المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب التمارين

الفصل الأول

الوحدة الأولى (التفاضل)

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

الأستاذ: معتصم ابراهيم
0788586401

الوحدة الاولى: التفاضل

مشتقة اقتران القوة:

أجد مشتقة اقتران كل مما يأتي:

1) $f(x) = 7x^3$

$\acute{f}(x) = 21x^2$

2) $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{4}{3}.12x^{\frac{1}{3}}$

$= 16x^{\frac{1}{3}}$

$= 16\sqrt[3]{x}$

3) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

$f(x) = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x) = 6x - \frac{1}{2}.5x^{\frac{-1}{2}}$

$= 6x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \frac{3}{x^7}$

$f(x) = 3x^{-7}$

$\acute{f}(x) = -21x^{-8}$

$= \frac{-21}{x^8}$

5) $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

$f(x) = x^5 - 2x^3$

$\acute{f}(x) = 5x^4 - 6x^2$

$6)\ y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

$y = 7x^{-3} + 3x^{-1} - 2$

$\acute{y} = -21x^{-4} - 3x^{-2}$

$= -\frac{21}{x^4} - \frac{3}{x^2}$

مثال: أجد مشتقة كل مما يأتي:

$a)\ f(x) = \frac{2x-7}{x^2}$

$f(x) = 2x^{-1} - 7x^{-2}$

$\acute{f}(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$

$\acute{f}(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{14}{x^3}$

$b)\ f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{3}{2}\ 6x^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$

مشتقة الاقتران $y = (ax+b)^n$

أجد مشتقة كل مما يأتي:

$7)\ y = (2x-3)^6$

$\acute{y} = 6(2x-3)^5(2)$

$= 12(2x-3)^5$

8) $y=\sqrt{9-3x}$

$$y=(9-3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{y}=\frac{1}{2}(9-3x)^{\frac{-1}{2}}(-3)$$

$$=-\frac{3}{2(9-3x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{(9-3x)}}$$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$

$$y=(4x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\acute{y}=-\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{-3}{2}}(4)$$

$$\acute{y}=-\frac{2}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{y}=-\frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}$$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $y=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$$

$$y=(8-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\acute{y}=-\frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$\acute{y}=\frac{1}{2(8-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{y}=\frac{1}{2\sqrt{(8-x)^3}}$$

ايجاد معادلة المماس عند نقطة ما:

إذا كان الاقتران: $f(x) = (3x+2)^2$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

10) معادلة المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

$$f(x) = (3x+2)^2$$

$$\acute{f}(x) = 2(3x+2)(3)$$

$$\acute{f}(x) = 6(3x+2)$$

$$\acute{f}(x) = 18x+12$$

$$\acute{f}(-1) = 18(-1)+12$$

$$= -18+12$$

$$= -6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -6(x-(-1))$$

$$y - 1 = -6(x+1)$$

$$y = -6x - 6 + 1$$

$$y = -6x - 5$$

11) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

الخطوة الأولى: ميل العامودي على المماس

$$m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$$

الخطوة الثانية: معادلة العامودي على المماس

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x+1)$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + 1$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$$

مثال : إذا كان الاقتران : $f(x) = x^7 - x$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

a) معادلة المماس عند النقطة $(1\,,0)$

الخطوة الاولى: أجد ميل المماس عند النقطة $(1\,,0)$

$$f(x) = x^7 - x$$

$$\acute{f}(x) = 7x^6 - 1$$

$$\acute{f}(1) = 7(1)^6 - 1$$

$$= 7 - 1$$

$$= 6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = 6(x - 1)$ $(x_1 = 1\,, y_1 = 0, m = 6)$ بتعويض

بالتبسيط $y = 6x - 6$

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1\,,0)$

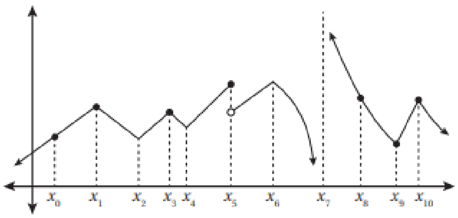
ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{6}$ ، ومنه فإن معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1,0) هي :

$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

الدرس الأول: الاشتقاق

1) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبرراً إجابتي .



f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4 x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل.

f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندها ، والاتصال شرط ضروري.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

2) $f(x) = 9e^x + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x) = 9e^x - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6x^{\frac{3}{2}}}$$

3) $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x^2}$

$$f(x) = 2e^x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3}$$

$$= 2e^x - \frac{2}{x^3}$$

4) $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

5) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2e^x + x \qquad , x = 2$$

$$f(2) = 2e^2 + 2$$

النقطة هي $(2\ ,\ 2e^2 + 2)$

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

ميل المماس: $f(x) = 2e^x + x$

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

$$f'(2) = 2e^2 + 1$$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (2e^2 + 2) = (2e^2 + 1)(x - 2)$$

$$y = (2e^2 + 1)(x - 2) - (2e^2 + 2)$$

$$y = (2e^2 + 1)(x - 2 - 2e^2 + 2)$$

$$y = (2e^2 + 1)(x - 2e^2)$$

6) اثبت عدم وجود مماس افقي لمنحنى الاقتران : $f(x) = 3x + \sin x + 2$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -3$$

قيمة $\cos x$ تقع بين $-1 \le \cos x \le 1$

اذن -3 لا تقع ضمن هذا المجال مما يعني عدم وجود مماس افقي لمنحنى f

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

7) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

$$s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$$

السرعة: $s'(t) = v(t) = 6t - 3t^2$

$v(t) = 6t - 3t^2$

التسارع: $\acute{v}(t) = a(t) = 6 - 6$

8) أجد موقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون.

يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$v(t) = 6t - 3t^2$

$6t - 3t^2 = 0$

$3t(2 - t) = 0$

$3t = 0$

$t = 0$

$2 - t = 0$

$t = 2$

$s(t) = 3t^2 - t^3$

$s(0) = 6(0) - 3(0)^2$

$s(0) = 0$

$s(2) = 6(2) - 3(2)^2$

$s(2) = 12 - 12$

$s(2) = 0$

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$ ، حيث $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

9- أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$f(x) = \ln x^2$

$f(x) = 2\ln x \qquad x = e^2$

$f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \qquad (e^2, 4)$

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = \ln x^2$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x^2}(2x)$$

$$= \frac{2}{x}$$

$$\acute{f}(e^2) = \frac{2}{e^2}$$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - \frac{2}{e^2}e^2$$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2$$

$$y = \frac{2}{e^2}x - 2 + 4$$

$$y = \frac{2}{e^2}x + 2$$

10- أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

الخطوة الأولى: ايجاد ميل المستقيم $y = mx + b$ حيث m الميل

$$6x - 2y + 5 = 0$$

$$[-2y = -6x - 5] \quad \div -2$$

$y = 3x + \frac{5}{2}$ ميل المستقيم $= 3$

الخطوة الثانية ايجاد الاحداثي x

$$f(x) = \ln x^2$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{x} = 3$$

$$x = \frac{2}{3}$$

إذا كان الاقتران : $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$$f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0$$

$$= 2\,(1) + 4(0)$$

$$= 2$$

12- أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

1- الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\,(1) - 4(0)$$

$= 2$ النقطة هي $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\,(0) + 4(1)$$

$= 4$ ميل المماس

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y - 2 = 4x - 2\pi$$

$$y = 4x - 2\pi + 2$$

الدرس الثاني

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)(\cos x) - (\sin x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

$$\acute{f}(x) = (-) - \csc x \cot x - \cos x$$

$$\acute{f}(x) = \csc x \cot x - \cos x$$

3) $f(x) = \dfrac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right)(1) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x - c)(1 - \frac{c}{x^2})}{(\frac{x^2 + c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x + \frac{c}{x} - c + \frac{c^2}{x^2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2 + c)^2}$$

4) $f(x) = x \cot x$

$$\acute{f}(x) = x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1)$$

$$= x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1)$$

$$= -x \csc^2 x + \cot x$$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

$$\acute{f}(x) = 4 - (x^2 \sec^2 x + \tan x\,(2x))$$

$$= 4 - x^2 \sec^2 x - 2x \tan x$$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2(-\sin x) - \cos x(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^4}$$

$$= \frac{x(-x\sin x - 2\cos x)}{x.x^3}$$

$$= \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$$

7) $f(x) = x(1 - \frac{4}{x+3})$

$$f(x) = x - \frac{4x}{x+3}$$

$$\acute{f}(x) = 1 - \frac{(x+3)(4) - (4x)(1)}{(x+3)^2}$$

$$= 1 - \frac{4x + 12 - 4x}{(x+3)^2}$$

$$= 1 - \frac{12}{(x+3)^2}$$

8) $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2\cos x}$

$$f(x) = \frac{3 - 3\sin x}{2\cos x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(2\cos x)(-3\cos x) - (3 - 3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$$

$$= \frac{-6\cos^2 x + 6\sin x - 6\sin^2 x}{(2\cos x)^2}$$

$$= \frac{-6(\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$ قاعدة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{-6(1 - \sin^2 x - \sin x + \sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$ قاعدة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \frac{-6(1 - \sin x)}{4\cos^2 x}$$

$$= \frac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

$$\acute{f}(x) = (x+1)e^x + e^x(1)$$

$$\acute{f}(x) = xe^x + e^x + e^x$$

$$\acute{f}(x) = xe^x + 2e^x$$

$$\acute{f}(x) = (x+2)e^x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x) = x^2 \cos x \ , (\frac{\pi}{2}, 0)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = x^2 \cos x$$

$$\acute{f}(x) = x^2(-\sin x) + \cos x\,(2x)$$

$$\acute{f}(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\frac{\pi}{2})^2 \sin(\frac{\pi}{2}) + 2(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2})$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}.(1) + \pi\,(0)$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}(x - \frac{\pi}{2})$$

$$y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$$

11) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \ , (\pi, -1)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (1 + \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$f'(\pi) = \frac{1 + \sin \pi}{\cos^2 \pi}$$

$$= \frac{1 + (0)}{(-1)^2}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 1(x - \pi)$$

$$y + 1 = x - \pi$$

$$y = x - \pi - 1$$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{(x^2)(2) - (2x - 1)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x + 2}{x^3} = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

$$\acute{f}(1) = \frac{2(1) - 1}{(1)^2}$$

$$= \frac{2 - 1}{1}$$

$$= 1$$

النقطة المطلوبة $(1, 1)$

13) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

$$\acute{h}(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$2x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$\acute{h}(0) = \frac{0^2}{0^2 + 1}$$

$$\acute{h}(0) = 0$$

النقطة هي : $(0, 0)$

14) $g(x) = \dfrac{8(x - 2)}{e^x}$

$$\acute{g}(x) = \frac{(8x - 16)}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{(e^x)(8) - (8x - 16)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8e^x - 8xe^x + 16e^x}{e^{2x}}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{24e^x - 8xe^x}{e^{2x}}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{24 - 8x}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x} = 0$$

$$8(3-x) = 0$$

$$3 - x = 0$$

$$x = 3$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x}$$

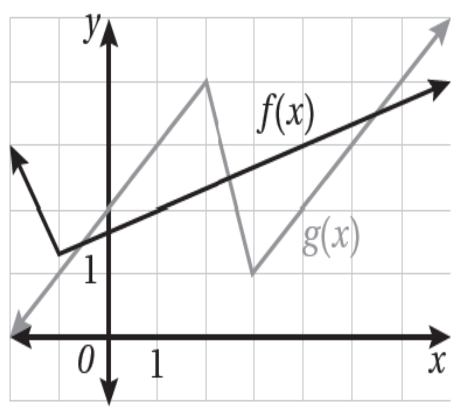
$$\acute{g}(3) = \frac{8(3-3)}{e^3}$$

$$\acute{g}(3) = 0$$

النقطة هي : $(3, 0)$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $u(x) = f(x)g(x)$ ،

وكان $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



15) $\acute{u}(1)$

$$\acute{u}(x) = f(x).\ \acute{g}(x) + g(x).\acute{f}(x)$$

$$\acute{u}(1) = f(1).\ \acute{g}(1) + g(1).\acute{f}(1)$$

$$\acute{u}(1) = (2).(1) + (3).\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\acute{u}(1) = 3$$

16) $$\acute{v}(x) = \frac{g(x).\acute{f}(x) - f(x).\ \acute{g}(x)}{(g(x))^2}$$

$$\acute{v}(4) = \frac{g(4).\acute{f}(4) - f(4).\ \acute{g}(4)}{(g(4))^2}$$

$$\acute{v}(4) = \frac{(2).\left(\frac{1}{3}\right) - (3).(1)}{(2)^2}$$

$$\acute{v}(4) = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4}$$

$$\acute{v}(4) = \frac{-\frac{7}{3}}{4}$$

$$\acute{v}(4) = -\frac{7}{12}$$

17) إذا كان $f(x) = x\sec x$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \sec x(1 + x\tan x)$.

$$f(x) = x\sec x$$

$$\acute{f}(x) = (x).(\sec x\tan x) + (\sec x).(1)$$

$$\acute{f}(x) = x\sec x\tan x + \sec x$$

$$\acute{f}(x) = \sec x(1 + x\tan x)$$

18) إذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجد $\acute{f}(x)$ ، و $\acute{\acute{f}}(x)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x).\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x).(1)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2).\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\ln x).(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

يمثل الاقتران : $t\geq 0$, $v(t)=\frac{10}{2t+15}$ السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم من وضع السكون ، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية :

19) أجد تسارع السيارة عندما $t=5$.

$$v(t)=\frac{10}{2t+15}$$

$$a(t)=\frac{(2t+15).(0)-(10).(2)}{(2t+15)^2}$$

$$a(t)=\frac{-20}{(2t+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{(2(5)+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{625}$$

$$a(5)=-\frac{4}{125}=\ -0.032\ \ ft/s^2$$

20) أجد تسارع السيارة عندما $t = 20$.

$$a(20) = \frac{-20}{(2(20)+15)^2}$$

$$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2}$$

$$a(20) = \frac{-20}{3025}$$

$$a(20) = -\frac{4}{605} = -0.007 \ \ ft/s^2$$

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ ، حيث t الزمن بالثواني ، والأبعاد بالسنتميترات ، أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = (\sqrt{t}).(6t+5)$$

$$A = (t)^{\frac{1}{2}}.(6t+5)$$

$$A = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{2}.6t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.5t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \ \ cm^2/s$$

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

$\acute{f}(x) = (100)e^{-0.1x}(-0.1)$

$\acute{f}(x) = -10e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$

$\acute{f}(x) = \cos(x^2 + 2).(2x)$

$\acute{f}(x) = 2x\cos(x^2 + 2)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$\acute{f}(x) = (2\cos x)(-\sin x)(1)$

$\acute{f}(x) = -2\cos x \sin x$

قانون نصف الزاوية $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\acute{f}(x) = -\sin 2x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

$\acute{f}(x) = (-\sin 2x).(2) - 2(-\sin x)(1)$

$\acute{f}(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$$f(x) = \log_3 \frac{x(x-1)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$f(x) = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2\,(x-1)\ln 3} - 0$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2\,x\ln 3 - 2\ln 3}$$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

$$\acute{f}(x) = (2)2\cot(\pi x + 2) - \csc^2(\pi x + 2)\,(\pi)$$

$$\acute{f}(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$$

7) $f(x) = \log 2x$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{2x\ln 10}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 10}$$

8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

$$\acute{f}(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

9) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

$$\acute{f}(x) = (2)\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right) \times \left(\frac{(x^3+2).(2x) - (x^2).(3x^2)}{(x^3+2)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{2x^4 + 4x - 3x^4}{(x^3+2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{4x - x^4}{(x^3+2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3+2)^3}$$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

$$\acute{f}(x) = (x^2).\frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + \sqrt{20-x}.(2x)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{2x\sqrt{20-x}.(2\sqrt{20-x})}{1.(2\sqrt{20-x})}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{4x(20-x)}{2\sqrt{20-x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{80x - 4x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

11) $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^{x^2}\cos(2x+1)(2) - \sin(2x+1)2xe^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

$$\acute{f}(x) = 3^{\cot x}(-\csc^2 x)\ln 3$$

$$\acute{f}(x) = -3^{\cot x}\ln 3\csc^2 x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

13) $f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x \quad , x = \dfrac{\pi}{2}$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2\sin 5\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 2(1) - 4(0)$$

$$f(x) = 2$$

النقطة هي : $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x$$

$$\acute{f}(x) = 2\cos 5x(5) - 4\,(-\sin 3x)(3)$$

$$\acute{f}(x) = 10\cos 5x + 12\sin 3x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos 5\left(\frac{\pi}{2}\right) + 12\sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos(\pi) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\,(0) + 12\,(-1)$$

$$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 \quad \text{ميل المماس}}$$

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y - 2 = -12x + 6\pi$$

$$\boxed{y = -12x + 6\pi + 2}$$

$14)\ \ f(x) = (x^2 + 2)^3 \quad , x = -1$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f(-1) = ((-1)^2 + 2)^3$$

$$f(-1) = (1 + 2)^3$$

$$f(-1) = (3)^3$$

$$f(-1) = 27$$

النقطة هي : $(-1, 27)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = (x^2 + 2)^3$$

$$\acute{f}(x) = 3(x^2 + 2)^2(2x)$$

$$\acute{f}(x) = 6x(x^2 + 2)^2$$

$$\acute{f}(-1) = 6(-1)((-1)^2 + 2)^2$$

$$\acute{f}(-1) = -6(3)^2$$

$$\acute{f}(-1) = -6(9)$$

$$\acute{f}(-1) = -54$$

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 27 = -54(x - (-1))$$

$$y - 27 = -54(x + 1)$$

$$y - 27 = -54x - 54$$

$$y = -54x - 54 + 27$$

$$y = -54x - 27$$

$15) \ f(x) = \tan 3x \quad , x = \frac{\pi}{4}$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan 3(\frac{\pi}{4})$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

النقطة هي $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$\acute{f}(x) = \sec^2 3x.(3)$$

$$\acute{f}(x) = 3\sec^2 3x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sec^2 3(\frac{\pi}{4})$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(-\sec\frac{\pi}{4})^2$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(-\sqrt{2})^2$$

ملاحظة $\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}}$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(2) = 6$$

3-الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 6(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y + 1 = 6x - \frac{3\pi}{2}$$

$$y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$$

$$y = 6x - \frac{3\pi + 2}{2}$$

إذا كان الاقتران : $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

16) أثبت أن $\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$.

$$f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$$

$$\acute{f}(x) = 3(\cos x).(1) - (3\sin^2 x).(\cos x).(1)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x(1 - \sin^2 x)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x(\cos^2 x)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$$

17) أجد و $\acute{\acute{f}}(x)$.

$$\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 3(3)\cos^2 x . -\sin x\,(1)$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -9\cos^2 x . \sin x$$

18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t\ , y = b\sin t$ ، حيث :

$0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b .

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$x = a\cos(\frac{\pi}{4})$$

$$x = a\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y = b\sin(\frac{\pi}{4}) = b\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي : $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = b\sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = b\cos t$$
$$x = a\cos t$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot(\frac{\pi}{4})$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}(1)$$
$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}}$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **معادلة المماس:**

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}(x - \frac{a}{\sqrt{2}})$$
$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}x + \frac{b}{\sqrt{2}}$$
$$y = -\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{\sqrt{2}\,b}{2} + \frac{\sqrt{2}\,b}{2}$$

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{2}\,b}{2}$$

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}\,b$$

إذا كان الاقتران : $y = \mathrm{e}^{ax}$ ، حيث a ثابت، و$a > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ، ويكون ميل المماس عندها 1 .

1- الخطوة الأولى : نشتق الاقتران $y = \mathrm{e}^{ax}$ ثم نساوي المشتقة بالميل وهو 1 لإيجاد قيمة x

$$y = \mathrm{e}^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = a\mathrm{e}^{ax}$$

$$a\mathrm{e}^{ax} = 1$$

$$\frac{a\mathrm{e}^{ax}}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$\ln \mathrm{e}^{ax} = \ln\frac{1}{a}$$

$$ax.(1) = \ln\frac{1}{a}$$

$$ax = \ln 1 - \ln a$$

$$ax = 0 - \ln a$$

$$ax = -\ln a$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-\ln a}{a}$$

$$\boxed{x = \frac{-\ln a}{a}}$$

2- الخطوة الثانية: نعوض قيمة $x = \frac{-\ln a}{a}$ في الاقتران لإيجاد قيمة y

$y = e^{a(\frac{-\ln a}{a})}$

$y = e^{-\ln a}$

$y = (e^{\ln a})^{-1}$

$y = a^{-1}$

$\boxed{y = \frac{1}{a}}$

إذن النقطة هي : $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

20) أثبت أنه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$ ، ثم أجد قيمة الثابت k .

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل العمودي على المماس:

بما أن ميل المماس هو 1 فإن ميل العمودي على المماس هو (- مقلوب ميل المماس) $m_1 = -1$

2- الخطوة الثانية: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$y - \frac{1}{a} = -1(x - \frac{-\ln a}{a})$

$y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a}$

$\boxed{y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$

3- الخطوة الثالثة : كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$:

$x + y = k$

$y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$

$\boxed{y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$

4- الخطوة الرابعة : إيجاد قيمة الثابت k :

$$k = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\boxed{k = \frac{1 - \ln a}{a}}$$

21) إذا كان الاقتران : $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ ، وكان : $\acute{f}(1) = 4$ ، وكان : $f(1) = 7$ فأجد $\acute{h}(1)$.

$$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{(3\acute{f}(x))}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$$

$$\acute{h}(1) = \frac{(3\acute{f}(1))}{2\sqrt{4 + 3f(1)}}$$

$$\acute{h}(1) = \frac{3(4)}{2\sqrt{4 + 3(7)}}$$

$$\acute{h}(1) = \frac{12}{2\sqrt{25}}$$

$$\acute{h}(1) = \frac{6}{5}$$

22) إذا كان الاقتران : $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ فأثبت أن $\acute{\acute{f}}(x) = 4f(x)$.

$$f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$\acute{f}(x) = (2)e^{2x} + (-2)e^{-2x}$$

$$\acute{f}(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = (2)2e^{2x} - (-2)2e^{-2x}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 4(e^{2x} + e^{-2x})$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 4f(x)$$

23) إذا كان : $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$ ، فأثبت أن $\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$.

$f(x) = \sin 4x + \cos 4x$

$\acute{f}(x) = \cos 4x(4) + -\sin 4x\,(4)$

$\acute{f}(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$

$\acute{\acute{f}}(x) = 4 -\sin 4x(4) - 4\cos 4x(4)$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16(\sin 4x + \cos 4x)$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16f(x)$

اثبات $\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$

$\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$

$\boxed{-16f(x) + 16f(x) = 0}$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $y = 2\cos\theta$, $x = \sin^2\theta$ ، حيث : $0 \le \theta \le 2\pi$:

24) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ .

$y = 2\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$

$x = \sin^2\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos\theta}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sec\theta}$

25) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

1- الخطوة الأولى: مساواة المشتقة مع الميل

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{-\sec\theta = \sqrt{2}}$$

2- الخطوة الثانية : ايجاد قيم : $x\ ,y$

قانون $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = 2\cos\theta$$

$$y = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y = \sqrt{2}.\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y = \sqrt{2}(-1)$$

$$\boxed{y = -\sqrt{2}}$$

قاعدة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

قاعدة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$x = \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \ (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$\sin^2\theta = 1 - \ \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \ \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta = \boxed{x = \ \frac{1}{2}}$$

3-الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(x - \frac{1}{2})$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - (\sqrt{2}.\frac{1}{2})$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}\right)$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

26) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y .

يكون المماس موازياً للمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف ، أي عندما يكون $\cos\theta = 0$

عندها يتم إيجاد قيم y و x على ان $\cos\theta = 0$

قاعده $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$$\sin^2\theta = 1 - (0)^2$$

$$\boxed{x = \sin^2\theta = 1}$$

$$y = 2\cos\theta$$

$$\boxed{y = 2 \times 0 = 0}$$

إذن النقطة هي : $(1, 0)$

27) سيارة : يمثل الاقتران : $v(t)=15te^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسار مستقيم ، حيث : $0\le t\le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفراً .

$$v(t)=15te^{-0.05t^2}$$

$$a(t)=15\left(\left(t.\left(e^{-0.05t^2}\right).(-0.1t)+\left(e^{-0.05t^2}\right).(1)\right)\right)$$

$$a(t)=-1.5t^2e^{-0.05t^2}+15e^{-0.05t^2}$$

$$a(t)=15e^{-0.05t^2}(1-0.1t^2)$$

$$a(t)=0\ \rightarrow 15e^{-0.05t^2}(1-0.1t^2)=0$$

$$\frac{15e^{-0.05t^2}}{15e^{-0.05t^2}}(1-0.1t^2)=\frac{0}{15e^{-0.05t^2}}$$

$$1-0.1t^2=0$$

$$0.1t^2=1$$

$$\frac{0.1t^2}{0.1}=\frac{1}{0.1}$$

$$t^2=10$$

$$\sqrt{t^2}=\sqrt{10}$$

$$t=\sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10})=15\sqrt{10}e^{-0.05(\sqrt{10})^2}$$

$$v(\sqrt{10})=15\sqrt{10}e^{-0.5}$$

$$v(\sqrt{10})=\frac{15\sqrt{10}}{e^{0.5}}$$

$$v(\sqrt{10})=\frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}\quad m/s$$

أجد $(fog)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي :

28) $f(u) = u^5 + 1 \quad , u = g(x) = \sqrt{x} \ , \quad x = 1$

$f'(u) = 5u^4$

$f'(u) = 5\left(\sqrt{1}\right)^4$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{1}\right]$

$(fog)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^5 + 1$

$(fog)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 1$

$(fog)' = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$(fog)'(x) = f'(u) \times g'(x)$

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$(fog)'(x) = f'(g(1)) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(fog)'(1) = f'(1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{1}}$

$(fog)'(1) = f'(1) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

29) $f(u) = u + \dfrac{1}{\cos^2 u} \quad , u = g(x) = \pi x \ , x = \dfrac{1}{4}$

$f(u) = u + \sec^2 u$

$f'(u) = 1 + 2\sec u \sec u \tan u$

$f'(u) = 1 + 2\sec^2 u \tan u$

$, u = g(x) = \pi x$

$g'(x) = \pi$

$(fog)'(x) = f'(u) \times g'(x)$

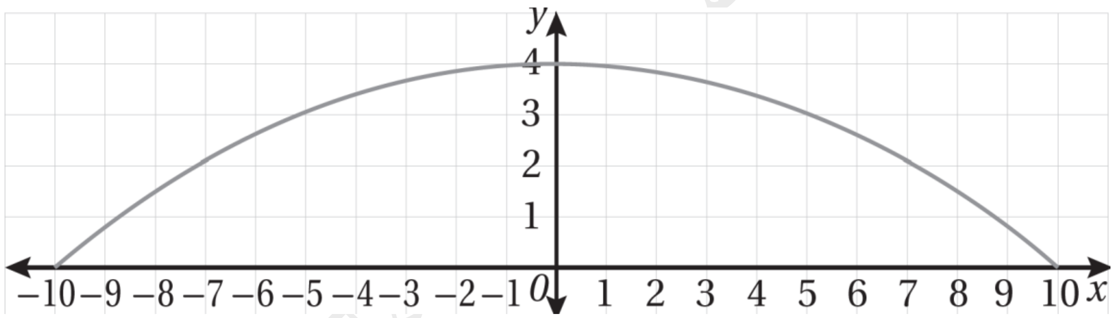
$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$(fog)'(\frac{1}{4}) = f'(g\left(\frac{1}{4}\right)) \times g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$(fog)'(\frac{1}{4}) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi$

$(fog)'(\frac{1}{4}) = 5\pi$

مرور: يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يمثل المحور x سطح الأرض ، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات .



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي:

$x = 10\ \sin t\ , y = 2 + 2\cos 2t$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كلا ما يأتي :

30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t .

$y = 2 + 2\cos 2t$

$\frac{dy}{dt} = 2(-\sin 2t)(2)$

$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t$

$x = 10\ \sin t$

$\frac{dx}{dt} = 10\cos t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4\sin 2t}{10\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin 2t}{5\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4\sin t\ \cos t}{5\cos t}$$

قاعده $\boxed{\sin 2x = 2\sin x\ \cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4\sin t}{5}$$

31) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب .

يكون المماس عند اعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيا، إذن ميله يساوي صفر.

$$\frac{dx}{dt}=0 \rightarrow \sin t=0 \rightarrow t=0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفر ، إذن

$$x=10\ \sin t$$
$$10\ \sin t=0$$
$$t=0$$

أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4 ، إذن

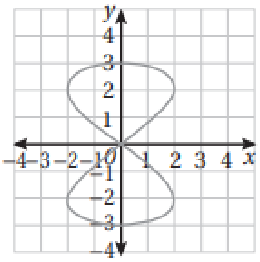
$$y=2+2\cos 2t$$

$$2+2\cos 2t=4$$

$$2\cos 2t=2$$

$$\cos 2t=1$$

$$t=0$$



32) تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t \qquad , y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لكل من فرعي المعادلة عند نقطة الأصل، مبررا ً إجابتي.

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة، من السؤال نقطة الأصل وهي: (0,0)

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = 3\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

$$x = 2\sin 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(2)$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$(x, y) = (2\sin 2t\,, 3\cos t)$$

$$2\sin 2t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$3\cos t = 0$$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معاً عندما $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos 2\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3(1)}{4(-1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{3\pi}{2}}{4\cos 2\frac{3\pi}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3(-1)}{4(-1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3}{4}$$

إذن أحد فرعي المعادلة ميله عند نقطة الاصل $\frac{3}{4}$, والاخر ميله $-\frac{3}{4}$

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^3y^3 = 144$

$$(x^3).(3y^2\frac{dy}{dx}) + (y^3).(3x^2) = 0$$

$$x^3 3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 = 0$$

$$\frac{3x^3y^2}{3x^3y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^3}{3x^3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

2) $xy = \sin(x+y)$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) = \cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x-\cos(x+y))}{(x-\cos(x+y))} = \frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$$

3) $y^4 - y^2 = 10x - 3$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 10$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 2y) = 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{4y^3 - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2y^3 - y}$$

4) $x\sin y - y\cos x = 1$

$$(x).\left(\cos y\frac{dy}{dx}\right) + (\sin y).(1) - (y).(-\sin x) + (\cos x).\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y + y\sin x - \cos x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx} - \cos x\frac{dy}{dx} = -\sin y - y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x\cos y - \cos x)}{x\cos y - \cos x} = \frac{-\sin y - y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin y - y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

5) $\cot y = x - y$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(1 - \csc^2 y)}{1 - \csc^2 y} = \frac{1}{1 - \csc^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cot^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan^2 y$$

6) $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

$$(xy)^{\frac{1}{2}} + x + y^2 = 0$$

$$\frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx}\right] = 0 \qquad \frac{2\sqrt{xy}}{1}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x + 4y\sqrt{xy})}{x + 4y\sqrt{xy}} = \frac{-y - 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

7) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad , (2, -1)$

1 -الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$2x + (3x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 1 - 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(3x + 2y - 3)}{3x + 2y - 3} = \frac{1 - 2x - 3y}{3x + 2y - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x - 3y}{3x + 2y - 3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, -1) = \frac{1 - 2(2) - 3(-1)}{3(2) + 2(-1) - 3}$$

$$= \frac{1 - 4 + 3}{6 - 2 - 3}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, -1) = 0}$$ ميل المماس

2- الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **معادلة المماس:**

$$y - (-1) = 0(x - 2)$$

$$y + 1 = 0$$

$$\boxed{y = -1}$$ معادلة المماس

$8)\quad xe^y + y\ln x = 2 \quad ,(1, \ln 2)$

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x).\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y).(1) + (y).\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x).\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx} + e^y + \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx} + \ln x\frac{dy}{dx} = -e^y - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}(xe^y + \ln x) = -(e^y + \frac{y}{x})$$

$$\left[\frac{dy}{dx}(xe^y + \ln x) = -(\frac{xe^y + y}{x})\right] \quad \times \frac{1}{(xe^y + \ln x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xe^y + y}{x(xe^y + \ln x)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) = -\frac{(1)e^{\ln 2} + \ln 2}{1(1e^{\ln 2} + \ln 1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) = -\frac{e^{\ln 2} + \ln 2}{(e^{\ln 2} + \ln 1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) = -\frac{2 + \ln 2}{(2 + 0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) = -\frac{2 + \ln 2}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\ \ln 2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, \ln 2) \boxed{= -1 - \frac{1}{2}\ \ln 2}$$ ميل المماس

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \ln 2 = (-1 - \frac{1}{2}\ \ln 2)(x - 1)$$

$$y = -x + 1 - \frac{1}{2}\ \ln 2x + \frac{1}{2}\ \ln 2 + \ln 2$$

$$y = (-1 - \frac{1}{2}\ \ln 2)x + 1 + \frac{3}{2}\ \ln 2$$

9) $4xy = 9 \quad ,(1,\frac{9}{4})$

1-الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(4x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (4y).(1) = 0$$

$$4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$\frac{4x\frac{dy}{dx}}{4x} = \frac{-4y}{4x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|\ (1,\frac{9}{4}) = -\frac{\frac{9}{4}}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|\ (1,\frac{9}{4}) \boxed{= -\frac{9}{4}}$$

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}(x - 1)$$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4}$$

$$\boxed{y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2} \quad \text{معادلة المماس}}$$

10) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad , (1, 2)$

1-الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$$

$$2\,\frac{1}{2}x + 2\,\frac{1}{8}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + \frac{1}{4}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{y}{4}\frac{dy}{dx} = -x\right] \quad \times \frac{4}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, 2) = -\frac{4(1)}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1, 2) \boxed{= -2 \quad \text{ميل المماس}}$$

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -2(x - 1)$

$y - 2 = -2x + 2$

$y = -2x + 2 + 2$

$\boxed{y = -2x + 4 \quad \text{معادلة المماس}}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

11) $x^2y - 4x = 5$

$(x^2).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(2x) - 4 = 0$

$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0$

$\frac{x^2}{x^2}\frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 4x^{-2} - 2yx^{-1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} - (-2y.-x^{-2}) + \left(-2x^{-1}.\frac{dy}{dx}\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}(4x^{-2} - 2yx^{-1})$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 8x^{-3} + 4yx^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -16x^{-3} + 6yx^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$

12) $x^2 + y^2 = 8$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-x.-y^{-2}\frac{dy}{dx}\right) + (-y^{-1}.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2}(-xy^{-1}) - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^2y^{-3} - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{1.y^2}{y.y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2 - y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{y^3}$$

13) $2y = x^3$

$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y).(6x) - (3x^2).(2\frac{dy}{dx})}{(2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2\frac{dy}{dx}}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2\left(\frac{3x^2}{2y}\right)}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - \frac{9x^4}{y}}{4y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[12xy - \frac{9x^4}{y}\right] \times \frac{y}{1}}{4y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

14) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x^{(x^2)}$ عندما $x = 2$.

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$$y = x^{(x^2)}$$

$$y = 2^{(2^2)}$$

$$y = 2^{(4)}$$

$$y = 16$$

النقطة $\boxed{(2, 16)}$

2- الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\ln y = \ln x^{(x^2)}$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \left(x^2 . \frac{1}{x}\right) + (\ln x . 2x)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x + 2x\ln x\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy + 2xy\ln x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, 16) = (2 \times 16) + (2 \times 2 \times 16\ln 2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, 16) = \boxed{32 + 64\ln 2}$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 16 = 32 + 64\ln 2\,(x - 2)$$

15) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x+y)^3 = x^2 + y$$

$$3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx}$$

$$3(1+0)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2(1) + \frac{dy}{dx}$$

$$3\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 2 - 3$$

$$\frac{2}{2}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}}$$ ميل المماس

بما أن ميل المماس هو $\frac{-1}{2}$ فإن ميل العمودي على المماس هو (- مقلوب ميل المماس) = 2

معادلة العمودي على المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - 0 = 2(x-1)$$

$$y = 2x - 2$$

16) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

1- الخطوة الاولى إيجاد النقطة

$$y = x(\ln x)^x$$

$$y = e(\ln e)^e$$

$$y = e(1)^e$$

$$\boxed{y = e}$$

النقطة $\boxed{(e, e)}$

2- الخطوة الثانية إيجاد ميل المماس

$$y = x(\ln x)^x$$

$$\ln y = \ln(x(\ln x)^x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \ln x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y}{\ln x} + y\ln(\ln x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = \frac{e}{e} + \frac{e}{\ln e} + e\ln(\ln e)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + \frac{e}{1} + e\ln(1)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + e + 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + e$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة إيجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - e = (1 + e)(x - e)$

$y - e = 1(x - e) + e(x - e)$

$y - e = x - e + ex - e^2$

$y = x - e + ex - e^2 + e$

$y = x + ex - e^2$

$\boxed{y = (1 + e)x - e^2}$ معادلة المماس

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

17) $y = (x - 2)^{x+1}$

$\ln y = (x + 1)\ln(x - 2)$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x + 1) \times (\frac{1}{x - 2}) + \ln(x - 2)(1)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{(x + 1)}{x - 2} + \ln(x - 2)\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x + 1)}{x - 2} + y\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2)^{x+1}(x + 1)}{x - 2} + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2)(x - 2)^{x}(x + 1)}{x - 2} + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x - 2)^{x}(x + 1) + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

18) $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$y = \frac{x^{10}(x^2+5)^{\frac{1}{2}}}{(8x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\ln y = 10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 10.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{3}.\frac{16x}{(8x^2+2)}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right)$$

19) $y = (\cos x)^x$

$$\ln y = x\ln(\cos x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln(\cos x)(1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln(\cos x)(1)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)(-\tan x) + \ln(\cos x)\right] \quad \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(x)(-\tan x) + y\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(x)(-\tan x) + (\cos x)^x\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x) + (\cos x)^x\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln(\cos x))$$

20) أجد معادلتي مماس منحنى العلاقة : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمران بالنقطة $(4, 0)$.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}2x + \frac{1}{9}2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{4}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{9}.y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$$

$$\left[\frac{2y}{9}.\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}\right] \quad \times \frac{9}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

ميل المماس يساوي

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}= m$$

$$\frac{y-0}{x-4}=-\frac{9x}{4y}$$

$$4y^2 = 36x - 9x^2$$

بضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أن:

$$\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right] \quad \times 36$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$4y^2 = 36 - 9x^2$$

$$36x - 9x^2 = 36 - 9x^2$$

$$36x = 36 - 9x^2 + 9x^2$$

$$36x = 36$$

$$\boxed{x = 1}$$

نعوض قيمة $x = 1$ في المعادلة $4y^2 = 36 - 9x^2$ لإيجاد قيم y

$$\sqrt{4y^2} = \pm\sqrt{36-9x^2}$$

$$\frac{2y}{2}=\pm\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}$$

$$\boxed{y=\pm\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}}$$

$$\sqrt{4y^2} = \pm\sqrt{36x-9x^2}$$

$$\frac{2y}{2} = \pm\frac{\sqrt{36x-9x^2}}{2}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{36x-9x^2}}{2}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{36x-9x^2}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{36-9(1)^2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{36(1)-9(1)^2}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{(9)(3)}}{2} = \pm\frac{\sqrt{(9)(3)}}{2}$$

$$y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

النقطتان هما : $\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{(9)(1)}{-(4)(\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{9}{(\frac{12\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{9}{6\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2.3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9x}{4y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{(9)(1)}{(4)(\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9}{(\frac{12\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9}{6\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{3\sqrt{3}}{2.3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

معادلة المماس الأول:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}(4)$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\sqrt{3}}$$

معادلة المماس الثاني:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}(4)$$

$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}}$$

21) أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة : $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x ، ثم أثبت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان .

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة أو النقاط

حيث ان تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x بالتالي $y = 0$

بتعويض $y = 0$ لإيجاد قيمة x

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$x^2 + x(0) + (0)^2 = 7$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{7} \quad \boxed{x = \pm\sqrt{7}}$$

النقطتان هما : $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$

الخطوة الثانية: ايجاد الميل

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$2x + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x+2y}{x+2y}\right) = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{2\sqrt{7}+0}{\sqrt{7}+2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\boxed{= -2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{7},0)} = -\frac{-2\sqrt{7}+0}{-\sqrt{7}+2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}}\boxed{= -2}$$

ميلا المماس متساويان ، إذن هذان المماسان متوازيان .