b}$ ، بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية $\vec{a}$. 3) أصل بين نقطة بداية المتجهة $\vec{a}$ ونقطة نهاية المتجهة $\vec{b}$ 4) لإيجاد $\vec{a}-\vec{b}$ ، أجمع المتجهة $\vec{a}$ مع معكوس المتجهة $\vec{b}$
2	ضرب المتّجه بعدد ثابت " هندسيّا "	$k\,\vec{v}$	نرسم متجه موازٍ لـ $\vec{v}$ وطوله $\|k\|$ مرّة طول $\vec{v}$ وله الإتجاه نفسه. اذا كان k عدد حقيقي موجب فإنَّ $\vec{v}$ و $k\,\vec{v}$ لهما نفس الإتجاه. اذا كان k عدد حقيقي سالب فإنَّ $\vec{v}$ و $k\,\vec{v}$ لهما عكس الإتجاه.
3	جمع / طرح المتّجهات ضرب المتّجه بعدد ثابت " جبريّا "	$\vec{a} \pm \vec{b}$ $k\,\vec{v}$	$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ $\vec{a} \pm \vec{b} = \langle (a_1 \pm b_1), (a_2 \pm b_2), (a_3 \pm b_3)\rangle$ $c * \vec{v} = \langle cv_1, cv_1, cv_1\rangle$ مثال: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4\rangle, \vec{f} = \langle 5, -3, 7\rangle$ $3\vec{e} + 4\vec{f} =$ $= 3\langle -3, 9, -4\rangle + 4\langle 5, -3, 7\rangle$ $= \langle -9, 27, -12\rangle + \langle 20, -12, 28\rangle = \langle 11, 15, 16\rangle$
4	المتّجهات المتساوية	$\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle, \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ $\vec{v} = \vec{w}$ إذا وفقط إذا كان : $v_1 = w_1,\ v_2 = w_2,\ v_3 = w_3$ مثال: إذا كان: $\vec{u} = \langle 2, 3a-2, 9\rangle, \vec{v} = \langle 4-b, 10, c\rangle$ ، وكان: $\vec{v} = \vec{u}$ ، جد كلاً من (a, b, c)؟ $4 - b = 2 \to b = 2,\ a - 2 = 10 \to a = 12,\ 9 = c$
5	متّجه الإزاحة	ناتج طرح متجهي موقع	متّجه الإزاحة من A إلى B هو: $\overrightarrow{AB}$. ويساوي ناتج طرح A من B : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ مثال: إذا كانت : $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4)$ متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1, 6, 5\rangle - \langle 0, 1, -4\rangle = \langle -1, 5, 9\rangle$
6	المسافة	$\|\overrightarrow{AB}\|$	يمثّل مقدار متّجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ المسافة بين النقطة A والنقطة B. مثال: إذا كانت : $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4)$ المسافة بين النقطة B والنقطة A $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (9)^2} = \sqrt{1 + 25 + 81} = \sqrt{107}$
7	إيجاد متّجه وحدة في اتجاه أي متّجه:	$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$	لإيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متّجه: يتم القسمة على مقدار ذلك المتّجه مثال: اكتب متّجه الوحدة في اتجاه المتّجهة $\langle 5, -4, -2\rangle$؟ " نجد المقدار " $\|\vec{v}\| = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{45}$ " متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$ " $\hat{v} =$ $\langle \frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}}, \frac{-2}{\sqrt{45}} \rangle$

إمتحان درس المتّجهات في الفضاء

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (10):

إذا كان : $A(3,-2,8), B(5,4,2)$ ، أجب عن الأسئلة $(1-3)$:

1) طول $|\overline{AB}|$ يساوي:

$a)\ 1$ $b)\ 2$ $c)\ 6\sqrt{2}$ $d)\ \sqrt{76}$

---

2) احداثيات منتصف AB هي:

$a)(4,1,5)$ $b)\ (4,-1,5)$ $c)\ (1,3,-3)$ $d)\ (-1,-3,3)$

---

3) الصورة الإحداثية للمتجه $\overline{AB}$ هي:

$a)\ \langle 2,6,-6\rangle$ $b)\ \langle -2,-6,6\rangle$ $c)\ \langle 4,1,5\rangle$ $d)\ \langle -4,-1,5\rangle$

---

4) إذا كان : $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{a}=\langle 3,12,6\rangle, \vec{b}=\hat{\imath}+4\hat{k}$ ، فإنَّ قيمة: $2\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$ تساوي:

$a)\ \langle 0,0,0\rangle$ $b)\ \langle 2,8,4\rangle$ $c)\ \langle 0,0,-8\rangle$ $d)\ \langle 2,0,0\rangle$

---

5) متَّجهة الوحدة في اتجاه المتَّجهة : $3\hat{\imath}-5\hat{\jmath}+\sqrt{2}\,\hat{k}$ هي:

$a)\ \frac{\hat{\imath}}{11}-\frac{5\hat{\jmath}}{33}+\frac{\sqrt{2}\hat{k}}{33}$ $b)\ \frac{\hat{\imath}}{12}-\frac{5\hat{\jmath}}{36}+\frac{\sqrt{2}\hat{k}}{36}$

$c)\ \frac{\hat{\imath}}{2}-\frac{5\hat{\jmath}}{6}+\frac{\sqrt{2}\hat{k}}{6}$ $d)\ \frac{3\hat{\imath}}{\sqrt{14}}-\frac{5\hat{\jmath}}{\sqrt{14}}+\frac{\hat{k}}{\sqrt{7}}$

---

6) إذا كان: $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\x+47\\-4\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\v\\2\end{pmatrix}$ ، وكان : $k\vec{s}-4\vec{w}=\begin{pmatrix}6\\31\\x\end{pmatrix}$ ، فإنَّ قيمة الثابت v هو:

$a)\ 1$ $b)\ -44$ $c)9$ $d)\ -1$

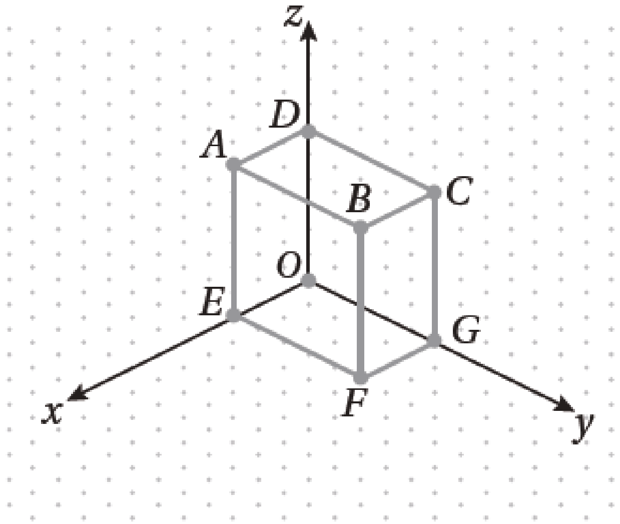
---

7) المتَّجه الذي له عكس اتجاه المتجهة : $\vec{v}=\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+2\hat{k}$ ومقداره 6 هو:

$a)\ 6\hat{\imath}-12\hat{\jmath}+12\hat{k}$ $b)\ -6\hat{\imath}+12\hat{\jmath}-12\hat{k}$

$c)\ -2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-4\hat{k}$ $d)\ 2\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+4\hat{k}$

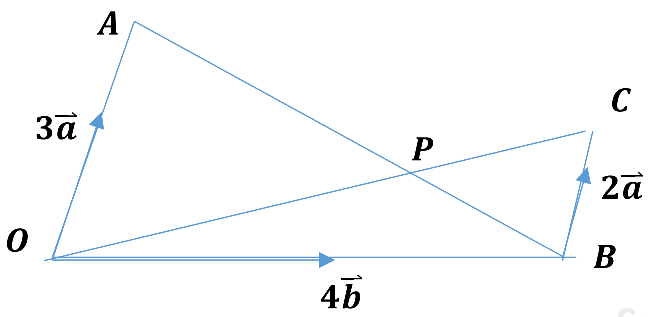
8) إذا كان مركز المستطيلات $ABCDOEFG$ هو $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},3\right)$ ، فإنَّ إحداثيات النقطة C هي:



$a)\ (0,5,6)$ $\quad b)\ \left(0,\frac{5}{2},3\right)$

$c)\ (0,6,5)$ $\quad d)\ (0,5,3)$

في الشكل المجاور ، إذا كان P تقع على AB حيث $\overrightarrow{BP} = K\left(\frac{4}{3}\vec{b} - \vec{a}\right)$: وكان $AP:PB = 5:4$ حيث K ثابت، أجب عن السؤالين $(9-10)$:



9) قيمة الثابت K تساوي:

$a)\ -3$ $\quad b)\ \frac{1}{3}$ $\quad c)\ \frac{4}{3}$ $\quad d)\ -\frac{4}{3}$

10) قيمة المتَّجهة $\overrightarrow{PC}$ بدلالة $\vec{a},\vec{b}$ هي:

$a)\ \frac{10}{3}\vec{a} - \frac{16}{9}\vec{b}$ $\quad b)\ \frac{-4}{3}\vec{a} + \frac{16}{9}\vec{b}$

$c)\ \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{16}{9}\vec{b}$ $\quad d)\ \frac{-2}{3}\vec{a} - \frac{16}{9}\vec{b}$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5
فرع الإجابة الصحيح	*d*	*a*	*a*	*a*	*c*

رقم السؤال	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*d*	*c*	*a*	*d*	*c*

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

ثانيًا المستقيمات في الفضاء

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	المتّجهان المتوازيان	$\vec{u} \parallel \vec{v}$	$\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا وفقط إذاوُجِد عدد حقيقي k بحيث يكون: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = k\,\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ مثال: حدِّد إذا كان المتَّجهان متوازيين أم لا في كلٍّ ممَّا يلي: 1) $\langle 8,12,24\rangle , \langle 15,10,-20\rangle \rightarrow \frac{8}{15} \neq \frac{12}{10} \neq \frac{24}{-20}$ " ليسا متوازيين " 2) $\langle 27,-48,-36\rangle , \langle 9,-16,-12\rangle \rightarrow \frac{27}{9} = \frac{-48}{-16} = \frac{-36}{-12} = 3$ $\langle 9,-16,-12\rangle = \frac{1}{3}\langle 27,-48,-36\rangle$ " متوازيين "
2	نقاط تقع على إستقامة واحدة		لإثبات أن ثلاثة نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة ، يكفي إثبات وجود متَّجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة ، وتكون إما نقطة بداية أو نقطة نهاية لهذين المتَّجهين.
3	المعادلة المتّجهة للمستقيم	$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$	$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$: متَّجهة الموقع لنقطة على المتَّجهة. $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$: متَّجهة الموقع لنقطة معلومة على المتَّجهة. $\overrightarrow{P_0\,P} = \vec{V}$: t: المتغيِّر الوسيط ، وتحدد كل قيمة من قيم (t) نقطة وحيدة. مثال: 1) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$ ، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ ؟ $\vec{a} = \langle 0,-1,3\rangle , \vec{b} = \langle 10,3,-6\rangle$ $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \rightarrow \vec{r} = \langle 10,3,-6\rangle + t\,\langle 0,-1,3\rangle$ 2) جد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين $(-30,-6,30),(-26,-12,23)$؟ $\vec{v} = \langle -30--26, -6--12, 30-23\rangle = \langle -4,6,7\rangle$ " نختار أي نقطة ولتكن $(-26,-12,23)$: نجد متجهة الموقع لها " المعادلة " $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \rightarrow \vec{r} = \langle -26,-12,23\rangle + t\,\langle -4,6,7\rangle$
4	العلاقة بين المستقيمات	1) متوازيين 2) متقاطعين 3) متخالفين	1) إذا كان أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي ← المستقيمين متوازيين. 2) يمكن الحكم إذا كان المستقيمين : $l_1: \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{b}$ و $l_2: \vec{r} = \vec{c} + t\,\vec{d}$ متقاطعين : * مساواة متَّجهي الموقع $\vec{r}$ في معادلتيهما . * حل المعادلات الثلاثة الناتجة لإيجاد قيمة كلٍّ من المتغيِّرين u, t. * إذا تحقّقت المعادلات الثلاثة لقيمتي هذين المتغيِّرين ← المستقيمين متقاطعين. 3) إذا كان المستقيمين غير متوازيين وغير متقاطعين ← المستقيمين متخالفين.

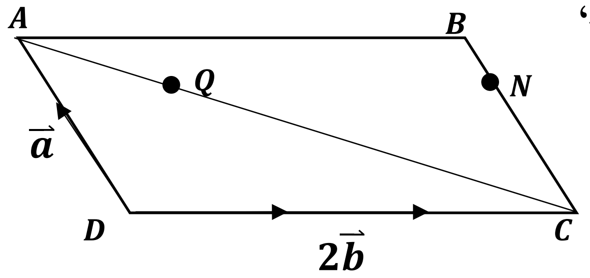
إمتحان درس المستقيمات في الفضاء

السؤال الأول:

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (12):

1) أيٌّ من المتجهات التالية توازي المتجهة: $\langle 4, 6, 12\rangle$:

$a)\ \langle 2,2,6\rangle \quad b)\ \langle -6,-9,-18\rangle \quad c)\ \langle -4,-6,12\rangle \quad d)\ \langle \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\rangle$



معتمداً الشكل المجاور الذي يمثّل متوازي أضلاع $ABCD$،
حيث أنَّ: $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ ، $\overrightarrow{DC} = 2\vec{b}$ ، $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$،
$CQ : QA = 3 : 5$ ، أجب عن السؤالين $\{2, 3\}$:

2) أكتب $\overrightarrow{CQ}$ بدلالة $\vec{a}, \vec{b}$:

$a)\ \vec{a} - 2\vec{b} \quad b)\ \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad c)\ \frac{8}{3}\vec{a} - \frac{16}{3}\vec{b} \quad d)\ \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

3) أكتب $\overrightarrow{QN}$ بدلالة $\vec{a}, \vec{b}$:

$a)\ \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \quad b)\ \frac{19}{24}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad c)\ \frac{7}{24}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad d)\ \frac{-7}{24}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

4) إذا كان متجها الموقع للنقاط A, B : هما : $\overrightarrow{OB} = \langle -3,3,6\rangle$, $\overrightarrow{OA} = \langle -2,1,3\rangle$ ،
فإن متجهة الموقع للنقطة S التي تقع على المستقيم $\vec{l}$ ، علماً بأنَّ : $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$

$a)\ \langle -\frac{9}{4},\frac{3}{2},\frac{15}{4}\rangle \quad b)\ \langle 1,-2,-3\rangle \quad c)\ \langle \frac{3}{4},\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\rangle \quad d)\ \langle \frac{-3}{4},\frac{3}{2},\frac{9}{4}\rangle$

5) معادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين: $(10,3,-6), (0,-1,3)$ هي:

$a)\ \vec{r} = \langle 10,4,-9\rangle + t\,\langle 0,-1,3\rangle \quad b)\ \vec{r} = \langle 10,4,-9\rangle + t\,\langle 10,3,-6\rangle$

$c)\ \vec{r} = \langle 0,-1,3\rangle + t\,\langle 10,4,-9\rangle \quad d)\ \vec{r} = \langle 0,-1,3\rangle + t\,\langle 5,3,-2\rangle$

6) معادلة المتجهة للمستقيم الذي يوازي المتجهة: $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 3\hat{k}$ ، ويمر بالنقطة A التي متجهة الموقع لها $-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ هي:

$a)\ \vec{r} = \hat{\jmath} + (3t-1)\,\hat{k} \quad b)\ \vec{r} = (-2+2t)\hat{\imath} + \hat{\jmath} + (-3t-1)\,\hat{k}$

$c)\ \vec{r} = \hat{\jmath} - (3t-1)\,\hat{k} \quad d)\ \vec{r} = (-2-2t)\hat{\imath} - \hat{\jmath} - (3t-1)\,\hat{k}$

7) نقطة تقاطع المستقيمين :
$\vec{r} = \langle 4,4,-7\rangle + u\,\langle -1,3,1\rangle$ و $\vec{r} = \langle -2,2,-1\rangle + t\,\langle 1,2,-1\rangle$ ، هي :

$a)\ \langle 2,10,-5\rangle \quad b)\ \langle 2,5,2\rangle \quad c)\ \langle 1,5,1\rangle \quad d)\ \langle 2,10,5\rangle$

8) إذا كان : $\vec{m} = \langle -1, 1, 2 \rangle$, $\vec{n} = \langle a, 2, 2 \rangle$ ، وكان : $b\vec{m} - 2\vec{n}$ يوازي المتجه $\langle 1, -3, 2 \rangle$، فإن قيمة a تساوي:

$a)\ \frac{3}{2}$ $\quad b)\ -\frac{3}{2}$ $\quad c)\ \frac{1}{2}$ $\quad d)\ -1$

إذا كانت : $\vec{r} = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\,\langle -3, 1, 2 \rangle$، أجب عن السؤالين $\{9, 10\}$:

9) إذا وقعت النقطة $(a, b, -5)$ على المستقيم $\vec{r}$ فإن قيم $\{a, b\}$ على الترتيب تساوي:

$a)\ \{7, 6\}$ $\quad b)\ \{-3, 12\}$ $\quad c)\ \{-3, 7\}$ $\quad d)\ \{12, 7\}$

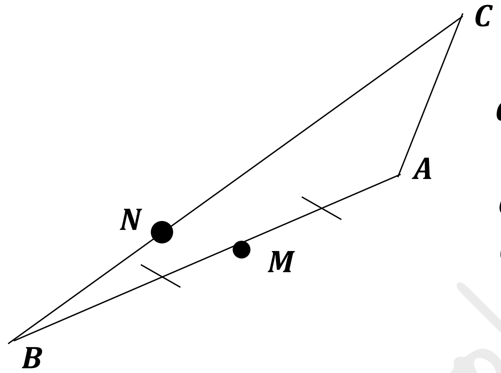
10) إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى yz هي:

$a)\ \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ $\quad b)\ \left(0, \frac{25}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ $\quad c)\ \left(0, \frac{29}{3}, \frac{7}{3}\right)$ $\quad d)\ \left(0, \frac{25}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

11) إذا كان : $\vec{v} = a\langle 3, -5, 6 \rangle + b\,\langle 1, -4, 2 \rangle$ ، وكان اتجاه $\vec{v}$ في اتجاه محور y السالب ، وكان $|\vec{v}| = 7$ ، فإن قيم $\{a, b\}$ على الترتيب تساوي:

$a)\ \{-1, -3\}$ $\quad b)\ \{1, 3\}$ $\quad c)\ \{-1, 3\}$ $\quad d)\ \{1, -3\}$

12) إذا كانت : $C(0, -2, 4)$, $B(-3, 4, -5)$, $A(-1, -2, 1)$، وكانت : $|\overline{NC}| = 2|\overline{BN}|$ ، مستعيناً بالشكل المجاور ، فإنّ معادلة المستقيم المار بالنقطتين N, M هي:

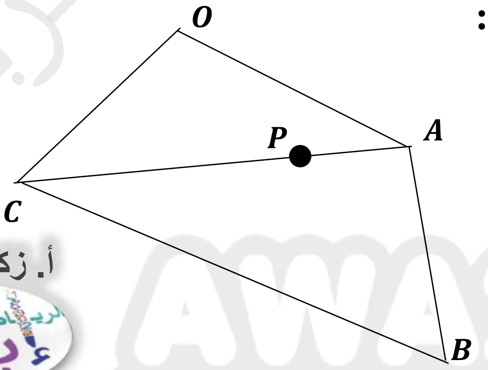


$a)\ \langle -2, 1, -2 \rangle + t\,\langle 0, 1, 0 \rangle$
$b)\ \langle -2, 1, -2 \rangle + t\,\langle 3, -6, 9 \rangle$
$c)\ \langle -2, 1, -2 \rangle + t\,\langle -1, 3, -3 \rangle$
$d)\ \langle -2, 1, -2 \rangle + t\,\langle 0, 1, 1 \rangle$

السؤال الثاني:

a) إذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطتين $(5, 1, 0), (4, 1, 1)$ وكان المستقيم l_2 يمر بالنقطتين $(4, 3, 3), (5, 2, 1)$ ، حدِّد إذا كانا المستقيمين l_1, l_2 متقاطعين أم متوازيين أم متخالفين؟

b) في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور ، $\overline{CB} = 12\vec{A}$, $\overline{OC} = 7\vec{c}$, $\overline{OA} = 8\vec{a}$ وكانت النقطة P تقسم $\overline{CA}$ إلى النسبة $3:2$ ، جد مايلي:



1) أثبت أن النقط O, P, B تقع على استقامة واحدة؟

2) أوجد النسبة $OP : PB$ ؟

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*d*	*c*	*a*	*c*	*b*

رقم السؤال	7	8	9	10	11	12
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

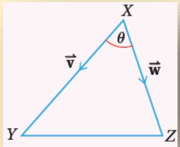
ثالثًا الضرب القياسي

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	الضرب القياسي "الضرب النقطي"	$\vec{v} \bullet \vec{w}$	إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، فإنَّ : $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_2 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ **مثال:** جد ناتج الضرب القياسي للمتَّجهين $\vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$, $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle$؟ $\vec{u}.\vec{v} = 1 * 3 + -4 * 10 + 12 * -5 = -97$
2	الزاوية بين المتّجهين في الفضاء	$cos(\theta)$ $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0$ $\leftarrow \theta > 90°$ $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0$ $\leftarrow \theta < 90°$ $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ $\leftarrow \theta = 90°$	$\vec{v} \bullet \vec{w} = \lvert\vec{v}\rvert * \lvert\vec{w}\rvert * cos(\theta) \rightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert.\lvert\vec{w}\rvert}\right)$ **مثال:** جد قياس الزاوية θ بين المتّجهين $\vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle$ ؟ $\vec{v} = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$, $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$ $\vec{v}.\vec{w} = 3 * 5 + -2 * 3 + 9 * -4 = -27$ $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94} * \sqrt{50}}\right) = 113.2°$
3	الزاوية بين المستقيمين في الفضاء		1) اتجاه المستقيم في الفضاء يحدِّده أي متجه يوازيه. 2) لإيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين في الفضاء : من خلال ايجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي. **مثال:** يمر المستقيم l_1 بالنقطتين : $(2, -1, 4), (-3, 5, 7)$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين : $(6, -5, 3), (1, 2, -1)$ ، جد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم l_1 و المستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة؟ " إتجاه l_1: $\vec{u} = \langle -5, 6, 3 \rangle$ ، إتجاه l_2 : $\vec{v} = \langle -5, 7, -4 \rangle$ " $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{25 + 36 + 9} = \sqrt{70}$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90}$ $\vec{u}.\vec{v} = -5 * -5 + 6 * 7 + 3 * 4$ $= 25 + 42 - 12 = 55$ $\theta = cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{70} * \sqrt{90}}\right) = 46.1°$

رقم	المفهوم	الرمز	القانون

4 — مساحة المثلث باستعمال المتّجهات

مساحة المثلث XYZ



1) حدِّد متّجهين يمثّلان ضلعين في المثلث ، لهما نقطة البداية نفسها.
2) جد طولي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتّجه.
3) جد قياس الزاوية بينهما.
4) استعمل قانون مساحة المثلث :

$$A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{XY}|\,|\overrightarrow{XZ}|\,\sin(\theta) \rightarrow A = \frac{1}{2}\,|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sin(\theta)$$

مثال:

جد مساحة المثلث ABC، حيث: $\overrightarrow{AB} = \langle 4,9,1\rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle 9,1,4\rangle$؟

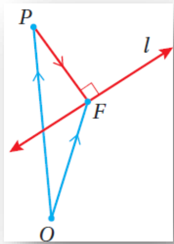
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{81+1+16} = \sqrt{98}$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 4*9+9*1+1*4 = 49$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}*\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

" مساحة المثلث " $A = \frac{1}{2}*\sqrt{98}*\sqrt{98}*\sin(60°) = \frac{1}{2}*98*\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{2}$

5 — مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



1) افرض أنّ F هي نقطة مسقط العمود وهي تقع على المستقيم l وتحدِّدها إحدى قيم المتغيِّر الوسيط t.
2) استعمل قاعدة المثلث من خلال : $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF} \rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$
3) بما أنّ $\overrightarrow{PF}$ يعامد المستقيم l نستخدم خاصية : $\overrightarrow{PF}.\langle l \text{ متجهة} \rangle = 0$.
4) ثم جد قيمة المتغيِّر t .
5) بعد معرفة قيمة المتغيِّر t، حدِّد متّجهة موقع F التي تقع على المستقيم l
6) إذا طلب بعد النقطة P عن المستقيم l ← جد : $|\overrightarrow{PF}|$.

مثال:

إذا كانت : $\vec{r} = 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} + t(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(-2,22,5)$ غير واقعة على المستقيم l، أجب عن السؤالين الآتيين تباعا: حدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l"؟

" نفرض أنّ F هي مسقط العمود و O نقطة الأصل "

$\overrightarrow{OP} = -2\hat{\imath} + 22\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ، $\overrightarrow{OF} = (0-t)\hat{\imath} + (2+2t)\hat{\jmath} + (-3+5t)\hat{k}$

من قاعدة المثلث : $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PF} = -t\hat{\imath} + (2+2t)\hat{\jmath} + (-3+5t)\hat{k} - (-2\hat{\imath} + 22\hat{\jmath} + 5\hat{k})$

$\overrightarrow{PF} = (2-t)\hat{\imath} + (-20+2t)\hat{\jmath} + (-8+5t)\hat{k}$

" $\overrightarrow{PF} \perp \vec{r} \rightarrow \overrightarrow{PF}\,.\,(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = 0$ "

$(2-t)(-1) + (-20+2t)(2) + (-8+5t)(5) = 0$

$t - 2 - 40 + 4t - 40 + 25t = 0 \rightarrow 30t = 82 \rightarrow t = \frac{41}{15}$

" تحديد إحداثيات النقطة P بتعويض قيمة t "

$\overrightarrow{OF} = \left(\frac{41}{15}\right)\hat{\imath} + \left(2 + 2\left(\frac{41}{15}\right)\right)\hat{\jmath} + \left(-3 + 5\left(\frac{41}{15}\right)\right)\hat{k}$

" احداثيات النقطة " $F(-\frac{41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3})$

جد البعد بين النقطة P والمستقيم l؟

$\overrightarrow{OP} = \langle -2,22,5\rangle$, $\overrightarrow{OF} = \langle -\frac{41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\rangle$

$$\overrightarrow{PF} = \sqrt{\left(-\frac{41}{15} - -2\right)^2 + \left(\frac{112}{15} - 22\right)^2 + \left(\frac{32}{3} - 5\right)^2} \cong 15.6$$

إمتحان درس الضرب القياسي

السؤال الأول:

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (10):

1) ناتج ضرب $\vec{v}.\vec{w}$ ، حيث أنّ : $\vec{w} = 3\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ ، تساوي:

$a)0$ $b)-2$ $c)\ \frac{5}{2}$ $d)\ \frac{11}{3}$

2) قياس الزاوية θ بين المتَّجهين إلى أقرب عشر درجة بين المتجهين $\vec{v},\vec{w}$ حيث أنَّ : $\vec{w} = \langle 1,3,0 \rangle$. $\vec{v} = \langle 2,0,2 \rangle$ تساوي:

$a)\ 102.9°$ $b)\ 77.1°$ $c)50.8°$ $d)129.2°$

3) إذا كانت قياس الزاوية بين المتَّجهين $\vec{w} = \langle a,0,1 \rangle$. $\vec{v} = \langle 3,1,0 \rangle$ تساوي $30°$، فإنَّ قيم الثابت a تساوي:

$a)\pm\frac{1}{12}$ $b)\pm\frac{1}{\sqrt{12}}$ $c)\pm 5$ $d)\pm\sqrt{5}$

4) إذا كان المتَّجهين : $\vec{b} = c\hat{i} - 4\hat{j} - c\hat{k}$, $\vec{a} = c\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ متعامدين، فإنَّ قيمة الثابت c حيث $c > 0$ تساوي:

$a)\ 2$ $b)\ 6$ $c)0$ $d)4$

5) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين: $\vec{r} = \langle -1,3,-7 \rangle + t\,\langle 2,-6,3 \rangle$ ، $\vec{r} = \langle -5,14,1 \rangle + u\,\langle 3,-4,12 \rangle$ إلى أقرب جزء من عشرة:

$a)92.5°$ $b)106.5°$ $c)\ 136.5°$ $d)\ 126.5°$

6) مساحة المثلث ABC الذي رؤوسه $A(0,2,3), B(1,-2,5), C(-1,3,1)$ تساوي:

$a)\ 3.35$ $b)\ 6.71$ $c)\ 2.71$ $d)\ 1.46$

7) إذا كانت النقطة $A(2,3,2)$ والنقطة $B(1,-1,3)$ تقعان على المستقيم l ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l ، حيث $\overline{OQ}$ عمودي على l ، فإن متجهة الموقع للنقطة Q هي:

$a)\ \langle 1,4,-1 \rangle$ $b)\langle 4,11,0 \rangle$ $c)\ \langle \frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{8}{3} \rangle$ $d)\ \langle -\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{8}{3} \rangle$

إذا كان $ABCD$ مستطيلاً حيث: $A\langle -4,13,22 \rangle$, $B\langle 4,17,14 \rangle$, $D\langle 2,-29,7 \rangle$

أجب عن الأسئلة { 8 , 9 , 10 } :

8) جد متَّجهة الرأس الرابع C :

$a)\ \langle 3,-6,\frac{21}{2} \rangle$ $b)\langle 10,-25,-1 \rangle$ $c)\ \langle -4,7,1 \rangle$ $d)\ \langle 3,7,7 \rangle$

9) مساحة المستطيل $ABCD$:

$a)$ 540 $b)$ 500 $c)$ 450 $d)$ 45

10) مركز المستطيل :

$a)\ \langle 3,-6,\frac{21}{2}\rangle$ $b)\ \langle 10,-25,-1\rangle$ $c)\ \langle -4,7,1\rangle$ $d)\ \langle 3,7,7\rangle$

السؤال الثاني:

a) إذا كان معادلة المتجهة المستقيم l هي: $\vec{r}=\langle 0,2,-3\rangle+t\,\langle -1,2,5\rangle$
والنقطة $P(-2,22,5)$ غير واقعة على المستقيم l فجد البعد بين النقطة P والمستقيم l؟

b) إذا كانت معادلة المتجهة للمستقيم l_1 هي: $\vec{r_1}=8\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+t(2\hat{\imath}-\hat{\jmath}-2\hat{k})$
و كانت معادلة المتجهة للمستقيم l_2 هي: $\vec{r_2}=-9\hat{\imath}+21\hat{\jmath}-4\hat{k}+u(\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+2\hat{k})$

1) جد نقطة تقاطع المستقيمين l_1, l_2 ؟

2) بيِّن أنَّ l_2 , l_1 متعامدان ؟

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*b*	*d*	*a*	*c*

رقم السؤال	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*c*	*b*	*a*	*a*

إمتحان وحدة المتّجهات

الاسم :................	الصف : 12 علمي	
اليوم :	التاريخ: / /2023م	ـــــ
الزمن : ساعة		60

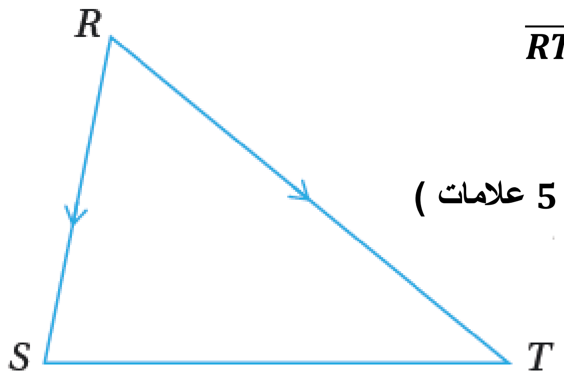
أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (3) علماً بأن عدد صفحات الاختبار (2)

السؤال الأول : (10 علامات)

1) في المثلث RST المجاور ، إذا كان : $\overrightarrow{RS} = 4\vec{a}$, $\overrightarrow{RT} = 6\vec{b}$

والنقطة U منتصف $\overline{RS}$ ، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$ ،

أثبت أنّ: $\overrightarrow{UV} \parallel \overrightarrow{ST}$ ؟ (5 علامات)



b) متّجها الموقع للنقطة L والنقطة M هما : $\langle -3, 4, -5\rangle$ و $\langle 0, -2, 4\rangle$ على الترتيب ،

جد متّجهة الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$ ، علماً بأنّ: $\overline{LN} = \frac{1}{2}\overline{NM}$؟

(5 علامات)

السؤال الثاني : (20 علامة)

2) يمر المستقيم l بالنقطتين : $B(10, 5, -7)$, $A(-2, 9, 1)$ ، جد ما يلي: (6 علامات)

a) معادلة المستقيم l؟

b) جد نقطة تقع على المستقيم l وتقع أيضا على المستوى xz؟

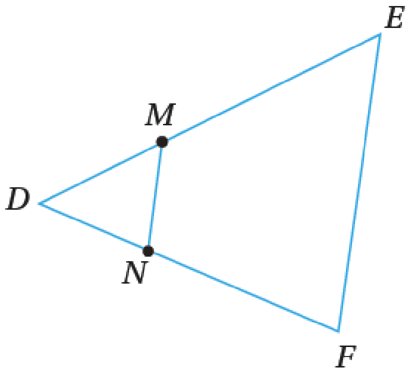
c) بيِّن أنّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l؟

3) يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $Q(-2, 3, -3)$, $P(-5, 2, 4)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين $S(12, -23, k)$, $R(0, -8, -1)$ ، إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين ،

أجب عن الأسئلة الآتية تباعاً: (6 علامات)

a) جد قيمة k؟

b) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين ؟



4) في المثلث DEF ، إذا كان : $DE = 12\vec{a}\,, DF = 8\vec{b}$ ،

النقطة M تقسم DE بنسبة $1:2$ ، والنقطة N تقسم DF بنسبة $1:2$

a) أثبت أنَّ : $FEMN$ شبه منحرف ؟

b) إذا كانت مساحة المثلث DFE تساوي 72 وحدة مربَّعة،

جد مساحة $FEMN$؟ (8 علامات)

السؤال الثالث : (30 علامة)

1) إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ معادلة متَّجهة للمستقيم $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l،

أجب عن السؤالين الآتيين تباعاً: (8 علامات)

a) حدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l؟

b) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l؟

---

2) جد مساحة المثلث ABC حيث أنَّ : $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$؟ (7 علامات)

---

3) إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ معادلة متَّجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

معادلة متَّجهة للمستقيم l_2 ، أجب عن الأسئلة التالية : (15 علامة)

a) بيِّن أنَّ المستقيمين l_1 , l_2 متعامدين؟

b) بيِّن أن نقطة تقاطع المستقيمين l_1 , l_2 هي $(-2, 7, 10)$ ؟

c) يقع كل رأس من رؤوس المربَّع $ABCD$ إمَّا على المستقيم l_1 ، وإمَّا على المستقيم l_2 ،

إذا كانت إحداثيات الرأس A هي : $(-5, 13, 4)$ ، جد إحداثيات باقي رؤوسه الثلاثة الأخرى؟