Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

طريق التفوق

في

الرياضيات الأدبي

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

2006

إعداد

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr. Khaled jalal

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

0799948198

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الفهرس

رقم الدرس	أسم الدرس	رقم الصفحة
الأول	المماس و العمودي على المماس (كتاب الطالب)	4
الأول	المماس و العمودي على المماس (كتاب التمارين)	8
الثاني	المشتقة الثانية ، و السرعة ، و التسارع (كتاب الطالب)	10
الثاني	المشتقة الثانية ، و السرعة ، و التسارع (كتاب التمارين)	13
الثالث	تطبيقات القيم القصوى (كتاب الطالب)	14
الثالث	تطبيقات القيم القصوى (كتاب التمارين)	18
الرابع	الاشتقاق الضمني و المعدلات المرتبطة (كتاب الطالب)	19
الرابع	الاشتقاق الضمني و المعدلات المرتبطة (كتاب التمارين)	22
	أختبار نهاية الوحدة	23

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الاول

المماس و العمودي على المماس

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = x^2 + 3x + 2$ عند النقطة $(2\ ,12)$.

أتحقق من فهمي صفحة (93) :

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ عند النقطة $(3\ ,5)$.

مثال 2 :

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ عندما $x = -2$.

أتحقق من فهمي صفحة (94) :

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ عندما $x = 1$.

مثال 3 :

1) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = \sqrt{x}$ ، و التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

2) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = -x^3 + 6x^2$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

أتحقق من فهمي صفحة (96):

a) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ، و التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

مثال 4 :

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0\ ,1)$.

أتحقق من فهمي صفحة (97):

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = ln\, x^3$ عند النقطة $(1\ ,0)$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (98) ، (99)

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1) $f(x) = x^3 - 6x + 3$, $(2, -1)$

2) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3}{x}$, $(1, -2)$

3) $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 1)$, $(1, 0)$

4) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, $(-4, -5)$

5) $f(x) = x + e^x$, $(0, 1)$

6) $f(x) = ln(x + e)$, $(0, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

7) $f(x) = \sqrt{x - 7}$, $x = 16$

8) $f(x) = (x - 1)\,e^x$, $x = 1$

9) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 3}$, $x = 4$

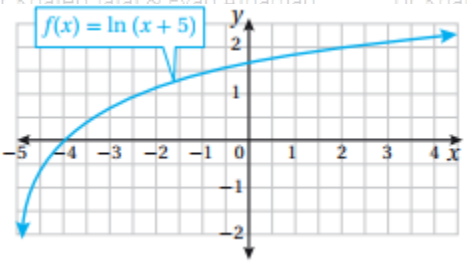
10) $f(x) = (ln\,x)^2$, $x = e$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة :

11) $f(x) = (3x + 10)^2$, $(-3, 1)$

12) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x + 1}}$, $(4, 1)$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران : $f(x) = ln(x + 5)$:



13) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x .

14) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y .

إذا كان : $f(x) = 4e^{2x+1}$ ، فأجد كلا مما يأتي :

15) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم : $x = -1$.

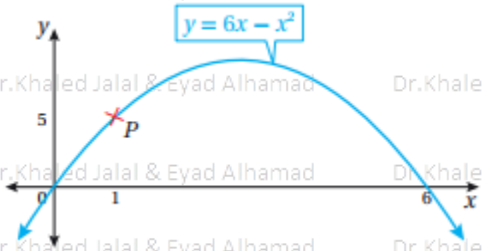
16) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y .

17) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = x^2 - x - 12$ ، و التي يكون عندها ميل المماس 3 ، ثم أكتب معادلة هذا المماس .

18) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

19) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

20) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$ ، و التي يكون عندها ميل المماس 1 .

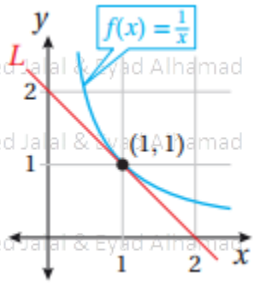


يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران : $y = 6x - x^2$

21) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P .

22) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P .

مسألة اليوم



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، $x > 0$

1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1\ ,1)$.

2) اجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1\ ,1)$ و ميل المستقيم L.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مهارات التفكير العليا صفحة (99)

إذا كان : $f(x) = 6 - x^2$ ، فأجد كلا مما يأتي :

23) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة $(-1\,,5)$ و النقطة ، $(1\,,5)$ مبررا إجابتي .

24) نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق ، مبررا إجابتي .

إذا كان : $f(x) = \sqrt{x}$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

25) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1\,,1)$.

26) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1\,,1)$.

27) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ، و التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيا للمستقيم $y = 2x - 1$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الاول

المماس و العمودي على المماس

كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(1) $f(x) = 2x^3 + 6x + 10$, $(-1, 2)$

(2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+4}$, $(0, \dfrac{1}{4})$

(3) $f(x) = x^2 - \dfrac{7}{x^2}$, $(1, -6)$

(4) $f(x) = x^2 - \dfrac{8}{\sqrt{x}}$, $(4, 12)$

(5) $f(x) = 4\sqrt{x}$, $(9, 12)$

(6) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $(3, 4)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$

(8) $f(x) = \dfrac{4+x}{x-2}$, $x = 8$

(9) $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+11}}$, $x = 5$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x ، أو عند النقطة المعطاة :

(10) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2$, $(-1, -6)$

(11) $f(x) = 2x^2(6 - x)$, $x = 5$

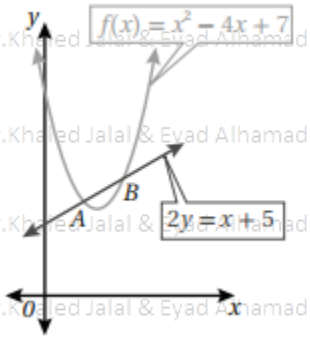
(12) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

(13) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 20x^3 - 3x^5$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

(14) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = x^5 - 10\,x$ ، و التي يكون عندها ميل المماس 6 .

(15) أذا كان : $f(x) = k\,x^3 + h$ ، حيث k و h ثابتان ، فإجد قيمة k التي تجعل المستقيم : $y = 2x + 5$ مماسا لمنحنى الاقتران عندما $x = 1$.

يبين الشكل المجاور :



منحنى الاقتران : $f(x) = x^2 - 4x + 7$

، و المستقيم $2y = x + 5$:

(16) أجد إحداثي كل من النقطة A و النقطة B .

(17) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة A و النقطة B .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

المشتقة الثانية ، و السرعة ، و التسارع

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}\,x^4 + \sin x$ 2) $f(x) = \ln x + e^x$

أتحقق من فهمي صفحة (101):

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$ b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

مثال 2 :

يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

1) ما سرعة الجسم عندما $t = 2$ ؟ 2) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$ ؟

3) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$ ؟ 4) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

أتحقق من فهمي صفحة (103):

يمثل الاقتران : $s(t) = 3t^2 - t^3$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$ ؟ b) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$ ؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$ ؟ d) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

مثال 3 :

يمكن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية متحركا في خط مستقيم باستعمال الاقتران : $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

1) ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته ؟

2) ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته ؟

3) أجد قيم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي .

أتحقق من فهمي صفحة (104):

يمكن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية متحركا في خط مستقيم باستعمال الاقتران :

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

a) ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته ؟

b) ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته ؟

c) أجد قيم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي .

أتدرب و أحل المسائل صفحة (104) ، (105)

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$ 2) $f(x) = 2e^x + x^2$ 3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$ 5) $f(x) = x^3(x+6)^6$ 6) $f(x) = x^7 \ln x$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ 8) $f(x) = \sin^2 x$ 9) $f(x) = 2x^{-3}$

10) $f(x) = x^3 - \dfrac{5}{x}$ 11) $f(x) = \sqrt{x}$ 12) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

13) $f(x) = 8x^3 - 3x + \dfrac{4}{x}$, $x = -2$ 14) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$, $x = 3$

15) إذا كان : $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$ ، وكانت $f^{(2)}(2) = -1$ ، فأجد قيمة الثابت p .

يمثل الاقتران : $s(t) = t^5 - 20t^2$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

16) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$ ؟ 17) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$ ؟

18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$ ؟ 19) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

يمثل الاقتران : $s(t) = \frac{3t}{1+t}$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

20) ما سرعة الجسم عندما $t = 4$ ؟ 21) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

22) ما تسارع الجسم عندما $t = 4$

يتحرك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلج ، بحيث يمكن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران : $s(t) = t^2 - 8t + 12$ ، حيث :

t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

23) ما سرعة رامي بعد 6 ثوان من بدء حركته ؟ 24) ما تسارع رامي بعد 6 ثوان من بدء حركته ؟

25) أجد قيم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي .

مهارات التفكير العليا صفحة (115)

26) إذا كان : $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$ ، فأثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$

27) إذا مثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 12t - 9$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني ، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرا؟

28) إذا مثل الاقتران : $s(t) = 2\,t^3 - 24t - 10$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني ، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرا؟

مسألة اليوم

يمكن نمذجة موقع دراجة نارية تتحرك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران : $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار

أجد الزمن t الذي تكون فيه السرعة للدراجة $15m/s$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

المشتقة الثانية ، و السرعة ، و التسارع

كتاب التمارين

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = 5x^3 + 4x$ (2) $f(x) = 5\,e^{4x}$ (3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(4) $f(x) = 7\,ln\,x$ (5) $f(x) = (x-1)(2x+3)$ (6) $f(x) = e^x\,sin\,x$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(7) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3x-2}}$, $x = 2$ (8) $f(x) = 1 - 7x^2$, $x = -3$

---

(9) إذا كان : $f(x) = ax^4 - 3x^2$ ، وكانت $f^{(2)}(2) = 42$ ، فأجد قيمة الثابت a .

يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(10) ما سرعة الجسم عندما $t = 1$ ؟ (11) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 1$ ؟

(12) ما تسارع الجسم عندما $t = 1$ ؟

(13) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يمثل الاقتران : $s(t) = (t-3)^3$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(14) ما سرعة الجسم عندما $t = 5$ ؟ (15) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$ ؟

(16) ما تسارع الجسم عندما $t = 5$ ؟

(17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يمكن نمذجة موقع سيارة سباق تتحرك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران : $s(t) = 6t^2 - 2t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

(18) ما سرعة السيارة بعد 5 ثوان من بدء حركتها ؟

(19) ما تسارع السيارة بعد 5 ثوان من بدء حركتها ؟

(20) أجد قيم t التي تكون عندها السيارة في حالة سكون لحظي .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

كتاب الطالب

مثال ❶ :

إذا كان : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f .

أتحقق من فهمي صفحة (108):

إذا كان : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f .

مثال ❷ :

اشترى مزارع سياجا طوله $800\ m$ لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته ، وكان هذا الحقل مقابلا لطريق زراعي محاط به سياج من قبل . أجد أكبر مساحة ممكنة للحقل يمكن للمزارع أن يحيط بها السياج .

أتحقق من فهمي صفحة (110):

بنى نجار سقفا خشبيا لحظيرة حيوانات ، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه $54\ m$. أجد أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة .

مثال ❸ :

أراد مصنع إنتاج علب من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق ، بحيث يكون حجم كل منها $1000\ cm^3$، و قاعدتها مربعة الشكل . أجد أبعاد العلبة الواحدة التي تجعل كمية الكرتون المستعملة لصنعها أقل ما يمكن .

أتحقق من فهمي صفحة (111):

أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق ، بحيث يكون حجم كل منها $2\ m^3$ ، و قاعدته مربعة الشكل . أجد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل كمية المعدن المستعملة أقل ما يمكن .

مثال 4 :

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق ، و أن تكون قاعدة الخزان مربعة الشكل . أجد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

أتحقق من فهمي صفحة (113):

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات ، و أن يكون الخزان مفتوحا من الأعلى ، و قاعدته مربعة الشكل . أجد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

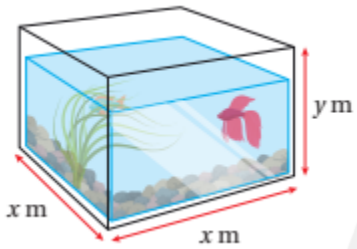
مثال 5 :

وجد خبير تسويق أنه لبيع x حاسوبا من نوع جديد ، فإن سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أن يكون : $s(x) = 1000 - x$ ، حيث x عدد الأجهزة المبيعة . إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الاجهزة تعطى بالاقتران : $C(x) = 3000 + 20x$ ، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها و بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن .

أتحقق من فهمي صفحة (115):

وجد خبيرة تسويق أنه لبيع x ثلاجة من نوع جديد ، فإن سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون : $s(x) = 1750 - 2x$ ، حيث x عدد الأجهزة المبيعة . إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الاجهزة تعطى بالاقتران : $C(x) = 2250 + 18x$ ، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها و بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن .

مسألة اليوم



أرادت إسراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى بحيث تكون سعته $0.2\ m^3$ ، و أبعاده كما في الشكل المجاور . أجد أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (116)

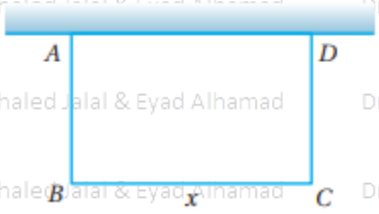
أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

2) $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

يمثل الشكل المجاور مخططا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أنشئت مقابل جدار . إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار $300\ m$ ، فأجد كلا مما يأتي :



4) المقدار الجبري الذي يمثل طول الضلع AB بدلالة x .

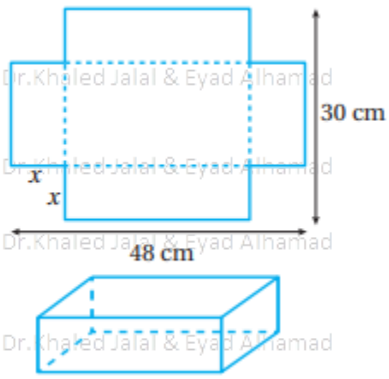
5) أقتران مساحة الحديقة بدلالة x .

6) بعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن .

قطعة ورق مستطيلة الشكل ، طولها $48\ cm$ ، و عرضها $30\ cm$.

قص من زوايا القطعة مربعات متطابقة ، طول ضلع كل منها $x\ cm$

كما في الشكل المجاور ، ثم ثنيت لتشكيل علبة :



7) أجد الاقتران الذي يمثل حجم العلبة بدلالة x .

8) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن .

يمثل الاقتران : $s(x) = 150 - 0.035\ x$ سعر القطعة الواحدة من منتج بالدينار لإحدى الشركات ، حيث x عدد القطع المنتجة . و يمثل الاقتران : $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار :

9) أجد اقتران الإيراد .

10) أجد عدد القطع x الذي يتساوى عندها الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية .

11) أجد اقتران الربح .

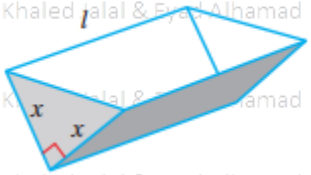
12) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن ، ثم أجد أكبر ربح ممكن .

13) أجد سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مهارات التفكير العليا صفحة (116)

14) قالب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي مفتوح من الأعلى ، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور . إذا كان حجم القالب $1000\ cm^3$ ، فأجد أبعاده التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن ، مبررا إجابتي .



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

كتاب التمارين

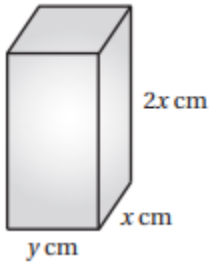
أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

(2) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

(3) $f(x) = x^3(x - 2)$

يبين الشكل المجاور قالبا يستعمل لصنع لبنات البناء ، و تبلغ مساحة سطحه الكلية $600\ cm^2$.



(4) أجد الاقتران الذي يمثل حجم القالب بدلالة x .

(5) أجد قيمة x التي تجعل حجم القالب أكبر ما يمكن .

يمثل الاقتران : $s(x) = 150 - 0.5\ x$ سعر البدلة الرجالية الذي حددته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المبيعة . و يمثل الاقتران : $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة :

(6) أجد اقتران الإيراد .

(7) أجد عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدي مثلي التكلفة الحدية .

(8) أجد اقتران الربح .

(9) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن ، ثم أجد أكبر ربح ممكن .

(10) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أكبر ربح ممكن .

---

(11) أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات ، بحيث يكون كل منها مفتوحا من الأعلى ، و حجمه $500\ m^3$ ، و قاعدته مربعة الشكل . أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني و المعدلات المرتبطة

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $2x + 3y^2 = 1$ 2) $y^3 - \sin x = 4y^2$ 3) $xy - 2y = 3e^x$

أتحقق من فهمي صفحة (119):

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $5y^2 - 2e^x = 4y$ c) $xy + y^2 = 4\cos x$

مثال 2 :

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $y^3 + xy = 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

أتحقق من فهمي صفحة (120):

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^3 + 2y^3 = 6$ عند النقطة $(2, -1)$.

مثال 3 :

عند رمي حجر في مسطح مائي ، تتكون موجات دائرية متحدة المركز . إذا كان نصف قطر دائرة يزداد بمعدل $8\ cm/s$ ، فأجد معدل تغير مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قطرها $10\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط مساحة الدائرة (A) و نصف قطرها (r) هي : $A = \pi r^2$.

أتحقق من فهمي صفحة (121):

نفخت هديل بالونا على شكل كرة ، فازداد نصف قطره بمعدل $3\ cm/s$. أجد معدل تغير حجم البالون عندما يكون نصف قطره $4\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط حجم البالون (V) و نصف قطره (r) هي : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (121)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $x^2 + y^3 = 2$

3) $x^2 + 2y - y^2 = 5$

4) $2xy - 3y = y^2 - 7x$

5) $y^5 = x^3$

6) $x^2\, y^3 + y = 11$

7) $\sqrt{x} + \sin y = 16$

8) $e^x\, y = x\, e^y$

9) $\cos x + \ln y = 3$

10) $16y^2 - x^2 = 16$

11) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة :

12) $3x^3 - y^2 = 8$, $(2, 4)$

13) $2x^2 - 3y^3 = 5$, $(-2, 1)$

14) $y^2 = \ln x$, $(e, 1)$

15) $(y - 3)^2 = 4x - 20$, $(6, 1)$

إذا كان : $2x^2 + y^2 = 34$ ، فأجد كلا مما يأتي :

16) ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$.

17) معادلة المماس عند النقطة $(3, 4)$.

إذا كان : $x^2 + xy + y^2 = 7$ ، فأجد كلا مما يأتي :

18) ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.

19) معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.

20) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3, -2)$.

21) تتناقص أطوال أضلاع مكعب بمعدل $6\ cm/s$. أجد معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه $30\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم المكعب (V) و طول ضلعه (x) هي : $V = x^3$.

22) يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدل $0.5\ cm/s$. أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفقاعة عندما يكونطول نصف قطرها $3\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A) و نصف قطرها (r) هي : $A = 4\pi\, r^2$.

23) أتخذ ورم شكلا كرويا تقريبا ، و قد أزداد نصف قطره بمعدل $0.13\ cm$ لكل شهر . أجد معدل تغير حجم الورم عندما يكون طول نصف قطره $0.45\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) و نصف قطره (r) هي : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مهارات التفكير العليا صفحة (122)

24) أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$ ، مبررا إجابتي .

25) إذا كان : $ln(xy) = x^2 + y^2$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 y - y}{x - 2x y^2}$.

26) إذا كان المتغيران u و w مرتبطين بالعلاقة $u = 150\sqrt[3]{w^2}$ ، و كانت قيمة المتغير w تزداد بمرور الزمن t وفقا للعلاقة : $w = 0.05\ t + 8$ ، فأجد معدل تغير u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$ ، مبررا إجابتي .

مسألة اليوم

خزان وقود أسطواني الشكل ، و قطر قاعدته $2\ m$. إذا ملئ الخزان بالوقود بمعدل $0.5\ m^3/min$ ، فأجد معدل تغير ارتفاع الوقود فيه ، علما بأن التي تربط بين حجم الخزان (V) و ارتفاعه (h) هي : $V = \pi r^2 h$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني و المعدلات المرتبطة

كتاب التمارين

- أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(1) $x^2 + 5y^2 = 14$ (2) $x^2 + 2xy = 3y^2$ (3) $y\,lnx = 1 + x$

(4) $y + y^3 = sin\,x - x^2$ (5) $xe^x - 3x = 15$ (6) $x^3 + xy^2 = 5x$

- أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(7) $x^2\,y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0$, $(2, -3)$ (8) $y^3 - x^2 = 4$, $(2, 2)$

- إذا كان : $y^2 - x^2 = 16$ ، فأجد كلا مما يأتي :

(9) ميل المماس عند النقطة $(3, 5)$. (10) معادلة المماس عند النقطة $(3, 5)$.

- إذا كان : $x^2y = 8 - 4y$ ، فأجد كلا مما يأتي :

(11) ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$. (12) معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$.

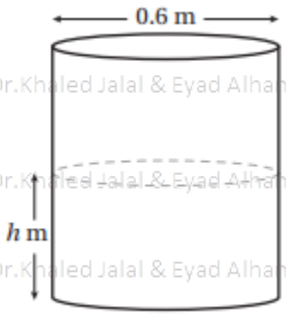
- إذا كان : $x^2 + 4xy + y^2 = 25$ ، فأجد كلا مما يأتي :

(13) ميل المماس عند النقطة $(0, 5)$. (14) معادلة المماس عند النقطة $(0, 5)$.

(15) يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدل ثابت مقدارة $0.6\ cm^3/s$. أجد معدل تناقص نصف قطر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $2.5\ m$ ، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) و نصف قطره (r) هي : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

(16) يبين الشكل المجاور خزان ماء أسطواني الشكل . إذا كانت كمية الماء في الخزان تزداد بمعدل $0.4\ cm^3/s$ ، فأجد معدل تغير عمق الماء فيه (h) علما بأن التي تربط بين حجم الخزان (V) و ارتفاعه (h) هي :

$V = \pi r^2 h$



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

اختبار نهاية وحدة
تطبيقات التفاضل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) ميل المماس لمنحنى الاقتران $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو :

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$ c) 11 d) 8

(2) إذا كان : $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، فإن $f^{(2)}(x)$ هي :

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

(3) إذا كان : $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو :

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

(4) ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $3x - 2y + 12 = 0$ هو :

a) 6 b) 3 c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

(5) قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران $f(x) = x^4 - 32x$ هي :

a) 2 b) -2 c) 1 d) -1

يمثل الاقتران : $s(t) = 2 + 7t - t^2$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(6) اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي :

a) 1 b) 2 c) 3.5 d) 4

(7) اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي :

a) 1 b) 2 c) 3.5 d) 4

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(8) $f(x)=x^2-7x+10$, $(2,0)$ (9) $f(x)=x^2-\frac{8}{\sqrt{x}}$, $(4,12)$

(10) $f(x)=\frac{2x-1}{x}$, $(1,1)$ (11) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$, $(4,1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(12) $f(x)=(x-7)(x+4)$, $x=1$ (13) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x=-5$

(14) $f(x)=2x^4+9x^3+x$, $x=-2$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(15) $f(x)=7x^3+6x-5$, $x=2$ (16) $f(x)=\frac{6x^2-x^3}{4x^4}$, $x=-2$

(17) أجد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x)=x^4-3x^3+1$ ، و التي يكون عندها المماس أفقيا .

(18) أجد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x)=x^3+3$ ، التي يكون عندها ميل المماس هو 12 .

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

(19) $f(x)=4x^2-5x+7$ (20) $f(x)=\ln x-9e^x$ (21) $f(x)=10x-2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(22) $f(x)=\sqrt{x}\,(x+2)$, $x=2$ (23) $f(x)=2x^4-3x^3-x^2$, $x=1$

(24) تسرب نفط من ناقلة بحرية ، مكونا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء ، تزداد مساحتها بمعدل : $50\ m^2/min$. أجد سرعة تزايد نصف قطر البقعة عندما يكون طول نصف قطرها $20\ m$ ، علما بأن العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) و نصف قطرها (r) هي : $A=\pi r^2$.

يمثل الاقتران : $s(t)=t^5-20t^2$ ، $t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(25) ما سرعة الجسم عندما $t=2$ ؟ (26) في أي إتجاه يتحرك الجسم عندما $t=2$ ؟

(27) ما تسارع الجسم عندما $t=2$ ؟ (28) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

يمكن نمذجة موقع شخص يقود دراجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران :

$s(t) = \frac{1}{6}\ t^3 + \frac{1}{2}\ t^2 + \frac{1}{2}\ t$ ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(29) ما سرعة الشخص بعد 3 ثوان من بدء حركته ؟

(30) ما تسارع الشخص بعد 3 ثوان من بدء حركته ؟

(31) أجد قيم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي (إن وجدت) .

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي :

(32) $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

(33) $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

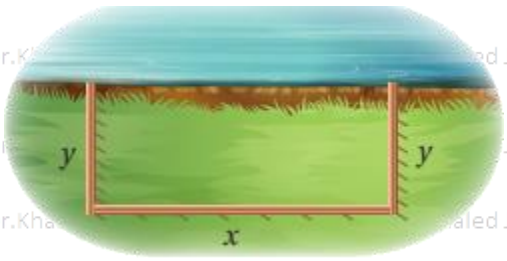
(34) $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

---

(35) نفخت ماجدة بالونا على شكل كرة ، فازداد حجمه بمعدل $800\ cm^3/s$. أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف قطره $60\ cm$ ، علما بأن العلاقة التي تربط حجم البالون (V) و نصف قطره (r) هي : $V = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$.

---

(36) خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل كما قرب نهر بالشكل المجاور .



و حدد مساحة الحظيرة بـ $245000m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه . أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن . علما بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج .

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(37) $y^2 + x^2 = y$

(38) $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

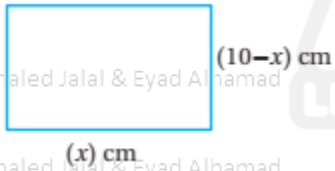
إذا كان : $y^2 + xy + x^2 = 13$ فأجد كلا مما يأتي :

(39) ميل المماس عند النقطة $(3\ ,-4)$.

(40) معادلة المماس عند النقطة $(3\ ,-4)$.

---

(41) سلك طوله $20\ cm$. إذا أريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل المجاور ، فأجد أكبر مساحة مغلقة يمكن إحاطة السلك بها .



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

يبين الشكل المجاور صندوقا على شكل متوازي مستطيلات . إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل ، و طول ضلع القاعدة $x\ cm$ ، و مجموع أطوال أحرفه $144\ cm$ ، فأجد كلا مما يلي :

(42) الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق بدلالة x .

(43) قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(44) $2x^3 + 4y^2 = -12 \quad , \quad (-2\,,-1\,)$

(45) $x^3 - x^2\,y^2 = -9 \quad , \quad (3\,,-2\,)$