الإبداع في الرياضيات

الصف الثاني عشر الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأوّل

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

"مكثف"

إعداد

أ.زكي غنيم
0788557325

أ.ابراهيم العقرباوي
0790082328

أولاً المعدّلات المرتبطة

استراتيجية حل مسائل المعدّلات المرتبطة

رقم	الخطوة	تفصيل الخطوات
1	فهم السؤال :	قراءة السؤال جيدا ← تحديد معلومات السؤال ← تحديد المطلوب.
2	رسم مخطط :	رسم مخطط يمثّل المسألة ← تدوين المعلومات المهمَّة عليه.
3	العلاقة الرئيسية :	معادلة تربط بين المطلوب والمعطيات.
4	العلاقة المساعدة (إن أمكن):	وذلك لتخفيف عدد المتغيرات أو لإيجاد قيم مجهولة.
5	اشتق بالنسبة إلى الزمن:	استعمل قواعد اشتقاق (السلسلة والضمني) لإيجاد مشتقة المعادلة بالنسبة للزمن.
6	إيجاد المطلوب:	تعويض جميع القيم المعلومة في المعادلة ← حل المعادلة لإيجاد المعدّل المطلوب.

ملاحظات مهمة:

1) في جميع مسائل هذا الموضوع توجد حركة:

"يسير رجل على الأرض/يتسرب الماء من مخروط/ يصب الماء في وعاء اسطواني / .... "

2) في جميع مسائل هذا النوع كلمة سرعة أو معدل تغير:

حيث كل منهما تعني المشتقة الأولى بالنسبة للزمن .

3) اذا نتج عن الحركة زيادة في قيمة التغير : معدل التغير موجب.

4) اذا نتج عن الحركة نقصان في قيمة التغير: معدل التغير سالب.

5) في أغلب المسائل العلاقة الرئيسية:

يجب أن تحتوي متغيرين بالضبط قد يكونان في نفس الطرف وقد يكونان في طرفين مختلفين، وفي بعض العلاقات الرياضية الرياضية يسمح ببقاء 3 متغيرات.

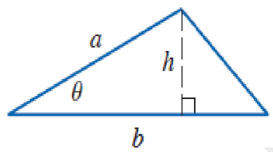
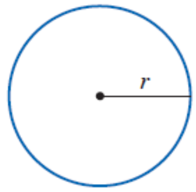
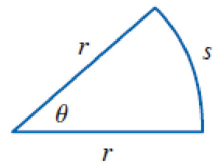
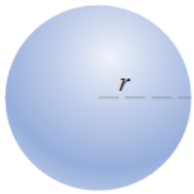
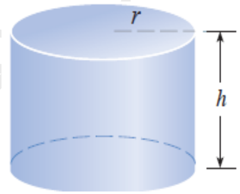
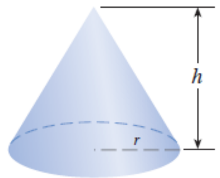
6) في بعض المسائل نحتاج لتكوين علاقة مساعدة:

تساعد في تقليل عدد المتغيرات في العلاقة الرئيسية من 3 الى 2 .

قوانين مهمَّة لإنشاء العلاقة الرئيسيَّة أو المساعدة في مسائل المعدَّلات المرتبطة

1 معدّل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن

صيغ هندسية (المساحة A , المحيط C , الحجم V)

 	المثلث: $A=\frac{1}{2}bh$ $=\frac{1}{2}ab\sin\theta$	 	الدائرة: $A=\pi r^2$ $c=2\pi r$
 	القطاع الدائري: $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ طول القوس: $s=r\theta$	 	الكرة: $A=4\pi r^2$ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$
 	الإسطوانة: $A=2\pi rh+2\pi r^2$ $V=\pi r^2h$	 	المخروط: $A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

2 معدّل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن

المسافة بين نقطتين $p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2)$: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$	نظرية فيثاغورس

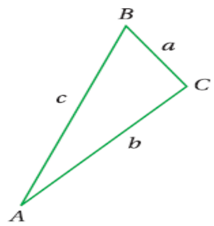
3 معدّل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن

النسب المثلثية الرئيسية:	$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
تذكَّر أنَّ :	$\sec^2(\theta)=1+\tan^2(\theta)$, $\csc^2(\theta)=1+\cot^2(\theta)$ زاوية الإرتفاع = زاوية الإنخفاض		

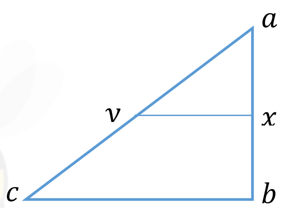
4 معدّل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائريّة

السرعة الزَّاويَّة:	$\omega=\frac{\theta}{t}$	السرعة الخطِّيَّة:	$v=\frac{s}{t}$ s: طول القوس

5 معدّل التغير بالنسبة إلى الزمن و ميكانيكا الحركة

 	قانون الجيوب:	$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$
	قانون جيوب التمام:	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=b^2+a^2-2ba\cos A$

6 معدّل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن



تشابه المثلثات

إذا تساوت الزوايا المتناظرة في المثلَّثين:

$$\frac{ab}{ax}=\frac{ac}{ay}=\frac{bc}{xy}$$

إمتحان درس المعدّلات المرتبطة بالزمن

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (10):

1) تتحرّك نقطة على منحنى العلاقة : $x^3 - 4x + y^3 = 4$ ، إذا كان معدّل تزايد الإحداثي الصادي : $2u/s$ ، فإنّ معدّل تغيُّر الإحداثي السيني عند النقطة $(2,2)$ هو :

$a) -3$ $b) 3$ $c) 2$ $d) -4$

---

2) سلم طوله $(5m)$ يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وطرفه السفلي على أرض أفقية ، بدأ الطرف السفلي بالإنزلاق مبتعداً عن الحائط بمعدّل $3m/s$ ، جد سرعة انزلاق الطرف العلوي عندما يصبح الطرف السفلي على بعد $(4m)$ عن الحائط:

$a) 4$ $b) -4$ $c) -6$ $d) -3$

---

3) في السؤال السابق سرعة تغيُّر الزاوية المحصورة بين السلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي على بعد $(4m)$:

$a) 1$ $b) -1$ $c) -\frac{3}{5}$ $d) \frac{3}{4}$

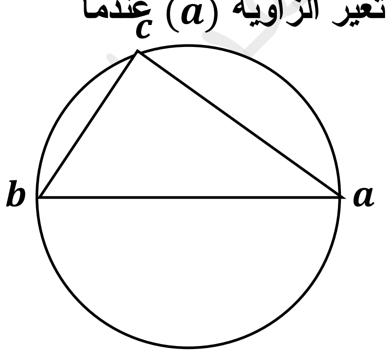
---

4) مثلث متطابق الضلعين طول قاعدته $(8cm)$ ، إذا كان معدّل التناقص في كلٍّ من الضلعين المتطابقين $2cm/s$ ، فجد معدّل تغيُّر الزاوية بين هذين الضلعين عندما يكون إرتفاع المثلث $(3cm)$:

$a) -\frac{4}{3}$ $b) -\frac{4}{16}$ $c) \frac{16}{15}$ $d) \frac{4}{3}$

---

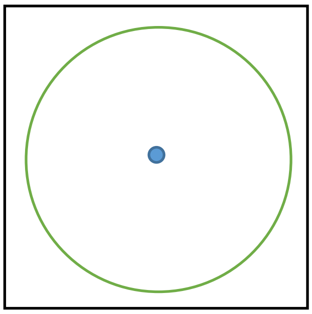
5) مثلث abc تقع رؤوسه على محيط دائرة نصف قطرها $(10cm)$ ، إذا تحرّكت النقطة (c) باتجاه عكس عقارب الساعة ، وكان معدّل تغيُّر مساحة المثلث $(5cm/s)$ ، جد معدّل تغيُّر الزاوية (a) عندما تكون الزاوية $\left(\frac{\pi}{3}\right)$:



$a) -\frac{1}{5}\ rad/s$ $b) \frac{1}{5}\ rad/s$

$c) -\frac{1}{20}\ rad/s$ $d) \frac{1}{20}\ rad/s$

6) رُسِمت دائرة نصف قطرها $(4cm)$ داخل مربَّع طول ضلعه $(10cm)$ ، بحيث يقع مركز الدائرة عند نقطة تقاطع قطري المربع ، أخذت الدائرة تتمدد بحيث طول نصف قطرها بمعدَّل $(1\ cm/s)$ ، بينما بدأت أضلاع المربَّع بالتقلُّص في اللحظن نفسها بمعدَّل $(2\ cm/s)$ ، جد معدَّل التغيُّر في المساحة المحصورة بينهما عندما تلامس اضلاع المربَّع محيط الدائرة :



$a)\ -36-9\pi$ $\quad$ $b)\ -24-12\pi$

$c)\ 120-8\pi$ $\quad$ $d)\ 24+12\pi$

7) حوض سباحة على شكل نصف كرة طول نصف قطرها $(2m)$ مملوء بالماء ، إذا بدء الماء بالتسرُّب منه بحيث يتناقص ارتفاع الماء فيها بمعدَّل $(\frac{1}{4}\ m/h)$ ، جد معدّل تغيُّر مساحة سطح الماء في الحوض بعد ساعة واحدة من بدء التسريب:

$a)\ -\frac{3\pi}{2}$ $\quad$ $b)\ -\frac{3\pi}{8}$ $\quad$ $c)\ -\frac{3\pi}{4}$ $\quad$ $d)\ -\frac{\pi}{8}$

8) بالون كروي الشكل قطره $(10cm)$ ، يتسرب منه الهواء بمعدَّل $2\ cm^3/m$ ، جد معدَّل التغيُّر في مساحة السطح الخارجي في اللحظة التي يكون نصف قطره $(3cm)$:

$a)\ -\frac{4}{3}$ $\quad$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $\quad$ $c)\ -4$ $\quad$ $d)\ -\frac{3}{4}$

9) يعمل ضوء دائر يبعد 3 أميال عن شاطئ مستقيم 8 دورات في الدقيقة ، جد معدَّل سرعة حركة الضوء على طول الشاطئ في اللحظة التي يصنع فيها شعاع الضوء زاوية قياسها $(45°)$ مع خط الشاطئ:

$a)\ 16\pi$ $\quad$ $b)\ 69\pi$ $\quad$ $c)\ 96\pi$ $\quad$ $d)\ 61\pi$

10) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ، ارتفاعه $(16cm)$ ، وطول نصف قطر قاعدته $(4cm)$ ، صُبَّ فيه الماء بمعدَّل $(2\pi\ cm^3/s)$ ، فإنَّ معدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء $(8cm)$ تساوي :

$a)\ \frac{1}{2\pi}\ cm/s$ $\quad$ $b)\ 2\ cm/s$ $\quad$ $c)\ \frac{1}{8}\ cm/s$ $\quad$ $d)\ \frac{1}{2}\ cm/s$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*

رقم السؤال	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*d*	*a*	*c*	*d*

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

ثانياً القيم القصوى والتقعُّر

لإيجاد القيم القصوى المحلِّيَّة من خلال اختبار المشتقة الأولى

1. تحديد المجال
2. البحث في الإتصال
3. ايجاد المشتقة الأولى
4. إيجاد قيم x الحرجة
5. دراسة اشارة f ' (x)
6. تحديد فترات التزايدوالتناقص
7. تحديد القيم القصوى

لإيجاد فترات التقعُّر

1. تحديد المجال
2. البحث في الإتصال
3. ايجاد المشتقة الأولى
4. ايجاد المشتقة الثانية
5. دراسة اشارة f " (x)
6. تحديد فترات التقعُّر
7. تحديد نقاط الإنعطاف

لإيجاد القيم القصوى المحلِّيَّة من خلال اختبار المشتقة الثانية

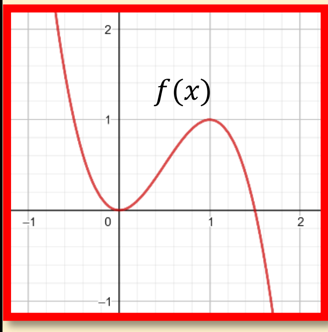
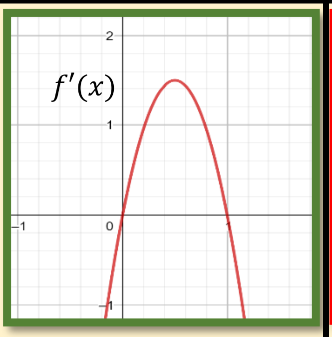
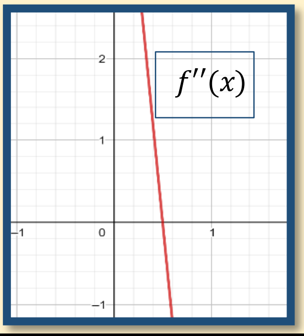
1. تحديد المجال
2. البحث في الإتصال
3. ايجاد المشتقة الأولى
4. إيجاد أصفار المشتقة الأولى
5. ايجاد المشتقة الثانية
6. تعويض أصفار f ' (x) داخل f " (x)

1) إذا كان : $f''(x_1) > 0$ ←
$f(x_1)$ قيمة صغرى محلية .
2) إذا كان : $f''(x_1) < 0$ ←
$f(x_1)$ قيمة عظمى محلية .
3) إذا كان : $f''(x_1) = 0$ ←
يفشل الإختبار
← نعود الى اختبار المشتقة الأولى

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للاقتران f المتصل على الفترة المغلقة $[a, b]$:
1) إيجاد قيم الإقتران f عند قيم x الحرجة في الفترة المفتوحة (a, b).
2) إيجاد قيمتي الإقتران f عند طرفي الفترة .
3) أكبر القيم الناتجة هي القيمة العظمى المطلقة
وأصغرها هي القيمة الصغرى المطلقة

استنتاج خصائص $f(x)$ من خلال الرسم

قيم x الحرجة	التزايد والتناقص	القيم القصوى المحلية	التقعُّر والإنعطاف
استنتاج خصائص $f(x)$ من خلال رسمة $f(x)$			
* ثبات الإقتران * عند القمم والقيعان لأنه يكون عندها مماس أفقي * عند الرؤوس المدببة * عند نقاط عدم الإتصال * مماساً رأسياً	* متزايد: إذا كان الإقتران صاعدا * متناقص : إذا كان الإقتران هابط * ثابت : اذا كان الإقتران أفقيا	* عظمى محلية: عند القمم * صغرى محلية: عند القيعان	* مقعَّر لأعلى : الرسم مفتوح للأعلى * معقّر لأسفل : الرسم مفتوح لأسفل * نقط الإنعطاف: اذا تغير اتجاه تقعره " بدون رأس مدبب "
استنتاج خصائص $f(x)$ من خلال رسمة $f'(x)$			
* عند تقاطع المنحنى مع المحور x * نقاط عدم الإتصال لمنحنى المشتقة دون الأطراف	* متزايد: إذا كان منحنى المشتقة فوق محور x * متناقص : إذا كان منحنى المشتقة تحت محور x	بعد عرض قيم x الحرجة على خط الأعداد وتحديد فترات التزايد والتناقص: * عظمى محلية : من موجب إلى سالب * صغرى محلية : من سالب إلى موجب	معرَّف على فترة مفتوحة * مقعَّر لأعلى : اذا كان منحنى المشتقة صاعداً * مقعَّر لأسفل : اذا كان منحنى المشتقة هابطاً * نقط الإنعطاف: عند القمم والقيعان
استنتاج خصائص $f(x)$ من خلال رسمة $f''(x)$			
لا يمكن إيجاد قيم x الحرجة	إذا تم ذكر قيم x حرجة تم معرفة القيم القصوى من خلالها : يتم تحديد التزايد والتناقص	إذا تم ذكر قيم x الحرجة من خلال اختبار المشتقة الثانية: * صغرى محلية: $f''(x) > 0$ * عظمى محلية : $f''(x) < 0$	مقعَّر لأعلى : إذا كان منحنى المشتقة الثانية فوق محور x * مقعَّر لأسفل : إذا كان منحنى المشتقة الثانية تحت محور x * نقط الإنعطاف: عند تقاطع المنحنى مع المحور x

مثال جد خصائص الإقتران $f(x)$ في كلٍّ ممَّا يلي:	$f(x) = -2x^3 + 3x^2$	$f'(x) = -6x^2 + 6x$	$f''(x) = -12x + 6$
			
قيم x الحرجة	$x = \{0, 1\}$	$x = \{0, 1\}$	لا يمكن إيجاد قيم x الحرجة
فترات التزايد والتناقص	$f(x)$ متزايد : $(0, 1)$ $f(x)$ متناقص : $(-\infty, 0), (1, \infty)$	نعرض قيم x الحرجة على خط الأعداد: $- - -\quad + + +\quad - - -$ $0 \qquad 1$	لا يمكن معرفة الفترات
القيم القصوى	عظمى محلّيَّة عند $x = 1$ صغرى محلّيَّة عند $x = 0$	عظمى محلّيَّة عند $x = 1$ صغرى محلّيَّة عند $x = 0$	لا يمكن معرفة القيم القصوى
فترات التقعُّر	$f(x)$ مقعَّر لأعلى : $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ $f(x)$ مقعَّر لأسفل : $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$f(x)$ مقعَّر لأعلى : $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ $f(x)$ مقعَّر لأسفل : $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$f(x)$ مقعَّر لأعلى : $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ $f(x)$ مقعَّر لأسفل : $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
نقاط الإنعطاف	$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$	$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$	$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

تطبيقات فيزيائية: السرعة المتجهة والتسارع

إذا كان : $s(t)$ موقع جسيم يتحرك في خط مستقيم :

1) لمعرفة الإتّجاه الذي يتحرك فيها الجسيم : ندرس إشارة المستقة الأولى " $s'(t) = v(t)$ "

- الفترة التي يتحرك فيها الجسيم في اتجاه الموجب $v(t) > 0$ ، هي تزايد $s(t)$.
- الفترة التي يتحرك فيها الجسيم في اتجاه السالب $v(t) < 0$ ، هي تناقص $s(t)$.

2) لمعرفة الفترة التي تتغير عندها السرعة : ندرس إشارة المشتقة الثانية " $s''(t) = a(t)$ "

- الفترة التي تتزايد فيها السرعة المتجهة $a(t) > 0$ (تسارع) ، هي تقعر للأعلى لمنحنى $s(t)$.
- الفترة التي تتناقص فيها السرعة المتجهة $a(t) < 0$ (تسارع) ، هي تقعر للأسفل لمنحنى $s(t)$.

جُمَل مهمّة لأسئلة إيجاد الثابت

الجملة	المعنى	مثال	الجواب
النقطة (a, b)	$f(a) = b$	النقطة $(1, -14)$	$f(1) = -14$
نقطة حرجة (a, b)	$f'(a) = 0$ $f'(a) =$ غ.م "تهمل"	النقطة $(1, -14)$: نقطة حرجة	$f'(1) = 0$
يوجد عند النقطة $(a. b)$: قيمة قصوى "بصرف النَّظر عن نوعها"	(a, b) نقطة حرجة: $f'(a) = 0$	يوجد عند النقطة $(1, -14)$ قيمة قصوى عظمى محلّيَّة	$f'(1) = 0$
نقطة إنعطاف (a, b)	$f''(a) = 0$ $f''(a) =$ غ.م "تهمل"	النقطة $(1, -14)$: نقطة إنعطاف	$f''(1) = 0$
ميل المماس عند $x = a$ يساوي c	$f'(a) = c$	ميل المماس عند $x = 4$ يساوي 3	$f'(4) = 3$
المماس عند $x = a$: أفقي أو يوازي المحور x	$f'(a) = 0$	المماس عند $x = -2$: أفقي	$f'(-2) = 0$

لتحديد نقطة ما على رسمة $f(x)$

1) من خلال معرفة إشارة $f'(x)$:

- $f'(x) > 0$ ← يجب أن يكون $f(x)$ متزايد.
- $f'(x) < 0$ ← يجب أن يكون $f(x)$ متناقص.
- $f'(x) = 0$ ← يجب أن تكون عند القمَّة أو القاع.

2) من خلال معرفة إشارة $f''(x)$:

- $f''(x) > 0$ ← يجب أن يكون $f(x)$ مقعراً لأعلى.
- $f''(x) < 0$ ← يجب أن يكون $f(x)$ مقعراً لأسفل.

إمتحان درس القيم القصوى والتقعُّر

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (30):

1) إذا كان : $f(x) = ln(x^2 - 4x + 5)$ ، فإن $f(x)$ متناقص على الفترة:

$a)\ (-\infty, 2)$ $\quad b)\ (0,2)$ $\quad c)\ (2,\infty)$ $\quad d)\ R$

ليكن : $f(x) = 3^{1-x^2}$ ، فأجب عن السؤالين $(2+3)$:

2) $f(x)$ متزايد على الفترة :

$a)\ (-1,1)$ $\quad b)\ (-\infty,0)$ $\quad c)\ (0,\infty)$ $\quad d)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

3) يوجد للإقتران قيمة عظمى محلية عند x تساوي :

$a) -1$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d) 3$

4) ليكن : $f(x) = 2sin(x) + cos(2x), x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، فإنَّ $f(x)$ له قيمة عظمى مطلقة عند x تساوي :

$a)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad b)\ \frac{5\pi}{6}$ $\quad c)\ \pi$ $\quad d)\ \frac{2\pi}{3}$

اذا كان : $f(x) = 3tan(x) - 6x , x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، فأجب عن السؤالين $(5+6)$:

5) الفترة التي يكون فيها $f(x)$ متناقص:

$a)\ \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ $\quad b)\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad c)\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad d)\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

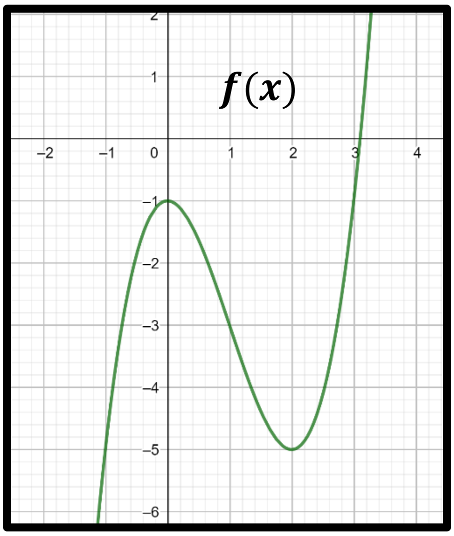
6) الفترة التي يكون فيها $f(x)$ مقعَّراً للأعلى:

$a)\ \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ $\quad b)\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad c)\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad d)\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

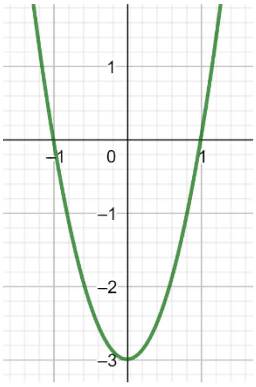
أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

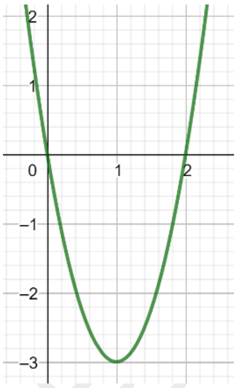
7) أي الرسومات التالية هي مشتقة $f(x)$:



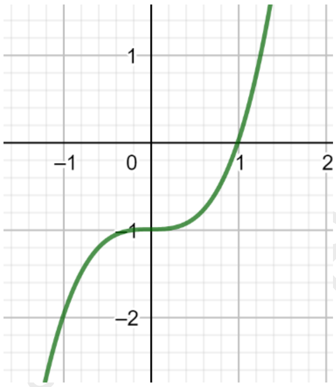
$a)$



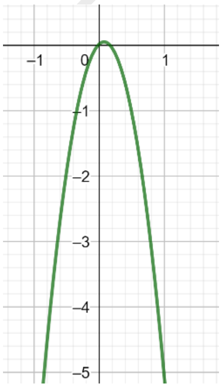
$b)$



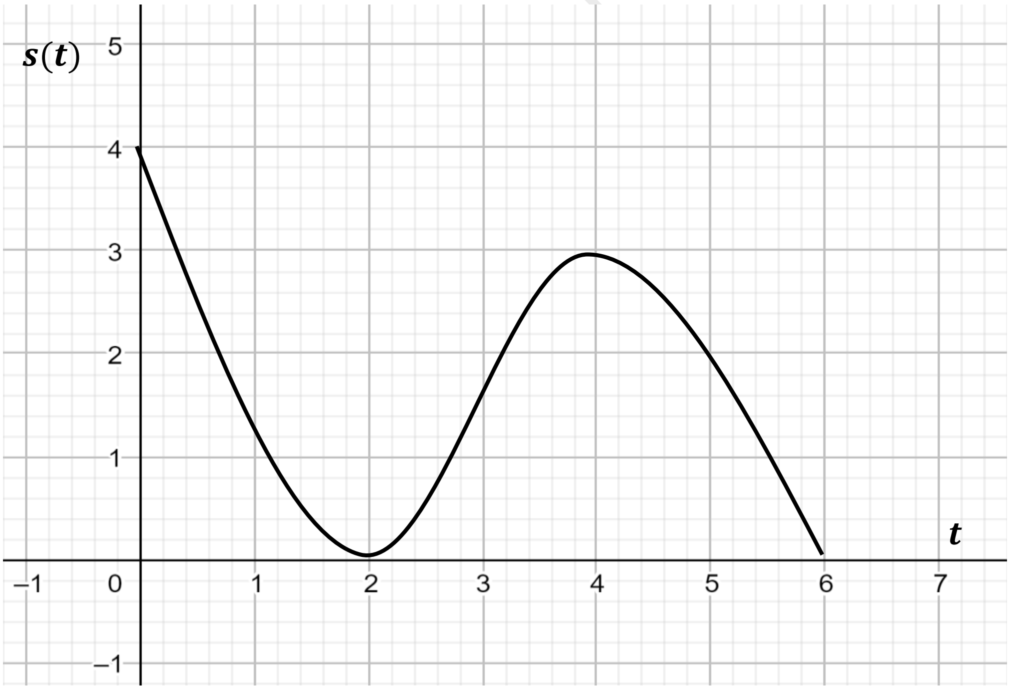
$c)$



$d)$



من خلال التمثيل البياني في الشكل المجاور الذي يمثّل موقع جسيم يتحرّك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني ، أجب عن الأسئلة : $(8 + 9 + 10)$



8) أجد قيم (t) التي يكون عندها الجسيم في حالة سكون لحظي:

$a)\ \{2, 4, 6\}$ $\quad b)\ \{2, 4\}$ $\quad c)\ \{\ 2\ \}$ $\quad d)\ \{\ 4\ \}$

9) الفترة التي يتحرّك فيها الجسيم في الإتجاه الموجب:

$a)\ (0,3)$ $b)\ (3,6)$ $c)\ (0,2)\cup(4,6)$ $d)\ (2,4)$

10) مالفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسيم الكتجهة:

$a)\ (0,3)$ $b)\ (3,6)$ $c)\ (0,2)\cup(4,6)$ $d)\ (2,4)$

يمثّل الإقتران : $s(t)=t^3-3t^2\ ,t\geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني ،أجب عن الأسئلة $(11+12)$:

11) مالفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب:

$a)\ (0,2)$ $b)\ (2,\infty)$ $c)\ (0,3)$ $d)\ (3,\infty)$

12) مالفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة:

$a)\ (0,1)$ $b)\ (1,\infty)$ $c)\ (0,\infty)$ $d)\ (6,\infty)$

13) يمثل الإقتران : $f(x)=\frac{5}{x^2-4x+5}+3$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه ، حيث x الإنتاج الأسبوعي ، فإنّ كمية الإنتاج التي تجعل الربح أكبر مايمكن هو :

$a)\ 4$ $b)\ 25$ $c)\ 35$ $d)\ 2$

14) إذا كان للإقتران : $f(x)=x^3+ax^2+bx$ قيمتين حرجتين عند : $x=3\ ,x=-1$ ،فجد قيم $\{a,b\}$ على الترتيب :

$a)\ \{-3,-9\}$ $b)\ \{3,-3\}$ $c)\ \{-3,9\}$ $d)\ \{3,6\}$

15) إذا كان : $f(x)=x+sin(x)\ ,x\in[0,2\pi]$ ، فإنّ قيم x التي يكون فيها $f(x)$ متزايداً:

$a)\ (0,2\pi)$ $b)\ (0,\pi)$ $c)\ (\pi,2\pi)$ $d)\ (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

16) إذا كانت جميع المماسات لمنحنى $f(x)$ تصنع زاوية حادّة مع الإتجاه الموجب لمحور x لجميع قيم x التي تنتمي للمجال ، فإنّ :

$a)\ f(x)$ متزايد على مجاله
$b)\ f(x)$ متناقص على مجاله
$c)\ f(x)$ مقعراً للأعلى على مجاله
$c)\ f(x)$ مقعراً للأسفل على مجاله

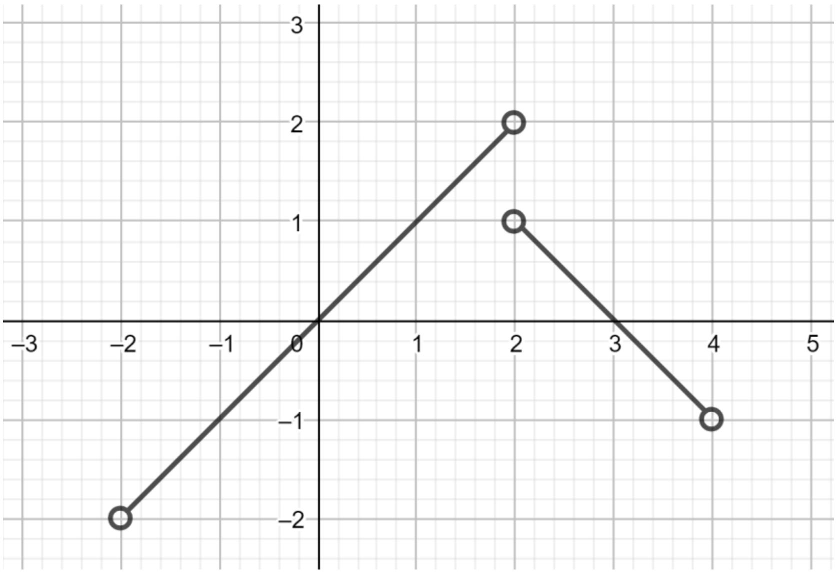
17) إذا كانت جميع المماسات لمنحنى $f(x)$ تقع تحت منحنى $f(x)$ على مجاله ، فأي العبارات التالية صحيحة:

$a)\ f(x)$ متزايد على مجاله
$b)\ f(x)$ متناقص على مجاله
$c)\ f(x)$ مقعراً للأعلى على مجاله
$c)\ f(x)$ مقعراً للأسفل على مجاله

18) إذا كان : $f(x)$ اقتران كثير حدود ، وكان : $f'(-1) = 0$ ، وكان : $f''(-1) > 0$ ،
فإنَّ النقطة : $(-1 , f(-1))$ هي:

$a)$ صغرى محلية $b)$ عظمى محلية $c)$ صغرى مطلقة $d)$ عظمى مطلقة

من خلال الشكل المجاور الذي يمثّل منحنى المشتقة الأولى :
أجب عن الأسئلة $(19 - 25)$:



19) قيم x الحرجة للإقتران $f(x)$:

$a) \{0, 2, 3\}$
$b) \{-2, 4\}$
$c) \{0, 3\}$
$d) \{2\}$

---

20) فترات التزايد للإقتران $f(x)$ هي:

$a)\ (0, 3)$ $b)\ (0, 2) \cup (2, 3)$ $c)\ [0, 3]$ $d)\ (-2, 2)$

---

21) قيم x التي تكون عندها قيمة عظمى محليَّة للإقتران $f(x)$ هي:

$a)\ \{2\}$ $b)\ \{3\}$ $c)\ \{0\}$ $d)\ \{4\}$

---

22) مجالات التقعُّر للأسفل للإقتران $f(x)$ هي :

$a)\ (3, 4)$ $b)\ (-2, 2)$ $c)\ (0, 3)$ $d)\ (2, 4)$

---

23) قيمة : $f''(2)$ تساوي:

$a)$ غير موجودة $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ -1$

---

24) قيمة : $f'(0)$ تساوي:

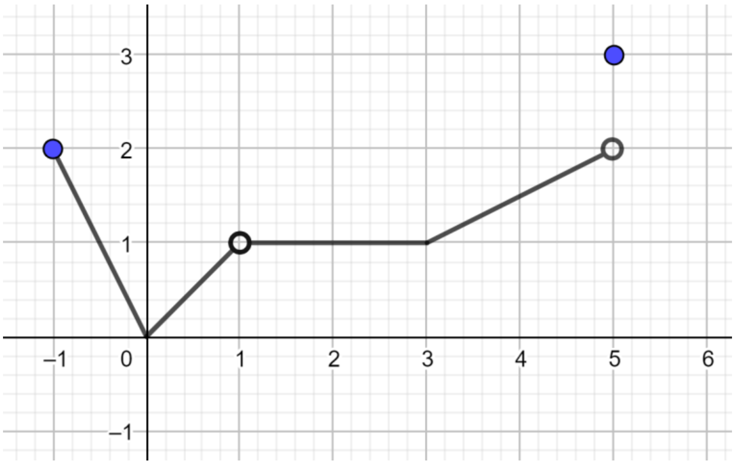
$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

---

25) قيمة : $f''(0)$ تساوي:

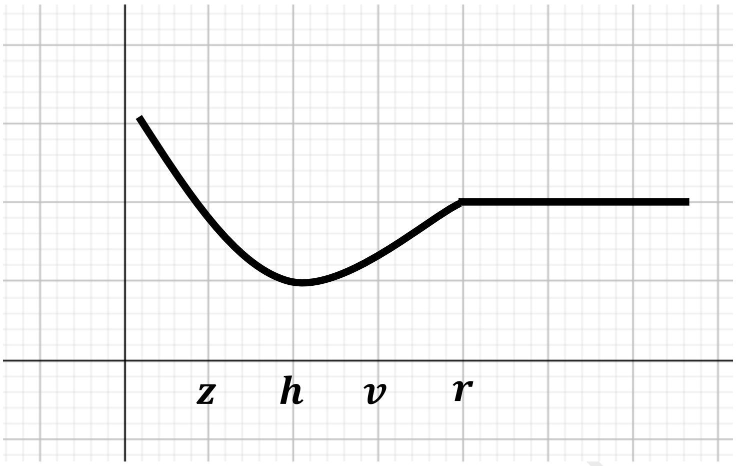
$a)\ 1$ $b)\ 0$ $c)\ -1$ $d)\ \frac{1}{2}$

26) يمثّل الشكل المجاور منحنى الإقتران $f(x)$ على مجاله ، فإنَّ مجموعة قيم x التي يكون الإقتران عندها نقطاً حرجة هي:



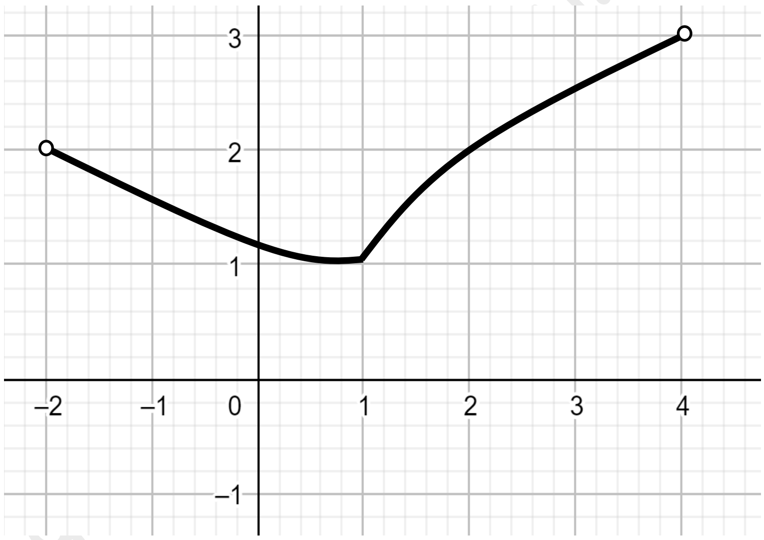
$a)\ \{0\} \cup (1,3]$
$b)\ \{-1,0,5\} \cup (1,3)$
$c)\ \{0,1,3\}$
$d)\ \{-1,0,1,5\}$

27) من خلال الشكل الذي يمثّل منحنى $f(x)$ ، فإنَّ قيمة x التي تكون عندها المشتقة الأولى سالبة والمشتقة الثانية موجبة للإقتران هي :



$a)\ z$
$b)\ h$
$c)\ v$
$d)\ r$

من خلال الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى ، حيث $f(x)$ متصل على الفترة $[-2,4]$ ، أجب عن السؤالين $(28 + 29)$:



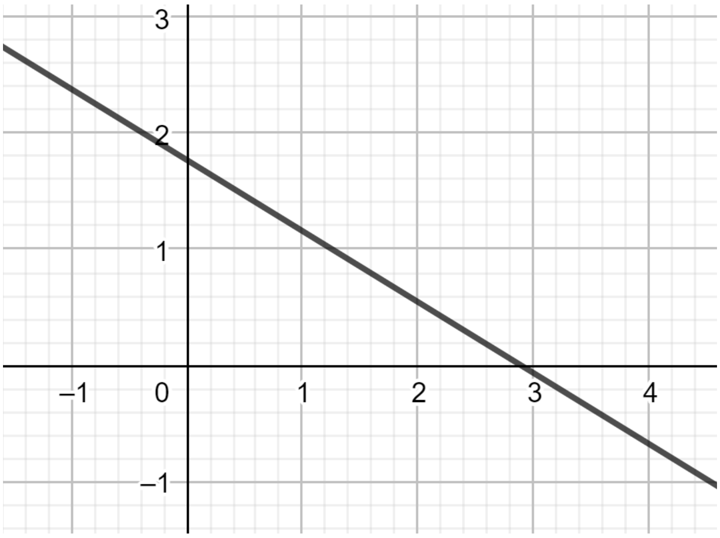
27) $f(x)$ يكون مقعَّراً للأعلى على الفترة :

$a)\ (-2,4)$
$b)(-2,1)$
$c)\ (1,4)$
$d)\ (0,4)$

29) قيمة x التي يكون عندها نقطة انعطاف هي:

$a) -2$ $\quad b)1$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)$ لا يوجد

30) الشكل المجاور يمثّل منحنى المشتقة الثانية للإقتران $f(x)$ المعرَّف على R ،
وكانت : $x = \{0, 4\}$ قيم حرجة ،
فإنَّ $f(x)$ متزايد على الفترة :



$a)\ (0, 4)$
$b)\ (0, 3\ )$
$c)\ (3\ , \infty\ )$
$d)\ R$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*b*	*c*	*b*	*d*	*b*	*b*	*b*	*d*	*a*

رقم السؤال	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*b*	*d*	*a*	*d*	*a*	*c*	*a*	*a*	*a*

رقم السؤال	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*d*	*a*	*c*	*a*	*a*	*a*	*c*	*b*	*a*

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

ثالثاً تطبيقات القيم القصوى

استراتيجات حل مسائل القيم القصوى:

رقم	الخطوة	تفصيل الخطوات
1	فهم السؤال :	قراءة السؤال جيدا ← تحديد معلومات السؤال ← تحديد المطلوب.
2	رسم مخطط :	رسم حالة تمثّل السؤال ← تدوين المعلومات على الرسم ← تحديد رمز للقيمة المطلوبة " المطلوب إيجاد أكبر / أصغر قيمة لها " .
3	العلاقة الرئيسية :	استعمل المتغيرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.
4	العلاقة المساعدة (إن أمكن):	وذلك لتخفيف عدد المتغيرات أو لإيجاد قيم مجهولة.
5	تحديد المجال:	للحكم على منطقية قيم المتغيِّر الناتجة ضمن معطيات السؤال.
6	إيجاد القيم القصوى :	باستخدام " اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية " اختبار المشتقة الأولى : قيم x حرجة ← دراسة اشارة المشتقة الأولى ← إيجاد القيم الصغرى أو العظمى. اختبار المشتقة الثانية : أصفار المشتقة الثانية←إيجاد المشتقة الثانية ← تعويض أصفار المشتقة الأولى في المشتقة الثانية

قوانين مهمَّة لإنشاء العلاقة الرئيسيَّة أو المساعدة في مسائل تطبيقات القيم القصوى

رقم	المطلوب	العلاقة (الرئيسة / المساعدة)
1	إيجاد أكبر حجم ممكن	• قوانين حجوم المجسَّمات. • تشابه المثلثات.
2	إيجاد أكبر مساحة ممكنة	• قوانين مساحات الأشكال. • تشابه المثلثات.
3	إيجاد أقل طول ممكن	• قوانين محيط الأشكال. • قانون طول القوس. • نظرية فيثاغورس. • قانون جيب التمام. • قانون الجيب
4	إيجاد أقرب مسافة	• نظرية فيثاغورس. • المسافة بين نقطتين. • قنون السرعة= $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$
5	تطبيقات إقتصادية: • إيجاد أعلى إيراد ممكن • إيجاد أكبر ربح ممكن • إيجاد أقل تكاليف ممكنة	• اقتران التكلفة " $C(x)$ ": اقتران يمثّل تكلفة انتاج x التكلفة الحدية " $C'(x)$ " : مشتقة اقتران التكلفة. • اقتران الإيراد " $R(x)$ " : اقتران يمثّل بيع x وحدة من المنتج الإيراد الحدي " $R'(x)$ " : مشتقة اقتران الإيراد. • اقتران الربح " $P(x)$ ": اقتران يمثّل الربح من البيع الربح الحدي " $P'(x)$ " : مشتقة اقتران الربح . بناءً على ماسبق : $P(x) = R(x) - C(x) \ \rightarrow \ P'(x) = R'(x) - C'(x)$
6	إيجاد أكبر زاوية	• النسب المثلثيَّة في مثلث قائم الزاوية.
7	تطبيقات في المستوى الإحداثي	• علاقة الإقتران المعطى. • المسافة بين نقطتين.

إمتحان درس تطبيقات القيم القصوى

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (10):

١) قطعة أرض على ضفة نهر يُراد إحاطتها بسياج دون تسييج ضفة النهر ، أوجد ابعاد قطعة الأرض ليكون طول السياج أقل ما يمكن ، علماً أن مساحة قطعة الأرض $800m^2$:

$a)\ 20, 40$ $b)\ 40, 30$ $c) 10, 20$ $d) 16, 50$

2) مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسين على محور السينات والرأسين الآخرين على منحنى الإقتران : $f(x) = 4x - x^2 + 8$:

$a)\ 8$ $b)\ 32$ $c)\ 16$ $d) 24$

3) مستطيل محيطه $36cm$ ثُني ليكون اسطوانة ، أوجد أكبر حجم ممكن للإسطوانة:

$a)\ \frac{108}{\pi}$ $b)\ \frac{36}{\pi}$ $c)\ \frac{12}{\pi}$ $d)\ \frac{216}{\pi}$

4) عبوة على شكل اسطوانة تنتهي بنصفي كرة ، فإذا كنت المساحة الجانبية للعبوة هي $1600\pi\ m^2$ ، أوجد نصف قطر الإسطوانة ليكون حجم العبوة أكبر مايمكن:

$a)\ 40$ $b)\ 20$ $c)\ \sqrt{800}$ $d) \sqrt{20}$

5) سلك طوله $28cm$ قُطِع إلى جزأين ، ثُني الجزء الأول ليكون مربعا وثُني الجزء الثاني ليكون مستطيلاً طوله 3 أمثال عرضه، جد طول ضلع المربَّع لتكون مساحتي المربع والمستطيل أقل مايمكن :

$a)\ 3$ $b)\ 12$ $c)\ 4$ $d) 2$

6) أوجد ارتفاع أكبر مخروط يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها $9cm$ ، بحيث يقع رأسه على سطح الكرة وتمس قاعدته سطح الكرة :

$a)\ 10$ $b)\ 12$ $c)\ 36$ $d) 16$

٧) جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل منحنى : $f(x) = 4 - x^2$ ، بحيث تقع القاعدة على المنحنى ورأسه على النقطة $(0, 1)$:

$a)\ 3$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d) 4$

8) صندوق حجمه مُعطى بالإقتران : $V = x^3 - 65x^2 + 1000x$ ، حيث x ارتفاع الصندوق ، فإنَّ قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر مايمكن :

$a)\ \frac{100}{3}$ $b)\ 10$ $c)\ 100$ $d)\ \frac{10}{3}$

9) اذا كانت العلاقة بين أضلاع المثلث والزاوية θ تعطى بالعلاقة :

$\tan\theta = \frac{x-6}{x^2}, x \neq 0$، فإنَّ قيمة x التي تجعل θ في نهايتها العظمى هي :

$a)\ 12$ $b)\ 6$ $c)\ 0$ $d) 4$

10) مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج x جهازاً سنويًّا ، يبيع كل جهاز بسعر $(200 - 0.01x)$ دينار ، فإذا كان تكلفة هذه الأجهزة : $(50x + 20)$ دينار ، فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنويا ؟

$a)\ 750$ $b)\ 150$ $c)\ 7500$ $d) 1500$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*b*	*d*	*b*	*a*

رقم السؤال	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*c*	*b*	*a*	*c*

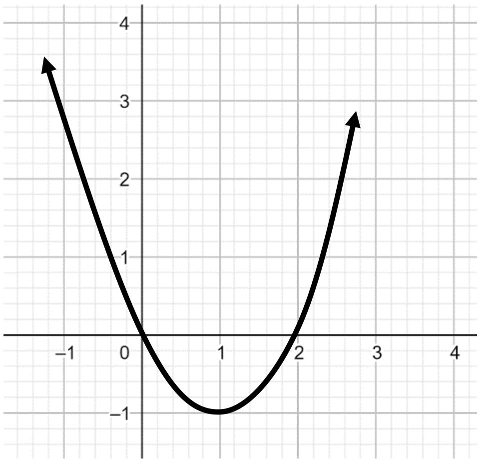
إمتحان وحدة تطبيقات التفاضل

الاسم :.................	الصف : 12 علمي
اليوم :	التاريخ: / /
الزمن : ساعة وربع	50

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (4) علماً بأن عدد صفحات الاختبار (2)

السؤال الأول : (20 علامة)

a) من خلال رسم منحنى المشتقة الأولى للإقتران $f(x)$ جد مايلي: (11 علامة)



1) فترات التزايد والتناقص للإقتران $f(x)$

2) قيم x القصوى المحلّية وبيِّن نوعها

3) فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل

4) قيم x الإنعطاف " إن وجدت "

b) إذا كان : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ ، جد ما يلي : (9 علامات)

1) فترات التزايد والتناقص للإقتران $f(x)$

2) القيم القصوى المطلقة والمحلّية مبيِّنا نوعها " إن وجدت "

3) فترات التقعُّر للأعلى والأسفل

السؤال الثاني : (20 علامات)

a) أنشئت منارة على جزيرة صغيرة ، وكانت تبعُد $(6km)$ عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم ، إذا كان مصباح الإنارة يكمل 3 دورات في الدقيقة ، جد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما يبعد $(3km)$ عن أقرب نقطة إلى المنارة ؟ (10 علامات)

b) قطاع دائري مُحيطه $(24cm)$ ، جد طول نصف قطر دائرته الذي يجعل مساحتهُ أكبر مايمكن.

(10 علامات)

السؤال الثالث : (10 علامات)

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

1) يتحرَّك جسيم على منحنى الإقتران : $f(x) = \frac{2}{4+x^2}$ ، إذا كان معدَّل تغيُّر الإحداثي y هو $\frac{1}{50}\ cm/s$) ،
فإنَّ معدَّل تغيُّر الإحداثي x عندما $x = -1$ هو:

$a)\ -\frac{1}{8}$ $\qquad b)\ \frac{1}{8}$ $\qquad c)\ 8$ $\qquad d)\ -8$

2) القيمة العظمى المطلقة للإقتران : $f(x) = 1 + cos^2(x), x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$ عند x تساوي :

$a)\ \frac{\pi}{4}$ $\qquad b)\ \pi$ $\qquad c)\ \frac{\pi}{2}$ $\qquad d)\ \frac{\pi}{3}$

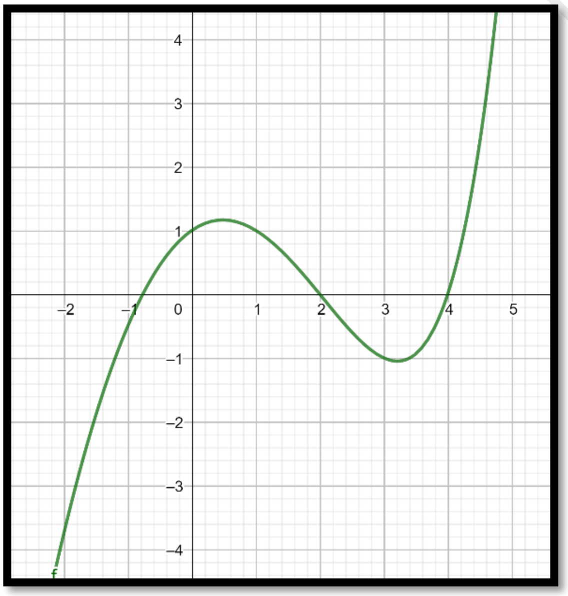
3) الفترة التي يكون فيها الإقتران متزايد : $f(x) = 3^{3x-x^3}$ ، هي :

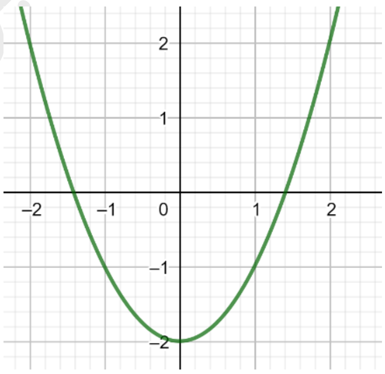
$a)\ (-\infty, 1)$ $\qquad b)\ (1, \infty)$ $\qquad c)\ (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $\qquad d)\ (-1, 1)$

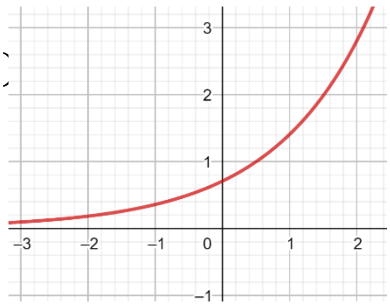
4) اذا كانت النقطة $(1, -2)$ انعطاف للإقتران : $f(x) = ax^3 + bx^2$ ، فإنَّ قيمة الثابت (a) هي :

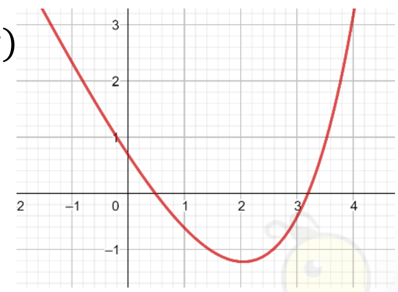
$a)\ -3$ $\qquad b)\ 3$ $\qquad c)\ -1$ $\qquad d)\ 1$

5) من خلال الشكل المجاور الذي يمثِّل التمثيل البياني للإقتران $f(x)$ أي من الإقترانات التالية يعد مشقة $f(x)$:



$a)$


$b)$


$c)$


$d)$