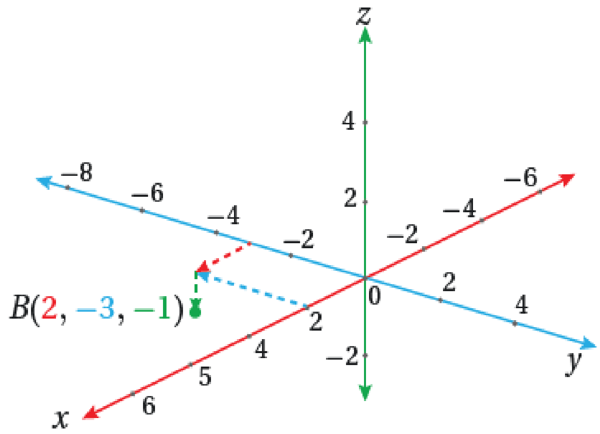
مكثف وحدة المتجهات

مثال (1):

أُعيّن النقطة ممّا يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

$B(2\,,-3\,,-1)$



مثال (2):

إذا كانت: $N(2\,,1\,,-6)\,,M(5\,,-3\,,6)$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) المسافة بين N و M

b) إحداثيات نقطة منتصف MN

$$NM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2 + (6-(-6))^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

b)

لتكن $\boldsymbol{K}$ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\boldsymbol{MN}}$ فتكون:

$$K = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right)$$

مثال (3):

إذا كان: $A(-1\,,5\,,3)\,,B(-5\,,3\,,-2)$ ، فأكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$
$$= \langle -4\,,-2\,,-5\rangle$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$
$$= \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

مثال (4):

ذا كان: $\vec{a} = \langle 4\,,7\,,-3\rangle\,,\vec{b} = \langle 9\,,-2\,,-5\rangle$ ،

فأجد $4\vec{a} - 2\vec{b}$

$$4\vec{a} - 2\vec{b} = 4\langle 4\,,7\,,-3\rangle - 2\langle 9\,,-2\,,-5\rangle$$
$$= \langle -2\,,32\,,-2\rangle$$

مثال (5):

أجد قيمة كلٍّ من الأعداد الحقيقية: a، b و c

التي تُحقّق المعادلة الآتية: $a\vec{u} + 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$a\langle 3\,,5\,,-7\rangle + 5\langle -4\,,3\,,-6\rangle$$
$$= \langle 3a - 20\,,5a + 15\,,-7a - 30\rangle$$
$$\Rightarrow \langle 3a - 20\,,5a + 15\,,-7a - 30\rangle = \langle -2\,,b\,,c\rangle$$
$$\Rightarrow 3a - 20 = -2\,,5a + 15 = b\,,-7a - 30 = c$$
$$\Rightarrow a = 6\,,b = 45\,,c = -72$$

مثال (6):

$\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,,\vec{v} = 4\hat{\imath} + 7\hat{k}$ ، فأكتب المتجه:

$2\vec{u} + 3\vec{v}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}) + 3(4\hat{\imath} + 7\hat{k})$$
$$= 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 6\hat{k} + 12\hat{\imath} + 21\hat{k}$$

$= 14\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 15\hat{k}$

مثال (7):

اذا كان: $A(3,4,-7), B(-5,16,2)$ ، فأجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$

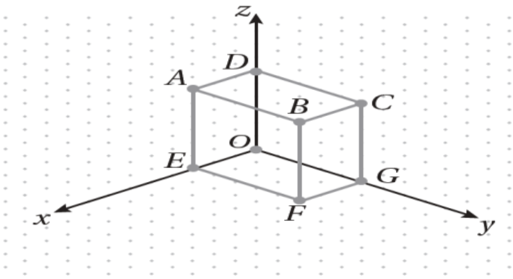
$\overrightarrow{AB} = \langle -8, 12, 9\rangle$

$= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (12)^2 + (9)^2} = 17$

$\hat{u} = \langle \frac{-8}{17}, \frac{12}{17}, \frac{9}{17}\rangle$

مثال (8):

في متوازي المستطيلات المجاور، إذا كانت إحداثيات الرأس B هي: $(3,5,6)$ ، فأكتب إحداثيات مركز متوازي المستطيلات $ABCDOEFG$



مركزه هو منتصف $\overline{OB}$ وهو:

$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$

مثال (9):

أجد متجهًا له نفس اتجاه المتجه: $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ، ومقداره 52 .

$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 144 + 9} = 13$

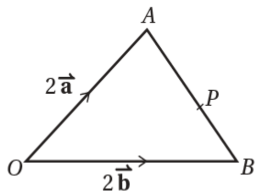
$\Rightarrow \hat{v} = \frac{4}{13}\hat{\imath} - \frac{12}{13}\hat{\jmath} + \frac{3}{13}\hat{k}$

$\hat{v}$ هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$ ، إذن، المتجه الذي له اتجاه $\vec{v}$ نفسه ومقداره $\hat{v}$ هو $52\,\hat{v}$ ويساوي:

$$52\left(\frac{4}{13}\hat{\imath} - \frac{12}{13}\hat{\jmath} + \frac{3}{13}\hat{k}\right) = 16\hat{\imath} - 48\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

مثال (10):

في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB ، حيث: $AP:PB = 5:3$. إذا كان: $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{a} + 5\vec{b})$ ، فما قيمة العدد الحقيقي k ؟



$$\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{3}{8}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} =$$

$$= 2\vec{b} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(-2\vec{b} + 2\vec{a})$$

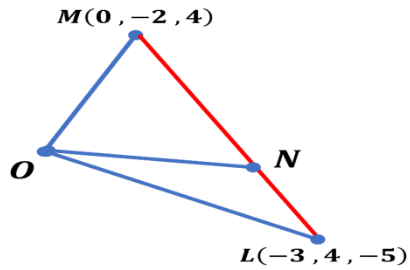
$$= \left(2 - \frac{3}{4}\right)\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(5\vec{b} + 3\vec{a}) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

مثال (11):

متجها الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3, 4, -5\rangle$ ، $\langle 0, -2, 4\rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$ ، علمًا بأنَّ: $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$

ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$



$$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{LN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN}$$

$$= \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$

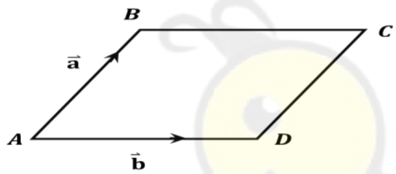
$$= \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL})$$

$$= \langle -3 , 4 , -5 \rangle + \frac{1}{3}\langle 3 , -6 , 9 \rangle$$

$$= \langle -2 , 2 , -2 \rangle$$

مثال (12):

$ABCD$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ، و $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ، و $\overrightarrow{AC} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ ، و $\overrightarrow{BD} = -6\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. أجد كُلًّا من $\vec{b}$، و $\vec{a}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.



$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow -\vec{a} + \vec{b} = -6\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 2\hat{k} \cdots (2)$$

$$(1) + (2): 2\vec{b} = -4\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$$(1) - (2): 2\vec{a} = 8\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

مثال (10): إذا كان: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ فأجد الأعداد الحقيقية: p, q, r التي تُحقِّق

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = p\langle 1 , 0 , 4 \rangle + q\langle 2 , 0 , -3 \rangle + r\langle -5 , 3 , 1 \rangle$$

$$= \langle p + 2q - 5r , 3r , 4p - 3q + r \rangle = \langle 28 , -12 , -5 \rangle$$

$$3r = -12 \Rightarrow r = -4$$

$$p + 2q - 5r = 28$$

$$\Rightarrow p + 2q = 8 \cdots (1)$$

$$4p - 3q + r = -5$$

$$\Rightarrow 4p - 3q = -1 \cdots (2)$$

$$(1) \times 4 - (2): 11q = 33$$

$$\Rightarrow q = 3 , p = 2$$

مثال 13

في الشكل المجاور $OABC$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{OC} = 6\vec{c}$ ، $\overrightarrow{OA} = 6\vec{a}$ ، والنقطة T هي منتصف الضلع BC ، والنقطة U تقع على الضلع AB ، حيث:

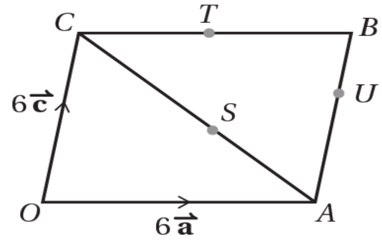
حيث: $AU:UB = 2:1$ ، والنقطة S تقع على القُطْر CA ، $CS:SA = 2:3$

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}$ و c

1) $\overrightarrow{OB}$

2) $\overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{OU}$



1) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 6\vec{a} + 6\vec{c}$

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -6\vec{a} + 6\vec{c}$

3) $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU} = 6\vec{a} + \dfrac{2}{3}\mathrm{AB}$

$= 6\vec{a} + \dfrac{2}{3}(6\vec{c}) = 6\vec{a} + 4\vec{c}$

مثال (13):

إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما: $\vec{h} = \langle c-1\,,-4\,,c+2\rangle\,,\vec{g} = \langle -2\,,c+1\,,-8\rangle$ على الترتيب، فأجد قيمة c، علمًا بأنَّ: $|\overrightarrow{GH}| = 19$ ، وأنَّ: $c > 0$

$\overrightarrow{GH} = \langle c+1\,,-5-c\,,c+10\rangle$

$|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2}$

$c^2 + 2c + 1 + 25 + 10c + c^2 + 20c + 100 = 361$

$\Rightarrow 3c^2 + 32c - 235 = 0$

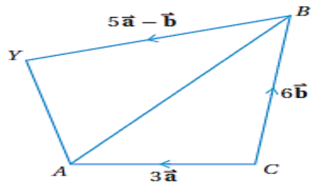
$\Rightarrow c = \dfrac{-32 \pm \sqrt{3544}}{6} = \dfrac{-32 \pm 62}{6}$

إذن،

$c = -\dfrac{94}{6} = -\dfrac{47}{3}\,, c = \dfrac{30}{6} = 5$

مثال (14):

في الشكل الآتي، إذا كان: $\overrightarrow{CB} = 6\,\vec{b}\,,\overrightarrow{BY} = 5\,\vec{a} - \vec{b}\,,\ \overrightarrow{CA} = 3\,\vec{a}$ ، وكانت X تقع على $\overline{AB}$ ، حيث $AX:XB = 1:2$ ، فأُثبِت أنَّ: $\overrightarrow{CX} = \dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{CY}$



$\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow XB = 2AX$

$\Rightarrow AB = AX + XB = AX + 2AX = 3AX$

$\Rightarrow AX = \dfrac{1}{3}AB$

$\overrightarrow{AX} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \dfrac{1}{3}(-3\vec{a} + 6\vec{b})$
$= -\vec{a} + 2\vec{b}$

$\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BY} = 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b}$
$= 5(\vec{a} + \vec{b})$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CY}$

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b}$

$= 2(\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{CY}$

مثال (15):

إذا كان: $G(7,5,-11), H(4,4,-4)$, $K(4,5,3), L(7,7,3)$ ، فأحدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

$\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$

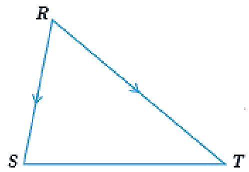
$\overrightarrow{GH} = \langle -3,-1,7\rangle$

$\overrightarrow{KL} = \langle 3,2,0\rangle$

ونستنتج أن $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ غير متوازيين

مثال (16):

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS} = 4\vec{a}, \overrightarrow{RT} = 6\vec{b}$، والنقطة U منتصف $\overrightarrow{RS}$ ، والنقطة V منتصف $\overrightarrow{RT}$ ، فأُثبِت أنَّ $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$



$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$

$= \frac{1}{2}(-4\vec{a}) + \frac{1}{2}(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a}$

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$

$= -4\vec{a} + 6\vec{b} = 2(3\vec{b} - 2\vec{a})$

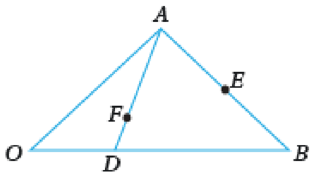
إذن $\overrightarrow{ST} = 2\,\overrightarrow{UV}$

ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{UV}$ متوازيان

مثال (17):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB .

إذا كان: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{AB}$ ، والنقطة F تقع على $\overline{AD}$ حيث: $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$ ، فأُثبِت أنَّ O، و F، و E تقع على استقامة واحدة.



$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OF} \cdots (1)$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a})$

$= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = 2\,\overrightarrow{OE} \cdots (2)$

$\frac{5}{2}\overrightarrow{OF} = 2\,\overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$

وهذا يعني أن المتجهين $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن، النقاط O, E, F تقع على استقامة واحدة.

مثال (18):

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المارِّ بالنقطتين:

$M(3,7,-9)$ ، و $N(2,-4,3)$

$\overrightarrow{NM} = \langle 1,11,-12\rangle$

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle$

مثال (19):

$\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \langle -30,-6,30\rangle + u\langle 4,-6,3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1 ، و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v_1} = \langle 1,11,-12\rangle$

واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{v_2} = \langle 4,-6,3\rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v_1} = k\vec{v_2}$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين:

$$\langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle = \langle -30,-6,30\rangle + u\langle 4,-6,3\rangle$$
$$3+t = -30+4u \Rightarrow t-4u = -33 \cdots (1)$$
$$7+11t = -6-6u \Rightarrow$$
$$11t+6u = -13 \cdots (2)$$
$$-9-12t = 30+3u \Rightarrow$$
$$12+3u = -39 \cdots (3)$$
$$3\times(1)+2\times(2) \Rightarrow$$
$$25t = -125 \Rightarrow t=-5,\ u=7$$

تتحقق من أنّ $t=-5$ ، $u=7$ تحقق المعادلة (3)

$$12(-5)+3(7) \stackrel{?}{=} -39$$
$$-39 = -39 \ \checkmark$$

بما أن قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان، لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle - 5\langle 1,11,-12\rangle = \langle -2,-48,51\rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2,-48,51)$

مثال (20):

إذا كانت: $A(2,3,1)$, $B(6,5,4)$, $C(3,1,5)$ ، وكان $ABCD$ متوازي أضلاع، فما إحداثيات D ؟

$$ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$
$$= \langle 3,1,5\rangle + \langle 2,3,1\rangle - \langle 6,5,4\rangle$$
$$= \langle -1,-1,2\rangle$$
$$\Rightarrow D(-1,-1,2)$$

مثال (21):

اذا كانت: $\vec{r} = \langle -5,8,4\rangle + t\langle 3,-2,9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

1) هل تقع النقطة $(3,7,11)$ على المستقيم l ؟ أُبرِّر إجابتي.

2) إذا وقعت النقطة $(1,b,c)$ على المستقيم l ، فأجد قيمة كلٍّ من b، و c

3) ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz ؟

1) تقع النقطة $(3,7,11)$ على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي t حيث:

$$\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 3,7,11\rangle$$
$$\Rightarrow -5+3t = 3 \Rightarrow t = \frac{8}{3}$$
$$8-2t = 7 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$
$$4+9t = 1 \Rightarrow t = \frac{7}{9}$$

لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث، إذن، النقطة $(3,7,11)$ لا تقع على المستقيم l

2) تقع النقطة $(1,b,c)$ على المستقيم l إذن، توجد قيمة للوسيط t تحقق المعادلة الآتية:

$$\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 1, b, c\rangle$$

$$-5+3t=1 \Rightarrow t=2$$

$$8-2t=b \Rightarrow 8-4=b$$

$$\Rightarrow b=4$$

$$4+9t=c \Rightarrow 4+18=c$$

$$\Rightarrow c=22$$

3) الاحداثي y للنقطة الواقعة في المستوى xz هو 0

نجد قيمة t التي تحقق المعادلة $8-2t=0$ ، وهي $t=4$

ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz نعوض $t=4$ في معادلته.

$$\vec{r} = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle$$

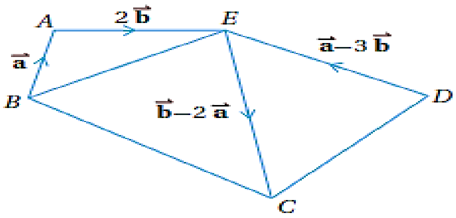
$$\Rightarrow \vec{r} = \langle -5+12, 8-8, 4+36\rangle$$

$$= \langle 7, 0, 40\rangle$$

إذن، إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz هي: $(7,0,40)$

مثال (22):

مُعتمِدًا المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أُثبِت أنَّ $BEDC$ متوازي أضلاع.



$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b} \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$$

$$= -(\vec{b}-2\vec{a}) - (\vec{a}-3\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 2\vec{b} \cdots (2)$$

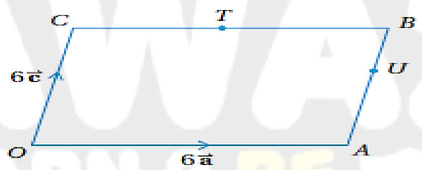
$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$$

إذن الضلعان $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل $BEDC$ متوازي أضلاع.

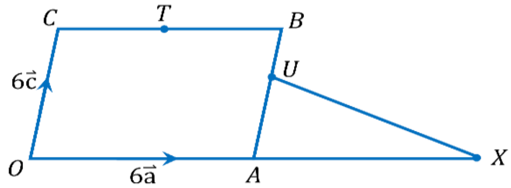
مثال (23):

في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور ، $\overrightarrow{OA} = 6\,\vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = 6\,\vec{c}$ ، والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$ ، والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $2:1$.

إذا مُدَّ الضلع $\overline{OA}$ على استقامته إلى النقطة X، حيث: $OA = AX$ ، فأُثبِت أنَّ T، و U، و X تقع على استقامة واحدة.



الحل:



$$\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT}$$

$$= \overrightarrow{XO} + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}\right)$$

$$= -12\vec{a} + (6\vec{c} + 3\vec{a})$$

$$= 6\vec{c} - 9\vec{a} = 3(2\vec{c} - 3\vec{a})$$

$$\Rightarrow 2\vec{c} - 3\vec{a} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XT}$$

$$\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AU}$$

$$= \overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= -6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c}) = 4\vec{c} - 6\vec{a}$$

$$= 2(2\vec{c} - 3\vec{a}) = 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{XT}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$$

إذن، $\overrightarrow{XU}\,, \overrightarrow{XT}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة نفسها X

فإن النقاط $T\,, U\,, X$ تقع على استقامة واح.

مثال (24)

$\vec{m} = \langle 1, -2, 3\rangle\,, \vec{n} = \langle -5, 4, a\rangle$ ، وكان المتجه: $3\,\vec{n} + b\,\vec{m}$ يوازي المتجه: $\langle 3, -3, 5\rangle$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b .

$$3\vec{n} + b\vec{m} = \langle -15\,, 12\,, 3a\rangle + \langle b\,, -2b\,, 3b\rangle$$

$$= \langle -15 + b\,, 12 - 2b\,, 3a + 3b\rangle$$

وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه $\langle 3\,, -3\,, 5\rangle$ ، فإن:

$$\langle -15 + b\,, 12 - 2b\,, 3a + 3b\rangle = k\langle 3\,, -3\,, 5\rangle$$

$$\Rightarrow -15 + b = 3k \cdots (1)$$

$$12 - 2b = -3k \cdots (2)$$

$$3a + 3b = 5k \cdots (3)$$

$$(1) \times 2 + (2) \Rightarrow -18 = 3k$$

$$\Rightarrow k = -6\,, b = -3\,, a = -7$$

مثال (25): إذا كان: $\vec{v} = a\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\4\\c\end{pmatrix}$ ، فأجد قيمة كلٍّ من: a، و b، و c، علمًا بأنَّ اتجاه $\vec{v}$ في اتجاه محور y الموجب، و $|\vec{v}| = 34$.

اتجاه المحور y الموجب هو $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، وبما أن اتجاه $\vec{v}$ هو المحور y الموجب، فإن:

$$\vec{v} = k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}\,, k > 0$$

$$\begin{pmatrix}3a + b\\-5 + 4b\\6a + bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = |k| = 34 \Rightarrow k = 34$$

$$3a + b = 0 \cdots (1)$$

$$-5a + 4b = 34 \cdots (2)$$

$$6a + bc = 0 \cdots (3)$$

$$-4 \times (1) + (2) \Rightarrow -17a = 34$$

$$\Rightarrow a = -2\,, b = 6$$

بتعويض قيمة a في المعادلة (3) نجد أن:

$$6(-2) + 6c = 0 \Rightarrow c = 2$$

مثال (26)

متجهات الموقع للنقاط: A، B، و C الواقعة على مستقيد واحد هي:

$\vec{a} = 2\,\hat{i} + p\,\hat{j} + q\,\hat{k}$

$,\vec{b} = -4\,\hat{i} + 13\,\hat{j} - \hat{k}$

$,\vec{c} = 14\,\hat{i} + \hat{j} + 5\,\hat{k}$

على الترتيب:

1) أجد قيمة p .

2) أجد قيمة q .

3) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المارِّ بالنقطتين: A و B مع المستوى yz .

4) أجد طول AC

1) $\overrightarrow{BC} = 18\hat{i} - 12\hat{j} + 6\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ هي:

$\Rightarrow \vec{r} = -4\hat{i} + p\hat{j} + q\hat{k}$

$= -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة:

$\Rightarrow 2 = -4 + 3t \Rightarrow t = 2$

$p = 13 - 2t$

$\Rightarrow p = 12 - 2(2) = 9$

2) استكمالاً لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل $\hat{k}$ في المعادلة

$$\hat{\imath} + p\hat{j} + q\hat{k} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

نستنتج أن:

$q = -1 + t = -1 + 2 = 1$

3) معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي معادلة $\overleftrightarrow{BC}$ نفسها

$$= (-4 + 3t)\hat{i} + (13 - 2t)\hat{j} + (-1 + t)\hat{k}$$

متجه موقع أي نقطة في المستوى yz يكون على الصورة $y\hat{j} + z\hat{k}$

إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم z, y, t التي تحقق المعادلة:

$$y\hat{j} + z\hat{k} = (-4 + 3t)\hat{i} + (13 - 2t)\hat{j} + (-1 + t)\hat{k}$$

$0 = -4 + 3t \Rightarrow t = \frac{4}{3}$

$y = 13 - 2t \Rightarrow$

$y = 13 - \frac{8}{3} = \frac{31}{3}$

$z = -1 + t \Rightarrow z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

إذن، النقطة المطلوبة $\left(0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3}\right)$

4) $A(2, 9, 1), C(14, 1, 5)$

$AC = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

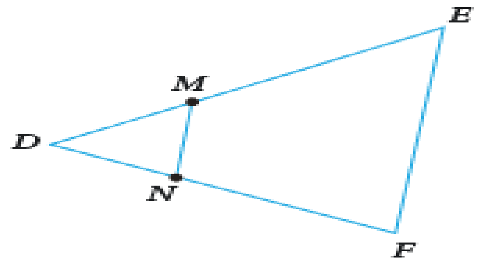
مثال (27)

في الشكل المجاور $DE = 12\,\vec{a}$ ، و $DF = 8\,\vec{b}$ ، والنقطة M تقسم DE بنسبة $1:2$، والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة $1:2$

1) أُثبِت أنَّ: $FEMN$ شبه مُنحرِف.

2) إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة

فأجد مساحة $FEMN$.



1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

$= \frac{1}{3}(-12\vec{a} + 8\vec{b})$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -12\vec{a} + 8\vec{b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

هذا يثبت أن $\overline{MN} \,||\, \overline{EF}$

إذن، الشكل $FEMN$ رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين فهو شبه منحرف.

2) باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي:

ليكن A_2 مساحة ΔDEF ، A_1 مساحة ΔDMN

$A_2 = \frac{1}{2}(DE)(DF)\sin D$

$A_1 = \frac{1}{2}(DM)(DN)\sin D$

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{DN}{DF} \times \frac{DM}{DE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \frac{A_2}{72} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 8$

مساحة شبه المنحرف $FEMN$ تساوي

$A_1 - A_2 = 72 - 8 = 64$

إذن مساحة الشكل $FEMN$ تساوي 64 وحدة مربعة.

مثال(28) : تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13,-10,15)$ ، و $B(22,-22,9)$. إذا كان بُعد C عن B مثلي بُعد C عن A، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة، مُبرّرًا إجابتي.

42 $\overrightarrow{AB} = \langle 9, -12, -6\rangle$

)

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{AB}$:

$\vec{v} = \langle 3, -4, -2\rangle$

إذن معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي:

$\vec{r} = \langle 13, -10, 15\rangle + t\langle 3, -4, -2\rangle$

النقطة الواقعة على $\overleftrightarrow{AB}$ تكون إحداثياتها على الصورة:

$C = (13 + 3t, -10 - 4t, 15 - 2t)$

$BC = 2AC \Rightarrow (BC)^2 = 4(AC)^2$

$\Rightarrow (13 + 3t - 22)^2 + (-10 - 4t + 22)^2 + (15 - 2t - 9)^2 = 4((3t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2)$

$\Rightarrow 87t^2 + 174t - 261 = 0$

$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow (t + 3)(t - 1) = 0$

$\Rightarrow t = -3 , \quad t = 1$

$t = -3 \Rightarrow C(4, 2, 21)$

$t = 1 \Rightarrow C(16, -14, 13)$

مثال(29) : أجد جميع النقاط على المستقيم: $\vec{r} = \langle 3 , -2 , -6 \rangle + t\langle 1 , 2 , 3 \rangle$ التي تبعد 29 وحد عن نقطة الأصل.

النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة:

$$P(3+t , -2+2t , -6+3t)$$

$$OP = \sqrt{(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2} = 29$$

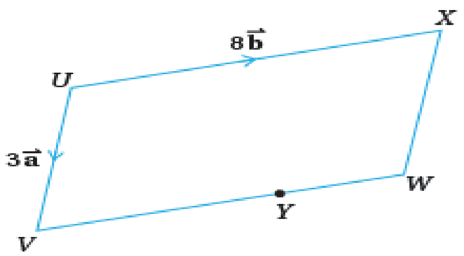
نربع الطرفين ونفك الأقواس، فنحصل على:

$$14t^2 - 38t - 792 = 0$$
$$\Rightarrow 7t^2 - 19t - 396 = 0$$
$$\Rightarrow (t-9)(7t+44) = 0$$
$$\Rightarrow t = 9 , \qquad t = -\frac{44}{7}$$

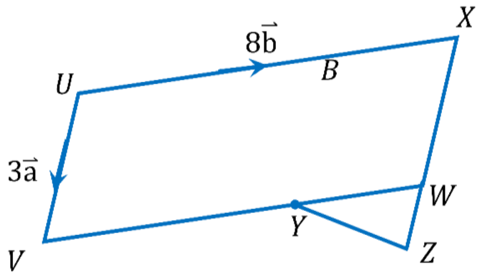
إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما:

$$P_1 = (12 , 16 , 21)$$
$$P_2 = \left(-\frac{23}{7} , -\frac{102}{7} , \frac{174}{7}\right)$$

مثال (30) يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان: $\overrightarrow{UX} = 8\,\vec{b}$ ، و $\overrightarrow{UV} = 3\,\vec{a}$ ، وكانت النقطة Y تقع بين V و W ، حيث: $VY = 3\,YW$ ، و Z هي نقطة، حيث: $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$ ، فأثبت أنَّ U، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة.



44)



$$\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW} = \frac{4}{3}\overrightarrow{UV} = \frac{4}{3}(3\vec{a}) = 4\vec{a}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XW} + \overrightarrow{WZ} = 4\vec{a}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{WZ} = 4\vec{a} - 3\vec{a} = \vec{a}$$

$$\frac{YW}{VY} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{YW}{VW} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{YW} = 2\vec{b} , \overrightarrow{VY} = 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY} = 3\vec{a} + 6\vec{b} = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ} = 2\,\vec{b} + \vec{a} \cdots (2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{UY} = 3\,\overrightarrow{YZ} \Rightarrow \overrightarrow{YZ} \,||\, \overrightarrow{UY}$$

وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن، U , Z , Y تقع على استقامة واحدة.

مثال(31)

اطلِق صاروخ من النقطة (1,2,1)، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9\,,13\,,21)$. وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة $(2\,,-3\,,4)$ ، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(18\,,1\,,14)$. ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

الحل :

اتجاه مسار الصاروخ الأول :

$\vec{v} = \langle 8,11,20 \rangle$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني :

$\vec{u} = \langle 10,4,16 \rangle$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$

$|u| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$

$\vec{u}.\vec{v} = 8(10) + 11(4) + 20(16)$

$= 80 + 44 + 320 = 444$

لتكن قياس الزاوية بين مساري الصاروخين ، إذن : θ

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65}\times 2\sqrt{93}}\right)$$

$$= cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9^\circ$$

مثال(32)

إذا كان المتجه: $\vec{a} = \lambda\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ والمتجه: $\vec{b} = \lambda\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \lambda\hat{k}$ مُتعامِدين، فما قيمة (قِيَم) λ ؟

$\vec{a}.\vec{b} = \lambda(\lambda) + 4(-3) + \lambda(4) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+6)(\lambda-2) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -6 \ , \ \lambda = 2$

مثال(33)

إذا كان قياس الزاوية بين المتجه: $\langle v\,,0\,,-1\rangle$ و المتجه: $\langle 2\,,-1\,,0\rangle$ هو 60° ، فما قيمة v ؟

10) $\vec{m} = \langle v,0,-1\rangle \ , \ \vec{n} = \langle 2,-1,0\rangle$

$\vec{m}.\vec{n} = 2v + 0 + 0 = 2v$

$|\vec{m}| = \sqrt{v^2+1}$

$|\vec{n}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

$\vec{m}.\vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|\, cos60^\circ$

$\Rightarrow 2v = \sqrt{5(v^2+1)} \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 16v^2 = 5v^2 + 5$

$\Rightarrow v^2 = \frac{5}{11} \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{5}{11}}$

مثال(34)

إذا كان: $A(3\,,-2\,,6)$ ، وكان: $B(-5\,,4\,,1)$ ، أوجد مساحة المثلث AOB ، حيث O نقطة الأصل.

$\overrightarrow{OA} = \langle 3,-2,6\rangle \ , \ \overrightarrow{OB} = \langle -5,4,1\rangle$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -5(3) + 4(-2) + 1(6) = -17$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$

$m\angle AOB = \theta$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right) \approx 112^\circ$$

$$Area = \frac{1}{2}(OA)(OB)sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42})sin112° \approx 21.03$$

مثال(35)

إذا مَرَّ المستقيم l بالنقطتين: $E(-3\,,7\,,12)$ ، و $F(1\,,-3\,,5)$ ، وكانت النقطة $G(0\,,-6\,,4)$ لا تقع على المستقيم l، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l

2) البُعْد بين النقطة G والمستقيم l

1) $\overrightarrow{EF} = \langle 4, -10, -7\rangle$

$\vec{r} = \langle 1, -3,5\rangle + t\langle 4, -10, -7\rangle$

إذا كانت M هي مسقط العمود من G على المستقيم l , فإن :

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1 + 4t, -3 - 10t, 5 - 7t)$

$\overrightarrow{MG} = (-1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t)$

$\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow \langle 4, -10, -7\rangle \perp \langle -1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t\rangle$

$\Rightarrow 4(-1 - 4t) - 10(-3 + 10t) - 7(-1 + 7t) = 0$

$\Rightarrow -4 - 16t + 30 - 100t + 7 - 49t = 0$

$\Rightarrow -165t = -33 \Rightarrow t = \frac{33}{165} = 0.2$

$\Rightarrow M = (1.8, -5,3.6)$

---

2)

$GM = \sqrt{(1.8 - 0)^2 + (-5 + 6)^2 + (3.6 - 4)^2}$

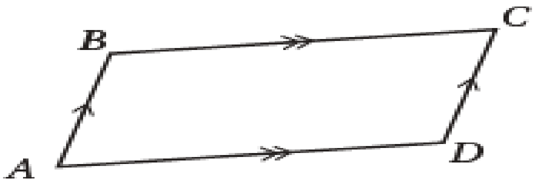
$= \sqrt{4.4} \approx 2.1$

مثال(36)

يُبيّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$ ، حيث:

$\overrightarrow{AB} = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 11\hat{k}$ و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$



مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر $\overrightarrow{AC}$ يقسمه إلى مثلثين متطابقين

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6(15) - 2(8) + 11(5) = 129$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4 + 121} = \sqrt{161}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225 + 64 + 25} = \sqrt{314}$

$m\measuredangle BAC = \theta = cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \approx 55°$

$Area(ABCD) = 2 \times \frac{1}{2}(AC)(AB)sin\theta$

$= \sqrt{161}\sqrt{314}\,sin55° \approx 184.2$

مثال(37)

إحداثيات النقاط: A, B, C هي: $(3\,,-2\,,4)$ ، و $(1\,,-5\,,6)$ ، و $(-4\,,5\,,-1)$ على الترتيب، والمستقيم l يمرُّ بالنقطة A، وله المعادلة المتجهة:

$: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) أُبيِّن أنَّ النقطة C تقع على المستقيم l

2) أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B

3) إذا وقعت النقطة D على المستقيم المارِّ بالنقطة A

والنقطة B، بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D

1) متجه المواقع لأي نقطة على المستقيم l هو : $\langle 3+7u,-2-7u,4+5u\rangle$

تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث :

$\langle 3+7u,-2-7u,4+5u\rangle = \langle -4,5,-1\rangle$

$\Longrightarrow 3+7u=-4 \quad , \quad -2-7u=5$

$4+5u=-1$

$\Longrightarrow u=-1 \quad , \quad u=-1 \quad , \quad u=-1$

إذن , C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u=-1$ في معادلته المتجهة

---

2) $\overrightarrow{AB} = \langle 1-3,-5-(-2),6-4\rangle$

$= \langle -2,-3,2\rangle$

$\Longrightarrow \vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$

هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب

3) $\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4,-2-3t-5,4+2t+1\rangle$

$= \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$

$\angle CDA$ قائمة , فإن $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AD}$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CD}$ يعامد $\overleftrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

$\Longrightarrow \langle -2,-3,2\rangle . \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle = 0$

$\Longrightarrow -14+4t+21+9t+10+4t=0$

$\Longrightarrow 17t=-17 \Longrightarrow t=-1$

$\overrightarrow{OD} = \langle 3+2,-2+3,4-2\rangle = \langle 5,1,2\rangle$

$\Longrightarrow D(5,1,2)$

مثال (38)

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix}-9\\21\\-4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ،

فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

1) أُبيّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

2) أُبيّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2,7,10)$

1) اتجاه المستقيم l_1 : $\langle 2,-1,-2\rangle$

اتجاه المستقيم l_2 : $\langle 1,-2,2\rangle$

المستقيمان متعامدان لأن :

$\langle 2,-1,-2\rangle . \langle 1,-2,2\rangle$

$= 2(1)-1(-2)-2(2)=0$

---

2) يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t , u تحقق :

$\langle 8+2t,2-t,-2t\rangle$

$= \langle -9+u,21-2u,-4+2u\rangle$

$8+2t=-9+u$

$\Longrightarrow 2t-u=-17 \ldots\ldots\ldots (1)$

$2-t=21-2u$

$\Longrightarrow 2u-t=19 \ldots\ldots\ldots (2)$

$-2t=-4+2u$

$\Longrightarrow 2u+2t=4 \ldots\ldots\ldots (3)$

$(3)-(1) : 3u=21 \Longrightarrow u=7 \ , t=-5$

نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم :

✓ $2(7)-(-5)=19$

إذن ، يتقاطع المستقيمان ، ونجد نقطة التقاطع

بتعويض $u = 7$ في معادلة l_2 :

$$\vec{r} = \langle -9 + 7, 21 - 14, -4 + 14 \rangle = \langle -2, 7, 10 \rangle$$

إذن , نقطة التقاطع هي : $E(-2,7,10)$

مثال(38)

إذا كانت $A(3,5,-4)$ ، و $B(7,4,-3)$ ، و O نقطة الأصل، فأجد $m\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

7) $\overrightarrow{AO} = \langle -3, -5, 4 \rangle$

$$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50}$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 4, -1, 1 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -3$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50} \times \sqrt{18}}\right)$$

$$= cos^{-1}(-0.1) \approx 96°$$

مثال(39)

هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:

$A(4,3,-1), B(-4,5,2), C(6,-1,0), D(10,11,19)$

فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

1) أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a\sqrt{6}$

2) أُثبِت أنَّ: $m\angle AED = 90°$ ، حيث $E(1,2,1)$

3) إذا علمتُ أنَّ النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC ، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

1) $\overrightarrow{AB} = < -8,2,3 > \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 4 + 9} = \sqrt{77}$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 2, -4, 1 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77} \times \sqrt{21}}\right) = cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

$$Area = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{77} \times \sqrt{21} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$$

2) $\overrightarrow{EA} = \langle 3, 1, -2 \rangle, \overrightarrow{ED} = \langle 9, 9, 18 \rangle$

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 3(9) + 1(9) - 2(18) = 0$$

إذن $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ وقياس الزاوية AED هو $90°$

3) $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{81 + 81 + 324} = 9\sqrt{6}$

ويمثل ارتفاع الهرم ، أما مساحة قاعدته فهي $\boldsymbol{A = 7\sqrt{6}}$، وذلك من السؤال 28 ، إذن حجم الهرم هو :

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \times 7\sqrt{6} \times 9\sqrt{6} = 126$$

مثال(40)

إذا كانت $A(3,1,-6)$، و $B(5,-2,0)$ ، و $C(8,-4,-6)$ ، فأُجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعًا:

1) أُبيّن أنَّ: $\overrightarrow{AC}=n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ، حيث n عدد صحيح.

$$1)\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

وتكون قيمة n هي 5

2) أُبيّن أنَّ قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$

$2)\ \overrightarrow{CA}=<-5,5,0>$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{25+25+0}=5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{CB}=<-3,2,6>$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{9+4+36}=7$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-5(-3)+5(2)+0(6)=25$$

ليكن θ قياس الزاوية ACB

$$\theta=cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}\right)$$
$$=cos^{-1}\left(\frac{25}{35\times\sqrt{2}}\right)$$
$$=cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}}\right)$$
$$=cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{14}\right)$$

---

3) أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

$3)\ \overrightarrow{AC}=<5,-5,0>$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overrightarrow{AC}$ بالمتجه

$\vec{v}=\langle 1,-1,0\rangle$

وتكون معادلته :

$$\vec{r}=\langle 8,-4,-6\rangle+t\langle 1,-1,0\rangle$$

مثال(41)

إذا كانت $D(6,-1,p)$ ، وعُلِم أنَّ $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان، فما قيمة p ؟

$\overrightarrow{BD}=\langle 1,1,p\rangle$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overrightarrow{BD}$ بالمتجه

$\vec{v}=\langle 1,1,p\rangle$

معادلة $\overleftrightarrow{BD}$: $\vec{r}=<5,-2,0>+u<1,1,p>$

يتقاطع المستقيمان , إذن , يوجد u,t بحيث

تتساوى لهما $\vec{r}$ في المعادلتين :

$$\langle 8+t,-4-t,-6\rangle=\langle 5+u,-2+u,up\rangle$$

$8+t=5+u\Rightarrow t-u=-3$ ..... ①

$-4-t=-2+u\Rightarrow t+u=-2$ ..... ②

$up=-6$ ..... ③

بجمع المعادلتين ① و ② ، نجد أنّ :

$$t=-\frac{5}{2},u=\frac{1}{2}$$

ثم بالتعويض في ③ نجد أنّ :

$$p=-12$$

$D=(6,-1,-12)$