الثاني الثانوي الأدبي

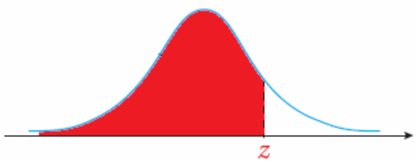
Hasanat

Collins

Hasanat

الاحصاء والاحتمالات

الإحصاء والاحتمالات



الوحدة 5
الإحصاء والاحتمالات
Statistics and Probability

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

عبدالقادر الحسنات

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

الدرس 1 التوزيع الهندسي Geometric Distribution

1) تجربة بيرنولي (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط ، بحيث يُعبَّرعن أحدهما بالنجاح، ويُعبَّر عن الآخر بالفشل. فمثلًا:

-- تجربة إلقاء قطعة النقد مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي ؛ لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعَدُّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

-- تجربة إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام:{6 ، 5 ، 4 ،3 ، 2 ،1} : يُمكِن عَدُّ هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أقل من 5 هو النجاح، وأنَّ أيَّ عدد (ناتج) آخر هو الفشل.

2) التجربة الاحتمالية الهندسية : يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أوَّل نجاح اسم التجربة الاحتمالية الهندسية (geometric probability experiment)

التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشـــروط الأربعة الآتية في تجربة عشـــوائية ما، فإنَّها تُعَـــدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1 اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.

2 فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.

3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

4 التوقُّف عند أوَّل نجاح.

أتحقَّق من فهمي 72

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا 4 مَرّات، ثم كتابة الأعداد الظاهرة.

b) إلقاء حنان قطعة نقد منتظمة بشكل مُتكرِّر، ثم التوقُّف عند ظهور الصورة.

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1 عدد الأســئلة التي ستجيب عنها أسماء إجابة صحيحة من بين 25 ســؤالًا من نوع الاختيار من مُتعدِّد، لكلٍّ منها 5 بدائل، واحد منها فقط صحيح، في حال الإجابة عن الأسئلة جميعها بصورة عشوائية.

2 رمي لاعب كرة ســلَّة الكرة نحو الهدف بشــكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند إحراز الهدف أوَّل مَــرَّة، علمًا بأنَّ احتمال إحرازه الهدف في كل مَرَّة هو 0.3

a

أتحقق من فهمي صفحة 72 نبحث في تحقق الشروط الأربعة:

- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة لكن عدد المرات محدد (تم رمي النرد 4 مرات) ومستقلة (رمي حجر النرد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميه في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول غير محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل، هذا الشرط غير محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو $\frac{1}{6}$ ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح غير محقق، لأن ريان توقف بعد الرمية الرابعة بغض النظر عن النتائج التي حصل عليها في كل مرة، ولم يتوقف بعد أول نجاح.

إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.

b

نبحث في تحقق الشروط الأربعة:

- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء قطعة النقد 4 مرات) ومستقلة (إلقاء قطعة النقد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميها في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (ظهور صورة) أو فشل (عدم ظهور صورة)، هذا الشرط محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو $\frac{1}{2}$ ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح محقق، لأن حنان توقفت بعد ظهور الصورة أول مرّة.

إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.

1

نبحث في تحقق الشروط الأربعة:

- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تجيب أسماء عن عدة أسئلة) ومستقلة (الإجابة عن سؤال بشكل صحيح أو غير صحيح لا يؤثر في صحة الإجابة عن الأسئلة الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (الإجابة بشكل صحيح)أو فشل ، هذا الشرط محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.2 ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو غير محقق، لأن أسماء ستتوقف بعد الإجابة عن الأسئلة جميعها.

إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.

2

نبحث في تحقق الشروط الأربعة:

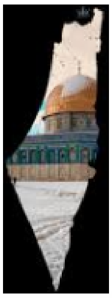
- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم رمي كرة السلة عدة مرات) ومستقلة (إصابة الهدف أو عدمه في كل مرة لا يؤثر في نتيجة إصابته في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (إحراز الهدف)أو فشل (عدم إحراز الهدف)، هذا الشرط محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.3 ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو محقق، لأن اللاعب سيتوقف بعد إصابته الهدف لأول مرّة.

إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.

المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية،
والتوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح ، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وبالرموز : $X \sim Geo(p)$ حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة



التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فــإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$

حيث: x: عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح. p: احتمال النجاح في كل محاولة.

إذا كان $X \sim Geo(p)$، فإنَّ: $P(X > x) = (1-p)^x$

مثال:

$$X \sim Geo(0.7) \Rightarrow$$

$$a)P(X=2) = \boxed{p(1-p)^{x-1}} = (0.7)(1-0.7)^1 = 0.21$$

$$b)\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 2) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= (0.7)(1-0.7)^0 + 0.21 = 0.7 + .21 = 0.91$$

$$c)P(X>3) = 1 - P(X \le 3)$$
$$= 1 - (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3))$$
$$= 1 - (0.7 + .21 + (0.7)(1-0.7)^2) = 0.027$$

$$\text{(or)}: P(X>3) = (1-P)^3 = (1-0.7)^3 = (0.3)^3 = 0.027 \quad \boxed{P(X>n) = (1-P)^n}$$

$$d)P(3 \le X < 5) = P(X=3) + P(X=4)$$
$$= (0.7)(0.3)^2 + (0.7)(0.3)^3 = 0.063 + 0.0189 = 0.0819$$

$$e)P(2 < X \le 4) = P(X=3) + P(X=4)$$
$$= (0.7)(0.3)^2 + (0.7)(0.3)^3 = 0.063 + 0.0189 = 0.0819$$

$$f)\mathrm{P}(\mathrm{X} < 2) = P(X=1) = (0.7)(1-0.7)^0 = 0.7(1) = 0.7$$

$$g)P(1 < X < 3) = P(X=2) = (0.7)(0.3)^1 = 0.21$$

أتحقّق من فهمي 74 إذا كان: $X \sim Geo(0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X=2)$ b) $P(X \le 3)$ c) $P(X>4)$

أتحقّق من فهمي 75

صناعة: في دراسة لقسم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبيّن أنّ في 10% من الأواني الفخارية عيبًا مصنعيًّا.

إذا مثّل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوّل إناء مَعيب، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يكون الإناء العاشر هو أوّل إناء مَعيب يجده مُراقِب الجودة.

b) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 3 أوانٍ حتى إيجاد أوّل إناء مَعيب

إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

3) $P(X=2)$ 4) $P(X \le 3)$ 5) $P(X \ge 3)$

6) $P(3 \le X \le 5)$ 7) $P(X<4)$ 8) $P(X>4)$

9) $P(1<X<3)$ 10) $P(4<X \le 6)$ 11) $P(X<1)$

12) أُلقِي حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مُرقَّمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشكل مُتكرِّر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مَرّات.

لعبة: اتفقت ليلى وزميلاتها على ألّا تُشارِك أيٌّ منهن في لعبة حتى ترمي حجر نرد منتظمًا، ويظهر الرقم 6. إذا أرادت ليلى المشاركة في اللعبة، وكان X يُمثِّل عدد مَرّات رميها حجر النرد حتى ظهور العدد 6، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

19) احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد 3 مَرّات لكي تشارك في اللعبة.

20) احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد أكثر من 3 مَرّات لكي تشارك في اللعبة.

أتحقق من فهمي صفحة 74

a) $P(X=2) = (0.4)(1-0.4)^{2-1} = (0.4)(0.6) = 0.24$

b) $P(X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= (0.4)(1-0.4)^{1-1} + (0.4)(1-0.4)^{2-1} + (0.4)(1-0.4)^{3-1}$

$= (0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2 = 0.784$

c) $P(X>4) = 1 - P(X \le 4)$

$= 1 - \left(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right)$

$= 1 - \left((0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2 + (0.4)(0.6)^3\right) = 0.1296$

أتحقق من فهمي صفحة 75

a	$P(X=10)=(0.1)(1-0.1)^{10-1}=(0.1)(0.9)^9\approx 0.04$
b	$P(X>3)=1-P(X\le 3)$ $=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ $=1-\big((0.1)+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2+(0.1)(0.9)^3\big)=0.6561$

3	$P(X=2)=(0.2)(1-0.2)^{2-1}=(0.2)(0.8)^1\approx 0.16$
4	$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=(0.2)(0.8)^0+(0.2)(0.8)^1+(0.2)(0.8)^2\approx 0.488$
5	$P(X\ge 3)=1-P(X<3)$ $=1-\big(P(X=1)+P(X=2)\big)$ $=1-\big((0.2)(0.8)^0+(0.2)(0.8)^1\big)=0.64$
6	$P(3\le X\le 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$ $=(0.2)(0.8)^2+(0.2)(0.8)^3+(0.2)(0.8)^4\approx 0.312$
7	$P(X<4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=(0.2)(0.8)^0+(0.2)(0.8)^1+(0.2)(0.8)^2\approx 0.488$

8	$P(X>4)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ $=1-\big((0.2)(0.8)^0+(0.2)(0.8)^1+(0.2)(0.8)^2\big)=0.512$
9	$P(1<X<3)=P(X=2)=(0.2)(0.8)^1=0.16$
10	$P(4<X\le 6)=P(X=5)+P(X=6)=(0.2)(0.8)^4+(0.2)(0.8)^5\approx 0.147$
11	$P(X<1)=P(X=0)=0$

12	$P(X=6)=\left(\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)^{6-1}=\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^5=\frac{16807}{262144}$

19	$P(X=3)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1}=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$
20	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ $=1-\left(\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^0+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^1+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)=\frac{125}{216}$

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية: $E(X) = \frac{1}{p}$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

مثال 1) إذا كان احتمال إصابة الهدف عند صياد هو (0.5) ، فبعد كم مرة يُتوقع أن يصيب الهدف؟

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = \frac{1}{\frac{5}{10}} = \frac{10}{5} = 2$$

مثال 2) إذا كان $X \sim Geo(0.3)$ ، فجد التوقع E(x)

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = \frac{3}{10}$$

مثال 3) إذا كان $X \sim Geo(\frac{4}{7})$ ، فجد التوقع E(x)

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$$

مثال 4) إذا كان $X \sim Geo(p)$ ، وكان P(x=1)=0.4 ، فجد التوقع E(x)

$$P(X=1) = \boxed{p(1-p)^{x-1}}$$

$$0.4 = p(1-p)^{1-1} \Rightarrow P = 0.4 \Rightarrow E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.4} = \frac{10}{4}$$

أتحقَّق من فهمي 76

لعبة: قرَّر ريّان إلقاء حجر نرد منتظم بشـكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند ظهور العدد 4. كم مَرَّة يُتوقَّع أنْ يرمي ريّان حجر النرد؟

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

15) $X \sim Geo(0.45)$

14) $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$

13) $X \sim Geo(0.3)$

صناعة: وجد مصنع لوحدات الإنارة المكتبية أنَّ احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة مَعيبة هو 0.10. إذا مثَّل X عدد وحدات الإنارة التي سـيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16) احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة الخامسة هي أوَّل وحدة مَعيبة يجدها مُراقِب الجودة.

17) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

18) العدد المُتوقَّع من وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X \leq 3) = \frac{819}{1331}$، فأجد $P(X > 3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 تحدٍّ: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X = 1) = 0.2$، فأجد التوقُّع $E(X)$.

أتحقق من فهمي صفحة 76 — إذن، يُتوقَّع أن يرمي ريّان حجر النرد 6 مرات حتى يظهر العدد 4 أول مرّة. $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

13	$E(X) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} \approx 3$
14	$E(X) = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3} \approx 2$
15	$E(X) = \frac{1}{0.45} = \frac{100}{45} \approx 2$

16	$P(X = 5) = (0.1)(1 - 0.1)^{5-1} = (0.1)(0.9)^4 \approx 0.066$ احتمال أن يجد مراقب الجودة أول وحدة إنارة معيبة بعد فحص 5 وحدات إنارة هو 0.066 تقريبًا
17	$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$ $= 1 - ((0.1)(0.9)^0 + (0.1)(0.9)^1 + (0.1)(0.9)^2) = 0.729$ احتمال أن يجد مراقب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أول وحدة إنارة معيبة هو 0.729
18	$E(X) = \frac{1}{0.10} = 10$ إذن، يُتوقَّع أن يفحص مراقب الجودة 10 وحدات إنارة حتى يجد أول وحدة إنارة معيبة.

22	$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{819}{1331} = \frac{512}{1331}$
23	$P(X = 1) = p(1 - p)^{1-1} \Rightarrow 0.2 = p(1 - p)^0 \Rightarrow p = 0.2$ $E(X) = \frac{1}{0.2} = 5$

من كتاب التمارين

إذا كان: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1) $P(X = 4)$
2) $P(X \leq 4)$
3) $P(X \geq 2)$
4) $P(3 \leq X < 5)$
5) $P(X < 2)$
6) $P(X > 5)$
7) $P(1 < X < 3)$
8) $P(4 < X \leq 6)$
9) $P(2 < X \leq 4)$

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

10) $X \sim Geo(0.8)$
11) $X \sim Geo(0.1)$
12) $X \sim Geo(0.75)$

أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف عند إصابته الهدف أوَّل مَرَّة. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مَرَّة هو 0.7، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13) احتمال أنْ يصيب الهدف أوَّل مَرَّة في المحاولة العاشرة.
14) احتمال أنْ يُطلِق رصاصتين على الأقل حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.
15) العدد المُتوقَّع من الرصاصات التي سيُطلِقها عماد حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

دوَّرت هديل مُؤشِّر قرص بشكل مُتكرِّر، وكان القرص مُقسَّمًا إلى 4 قطاعات مُتطابِقة ومُلوَّنة بالأحمر، والأخضر، والأزرق، والأصفر. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات تدوير مُؤشِّر القرص حتى توقُّفه عند اللون الأصفر أوَّل مَرَّة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16) احتمال أنْ تكون المَرَّة الثالثة هي أوَّل مَرَّة يتوقَّف فيها مُؤشِّر القرص عند اللون الأصفر.
17) احتمال أنْ تُدوِّر هديل مُؤشِّر القرص أكثر من 4 مَرّات حتى يتوقَّف المُؤشِّر عند اللون الأصفر أوَّل مَرَّة.

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، وكان التوقُّع $E(X) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18) $P(X = 1)$
19) $P(X > 3)$

1	$P(X=4)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{4096}\approx 0.084$
2	$P(X\le 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0\approx 0.414$
3	$P(X\ge 2)=1-P(X<1)$ $=1-P(X=1)=1-\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
4	$P(3\le X<5)=P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0.179$

5	$P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}=0.125$
6	$P(X>5)=1-P(X\le 4)\approx 1-0.414=0.586$
7	$P(1<X<3)=P(X=2)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{64}\approx 0.109$
8	$P(4<X\le 6)=P(X=5)+P(X=6)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5\approx 0.137$
9	$P(2<X\le 4)=P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0.179$

10	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.8}=\frac{10}{8}=1.25$
11	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.1}=10$
12	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.75}=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}\approx 1.33$

13	$P(X=10)=(0.7)(0.3)^9\approx 0.00001$
14	$P(X\ge 2)=1-P(X<1)=1-P(X=1)$ $=1-0.7(0.3)^0=1-0.7=0.3$
15	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.7}=\frac{10}{7}\approx 1.4$

16	$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{64}\approx 0.14$
17	$P(X>4)=1-P(X\le 4)$ $=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4))$ $=1-\left(\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)\approx 0.32$

18	$E(X)=2\Rightarrow\frac{1}{p}=2\quad\Rightarrow p=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow P(X=1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2}$
19	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$ $=1-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=1-(0.5+0.25+0.125)=0.125$

وزارة أدبي 2023

14) إذا كان $X\sim Geo(0.1)$ ، فإن $P(X=2)$ يساوي:

a) 0.081 b) 0.81 c) 0.09 d) 0.9

15) إذا كان $X\sim Geo\left(\frac{5}{11}\right)$ ، فإن $E(X)$ يساوي:

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{5}{11}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{11}{6}$

a) تبين في مصنع للمصابيح الكهربائية أن احتمال أن يكون أي مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.15 إذا مثل X عدد المصابيح التي سيفحصها مراقب الجودة حتى إيجاد أول مصباح تالف، فجد احتمال أن يفحص مراقب الجودة أكثر من 3 مصابيح حتى إيجاد أول مصباح تالف. (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

16) التجربة العشوائية التي تُمثّل تجربة احتمالية هندسية مما يأتي هي:

a) إلقاء قطعة نقد 3 مرات ، ثم تسجيل عدد مرات ظهور الصورة.

b) إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات ، ثم كتابة الأعداد الظاهرة.

c) إطلاق أسهم بشكل متكرر نحو هدف، ثم التوقف عند إصابته أول مرة.

d) سحب 5 كرات عشوائيًا على التوالي من دون إرجاع من صندوق فيه 9 كرات حمراء، و 6 كرات بيضاء ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

17) إذا كان $X\sim Geo(p)$ ، وكان $P(X=1)=\frac{2}{7}$ ، فإن $E(X)$ يساوي:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{2}{7}$

a) يتدرب لاعب كرة سلة على رمي الكرة في الهدف. وكان احتمال إصابته الهدف هو 0.4 . إذا مثّل X عدد محاولات اللاعب حتى يُصيب أول هدف، فما احتمال أن يصيب اللاعب الهدف بعد أكثر من 3 محاولات؟ (11 علامة)

الدرس 2 توزيع ذي الحدَّين

Binomial Distribution

التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين هي تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المستقلة

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة.

مثلاً :1) إلقاء (4) قطع نقدية منتظمة ومتمايزة، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

2) إلقاء حجر نرد منتظم 8 مرَّات ، ثم كتابة عدد المَرّات التي يظهر فيها العدد 1 على لحجر النرد.

بينما ، (سحب (3) كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 5 كرات حمراء، و 4 كرات بيضاء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة) ، لا تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين.

أتحقَّق من فهمي 80 أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقــاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَــرّات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

b) اختيار 7 طلبة عشوائيًّا من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

a نبحث في تحقق الشروط الأربعة:

- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء حجر النرد 20 مرة) وبما أن إلقاء أي حجر منها لا يؤثر في نتيجة إلقاء الحجر في المرات الأخرى)، فإن هذه المحاولات مستقلة.
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 1) أو الفشل (عدم ظهور العدد 1)
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$
- الشرط الرابع: وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة وهو 20

إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.

B تتضمن هذه التجربة محاولات متكررة (اختيار 7 أشخاص)، وبما أن اختيار كل شخص يتأثر بنتائج اختيار الأشخاص السابقين له، فإن هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.

أتدرّب وأحُلّ المسائل أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1) إلقاء قطعة نقد 80 مرَّة، ثم تسجيل عدد مرّات ظهور الكتابة.

2) إلقاء حجر نرد منتظم 20 مرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي ظهر فيها العدد 4 على الوجه العلوي لحجر النرد.

3) إطلاق أسهم بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثم التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة.

1	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء قطعة النقد 80 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء قطعة النقد لا تؤثر في نتيجة إلقائها في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الكتابة)، أو الفشل 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 80 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.

2	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء حجر النرد 20 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء حجر النرد لا تؤثر في نتيجة إلقائه في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 4)، أو الفشل 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 20 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
3	بما أن عدد المحاولات في هذه التجربة غير محدد، إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.

المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين، وتوزيعه الاحتمالي

في المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين، قد تكون (x= 0)،وهذا يدلُّ على عدم إحراز أيِّ نجاح عند تكرار المحاولة n مَرَّة.

في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: X ~ B(n, p) حيث n و p معاملا المُتغيِّر العشوائي.
ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: 0 , 1 , 2 , ... , n ؛ أيْ إنَّ : x ∈ {0, 1, 2, ..., n

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $\boxed{P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}}$

حيث: n: عدد المحاولات في التجربة. p: احتمال النجاح في كل محاولة.
r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

مراجعة التوافيق :

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times3\times2} = 20$

$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ، n و r عددان صحيحان موجبان و $n \geq r$.

مثال 1:

$$X \sim B(3, 0.4) \Rightarrow$$

$$a) P(X=2) = \boxed{\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}} = \binom{3}{2}(0.4)^2(1-0.4)^{4-2} = 0.1728$$

$$b) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= 0.1728 + \binom{3}{3}(0.4)^3(0.6)^0 = 0.1728 + 0.064 = 0.2368$$

مثال 2 : قام أحمد بزراعة ثلاث شجرات في حديقة منزله ، إذا كان احتمال نجاح الشجرة الواحدة 25 %
إذا دل (x) على عدد الشجرات الناجحة ، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x)

$$P(X=0) = \binom{3}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^3 = (1)(1)\frac{27}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^2 = (3)(\frac{1}{4})\frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^1 = (3)(\frac{1}{16})\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^0 = (1)(\frac{1}{64})(1) = \frac{1}{64}$$

x	0	1	2	3
P(x)	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

مثال 3 : إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في طلقة يطلقها على الهدف يساوي (0.6) ،
فإذا أطلق (4) طلقات على الهدف ، فجد احتمال : 1) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل
2) إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر

$$1)P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}(0.6)^0(0.4)^4=1-0.0256=0.9744$$

مرة واحدة على الأقل تعني مرة واحدة أو أكثر (أقل شيئ مرة واحدة)

$$2)P(X\leq 1)=P(X=1)+P(X=0)$$

$$=\binom{4}{1}(0.6)^1(0.4)^3+\binom{4}{0}(0.6)^0(0.4)^4=0.1536+0.0256=0.1792$$

مرة واحدة على الأكثر تعني مرة واحدة أو أقل (أكثر شيئ مرة واحدة)

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

أتحقّق من فهمي 82 إذا كان: $X\sim B(5,0.1)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X=4)$ b) $P(X\leq 2)$ c) $P(X>2)$

أتحقق من فهمي صفحة 82

a	$P(X=4)=\binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1=0.00045$
b	$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5+\binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4+\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3=0.99144$
c	$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-0.99144=0.00856$

أتحقّق من فهمي 83

طقس: في دراسة تناولت حالة الطقس مدّة طويلة في إحدى المدن، تبيَّن أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ يوم فيها ماطرًا هو $\frac{2}{7}$. إذا اختيرت 5 أيام عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي: a) احتمال أنْ تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة.
b) احتمال أنْ يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا.

أتحقق من فهمي صفحة 83

a	$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^2=0.12$
B	$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^5\approx 0.8141$

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معاملاه: $n = 17, p = 0.64$، فأُعبِّر عن هذا المُتغيِّر بالرموز.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

7 $P(X < 3)$ 6 $P(X = 5)$ 5 $P(X = 2)$

إذا كان: $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 $P(0 \le X < 2)$ 9 $P(X > 1)$ 8 $P(X = 1)$

مساجد: بعد إجراء مسح للمُصلّين في أحد مساجد العاصمة عمّان، تبيَّن أنَّ 60% من هؤلاء المُصلّين تقلُّ أعمارهم عن 50 عامًا. إذا اختير 12 مُصلِّيًا من مرتادي هذا المسجد عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 احتمال أنْ تقلَّ أعمار 7 منهم فقط عن 50 عامًا.

12 احتمال أنْ يقلَّ عُمُر اثنين منهم على الأكثر عن 50 عامًا.

4	$X \sim B(17, 0.64)$
5	$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8 = 0.302$
6	$P(X = 5) = \binom{10}{5}(0.2)^5(0.8)^5 = 0.026$
7	$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ $= \binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} + \binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9 + \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8$ $= 0.678$
8	$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
9	$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$ $= 1 - \left(\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{20}{27}$
10	$P(0 \le X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $= \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27}$
11	$P(X = 7) = \binom{12}{7}(0.6)^7(0.4)^5 = 0.227$
12	$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ $= \binom{12}{0}(0.6)^0(0.4)^{12} + \binom{12}{1}(0.6)^1(0.4)^{11} + \binom{12}{2}(0.6)^2(0.4)^{10} = 0.003$

جد قيمة (p) : قاعدة (مجموع احتمالات المتغير العشوائي المنفصل = 1)

$1) X \sim B(3,p)\ ,\ P(X \geq 1) = \frac{7}{8} \Rightarrow p = ? : \boxed{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1}$

$$P(X \geq 1) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{8} = 1 - P(X=0) \Rightarrow P(X=0) = \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 1-p = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$2) X \sim B(2,p)\ ,\ P(X \geq 1) = \frac{9}{25} \Rightarrow p = ?$

$$P(X=0) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \binom{2}{0}(p)^0(1-p)^2 = (1-p)^2 \Rightarrow 1-P = \frac{4}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{5}$$

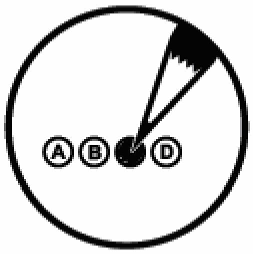
$3) X \sim B(3,p)\ ,\ P(X \geq 1) = \frac{117}{125} \Rightarrow p = ? ....(p = \frac{3}{5})$

$4) X \sim B(3,p)\ ,\ P(X \geq 1) = \frac{37}{64} \Rightarrow p = ? ....(p = \frac{1}{4})$

مهارات التفكير العليا 87

19 تبرير: إذا كان: $X \sim B(3, p)$، وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$، فأجد $P(X=2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

21 تحدٍّ: يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 4 بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76 من 100؟



19
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$$

$$\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3 \Rightarrow \frac{215}{216} = 1-(1-p)^3 \Rightarrow (1-p)^3 = 1 - \frac{215}{216}$$

$$\Rightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{216} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{6} \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{5}{6}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{75}{216}$$

21
بما أن لكل فقرة 4 علامات، وحصل رامي على العلامة 76، معناه أن رامي قد أجاب بشكل صحيح على 19 فقرة من أصل 25 فقرة في هذا الاختبار.

بما أن كل فقرة لها 4 بدائل واحدة منها فقط صحيحة، إذن احتمال اختيار البديل الصحيح هو $\frac{1}{4}$

$$P(X=19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.00000011467$$

التوقّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $E(X) = np$ حيث: n: عدد المحاولات في التجربة.
p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 1: إذا كان احتمال تسجيل هدف من ركلة جزاء عند أحد اللاعبين هو 80 % ، وقام هذا اللاعب بتسديد 20 ركلة ، فجد عدد الأهداف المتوقع تسجيلها من هذه الركلات

الحل: $E(x)=(20)(0.8) = 16$

أتحقّق من فهمي 84

اتصالات: بعد إجراء مسح لمشتركي إحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشترك عشوائيًّا لاستطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تُقدِّمها الشركة، فأجد عدد الإناث المُتوقَّع في هذه العيِّنة.

أتحقق من فهمي صفحة 84 $E(X) = 400 \times 0.3 = 120$

إذن، يُتوقَّع وجود 120 من الإناث في هذه العينة.

التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطى التباين للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$ حيث: n: عدد المحاولات في التجربة.
p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 1: إذا كان احتمال صد ركلة جزاء من قبل أحد الحراس هو 60 % ، إذا دلَّ (x) على نجاحه في الصد ، وتم تسديد 50 ركلة ، فجد عدد الركلات المتوقع صدها ثم تباين المتغير العشوائي (x)

الحل: $E(x)=(50)(0.6) = 30$

$V(x)=(50)(0.6)\ (0.4)=12$

أتحقّق من فهمي 85 إذا كان: $X \sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوقُّع $E(X)$. b) التباين $\mathrm{Var}(X)$.

أتحقق من فهمي صفحة 85

a	$E(X) = 400 \times \frac{3}{8} = 150$
b	$Var(X) = 400 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{375}{4}$

أجد التوقّع والتباين لكل مُتغيِّر عشوائي ممّا يأتي:

14 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

13 $X \sim B(5, 0.1)$

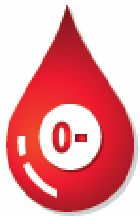
إذا كان احتمال إصابة شـــخص ما بأعراض جانبية بعد أخذه مطعومًا مُعيَّنًا هو 12%، وقرَّر طبيب إعطاء 50 شخصًا هذا المطعوم، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 3 أشخاص فقط ممَّن أخذوا المطعوم.

16 العدد المُتوقَّع للأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية.

17 التباين للمُتغيِّر العشوائي X.

18 فصيلة الدم: تبلغ نســبة حاملي فصيلة الدم $O-$ من ســكّان الأردن نحو 4% تقريبًا. أجد عدد الأشخاص الذين يَلزم إشراكهم في عيِّنة عشوائية من السكّان، ويُتوقَّع أنْ يكون منهم 10 أشخاص من حاملي فصيلة الدم $O-$.



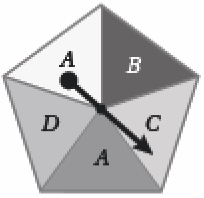
20 تبرير: إذا كان: $X \sim B(100, p)$، وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، مُبرِّرًا إجابتي.

13	$E(X) = 5(0.1) = 0.5$ $\quad Var(X) = 5(0.1)(0.9) = 0.45$
14	$E(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right) = 7.5$ $\quad Var(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 4.6875$
15	$P(X = 3) = \binom{50}{3}(0.12)^3(0.88)^{47} = 0.083$
16	$E(X) = 50(0.12) = 6$
17	$Var(X) = 50(0.12)(0.88) = 5.28$
18	$E(X) = np \Rightarrow 10 = n(0.04) \Rightarrow n = 250$
20	$Var(X) = 100p(1-p) \Rightarrow 24 = 100p(1-p) \Rightarrow 24 = 100p - 100p^2$ $\Rightarrow 100p^2 - 100p + 24 = 0 \rightarrow 25p^2 - 25p + 6 = 0 \Rightarrow (5p-3)(5p-2) = 0$ $\Rightarrow p = \frac{3}{5} \quad , \quad p = \frac{2}{5}$

من كتاب التمارين

إذا كان: $X \sim B\left(20, \frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي: **3** $P(1 < X \leq 3)$ **2** $P(X \leq 3)$ **1** $P(X = 18)$

يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا على شكل خماسي منتظم. إذا دُوِّر مُؤشِّر القرص **10** مَرّات، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات توقُّف المُؤشِّر على الحرف A، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



4 احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مَرّات فقط.

5 احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مَرّات على الأقل.

6 احتمال ألّا يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A نهائيًّا.

طيران: يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال **0.25** عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار **20** مَرَّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات فقط.

8 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات على الأقل.

9 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المَرّات جميعها.

10 العدد المُتوقَّع من المَرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط.

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية: **13** $X \sim B\left(48, \frac{1}{6}\right)$ **12** $X \sim B(280, 0.4)$ **11** $X \sim B(40, 0.2)$

14 أمراض: وَفقًا لدراسة طبية، فإنَّ 9% من البالغين حول العالَم مصابون بمرض السُّكَّري. إذا اخترت عيِّنة عشوائية من البالغين تضمُّ 12000 شخص، فما العدد المُتوقَّع من المصابين بمرض السُّكَّري في هذه العيِّنة؟

1 $P(X=18)=\binom{20}{18}\left(\frac{1}{8}\right)^{18}\left(\frac{7}{8}\right)^{2}\approx 8.075\times10^{-15}$

2 $P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\binom{20}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\left(\frac{7}{8}\right)^{20}+\binom{20}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(\frac{7}{8}\right)^{19}+\binom{20}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{18}+\binom{20}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\left(\frac{7}{8}\right)^{17}$

3 $P(1<X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\binom{20}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{18}+\binom{20}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\left(\frac{7}{8}\right)^{17}\approx 0.4984$

4 $P(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{7}\approx 0.2013$

5 $P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$

$=1-\left(\binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{9}+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{8}\right)\approx 0.322$

6 $P(X=0)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\approx 0.1074$

7 ليكن X عدد المرات التي يواجه فيها الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط من بين الـ 20مرة.

$\Rightarrow X\sim B(20,0.25)\quad\Rightarrow\quad P(X=3)=\binom{20}{3}(0.25)^{3}(0.75)^{17}\approx 0.134$

8 $P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$

$=1-\left(\binom{20}{0}(0.25)^{0}(0.75)^{20}+\binom{20}{1}(0.25)^{1}(0.75)^{19}+\binom{20}{2}(0.25)^{2}(0.75)^{18}\right)\approx 0.025$

11 $E(X)=np=40(0.2)=8$

$Var(X)=np(1-p)=40(0.2)(0.8)=6.4$

12 $E(X)=np=280(0.4)=112$

$Var(X)=np(1-p)=280(0.4)(0.6)=67.2$

13 $E(X)=np=48\left(\frac{1}{6}\right)=8$ ⇨ $Var(X)=np(1-p)=48\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\approx 6.67$

14 ليكن X عدد الأشخاص المصابين بالسكري من بين الـ 12000. ⇦ $X\sim B(12000,0.09)$

$E(X)=np=12000(0.09)=1080$

أسئلة الوزارة أدبي 2023

16) إذا كان $X \sim B(4\,,\frac{2}{3})$ ، فإن $P(X=0)$ يساوي:

a) $\frac{16}{81}$ b) $\frac{1}{81}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{4}{81}$

17) إذا كان $X \sim B(100\,,p)$ ، وكان $E(X) = 60$ ، فإن التباين يساوي:

a) 24 b) 60 c) 40 d) 12

b) إذا كان احتمال إصابة شخص بأعراض جانبية بعد أخذه دواء معينًا هو 25% ، وأخذ هذا الدواء 8 أشخاص، ودل المتغير العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية، فجد كلًا مما يأتي: (10 علامات)

1) احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 6 أشخاص فقط ممن أخذوا الدواء.

2) العدد المتوقع للأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية للدواء.

أسئلة الوزارة أدبي 2023 تكميلي

18) إذا كان $X \sim B\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$ ، فإن $P(X=2)$ يساوي:

a) $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8$ c) $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)$

b) $\binom{10}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^8\left(\frac{1}{5}\right)$ d) $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^2$

19) إذا كان $X \sim B(420,\ p)$ ، وكان $E(X) = 40$ ، فإن قيمة p هي:

a) $\frac{2}{21}$ b) $\frac{21}{2}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{2}{12}$

20) إذا كان $X \sim B(3,\ p)$ ، وكان $P(X \le 2) = \frac{37}{64}$ فإن $P(X=3)$ يساوي:

a) $\frac{37}{64}$ c) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{27}{64}$ d) $\frac{9}{10}$

21) إذا كان $X \sim B(6,\ p)$ ، وكان $E(X) = 2.4$ ، فإن قيمة $Var(X)$ تساوي:

a) 0.4 c) 1.44

b) 0.6 d) 2.4

b) بعد إجراء مسح للمصلين في أحد مساجد العاصمة عمان تبين أن 70% من هؤلاء المصلين تقل أعمارهم عن 50عامًا. إذا اختير (15) مصليًا من مُرتادي هذا المسجد عشوائيًا، فما احتمال أن يقل عمر اثنين منهم على الأكثر عن 50 عامًا؟ (10 علامات)

الفرق بين

التجربة الاحتمالية الهندسية و التجربة الاحتمالية ذات الحدين

التجربة الاحتمالية الهندسية

$$\boxed{X \sim Geo(p)\ ,\ x \in \{1,2,3,...\}}$$

المُتغيِّر العشوائي الهندسي X يدل على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح ،

p : احتمال النجاح الثابت في كل محاولة

$$\boxed{P(X=x) = \boxed{p(1-p)^{x-1}}}$$

$$\boxed{P(X>x) = \boxed{(1-p)^{x}}}$$

التوقع : $\boxed{E(x) = \frac{1}{p}}$

مثال (1)

$X \sim Geo(0.8) \Rightarrow$

$a)P(X=2) = \boxed{p(1-p)^{x-1}}$

$= (0.8)(1-0.8)^{1} = 0.16$

$b)P(X \le 2) = P(X=1) + P(X=2)$

$= (0.8)(1-0.7)^{0} + 0.16 = 0.96$

$c)P(X>3) = \boxed{1-P(X \le 3)}$

$= 1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$

$= 1-(0.8+0.16+(0.8)(1-0.8)^{2}) = 0.008$

$(or): P(X>3) = \boxed{(1-P)^{3}}$

$= (1-0.8)^{3} = (0.2)^{3} = 0.008$

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

$$\boxed{X \sim B(n,p)\ ,\ x \in \{0,1,2,3,...,n\}}$$

n : عدد المحاولات

p : احتمال النجاح في كل محاولة

r : عدد المحاولات الناجحة من بين n منها

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \Rightarrow \boxed{\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(2\times1)} = 10}$$

$$\boxed{P(X=r) = \boxed{\binom{n}{r} p^{r}(1-p)^{n-r}}}$$

التوقع $\boxed{E(x) = n\,p}$

التباين $\boxed{Var(x) = \sigma^{2} = n\,p(1-p)}$

(مجموع احتمالات المتغير العشوائي المنفصل=1)

مثال(1)

$X \sim B(3,p) \Rightarrow$

$$\boxed{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1}$$

مثال (2)

$X \sim B(3,0.6) \Rightarrow$

$a)P(X=2) = \boxed{\binom{n}{r} p^{r}(1-p)^{n-r}}$

$= \binom{3}{2}(0.6)^{2}(1-0.6)^{4-2} = 0.1728$

$b)P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3)$

$= 0.1728 + \binom{3}{3}(0.6)^{3}(0.4)^{0}$

$= 0.1728 + 0.216 = 0.3888$

$c)P(X<2) = P(X=1) + P(X=0)$

$= \binom{3}{1}(0.6)^{1}(0.4)^{2} + \binom{3}{0}(0.6)^{0}(0.4)^{3}$

$= 0.288 + 0.064 = 0.352$

مثال (2): إذا كان احتمال أن ينجح أحمد في التسجيل في لعبة كرة السلة هو ($\frac{3}{4}$)
وكان (X) يمثل عدد المحاولات حتى يتمكن من التسجيل

أ) جد احتمال أن يتمكن من التسجيل في المحاولة الثالثة

$$P(X=3)=\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{3-1}=\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$$

ب) جد احتمال أن يسجل في المحاولة الخامسة

$$P(X=5)=\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{5-1}=\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})^4=\frac{3}{1024}$$

ج) جد احتمال أن يحاول التسجيل أكثر من ثلاث مرات

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+\ldots$$
$$=1-P(X\le 3)$$
$$=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{2-1}+\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{3-1}$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})+\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{16}))$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{64})\ =1-(\tfrac{48}{64}+\tfrac{12}{64}+\tfrac{3}{64})$$
$$=1-(\tfrac{63}{64})$$
$$=\tfrac{1}{64}$$

$$(or):P(X>3)=(1-P)^3=(1-\tfrac{3}{4})^3=\tfrac{1}{64}$$

مثال (3): كيس يحتوي على عدد من الكرات المتماثلة إذا كان احتمال سحب (كرة حمراء) من الكيس هو (0.25) ، فكم كرة يُتوقع أن يتم سحبها حتى ظهور كرة حمراء؟؟؟

الحل:

$$E(x)=\frac{1}{p}\Rightarrow E(x)=\tfrac{1}{0.25}=\tfrac{100}{25}=4$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

مثال (3): قام سالم بزراعة خمس شجرات أمام بيته إذا كان احتمال نجاح الشجرة الواحدة 75 %

أ) جد احتمال نجاح أربع شجرات منها

$$P(X=4)=\binom{5}{4}(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^1$$
$$=\tfrac{5!}{4!\times 1!}(\tfrac{81}{256})(\tfrac{1}{4})=\tfrac{405}{1024}$$

ب) ما احتمال أن تنجح شجرتان منها على الأقل ؟

الحل: ثنتان على الأقل تعني : نجاح اثنتين ، ثلاث، أربع أو خمس شجرات

أو عدم نجاح (واحدة أو خمس منها)

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=1-P(X<2)$$
$$=1-(P(X=1)+P(X=0))$$
$$=1-(\binom{5}{1}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^4+\binom{5}{0}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^5)$$
$$=\ 1-(\tfrac{5!}{1!\times 4!}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{256})+\tfrac{5!}{0!\times 5!}(1)(\tfrac{1}{1024}))$$
$$=1-(\tfrac{15}{1024}+\tfrac{1}{1024})$$
$$=1-\tfrac{16}{1024}=\tfrac{1008}{1024}$$

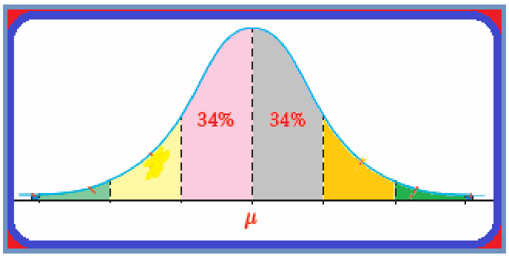
ج) ما احتمال أن تنجح شجرة واحدة منها على الأكثر ؟

الحل: شجرة واحدة على الأكثر تعني شجرة أو ولا شجرة

$$P(X\le 1)=P(X=1)+P(X=0)$$
$$=(\binom{5}{1}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^4+\binom{5}{0}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^5)$$
$$=(\tfrac{5!}{1!\times 4!}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{256})+\tfrac{5!}{0!\times 5!}(1)(\tfrac{1}{1024}))$$
$$=(\tfrac{15}{1024})+(\tfrac{1}{1024})$$
$$=\tfrac{16}{1024}$$

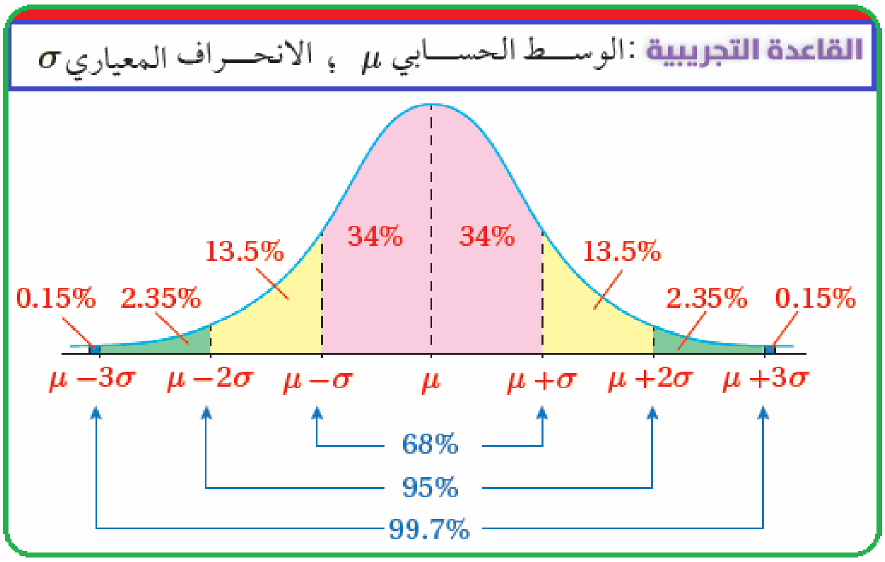
الدرس 3 التوزيع الطبيعي Normal Distribution

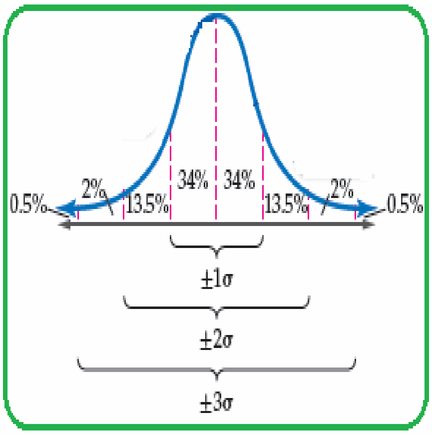
يُستعمَل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًّا في كثير من المواقف الحياتية.
وللمنحنى الطبيعي خصائص تُميِّزه عن غيره من المنحنيات الأُخرى؛ ما يُفسِّر سبب كثرة استعماله في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة. ومن مميزات المنحنى الطبيعي :



- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

(من التماثل : المساحة يمين (2) تساوي المساحة يسار (2-))

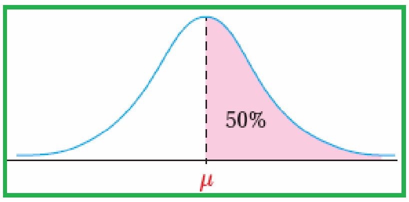




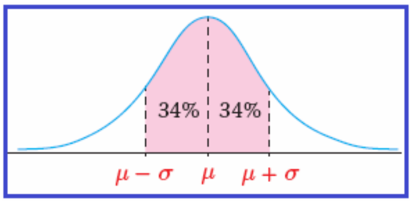
Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مثال 1) إذا اتخذت أعمار مجموعة من الموظفين شكل المنحنى الطبيعي، فإن :

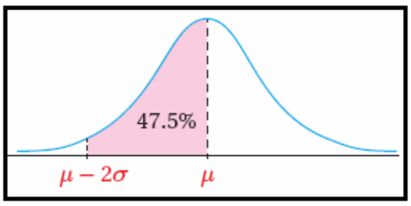
أ) النسبة المئوية للموظفين الذين تقع أعمارهم
فوق الوسط الحسابي هو 50 %
(بسبب تماثل المنحنى الطبيعي حول الوسط الحسابي)



ب) النسبة المئوية للموظفين الذين لا يزيد البُعْد بين أعمارهم والوسط الحسابي
على انحراف معياري واحد هو 68 % تقريبًا



ج) النسبة المئوية للموظفين الذين تقلُّ أعمارهم عن الوسط الحسابي
بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هو 47.5 % لأن
95% من المشاهدات في المنحنى الطبيعي تقع بين μ-2σ و μ+2σ ،
وبسبب التماثل حول الوسط الحسابي، فإنَّ النسبة 47.5 % تقريبًا



أتحقّق من فهمي 92

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

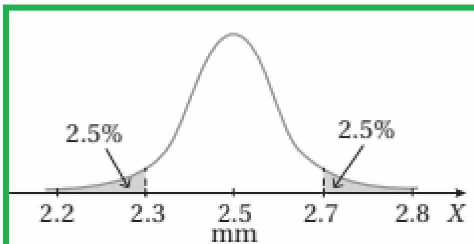
c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

أتحقق من فهمي صفحة 92	
النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50%	a
النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%	b
النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%	c
النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 97.35%	d

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

صناعة: يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



11 أجد كُلًّا من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

12 أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

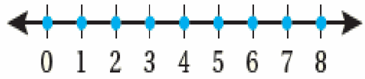
11	$\mu = 2.5 \Rightarrow \mu + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow 2.5 + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow \sigma = 0.1$
12	$P(2.5 < X < 2.7) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$

المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

يوجد نوعان من المُتغيِّرات العشوائية، هما: المُتغيِّر العشوائي المنفصل ، والمُتغيِّر العشوائي المتصل

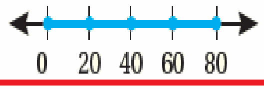
المُتغيِّر العشوائي المنفصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

مثال: عدد السيّارات التي ستمرُّ خلال الساعة القادمة.



المُتغيِّر العشوائي المتصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة

مثال: سرعة أوّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



ملاحظة : يُعَدُّ كلٌّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلاً؛ لأنَّ كُلّاً منهما يأخذ قِيَمًا معدودةً، مثل: عدد مَرّات إصابة الهدف، وعدد السيّارات.

إذا ارتبط المُتغيِّر العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي التوزيع الطبيعي

ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: $\boxed{X \sim N(\mu,\sigma^2)}$ **حيث (N) من كلمة (Normal)**

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، / μ: الوسط الحسابي. / σ: الانحراف المعياري.

مثال: $\boxed{X \sim \mathrm{N}(15,9)} \Rightarrow 1)P(X>15)=?\ldots 2)P(12<X<18)=?\ldots 3)P(X>21)=?$

$$1)P(X>15)=P(X>\mu)=0.5$$

$$2)P(12<X<18)=P(15-3<X<15+3)=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.68$$

$$3)P(X>21)=P(X>15+2\times 3)=P(X>\mu+2\sigma)=2.5\%$$

مثال: $\boxed{X \sim \mathrm{N}(20,16)} \Rightarrow 1)P(X<20)=?\ldots 2)P(16<X<24)=?\ldots 3)P(12<X<32)=?$

$$1)P(X<20)=P(X<\mu)=0.5$$

$$2)P(16<X<24)=P(20-4<X<20+4)=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.68$$

$$3)P(12<X<32)=P(20-8<X<20+12)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+3\sigma)$$

$$=\frac{1}{2}(0.95)+\frac{1}{2}(0.99)=0.9735$$

أتحقق من فهمي صفحة 94

أتحقق من فهمي 94 إذا كان: $X \sim N(55, 121)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X<55)$ b) $P(55<X<66)$ c) $P(X>77)$

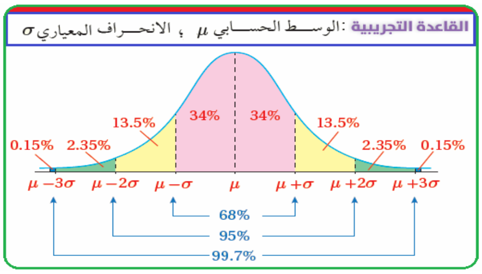
a	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 55$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = \sqrt{121} = 11$ $P(X<55) = P(X<\mu) = 0.5$
b	$P(55<X<66) = P(55<X<55+11) = P(\mu<X<\mu+\sigma) = 0.34$
c	$P(X>77) = P(X>55+2(11)) = P(X>\mu+2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\% = 3.5\% = 0.035$

مثال : إذا كانت رواتب الموظفين في إحدى المؤسسات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي (250 JD) ، وانحرافه المعياري(10 JD) . إذا اختير أحد الموظفين عشوائيًّا، فجد :

1) احتمال أن يكون راتبه أقل من (220 JD)

2) احتمال أن يكون راتبه أكثر من (270 JD)

3) احتمال أن يكون راتبه بين (220 JD) و (260 JD)



$$\boxed{\mu=250,\sigma=10)} \Rightarrow 1)P(X<220)=P(X<250-3(10))=0.15\%=0.0015$$

$$2)P(X>270)=P(X>250+2(10))=2.35\%+0.15\%$$

$$=2.5\%=2.025$$

$$3)P(220<X<260)=P(250-3(10)<X<250+10)$$

$$=2.35\%+13.5\%+34\%+34\%$$

$$=83.85\%=0.8385$$

أتحقّق من فهمي 95

أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال الرجال في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 178 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يكون طول الرجل أكثر من 178 cm

b) احتمال أنْ يتراوح طول الرجل بين 171 cm و 192 cm

	أتحقق من فهمي صفحة 95
	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 178$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = 7$
a	$P(X > 178) = P(X > \mu) = 50\% = 0.5$
b	$P(171 < X < 192) = P(178 - 7 < X < 178 + 2(7))$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) = 34\% + 34\% + 13.5\% = 81.5\% = 0.815$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

إذا اتخذت علامات الطلبة في اختبار لمبحث التاريخ شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

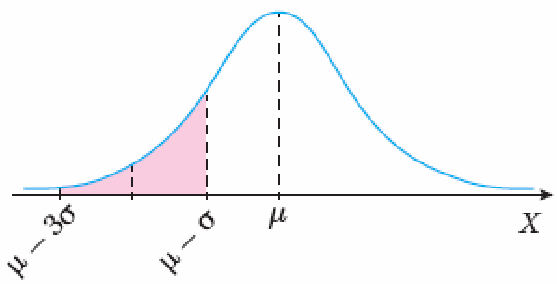
1 النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

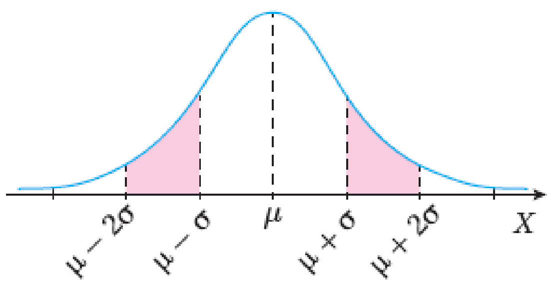
2 النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

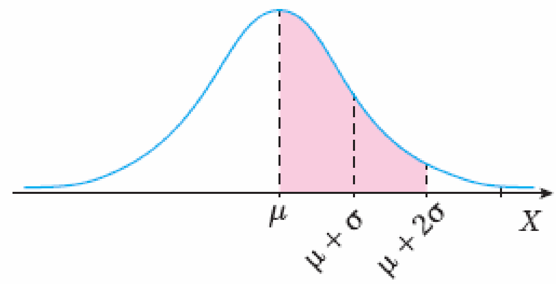
3 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

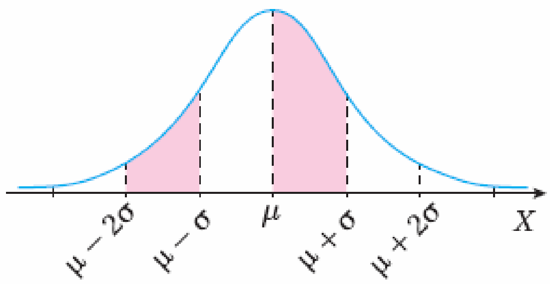
4 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

أُحدِّد النسبة المئوية لمساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل كل توزيع طبيعي ممّا يأتي:

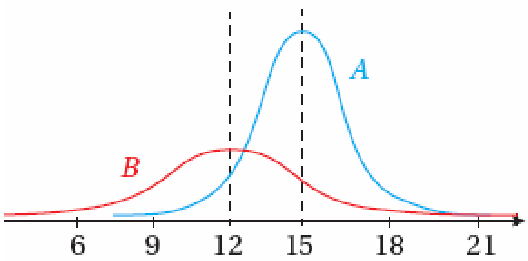
5


6


7


8


9 يُمثِّل كلٌّ من المنحنيين المجاورين توزيعًا طبيعيًّا. أُقارِن بين هذين التوزيعين من حيث: قِيَم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



إذا كان: $X \sim N(79, 144)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 $P(X < 79)$

11 $P(67 < X < 91)$

12 $P(X > 91)$

13 $P(X > 103)$

14 $P(43 < X < 115)$

15 $P(X < 43)$

صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أطوال أقطار رؤوس مثاقب (بالملّيمتر) تُنتِجها آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $P(29.6 < X < 30.4)$

16 $P(X > 30)$

19 $P(29.2 < X < 30.4)$

18 $P(29.2 < X < 30)$

صناعة: يُنتِج مصنعٌ أكياسَ أسمنت تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 50 kg، وانحرافه المعياري 2 kg. إذا اختير كيس أسمنت عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

20 احتمال أنْ تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg.

21 احتمال أنْ تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg.

مهارات التفكير العليا

22 أكتشف الخطأ: قال يوسف: " إنَّ $X \sim N(4^2, t^2)$ مُتغيِّر عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 4، وانحرافه المعياري t^2 ". أكتشف الخطأ في قول يوسف، ثم أُصحِّحه.

23 تبرير: يدلُّ المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد σ^2، مُبرِّرًا إجابتي.

24 تحدٍّ: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68، وانحرافه المعياري 15. إذا لم ينجح في الاختبار 16% من الطلبة، فأجد علامة النجاح.

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 96
1	النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي هي 50%
2	النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
3	النسبة المئوية للعلامات الذين تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
4	النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي 83.85%

5	$P(\mu-3\sigma<X<\mu-\sigma)=2.35\%+13.5\%=15.85\%$
6	$P(\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma)+P(\mu+\sigma<X<\mu+2\sigma)=13.5\%+13.5\%=27\%$
7	$P(\mu<X<\mu+2\sigma)=34\%+13.5\%=47.5\%$
8	$P(\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma)+P(\mu<X<\mu+\sigma)=13.5\%+34\%=47.5\%$

9	$A: \mu=15 \;\; ,\sigma=3$ $\qquad B: \mu=12 \;\; ,\sigma=3$

10	$\mu=79 \;\; ,\sigma=\sqrt{144}=12$ $\qquad P(X<79)=P(X<\mu)=0.5$
11	$P(67<X<91)=P(79-12<X<79+12)=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$ $=0.34+0.34=0.68$
12	$P(X>91)=P(X>79+12)=P(X>\mu+\sigma)$ $=13.5\%+2.35\%+0.15\%=16\%=0.16$

13	$P(X>103)=P\big(X>79+2(12)\big)=P(X>\mu+2\sigma)$ $=2.35\%+0.15\%=2.5\%=0.025$
14	$P(43<X<115)=P\big(79-3(12)<X<79+3(12)\big)$ $=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=99.7\%=0.997$
15	$P(X<43)=P\big(X<79-3(12)\big)=P(X<\mu-3\sigma)=0.15\%=0.0015$

16	$\mu=30 \;\; ,\sigma=\sqrt{0.4^2}=0.4$ $\quad P(X>30)=P(X>\mu)=0.5$
17	$P(29.6<X<30.4)=P(30-0.4<X<30+0.4)$ $=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=34\%+34\%=68\%=0.68$
18	$P(29.2<X<30)=P(30-2(0.4)<X<30)$ $=P(\mu-2\sigma<X<\mu)=34\%+13.5\%=47.5\%=0.475$
19	$P(29.2<X<30.4)=P(30-2(0.4)<X<30+0.4)$ $=P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)=34\%+13.5\%+34\%=81.5\%=0.815$

20	$\mu=50 \;\; ,\sigma=2$ $\quad P(X>54)=P\big(X>50+2(2)\big)$ $=P(X>\mu+2\sigma)=2.35\%+0.15\%=2.5\%=0.025$
21	$P(44<X<52)=P(50-3(2)<X<50+2)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+\sigma)$ $=2.35\%+13.5\%+34\%+34\%=83.85\%=0.8385$

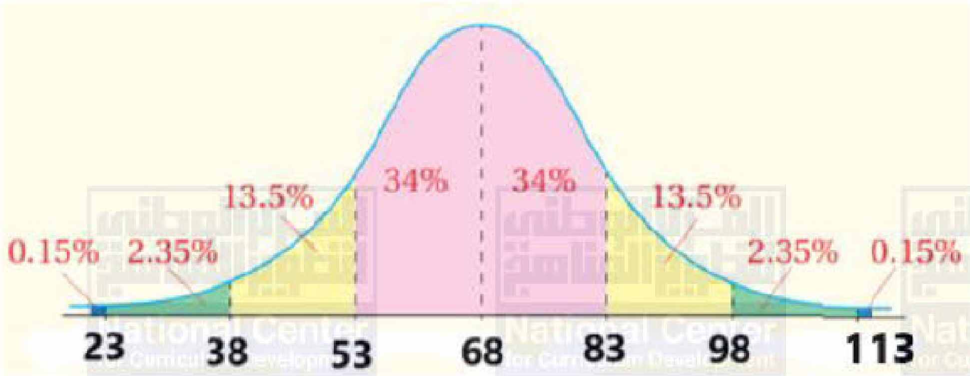
22 إن $X \sim N(4^2, t^2)$ متغير عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 16 ، وانحرافه المعياري t

23 ومنه فإن:

$$\sigma^2 = (7)^2 = 49$$

$$P(93 < X < 107) = P(100 - 7 < X < 100 + 7)$$
$$= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68\%$$

24



تعتمد العلامات كما هي موضحة في الشكل أعلاه، حيث الوسط الحسابي 68 والانحراف المعياري 15

نبدأ بجمع النسب المئوية من أقصى يسار الشكل حتى نحصل على النسبة 16%

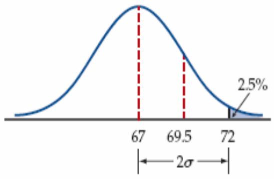
فنجد: $0.15\% + 2.35\% + 13.5\% = 16\%$

بما أن هذه النسبة تمثل جميع الراسبين، إذن علامة النجاح هي 53

مثال 1 استعمال القانون التجريبي

طول: تتخذ أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات شكل التوزيع الطبيعي، بوسط مقداره 67 in ، وانحراف معياري مقداره 2.5 in.

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in ؟

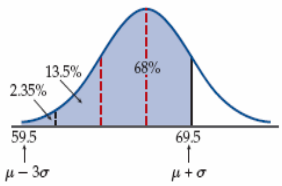


لإيجاد عدد الطلبة الّذين تزيد أطوالهم على 72 in، أوجد المساحة على يمين هذا العدد تحت المنحنى.

يوضح الشكل المجاور أن الطول 72 يبعُد 2σ عن الوسط ، وبما أن 95% من المشاهدات تقع بين انحرافين معياريين عن الوسط، فإن كل ذيل يُمثّل 2.5% من المشاهدات. أي أن المساحة على يمين 72 تُمثّل 2.5% من 880 أي $22 = 880 \times 2.5\%$.

لذا، يكون عدد الطلبة الّذين تزيد أطوالهم عن 72 in هو 22 طالبًا تقريبًا.

b) ما نسبة الطلبة الّذين تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in؟



تُمثّل المساحة المظللة في الشكل المجاور نسبة الطلبة الّذين تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in وتقع بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + \sigma$. وتكون المساحة تحت المنحنى بين 59.5 و 69.5 مساوية لمجموع مساحات كل منطقة.

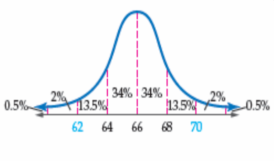
$$2.35\% + 13.5\% + 68\% = 83.85\%$$

لذا، فإن 84% من الطلبة تقريبًا تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in.

مثال 3 من واقع الحياة عينة موزّعة توزيعًا طبيعيًّا

أطوال: توزّع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in.

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

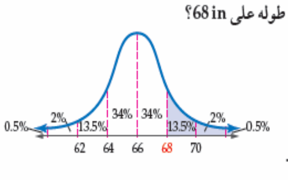


ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.

تبعد كل من 62 , 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $1800 \times 95\% = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟

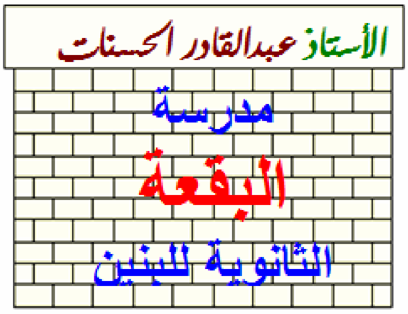


من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا



من كتاب التمارين

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

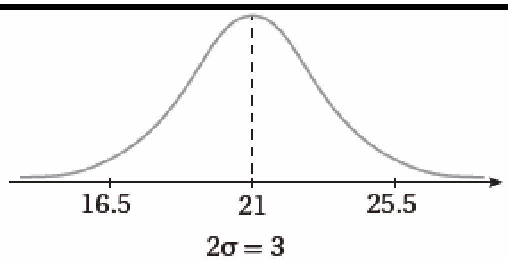
1 النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

2 النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

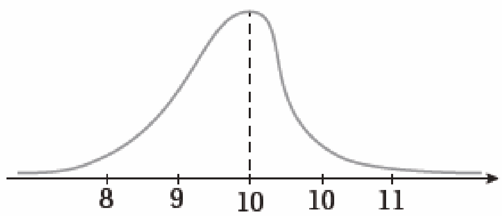
3 النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

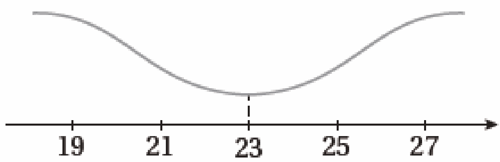
4 النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

5 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى توزيع طبيعي. أُعبِّر عن المُتغيِّر العشوائي لهذا التوزيع باستعمال الرموز.



أُبيِّن لماذا لا يُمثِّل أيٌّ من التمثيلين الآتيين منحنى توزيع طبيعي:

6


7


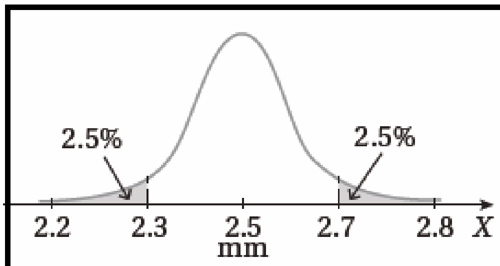
إذا كان: $X \sim N(8, 0.04)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

8 $P(X > 8)$

9 $P(7.8 < X < 8.2)$

10 $P(X > 8.4)$

صناعة: يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



11 أجد كُلًّا من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

12 أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

1	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50%
2	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
3	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي 47.5%
4	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 97.35%

5	$X \sim N(21, 1.5^2)$
6	منحنى التوزيع الطبيعي يكون متماثلًا حول المستقيم المار بالوسط الحسابي للبيانات، و هذا الشكل لا يحقق هذه الخاصية.
7	من خواص منحنى التوزيع الطبيعي، أن الوسط والوسيط والمنوال (وهي القيمة الأكثر تكرارًا، أي أعلى نقطة في المنحنى) كلها متطابقة وتتوسط البيانات، بينما هذا الشكل لا يحقق هذه الخاصية.

8	$P(X > 8) \approx 0.5$
9	$P(7.8 < X < 8.2) = P(8 - (0.2) < X < 8 + (0.2))$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68$
10	$P(X > 8.4) = P(X > 8 + 2(0.2)) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx 0.025$

11	$\mu = 2.5$ $\mu + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow 2.5 + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow \sigma = 0.1$
12	$P(2.5 < X < 2.7) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$

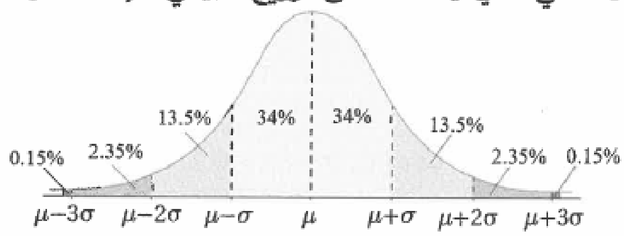
أسئلة الوزارة أدبي 2023

18) إذا كان $X \sim N(25\,,1.1^2)$ ، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع الطبيعي هما على الترتيب:

a) $\mu = 25\,,\sigma = 1.21$ c) $\mu = 5\,,\sigma = 1.21$

b) $\mu = 25\,,\sigma = 1.1$ d) $\mu = 5\,,\sigma = 1.1$

* إذا دل المتغير العشوائي X على أطوال مجموعة من طلبة الصف الرابع (بالسنتيمتر) ، حيث $X \sim N\ (120\,,16)$ ، فاستعمل القاعدة التجريبية والشكل الآتي الذي يُمثل منحنى توزيع طبيعي للإجابة عن الفقرات19 و20 و21 و 22 الآتية:



19) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي:

a) 95% c) 50%

b) 68% d) 34%

20) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد:

a) 34% b) 50% c) 68% d) 47.5%

21) قيمة $P(112 < X < 128)$ تساوي:

a) 0.5 b) 0.68 c) 0.95 d) 0.997

22) قيمة $P(X > 132)$ تساوي:

a) 0.135 b) 0.0015 c) 0.0235 d) 0.485

أسئلة الوزارة أدبي 2023 تكميلي

22) من خصائص المنحنى الطّبيعي:

a) يُستعمل لنمذجة البيانات العددية المنفصلة المُختارة عشوائيًا في مواقف حياتية.

b) منحنى متصل له شكل الجرس.

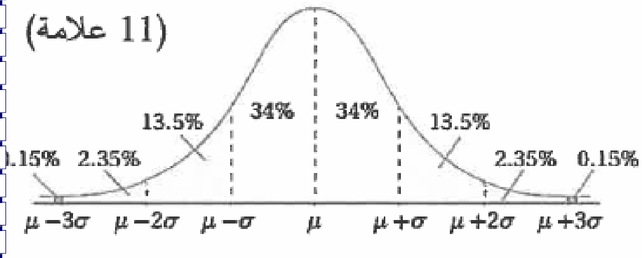
c) الوسط الحسابي للبيانات أكبر من الوسيط.

d) يقطع المنحنى المحور x عند طرفيه.

23) إذا كان $X \sim N(20, 9)$ ، فإن النسبة المئوية للبيانات التي تقل عن 20 هي:

a) 34% b) 47.5% c) 50% d) 68%

a) إذا دلّ المتغير العشوائي X على علامات مجموعة من طلبة الصف العاشر في أحد الاختبارات، حيث $X \sim N(72, 16)$ ، فاستعمل القاعدة التجريبية والشكل الآتي الذي يُمثل منحنى توزيعًا طبيعيًا للإجابة عن كلّ مما يأتي: (11 علامة)

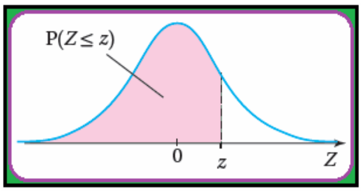


1) ما قيمة $P(X > 76)$ ؟

2) ما قيمة $P(68 < X < 80)$ ؟

3) إذا علمت أن 16% من الطلبة لم ينجحوا في الاختبار، فما علامة النجاح؟

الدرس 4 التوزيع الطبيعي المعياري
Standard Normal Distribution



التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي 0 ، وانحرافه المعياري 1
ويُمكِن التعبير عن مُتغيِّره العشوائي بالرموز : $Z \sim N(0, 1)$

نلاحظ من الشكل المجاور أن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري
مُتماثِل حول الوسط الحسابي (0)

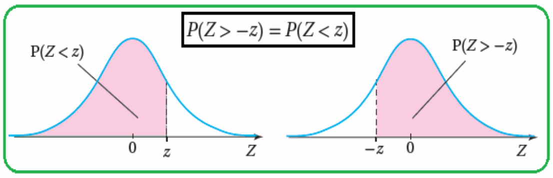
كذلك فإن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي المساحة إلى يسار القيمة المعيارية z ، والتي تُمثِّل احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري Z التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z ، أو $P(Z \le z)$

ملاحظات مهمة : عند إيجاد قيمة احتمال ما من الجدول ، علينا ملاحظة ما يأتي (علماً بان a قيمة موجبة):

1) جميع القيم في الجدول معيارية ، و إذا لم تكن كذلك نحولها باستعمال القاعدة $\boxed{z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}}$
(فيما بعد .... الدرس القادم)

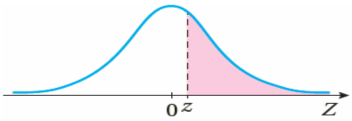
2) إذا كانت $(z \le a)$: نكتب القيمة التي نجدها في الجدول (فالجدول يُعطي الاحتمال الأصغر من القيمة الموجبة)
مثلاً : $P(z \le 0.3) = 0.6719$

3) إذا كانت $(z \ge -a)$: باختصار ، نتجاهل الإشارة السالبة ونكتب القيمة الموجودة في الجدول
مثلاً: $P(z \ge -1.4) = P(z \le 1.4) = 0.9192$



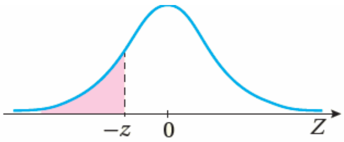
بسبب التماثل : الأكبر من (السالب) هي نفسها الأصغر من (الموجب)

4) إذا كانت $(z \ge a)$ ، نطرح القيمة الموجودة في الجدول من (1)
مثلاً: $P(z \ge 0.78) = 1 - 0.7823 = 0.99910 - 0.7823 = 0.2187$
لأن احتمال التوزيع كاملاً يساوي (1)



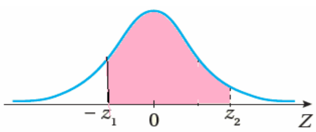
$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

5) إذا كانت $(z \le -a)$ ، نطرح القيمة الموجودة في الجدول من (1)
مثلاً: $P(z \le -1.3) = 1 - 0.9032 = 0.99910 - 0.9032 = 0.0978$

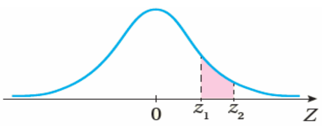


$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$

6) إذا كانت (z) محصورة بين قيمتين فإن الاحتمال = الأصغر من الكبرى – الأصغر من الصغرى



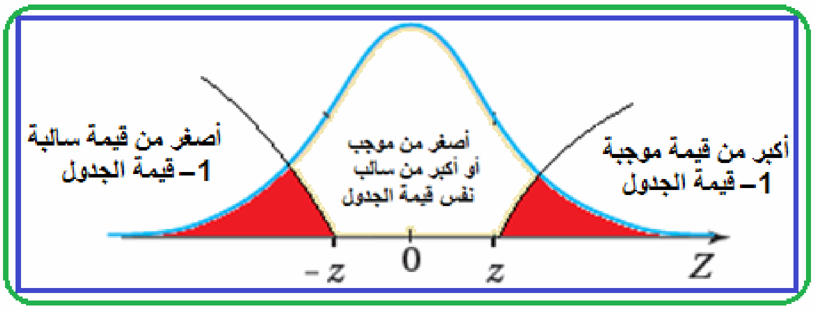
$P(-z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < -z_1)$



$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$

مثلاً: $P(1 \le z \le 1.2) = P(z \le 1.2) - P(z \le 1) = 0.8849 - 0.8413 = 0.0436$

$P(-0.2 \le z \le 0.3) = P(z \le 0.3) - P(z \le -0.2) = 0.6179 - (1 - 0.5793) = 0.1972$



تمارين

معتمدا القيم في الجدول المجاور ، جد قيمة كلا مما يأتي :

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	$\boxed{0.7019}$	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	$\boxed{0.8729}$	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	$\boxed{0.9192}$	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

1) $P(z \leq 1.3) =$

2) $P(z \leq 1.03) =$

3) $P(z \leq -0.3) =$

4) $P(z \geq 1.46) =$

5) $P(z \geq -0.7) =$

6) $P(z \geq 0.43) =$

7) $P(z \geq -1.01) =$

8) $P(0.5 \leq z \leq 1.2) =$

9) $P(-1.4 \leq z \leq -1)=$

10) $P(-0.6 \leq z \leq 1.11) =$

Hasanat

الإجابات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.9032	0.8458	0.3821	0.0721	0.7580	0.3336	0.8438	0.1934	0.0779	0.5922

أتحقَّق من فهمي 100 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z<0.69)$ b) $P(Z<3.05)$ c) $P(Z>-1.67)$ d) $P(Z>-2.88)$

أتحقَّق من فهمي 101 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z>2.56)$ b) $P(Z>1.01)$ c) $P(Z<-0.09)$ d) $P(Z<-1.52)$

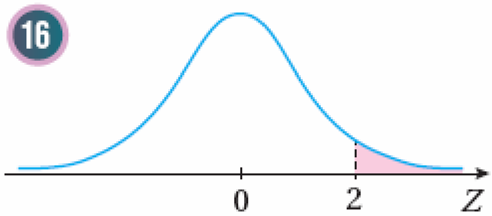
أتحقَّق من فهمي 102 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

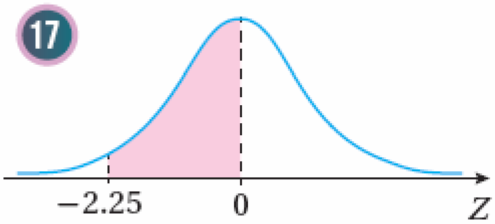
a) $P(0<Z<0.33)$ b) $P(-1<Z<1.25)$

أتدرَّب وأحلُّ المسائل 107 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1) $P(Z<0.68)$
2) $P(Z<1.54)$
3) $P(Z>0.27)$
4) $P(0.49<Z<2.9)$
5) $P(-0.08<Z<0.8)$
6) $P(0<Z<1.07)$
7) $P(Z<-1.25)$
8) $P(Z>-1.99)$
9) $P(-0.5<Z<0)$
10) $P(Z<0.43)$
11) $P(Z>3.08)$
12) $P(Z<-2.03)$
13) $P(Z>2.2)$
14) $P(-0.72<Z<3.26)$
15) $P(1.5<Z<2.5)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

16) 

17) 

مهارات التفكير العليا

23) تحدٍّ: إذا كان $a>0$، فأُثبِت أنَّ: $P(-a<Z<a)=2P(Z<a)-1$.

	أتحقق من فهمي صفحة 100
a	$P(Z < 0.69) = 0.7549$
b	$P(Z < 3.05) = 0.9989$
c	$P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525$
d	$P(Z > -2.88) = P(Z < 2.88) = 0.9980$

	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$P(Z > 2.56) = 1 - P(Z < 2.56) = 1 - 0.9948 = 0.0052$
b	$P(Z > 1.01) = 1 - P(Z < 1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562$
c	$P(Z < -0.09) = 1 - P(Z < 0.09) = 1 - 0.5359 = 0.4641$
d	$P(Z < -1.52) = 1 - P(Z < 1.52) = 1 - 0.9357 = 0.0643$

	أتحقق من فهمي صفحة 102
a	$P(0 < Z < 0.33) = P(Z < 0.33) - P(Z < 0) = 0.6293 - 0.5 = 0.1293$
b	$P(-1 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 1.25) - (1 - P(Z < 1)) = 0.8944 - (1 - 0.8413)$ $= 0.8944 - 0.1587 = 0.7357$

1	$P(Z < 0.68) = 0.7517$
2	$P(Z < 1.54) = 0.9382$
3	$P(Z > 0.27) = 1 - P(Z < 0.27) = 1 - 0.6064 = 0.3936$
4	$P(0.49 < Z < 2.9) = P(Z < 2.9) - P(Z < 0.49) = 0.9981 - 0.6879 = 0.3102$
5	$P(-0.08 < Z < 0.8) = P(Z < 0.8) - P(Z < -0.08)$ $= P(Z < 0.8) - (1 - P(Z < 0.08)) = 0.7881 - (1 - 0.5319)$ $= 0.9981 - 0.4681 = 0.5300$

6	$P(0<Z<1.07)=P(Z<1.07)-P(Z<0)=0.8577-0.5=0.3577$
7	$P(Z<-0.08)=1-P(Z<0.08)=1-0.5319=0.4681$
8	$P(Z>-1.99)=P(Z<1.99)=0.9767$
9	$P(-0.5<Z<0)=P(Z<0)-P(Z<-0.5)$ $=P(Z<0)-\left(1-P(Z<0.5)\right)=0.5-(1-0.6915)$ $=0.5-0.3085=0.1915$
10	$P(Z<0.43)=0.6664$

11	$P(Z>3.08)=1-P(Z<3.08)=1-0.9990=0.0010$
12	$P(Z<-2.03)=1-P(Z<2.03)=1-0.9788=0.0212$
13	$P(Z>2.2)=1-P(Z<2.2)=1-0.9861=0.0139$
14	$P(-0.72<Z<3.26)=P(Z<3.26)-P(Z<-0.72)$ $=P(Z<3.26)-\left(1-P(Z<0.72)\right)=0.9994-(1-0.7642)$ $=0.9994-0.2358=0.7636$
15	$P(1.5<Z<2.5)=P(Z<2.5)-P(Z<1.5)=0.9938-0.9332=0.0606$

16	$P(Z>2)=1-P(Z<2)=1-0.9772=0.0228$
17	$P(-2.25<Z<0)=P(Z<0)-P(Z<-2.25)$ $=P(Z<0)-\left(1-P(Z<2.25)\right)=0.5-(1-0.9878)$ $=0.5000-0.0122=0.4878$

23	$P(-a<Z<a)=P(Z<a)-P(Z<-a)=P(Z<a)-\left(1-P(Z<a)\right)$ $=P(Z<a)-1+P(Z<a)=2P(Z<a)-1$

إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

قد يكون الاحتمال معلومًا في بعض الأحيان ، وتكون قِيَم المُتغيِّر العشوائي Z هي المجهولة.
وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة z التي تُحقِّقه.

وهناك أربعة احتمالات :

1) الاحتمال أصغر من قيمة موجبة (وقيمته أكثر من 0.5) : نبحث عنها (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول فتكون (z) هي القيمة المقابلة لها
مثلاً : $P(z \le a) = 0.9525$ ، نلاحظ أنها تقابل (1.67) إذاً $z = 1.67$

2) الاحتمال أصغر من قيمة موجبة (وقيمته أقل من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a سالبة ،
لذلك نطرحها من (1) ثم نبحث عن القيمة الناتجة من الطرح (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول
فتكون (z) هي (سالب) القيمة المقابلة لها
مثلاً : $P(z \le a) = 0.4364$: 0.4364 أصغر من (0.5) لذلك نطرحها من (1) فتصبح: 0.5636
نلاحظ أنها تقابل (0.16) ، إذاً $z = -0.16$

3) الاحتمال أكبر من قيمة موجبة (وقيمته أكثر من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a سالبة ،
نبحث عنها (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول فتكون (z) هي (سالب) القيمة المقابلة لها
مثلاً : $P(z \ge a) = 0.9406$ ، نلاحظ أنها تقابل (1.56) ، إذاً $z = -1.56$

4) الاحتمال أكبر من قيمة موجبة (وقيمته أقل من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a موجبة ،
لذلك نطرحها من (1) ثم نبحث عن القيمة الناتجة من الطرح (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول
مثلاً : $P(z \ge a) = 0.0047$: 0.0047 أصغر من (0.5) لذلك نطرحها من (1) فتصبح: 0.9953
نلاحظ أنها تقابل (2.6) إذاً $z = 2.6$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

أتحقّق من فهمي 106 أجد قيمة a التي تُحقّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(Z < a) = 0.9788$

b) $P(Z < a) = 0.25$

c) $P(Z > a) = 0.9738$

d) $P(Z > a) = 0.2$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 107 أجد قيمة a التي تُحقّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $P(Z < a) = 0.7642$

19) $P(Z < a) = 0.13$

20) $P(Z > a) = 0.8531$

21) $P(Z > a) = 0.372$

مهارات التفكير العليا 107

تبرير: أجد قيمة a التي تُحقّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

24) $P(0 < Z < a) = 0.45$

25) $P(-a < Z < a) = 0.1272$

	أتحقق من فهمي صفحة 106
a	$P(Z < a) = 0.9788$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.9788 = P(Z < z) \Rightarrow z = 2.03 \Rightarrow a = 2.03$
b	$P(Z < a) = 0.25$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z < a) = P(Z < -z) \Rightarrow 0.25 = P(Z < -z) \Rightarrow 0.25 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.25$ $P(Z < z) = 0.75 \Rightarrow z = 0.67 \Rightarrow a = -0.67$
c	$P(Z > a) = 0.9738$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z > a) = P(Z > -z) \Rightarrow 0.9738 = P(Z > -z) \Rightarrow 0.9738 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9738 \Rightarrow z = 1.94 \Rightarrow a = -1.94$
d	$P(Z > a) = 0.2$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z > a) = P(Z > z) \Rightarrow 0.2 = P(Z > z) \Rightarrow 0.2 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2 \Rightarrow P(Z < z) = 0.8 \Rightarrow z = 0.84 \Rightarrow a = -0.84$

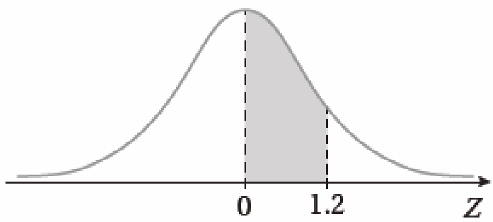
18	$P(Z < a) = 0.7642$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.7642 = P(Z < z) \Rightarrow z = 0.72 \Rightarrow a = 0.72$
19	$P(Z < a) = 0.13$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z < a) = P(Z < -z) \Rightarrow 0.13 = P(Z < -z) \Rightarrow 0.13 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.13 \quad P(Z < z) = 0.87 \Rightarrow z = 1.12 \Rightarrow a = -1.12$
20	$P(Z > a) = 0.8531$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z > a) = P(Z > -z) \Rightarrow 0.8531 = P(Z > -z) \Rightarrow 0.8531 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8531 \Rightarrow z = 1.05 \Rightarrow a = -1.05$
21	$P(Z > a) = 0.372$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z > a) = P(Z > z) \Rightarrow 0.372 = P(Z > z) \Rightarrow 0.372 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.372 \Rightarrow P(Z < z) = 0.628 \Rightarrow z = 0.32 \Rightarrow a = -0.32$
24	$P(0 < Z < a) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < 0) = 0.45 \Rightarrow P(Z < a) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) = 0.95$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.95 = P(Z < z) \Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow a = 1.64$
25	$P(-a < Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.1272 \rightarrow P(Z < a) - 1 + P(Z < a) - 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) - 1 = 0.1272 \Rightarrow 2P(Z < a) = 1.1272 \Rightarrow P(Z < a) = 0.5636$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.5636 = P(Z < z) \Rightarrow z = 0.16 \Rightarrow a = 0.16$

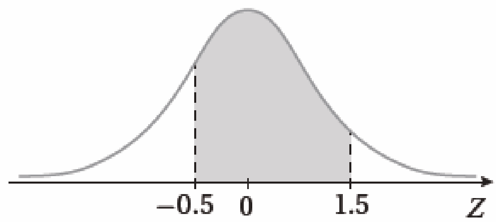
من كتاب التمارين

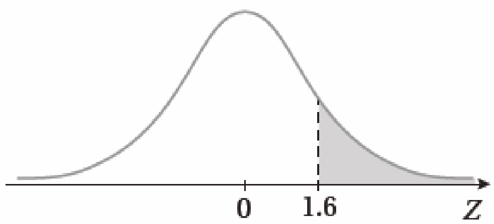
أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

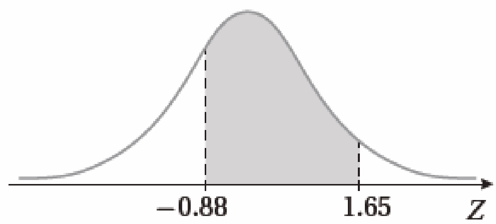
1. $P(Z < 1.42)$
2. $P(Z < 0.87)$
3. $P(Z > 1.06)$
4. $P(Z < -2.78)$
5. $P(Z > -1.33)$
6. $P(1.1 < Z < 2.1)$
7. $P(-2.65 < Z < -1.43)$
8. $P(0.24 < Z < 1.1)$
9. $P(Z < -0.54)$
10. $P(-1.8 < Z < 1.8)$
11. $P(Z < -1.75)$
12. $P(Z > 0.81)$
13. $P(-1 < Z < -0.33)$
14. $P(0.4 < Z < 1.7)$
15. $P(Z > 2.09)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

16


17


18


19


أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

20. $P(Z < a) = 0.9082$
21. $P(Z < a) = 0.0314$
22. $P(Z > a) = 0.95$
23. $P(Z < a) = 0.5442$
24. $P(Z > a) = 0.2743$
25. $P(Z > a) = 0.6231$

26. إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، وكان: $P(1 < Z < c) = 0.1408$، فأجد قيمة الثابت c.

1	$P(Z < 1.42) = 0.9222$
2	$P(Z < 0.87) = 0.8078$
3	$P(Z > 1.06) = 1 - P(Z < 1.06) = 1 - 0.8554 = 0.1446$
4	$P(Z < -2.78) = 1 - P(Z < 2.78) = 1 - 0.9973 = 0.0027$
5	$P(Z > -1.33) = P(Z < 1.33) = 0.9082$

6	$P(1.1 < Z < 2.1) = P(Z < 2.1) - P(Z < 1.1) = 0.9821 - 0.8643 = 0.1178$
7	$P(-2.65 < Z < -1.43) = P(Z < -1.43) - P(Z < -2.65)$ $= 1 - P(Z < 1.43) - (1 - P(Z < 2.65)) = 1 - 0.9236 - (1 - 0.9960) = 0.0734$
8	$P(0.24 < Z < 1.1) = P(Z < 1.1) - P(Z < 0.24) = 0.8643 - 0.5948 = 0.2695$
9	$P(Z < -0.54) = 1 - P(Z < 0.54) = 1 - 0.7054 = 0.2946$
10	$P(-1.8 < Z < 1.8) = P(Z < 1.8) - P(Z < -1.8)$ $= P(Z < 1.8) - (1 - P(Z < 1.8)) = 2P(Z < 1.8) - 1 = 2(0.9641) - 1 = 0.9282$

10	$P(-1.8 < Z < 1.8) = P(Z < 1.8) - P(Z < -1.8)$ $= P(Z < 1.8) - (1 - P(Z < 1.8)) = 2P(Z < 1.8) - 1 = 2(0.9641) - 1 = 0.9282$
11	$P(Z < -1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$
12	$P(Z > 0.81) = 1 - P(Z < 0.81) = 1 - 0.7910 = 0.2080$
13	$P(-1 < Z < -0.33) = P(Z < -0.33) - P(Z < -1)$ $= 1 - P(Z < 0.33) - (1 - P(Z < 1)) = 1 - 0.6293 - (1 - 0.8413) = 0.2120$
14	$P(0.4 < Z < 1.7) = P(Z < 1.7) - P(Z < 0.4) = 0.9554 - 0.6554 = 0.3000$
15	$P(Z > 2.09) = 1 - P(Z < 2.09) = 1 - 0.9817 = 0.0183$

16	$P(0 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < 0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$
17	$P(-0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 1.5) - (1 - P(Z < 0.5)) = 0.9332 - (1 - 0.6914) = 0.6246$
18	$P(Z > 1.6) = 1 - P(Z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$
19	$P(-0.88 < Z < 1.65) = P(Z < 1.65) - P(Z < -0.88)$ $= P(Z < 1.65) - (1 - P(Z < 0.88)) = 0.9505 - (1 - 0.8106) = 0.7611$

20 $P(Z < a) = 0.9082$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها

$P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.9082 = P(Z < z) \Rightarrow z = 1.33 \Rightarrow a = 1.33$

21 $P(Z < a) = 0.0314$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها

$P(Z < a) = P(Z < -z) \Rightarrow 0.0314 = P(Z < -z) \Rightarrow 0.0314 = 1 - P(Z < z)$

$P(Z < z) = 1 - 0.0314 \qquad P(Z < z) = 0.9686 \Rightarrow z = 1.86 \Rightarrow a = -1.86$

22 $P(Z > a) = 0.95$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها

$P(Z > a) = P(Z > -z) \Rightarrow 0.95 = P(Z > -z) \Rightarrow 0.95 = P(Z < z)$

$\Rightarrow P(Z < z) = 0.95 \Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow a = -1.64$

23 $P(Z < a) = 0.5442$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها

$P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.5442 = P(Z < z) \Rightarrow z = 0.11 \Rightarrow a = 0.11$

24 $P(Z > a) = 0.2743$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها

$P(Z > a) = P(Z > z) \Rightarrow 0.2743 = P(Z > z) \Rightarrow 0.2743 = 1 - P(Z < z)$

$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2743 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7257 \Rightarrow z = 0.6 \Rightarrow a = 0.6$

25 $P(Z > a) = 0.6231$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها

$P(Z > a) = P(Z > -z) \Rightarrow 0.6231 = P(Z > -z) \Rightarrow 0.6231 = P(Z < z)$

$\Rightarrow P(Z < z) = 0.6231 \Rightarrow z = 0.31 \Rightarrow a = -0.31$

26 $P(1 < Z < c) = 0.1408 \qquad P(Z < c) - P(Z < 1) = 0.1408$

$P(Z < c) - 0.8413 = 0.1408 \qquad P(Z < c) = 0.9821$

الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة c أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة c موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها

$P(Z < c) = P(Z < z) \Rightarrow 0.9821 = P(Z < z) \Rightarrow z = 2.1 \Rightarrow a = 2.1$

وزارة أدبي 2023

23) إذا كان $Z\sim N(0,1)$ ، وكان $P(Z<a)=0.1539$ ، فما قيمة $P(Z<-a)$ ؟

a) 0.8461 b) 0.1539 c) 0.3461 d) 0.6539

24) إذا كان $Z\sim N(0,1)$ ، وكان $P(Z>-a)=0.9292$ ، فما قيمة $P(Z<a)$ ؟

a) 0.0708 b) 0.9292 c) 0.4292 d) 0.5000

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حل الفرعين a و b.

z	0	0.5	1.5	2
$P(Z<z)$	0.5000	0.6915	0.9332	0.9772

a) إذا كان $Z\sim N(0,1)$ ، وكان $P(k<Z<2)=0.6687$ ، فما قيمة الثابت k؟ (8 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

23) إذا كان $X\sim N(20,9)$ ، فإن النسبة المئوية للبيانات التي تقل عن 20 هي:

a) 34% b) 47.5% c) 50% d) 68%

24) إذا كان Z متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا ، وكان $P(Z<a)=0.6$ ، فإن قيمة $P(Z>-a)$ تساوي:

a) 0.04 b) 0.06 c) 0.4 d) 0.6

الدرس 5
احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول
Probability of Normal Random Variable Using the Table

تحويل قِيَم التوزيع الطبيعي إلى قِيَم معيارية

لاحظنا طريقة إيجاد احتمالات مُتغيِّرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقِيَم مُحدَّدة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$ ، باستعمال القاعدة التجريبية، كما أوجدنا احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول.

ولكن الجدول لا يتعامل إلا مع قيم معيارية، فما العمل عند وجود مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري؟ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
ببساطة نحوّل القيم المعطاة إلى قيم معيارية عن طريق القاعدة الآتية :

العلامة (القيمة) المعيارية (z) = $\dfrac{\text{القيمة الخام – الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$ وبالرموز $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

مثال 1) إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 65 ، وانحرافه المعياري 5 ، فجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

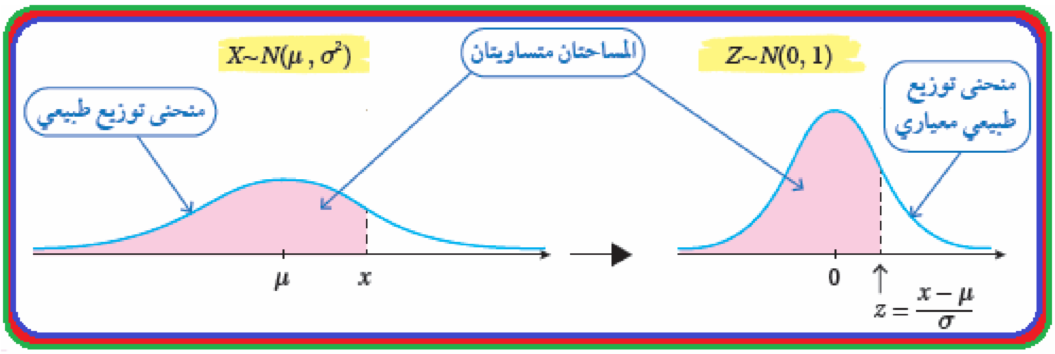
$$a)\ x=73 \Rightarrow z = \frac{73-65}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$b)\ x=55 \Rightarrow z = \frac{55-65}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

أتحقّق من فهمي 109 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 15، وانحرافه المعياري 4، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:
a) $x = 24$ b) $x = 10$

ملاحظة : يؤدّي التغيُّر في الوسط الحسابي إلى انسحاب أفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي.
أمّا التغيُّر في الانحراف المعياري فيُؤثِّر في انتشار المنحنى الطبيعي وتوسُّعه.

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي(غير المعياري)



إنَّ طرح الوسط الحسابي من جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلًا من μ،
وإنَّ قسمتها جميعًا على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلًا من σ،
وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معياريًا، ويتحوَّل المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0 ، 1)$ ،
عندئذٍ يُمكِن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أيٍّ من قِيَمه.

مثال 2) إذا كان : $X\sim N(40 ، 25)$ ، فجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

الحل : $X\sim N(40 ، 5^2)$

$$a)P(X<49)=P(Z<\frac{49-40}{5})=P(Z<1.8)=0.9641$$

$$b)P(X>50)=P(Z>\frac{50-40}{5})=P(Z>2)=1-0.9772=0.0228$$

$$c)P(X>35)=P(Z>\frac{35-40}{5})=P(Z>-1)=0.8413$$

$$d)P(X<34)=P(Z<\frac{34-40}{5})=P(Z<-1.2)=1-0.8849=0.1151$$

$$e)P(25<X<45)=P(-3<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-3)=0.84$$

أتحقّق من فهمي 110

إذا كان: $X\sim N(7, 0.25)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X<7.7)$ b) $P(X>6.1)$ c) $P(6<X<7.1)$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

مثال 3) إذا كانت أطوال مجموعة من الموظفين في إحدى المؤسسات تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 175 cm وانحرافه المعياري 4 cm . إذا اختير موظف عشوائيًا :

أ) ما احتمال أنْ يكون طوله أقل من 170 cm ؟ ب) ما احتمال أنْ يكون طوله أكبر من 179 cm ؟

ج) إذا كان عدد الموظفين (100) ، فجد عدد الذين تنحصر أطوالهم بين (160 cm) و (180 cm)

$$a)P(X<170)=P(Z<\frac{170-175}{4})=P(Z<-1.25)=1-0.8994=0.1056$$

$$b)P(X>179)=P(Z>\frac{179-175}{4})=P(Z>1)=1-0.8413=0.1587$$

$$c)P(175<X<181)=P(0<Z<1.5)=P(Z<1.5)-P(Z<0)$$

$$=0.9332-0.5=0.4332$$

$$\Rightarrow n=(100)(0.4332)=43.32\approx 43$$

أتحقّق من فهمي 112 زراعة: تتبع كتل ثمار البندورة في إحدى المَزارع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 90 g، وانحرافه المعياري 5 g:

a) أجد نسبة ثمار البندورة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 80 g

b) إذا احتوى صندوق على 200 حبَّة بندورة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 100 g في هذا الصندوق.

مسألة اليوم يتبع ضغط الدم الانقباضي (mmHg) للبالغين توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 127، وانحرافه المعياري 16. إذا اختير شخص بالغ عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون ضغط دمه الانقباضي أقل من 123 mmHg؟

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 224، وانحرافه المعياري 6، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

3) $x = 224$

2) $x = 200$

1) $x = 239$

إذا كان: $X \sim N(30, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

6) $P(35 < X < 40)$

5) $P(X > 38)$

4) $P(X < 35)$

9) $P(17 < X < 19)$

8) $P(15 < X < 32)$

7) $P(X < 20)$

إذا كان: $X \sim N(154, 144)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

12) $P(140 < X < 155)$

11) $P(X > 160)$

10) $P(X < 154)$

قياس: يتبع محيط خصر 1200 شخص توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 78 cm، وانحرافه المعياري 5 cm:

13) أجد نسبة الأشخاص الذين يقلُّ محيط الخصر لكلٍّ منهم عن 70 cm

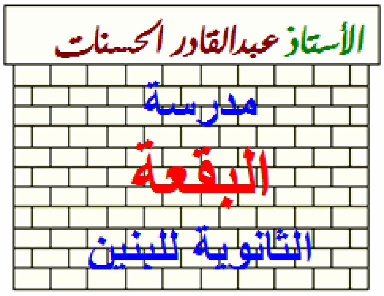
14) أجد عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكلٍّ منهم بين 70 cm و 80 cm

بطّاريات: تُنتِج إحدى الشركات بطّاريات من نوع AA، ويتبع عُمُر هذه البطّاريات توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي **25** ساعة، وانحرافه المعياري **1.5** ساعة. إذا اختيرت بطّارية عشوائيًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 احتمال أنْ يكون عُمُر البطّارية أكثر من 28 ساعة.

16 احتمال أنْ يكون عُمُر البطّارية أكثر من 20 ساعة.

17 احتمال أنْ يتراوح عُمُر البطّارية بين 22 ساعة و25 ساعة.



إدارة السير: في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي **68.5 km/h**، وانحرافه المعياري **5 km/h**. إذا كانت السرعة القصوى المُحدَّدة على هذا الطريق هي **70 km/h**، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو **1300** سيّارة، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

السرعة	درجة المخالفة
(75–85) km/h	الأولى
أكثر من (85) km/h	الثانية

18 أجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدَّدة على الطريق في هذا اليوم.

19 إذا كان نظام المراقبة على هذا الطريق يرصد مخالفات من درجتين بحسب مقدار تجاوز الحدِّ الأقصى للسرعة كما في الجدول المجاور، فأجد عدد المخالفات التي سُجِّلت من كل درجة في هذا اليوم.

مهارات التفكير العليا

20 تبرير: إذا كان: $X \sim N(\mu , \sigma^2)$، وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x = 14$ هي $z = 3.2$، والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X.

21 تحدٍّ: إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي هو 73، وانحرافه المعياري هو 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل مُعدَّل للطلبة الخمسين؟

أتحقق من فهمي صفحة 109

a	$z = \frac{24-15}{4} = 2.25$
b	$z = \frac{10-15}{4} = -1.25$

أتحقق من فهمي صفحة 110

a	$X \sim N(7, 0.5^2)$ $P(X < 7.7) = P\left(Z < \frac{7.7-7}{0.5}\right) = P(Z < 1.4) = 0.9192$
b	$P(X > 6.1) = P\left(Z > \frac{6.1-7}{0.5}\right) = P(Z > -1.8) = P(Z < 1.8) = 0.9641$
c	$P(6 < X < 7.1) = P\left(\frac{6-7}{0.5} < Z < \frac{7.1-7}{0.5}\right) = P(-2 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -2) = P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 2))$ $= 0.5793 - (1 - 0.9772) = 0.5793 - 0.0228 = 0.5565$

أتحقق من فهمي صفحة 112

a	$X \sim N(90, 5^2)$ $P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{5}\right) = P(Z < -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
b	$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-90}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$ عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن $100\ g$ = $n = 200 \times 0.0228 = 4.56 \approx 5$

مسألة اليوم صفحة 108

$X \sim N(127, 16^2)$

$P(X < 123) = P\left(Z < \frac{123-127}{16}\right) = P(Z < -0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 112

1	$z = \frac{239-224}{6} = 2.5$	2	$z = \frac{200-224}{6} = -4$	3	$z = \frac{224-224}{6} = 0$

4	$X \sim N(30, 10^2) \Rightarrow P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35-30}{10}\right) = P(Z < 0.5) = 0.6915$
5	$P(X > 38) = P\left(Z > \frac{38-30}{10}\right) = P(Z > 0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$
6	$P(35 < X < 40) = P\left(\frac{35-30}{10} < Z < \frac{40-30}{10}\right) = P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5) = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5793 - 0.3085 = 0.2708$

7	$P(X<20)=P\left(Z<\frac{20-30}{10}\right)=P(Z<-1)=1-0.8413=0.1587$
8	$P(15<X<32)=P\left(\frac{15-30}{10}<Z<\frac{32-30}{10}\right)=P(-1.5<Z<0.2)$ $=P(Z<0.2)-P(Z<-1.5)=P(Z<0.2)-(1-P(Z<1.5))$ $=0.5793-(1-0.9332)=0.5793-0.0668=0.5125$
9	$P(17<X<19)=P\left(\frac{17-30}{10}<Z<\frac{19-30}{10}\right)=P(-1.3<Z<-1.1)$ $=P(Z<-1.1)-P(Z<-1.3)=1-P(Z<1.1)-(1-P(Z<1.3))$ $=1-0.8643-(1-0.9032)=0.1357-0.0968=0.0389$

10	$X\sim N(154,12^2) \Rightarrow P(X<154)=P\left(Z<\frac{154-154}{12}\right)=P(Z<0)=0.5$
11	$P(X>160)=P\left(Z>\frac{160-154}{12}\right)=P(Z>0.5)=1-0.6915=0.3085$
12	$P(140<X<155)=P\left(\frac{140-154}{12}<Z<\frac{155-154}{12}\right)$ $=P(-1.17<Z<0.08)=P(Z<0.08)-P(Z<-1.17)$ $=P(Z<0.08)-(1-P(Z<1.17))=0.5319-(1-0.8790)=0.0147$

13	$X\sim N(78,5^2) \Rightarrow P(X<70)=P\left(Z<\frac{70-78}{5}\right)=P(Z<-1.6)$ $=1-P(Z<1.6)=1-0.9452=0.0548$
14	$P(70<X<80)=P\left(\frac{70-78}{5}<Z<\frac{80-78}{5}\right)=P(-1.6<Z<0.4)$ $=P(Z<0.4)-P(Z<-1.6)=P(Z<0.4)-(1-P(Z<1.6))$ $=0.6554-(1-0.9452)=0.6554-0.0548=0.6006$ $\Rightarrow n=1200\times 0.6006=720.72\approx 721$

15	$X\sim N(25,1.5^2) \Rightarrow P(X>28)=P\left(Z>\frac{28-25}{1.5}\right)=P(Z>2)$ $=1-P(Z<2)=1-0.9772=0.0228$
16	$P(X>20)=P\left(Z>\frac{20-25}{1.5}\right)=P(Z>-3.33)=1-P(Z<3.33)=0.0004$
17	$P(22<X<25)=P\left(\frac{22-25}{1.5}<Z<\frac{25-25}{1.5}\right)=P(-2<Z<0)$ $=P(Z<0)-P(Z<-2)=P(Z<0)-(1-P(Z<2))$ $=0.5-(1-0.9772)=0.5000-0.0228=0.4772$

18
$X \sim N(68.5, 5^2)$

$$P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70 - 68.5}{5}\right) = P(Z > 0.3) = 1 - P(Z < 0.3) = 0.3821$$

العدد التقريبي للسيارات $n = 1300 \times 0.3821 = 496.73 \approx 497$

19
$$P(75 < X < 85) = P\left(\frac{75 - 68.5}{5} < Z < \frac{85 - 68.5}{5}\right) = P(1.3 < Z < 3.3)$$

$$= P(Z < 3.3) - P(Z < 1.3) = 0.9995 - 0.9032 = 0.0963$$

عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الأولى $n = 1300 \times 0.0963 = 125.19 \approx 125$

$$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85 - 68.5}{5}\right) = P(Z > 3.3) = 1 - P(Z < 3.3)$$

$$= P(Z > 3.3) = 1 - P(Z < 3.3) = 1 - 0.9995 = 0.0005$$

عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الثانية $n = 1300 \times 0.0005 = 0.65 \approx 1$

20
$$3.2 = \frac{14 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 3.2\sigma = 14 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-1.8 = \frac{-6 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -1.8\sigma = -6 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بضرب المعادلة (2) بسالب واحد، تنتج لدينا المعادلة: $1.8\sigma = 6 + \mu \ldots\ldots\ldots (3)$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفًا إلى طرف، نحصل على: $5\sigma = 20 \Rightarrow \sigma = 4$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على: $1.8(4) = 6 + \mu \Rightarrow \mu = 1.2$

إذن، الوسط الحسابي هو 1.2 ، والانحراف المعياري هو 4

21
نفرض a هو المعدل المطلوب. نفرض p هو احتمال أن يكرم الطالب،

أي احتمال أن يحصل على معدل أعلى من a أو يساويه. $n = 600 \times p = 50 \Rightarrow p = \frac{50}{600} \approx 0.0833$

إذن، احتمال أن يتم تكريم الطالب هو 0.0833

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 73}{8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a - 73}{8}\right)$$

$$\Rightarrow 0.0833 = 1 - P\left(Z < \frac{a - 73}{8}\right) \Rightarrow P\left(Z < \frac{a - 73}{8}\right) = 1 - 0.0833$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a - 73}{8}\right) = 0.9167 \Rightarrow \frac{a - 73}{8} = 1.38 \Rightarrow a - 73 = 11.04$$

$$\Rightarrow a = 84.04$$

من كتاب التمارين

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 89، وانحرافه المعياري 11.5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $x = 81$ 2) $x = 92$ 3) $x = 100$

إذا كان X مُتغيِّرًا عشــوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 220، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُقابِل القيمة المعيارية z في كلٍّ ممّا يأتي:

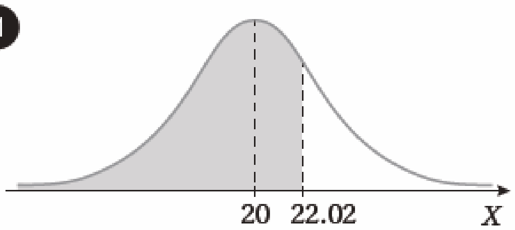
4) $z = 2$ 5) $z = -3.5$ 6) $z = 4.2$

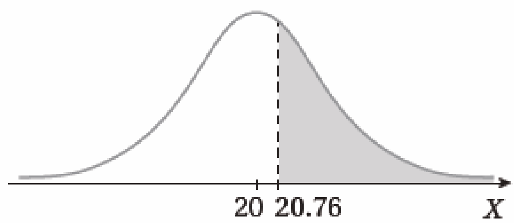
إذا كان: $X\sim N(17, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

7) $P(X < 25.8)$ 8) $P(X > 10.5)$

9) $P(19.4 < X < 30.2)$ 10) $P(4 < X < 17)$

إذا كان: $X\sim N(20, 9)$، فأجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ ممّا يأتي:

11)


12)


رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السـلّة توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm.

إذا اختير لاعب عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13) احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على 175 cm.

14) احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm.

15) العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.

1	$z = \frac{81-89}{11.5} = -\frac{16}{23}$	2	$z = \frac{92-89}{11.5} = \frac{6}{23}$	3	$z = \frac{100-89}{11.5} = \frac{22}{23}$
4	$\frac{x-220}{10} = 2 \Rightarrow x = 240$	5	$\frac{x-220}{10} = -3.5 \Rightarrow x = 185$	6	$\frac{x-220}{10} = 4.2 \Rightarrow x = 262$

7	$P(X < 25.8) = P\left(Z < \frac{25.8-17}{10}\right) = P(Z < 0.88) = 0.8106$
8	$P(X > 10.5) = P\left(Z > \frac{10.5-17}{10}\right) = P(Z > -0.65) = P(Z < 0.65) = 0.7422$
9	$P(19.4 < X < 30.2) = P\left(\frac{19.4-17}{10} < Z < \frac{30.2-17}{10}\right) = P(0.24 < Z < 1.32)$ $= P(Z < 1.32) - P(Z < 0.24) = 0.9066 - 0.5948 = 0.3118$
10	$P(4 < X < 17) = P\left(\frac{4-17}{10} < Z < \frac{17-17}{10}\right) = P(-1.3 < Z < 0)$ $= P(Z<0) - P(Z<-1.3) = 0.5 - (1 - P(Z < 1.3)) = 0.5 - (1 - 0.9032) = 0.4032$

11	$P(X < 22.02) = P\left(Z < \frac{22.02-20}{3}\right) = P(Z < 0.67) = 0.7486$

12	$P(X > 20.76) = P\left(Z > \frac{20.76-20}{3}\right) = P(Z > 0.25)$ $= 1 - 0.5987 = 0.4013 = 1 - P(Z < 0.25)$

13	$P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175-185}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$
14	$P(180 < X < 190) = P\left(\frac{180-185}{5} < Z < \frac{190-185}{5}\right) = P(-1 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1))$ $= 2P(Z < 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$
15	$P(X > 195) = P\left(Z > \frac{195-185}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228 \Rightarrow N = 0.0228 \times 2000 = 45.6 \approx 46$ إذن، العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب هو 46

وزارة أدبي 2023

25) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا وسطه الحسابي 60 ، وانحرافه المعياري 4 ، فإن قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية $z = 1.25$ هي:

a) 70　　b) 75　　c) 65　　d) 55

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حل الفرعين a و b.

z	0	0.5	1.5	2
$P(Z < z)$	0.5000	0.6915	0.9332	0.9772

b) وجد عالم أن الزمن اللازم لحدوث تفاعل كيميائي في تجربة معينة يتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي 155 دقيقة وانحرافه المعياري 3 دقائق. ما احتمال أن يتراوح الزمن اللازم لحدوث التفاعل بين 155 دقيقة و 159.5 دقيقة؟ (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

25) إذا كان $X \sim N(54, \sigma^2)$ ، وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 50$ هي $z = -1$ ، فإن قيمة الانحراف المعياري تساوي:

a) 4　　b) 2　　c) −4　　d) −2

b) تبين لإدارة السير من دراسة أجرتها على أحد الطرق، أن سرعة السيارات على هذا الطريق تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي 70km/h ، وانحرافه المعياري 5km/h . إذا بلغ العدد الكلي للسيارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام 1000 سيارة ، فما عدد السيارات التي تتراوح سرعتها بين 64km/h و 80.5km/h ؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

z	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$P(Z < z)$	0.8849	0.9332	0.9641	0.9821	0.9918

(16 علامة)

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $X\sim B(4, 0.4)$، فإنَّ: $P(X = 3)$ يساوي:

a) 0.1536 b) 0.0384

c) 0.064 d) 0.3456

2 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معامله $n = 320$، وتوقُّعه 60، فإنَّ المعامل p هو:

a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{13}{16}$

c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{16}$

3 إذا كان: $X\sim B(8, 0.1)$، فإنَّ: $P(X < 2)$ إلى أقرب 4 منازل عشرية يساوي:

a) 0.3826 b) 0.8131

c) 0.4305 d) 0.1488

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان توقُّعه 8، وتباينه $\frac{20}{3}$، فإنَّ المعامل n هو:

a) 32 b) 64

c) 56 d) 48

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68% b) 95%

c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كانت علامات 2000 طالب في أحد الاختبارات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 83، وانحرافه المعياري 4، فإنَّ عدد الطلبة الذين تقلُّ علاماتهم عن 80 هو تقريبًا:

a) 453 b) 1547

c) 1567 d) 715

إذا كان: $X\sim Geo(0.3)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 $P(X = 4)$ 8 $P(3 < X \leq 5)$

9 $P(X > 4)$ 10 $E(X)$

إذا كان: $X\sim B(6, 0.3)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X = 2)$ 12 $P(X > 4)$

13 $P(2 \leq X < 3)$ 14 $E(X)$

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعملًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

15 $P(Z < 1.93)$ 16 $P(Z < 0.72)$

17 $P(Z > -1.04)$ 18 $P(-1.7 < Z < 3.3)$

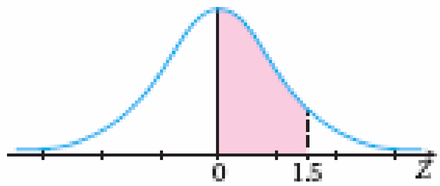
إذا كان: $X\sim N(55, 16)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعملًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

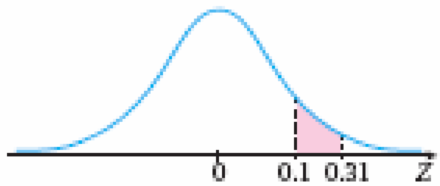
19 $P(X \leq 50)$ 20 $P(50 < X < 58)$

21 $P(56 < X < 59)$ 22 $P(X > 55)$

اختبار نهاية الوحدة

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

23


24


25 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشوائيًّا من إنتاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارّة أمام منزلها. إذا كان احتمال أنْ تمرَّ أيُّ سيّارة زرقاء من أمام منزلها هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 احتمال عدم مرور أيِّ سيّارة زرقاء من بين أوَّل 5 سيّارات مرَّت أمام المنزل.

27 احتمال مرور أكثر من 3 سيّارات حتى شاهدت نور أوَّل سيّارة زرقاء.

أجد القيمة a التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

29 $P(Z > a) = 0.6$

28 $P(Z < a) = 0.638$

تعبئة: يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ الحِمَّص في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 250 g، وانحرافه المعياري 4 g:

30 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تزيد كتلة كُلٍّ منها على 260 g

31 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تتراوح كتلة كُلٍّ منها بين 240 g و 250 g

في دراسة لإحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين يستعملون هواتفهم المحمولة لإجراء مكالمتين فقط يوميًّا. إذا اختير 20 شخصًا من المشتركين عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 احتمال أنْ يُجْري 4 منهم فقط مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

33 احتمال أنْ يُجْري اثنان منهم على الأقل مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

34 تُنتِج إحدى الشركات قوارير زيت، ويُفترَض أنْ تحوي كل قارورة منها نصف لتر من الزيت، وأنْ يتبع حجم الزيت في هذه القوارير توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 506 mL، وانحرافه المعياري 3 mL. إذا احتوى صندوق على 100 قارورة تُوضَع عشوائيًّا، فأجد عدد القوارير في هذا الصندوق التي تحوي كلٌّ منها زيتًا أقل من نصف لتر.

الإجابات	6	5	4	3	2	1
	a	c	d	b	a	a

7	$X \sim Geo(0.3) \Rightarrow P(X=4) = (0.3)(0.7)^3 = 0.1029$
8	$P(3 < X \le 5) = P(X=4) + P(X=5) = (0.3)(0.7)^3 + (0.3)(0.7)^4 = 0.17493$
9	$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4))$ $= 1 - ((0.3)(0.7)^0 + (0.3)(0.7)^1 + (0.3)(0.7)^2 + (0.3)(0.7)^3) = 0.2401$
10	$E(X) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$
11	$X \sim B(6, 0.3) \Rightarrow P(X=2) = \binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4 = 0.324135$
12	$P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6)$ $= \binom{6}{5}(0.3)^5(0.7)^1 + \binom{6}{6}(0.3)^6(0.7)^2 = 0.01056321$
13	$P(2 \le X < 3) = P(X=2) = \binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4 = 0.324135$
14	$E(X) = 6(0.3) = 1.8$
15	$P(Z < 1.93) = 0.9732$
16	$P(Z < 0.72) = 0.7642$
17	$P(Z > -1.04) = P(Z < 1.04) = 0.8508$
18	$P(-1.7 < Z < 3.3) = P(Z < 3.3) - P(Z < -1.7)$ $= P(Z < 3.3) - (1 - P(Z < 1.7)) = 0.9995 - (1 - 0.9554) = 0.9549$
19	$X \sim N(55, 4^2) \Rightarrow P(X \le 50) = P\left(Z \le \frac{50-55}{4}\right) = P(Z \le -1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$
20	$P(50 < X < 58) = P\left(\frac{50-55}{4} < Z < \frac{58-55}{4}\right)$ $= P(-1.25 < Z < 0.75) = P(Z < 0.75) - P(Z < -1.25)$ $= P(Z < 0.75) - (1 - P(Z < 1.25)) = 0.7734 - (1 - 0.8944) = 0.6678$
21	$P(56 < X < 59) = P\left(\frac{56-55}{4} < Z < \frac{59-55}{4}\right) = P(0.25 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.25) = 0.8413 - 0.5987 = 0.2426$
21	$P(56 < X < 59) = P\left(\frac{56-55}{4} < Z < \frac{59-55}{4}\right) = P(0.25 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.25) = 0.8413 - 0.5987 = 0.2426$

22	$P(X>55)=P\left(Z>\frac{55-55}{4}\right)=P(Z>0)=1-P(Z\le 0)=1-0.5=0.5$
23	$P(0<Z<1.5)=P(Z<1.5)-P(Z<0)=0.9332-0.5=0.4332$
24	$P(0.1<Z<0.31)=P(Z<0.31)-P(Z<0.1)=0.6217-0.5398=0.0819$
25	$X\sim B(100,0.17)$ $E(X)=100(0.17)=17$ العدد المتوقع من المصابيح التالفة هو 17 مصباحًا.

26	$X\sim Geo(0.1)\Rightarrow P(X>5)=1-P(X\le 5)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\right)$ $=1-\left((0.1)(0.9)^0+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2+(0.1)(0.9)^3+(0.1)(0.9)^4\right)$ $=0.59049$
27	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left((0.1)(0.9)^0+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2\right)=0.729$

28	$P(Z<a)=0.638\Rightarrow z=0.35$
29	$P(Z>a)=0.6$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z>a)=P(Z>-z)\Rightarrow 0.6=P(Z>-z)\Rightarrow 0.6=P(Z<z)$ $\Rightarrow P(Z<z)=0.6\Rightarrow z=0.25\Rightarrow a=-0.25$

30	$X\sim N(250,4^2)$ $P(X>260)=P\left(Z>\frac{260-250}{4}\right)=P(Z>2.5)=1-P(Z<2.5)=0.0062$
31	$P(240<X<250)=P\left(\frac{240-250}{4}<Z<\frac{250-250}{4}\right)$ $=P(-2.5<Z<0)=P(Z<0)-P(Z<-2.5)$ $=P(Z<0)-(1-P(Z<2.5))=0.5-(1-0.9938)=0.5-0.0062=0.4938$

32	$X\sim B(20,0.3)$ $P(X=4)=\binom{20}{4}(0.3)^4(0.7)^{16}=0.1304$
33	$P(X\ge 2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)$ $=1-\left(\binom{20}{0}(0.3)^0(0.7)^{20}+\binom{20}{1}(0.3)^1(0.7)^{19}\right)=0.9924$
34	$X\sim N(506,3^2)$ $0.5\,L=500\,mL$ $P(X<500)=P\left(Z<\frac{500-506}{3}\right)=P(Z<-2)=1-P(Z<2)=0.0228$ $n=100\times 0.0228=2.28\approx 2$ عدد القوارير هو 2 تقريبًا.