المتجهات

1 مفاهيم وملاحظات

$$A = (x_1, y_1, z_1)$$

$$B = (x_2, y_2, z_2)$$

1) المتجه $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

2) مقدار المتجه (طوله)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

3) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ إنما $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

4) إذا كان متجهين متساويين

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow x_1 = x_2 , y_1 = y_2 , z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

5) نقطة منتصف A, B هي:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

6) المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

7) جمع (طرح) متجهين

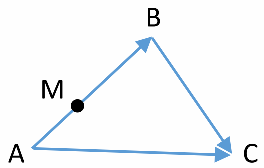
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \mp \overrightarrow{CD} = \langle x_1 \mp x_2 , y_J \mp y_2 , z_1 \mp z_2 \rangle$$

8) قاعدة المثلث المحصلة

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



9) فكرة التناسب

$$\overrightarrow{Am} : \overrightarrow{mB} = 2 : 5$$

$$\overrightarrow{mB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{Am} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

10) متجهة الموقع: تكوين متجه من o نقطة) الأصل) إلى A ، $\overrightarrow{OA}$

11) أهم فوائد متجه الموقع ايجاد نقطة مجهولة

$$c(x, y, z)$$

12) متجه الوحدة: هو المتجه الذي مقداره وحدة واحدة وأهمها

$$\hat{\imath} = \langle 1,0,0 \rangle$$

$$\hat{\jmath} = \langle 0,1,0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0,0,1 \rangle$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

13) لايجاد متجه وحدة باتجاه أي متجه نقسمه على مقداره

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

$$\widehat{AB} = \left\langle \frac{x_1}{|AB|}, \frac{x_2}{|AB|}, \frac{x_3}{|AB|} \right\rangle$$

14) نقول أن المتجهين متوازيين إذا تحقق

$$\overrightarrow{v_1} = t\overrightarrow{v_2}$$

a) إما بإسلوب عامل مشترك من أحدهم ويظهرالآخر

b) أو بقسمة $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

= نفس العدد = t

$t > 0$ بنفس الاتجاه ، $t < 0$ عكس الاتجاه

15) لاثبات ان ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة

A B C

a) نكون متجهين مشتركين بنقطة ،مثلاً B

b) نثبت أن $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$

∴ B على استقامة واحدة

16) المتجه يوازي محور

x	y	z
$\vec{v} = t\langle 1,0,0 \rangle$	$\vec{v} = t\langle 0,1,0 \rangle$	$\vec{v} = t\langle 0,0,1 \rangle$

17) لإثبات شكل:

a) مثلث قائم، يحقق فيثاغورس

b) متوازي أضلاع:

- إمّا كل ضلعين متقابلين متوازيين
- أو ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين

c) معين: نثبت أنه متوازي أضلاع ثم نثبت أن جميع الأضلاع متساوية من تساوي ضلعين متجاورين

d) شبه منحرف: ضلعين متقابلين فقط متوازيين

18) الضرب القياسي

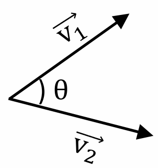
$$\overrightarrow{v_1} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{v_2} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

وهو عدد وليس متجه

19) الزاوية بين متجهين



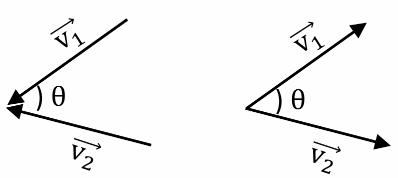
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}\right)$$

$$0 < \theta \leq \pi$$

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$
- (+) → θ حادة
- (-) → θ منفرجة

20) الزاوية بين متجهين، إما أن يكون اتجاههما للداخل أو الخارج



21) يكون متجهين متعامدين إذا كان

$$\overrightarrow{v_1} . \overrightarrow{v_2} = 0$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (1)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1) إذا كان $\vec{u} = \langle 1,1,3 \rangle$ ، $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ ، فإن $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$ يساوي:

a) $\langle 4,1,1 \rangle$ b) $4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) إذا علمت أن $\vec{w} = \langle -3,4,6 \rangle$ ،
$\vec{v} = \langle 2,-2,5 \rangle$ ، فإن $3\vec{v} - 2\vec{w}$ يساوي:

a) $\langle 0,2,3 \rangle$ b) $\langle 12,-14,3 \rangle$

c) $\langle 13,-16,-8 \rangle$ d) $\langle -13,16,8 \rangle$

3) إذا كان PQR مستقيم حيث $PQ : QR = 3 : 1$
وكان $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ فإن $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة a يساوي:

a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ b) $\frac{1}{4}\vec{a}$ c) $\frac{-1}{3}\vec{a}$ d) $\frac{-1}{4}\vec{a}$

4) إذا كان $A(2,4,3)$ ، $B(4,4,1)$ ، فإن مقدار المتجه $\overrightarrow{Am}$ (m نقطة المنتصف) يساوي:

a) 2 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$

5) إذا كان $A(2,1,-1)$ ، $B(-2,3,1)$ ، فجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

a) $\left\langle \frac{-4}{\sqrt{24}}, \frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{2}{\sqrt{24}} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ d) $\langle 1,1,1 \rangle$

6) إذا علمت أن $\vec{v} = \langle 2u, u, -u \rangle$ وكان $|\vec{v}| = \sqrt{24}$ فإن u تساوي:

a) $2 \ ,-2$ b) $1 \ ,-1$

c) $4 \ ,-4$ d) $1 \ ,0$

7) إذا كان $\vec{u} = \langle -4,2,a \rangle$ ، $\vec{v} = \langle 2,b,5 \rangle$ ،
$\vec{u} \parallel \vec{v}$ ، فإن قيم a, b هي:

a) $a = -10 , b = 1$ b) $a = -10 , b = -1$

c) $a = 10 , b = -1$ d) $a = 10 , b = 1$

8) إذا علمت أن $\vec{v} = \langle 2p, 14, 1 \rangle$ ،
$\vec{w} = \left\langle P, \frac{-1}{2}P, 3 \right\rangle$ متجهين متعامدين فإن قيم P تساوي

a) $2 , \frac{1}{3}$ b) $3 , \frac{-1}{2}$

c) $-2 , \frac{-1}{3}$ d) $3 , \frac{1}{2}$

9) إن قيم a الممكنة التي تجعل الزاوية θ بين $\vec{v}, \vec{w}$ زاوية منفرجة حيث $\vec{v} = \langle a, -2a, 3 \rangle$ ،
$\vec{w} = \langle 3, 2, 2 \rangle$ هي:

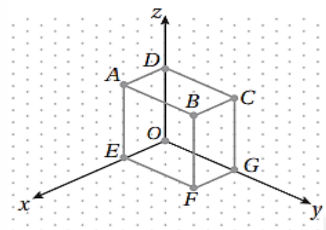
a) $a < 6$ b) $a > 6$

c) $a > \frac{3}{2}$ d) $a < \frac{3}{2}$

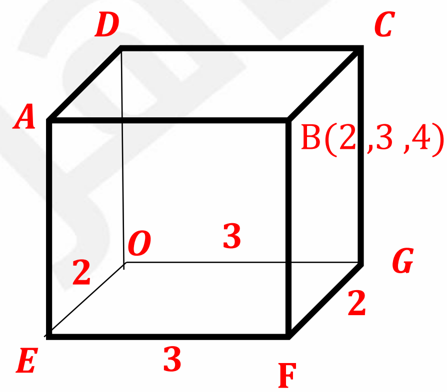
الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (2)

من الشكل التالي متوازي مستطيلات، إذا علمت أن $B(2,3,4)$، جد إحداثيات جميع رؤوس الموازي ومركز الموازي.



الحل:



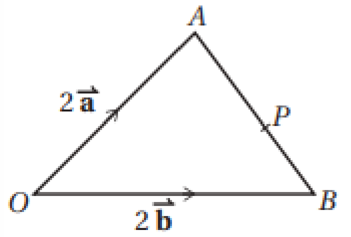
$E(2,0,0) \quad , \quad F(2,3,0) \quad , \quad A(2,0,4)$

$C(0,3,4) \quad , \quad D(0,0,4) \quad , \quad G(0,3,0)$

المركز $M\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$

مثال (3)

في المثلث المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB، حيث: $AP:PB = 5:3$. إذا كان $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{a} + 5\vec{b})$ ، فما قيمة العدد الحقيقي K ؟



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BO}$$

$$k(3\vec{a} + 5\vec{b}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - 2\vec{b}$$

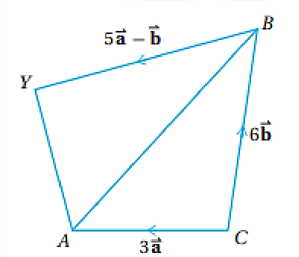
$$3k\vec{a} + 5k\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$

$$\frac{3}{4} = 3k \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

مثال (4)

في الشكل الآتي:

إذا كان $\overrightarrow{BY} = 5\vec{a} - \vec{b}$، $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a}$ ، $\overrightarrow{CB} = 6\vec{b}$ ، وكانت X تقع على $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $AX:XB = 1:2$ فأثبت أن: $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$



$$\frac{AX}{AB} = \frac{1}{2} \rightarrow XB = 2AX$$

إذاً $AB = AX + XB = AX + 2AX = 3AX$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$\therefore \quad \overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

لكن $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{3}(-3\vec{a} + 6\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$

$\overrightarrow{AX} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

$\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BY} = 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b} = 5(\vec{a} + \vec{b})$

$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b}$

$= 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY} \quad \#$

مثال (5)

إذا كانت متجهات الموقع للنقاط A , B , C هي: $\overrightarrow{OA} = \langle 1, 1, 4\rangle$ ، $\overrightarrow{OB} = \langle 0, -1, 1\rangle$ ، $\overrightarrow{OC} = \langle -1, 1, 0\rangle$ أثبت أن المثلث ABC مثلث قائم ثمّ احسب مساحته.

نستطيع إثبات أنه قائم:

إما من فيثاغورس أو $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

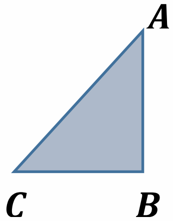
سنستخدم الضرب القياسي

$\overrightarrow{BA} = \langle 1,2,3\rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle 1,-2,1\rangle$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 - 4 + 3 = 0$

$\therefore$ الزاوية = $90°$ ← المثلث قائم الزاوية



$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{14} = \frac{1}{2}\sqrt{84} \approx 4.6$

مثال (6)

جد متجه له نفس اتجاه المتجه $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ومقداره 52

بنفس الاتجاه:

$\vec{w} = t\vec{v} \quad , \quad t > 0$

$\vec{w} = \langle 4t , -12t , 3t\rangle$

$|\vec{w}| = \sqrt{16t^2 + 144t^2 + 9t^2}$

$= \sqrt{169t^2} = 13t = 52$

$t = 4 \rightarrow \vec{w} = \langle 16, -48, 12\rangle$

مثال (7)

إذا علمت أن

$$\vec{v} = a\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\2\\c\end{pmatrix}$$

جد كلاً من a , b , c علماً بأن $\vec{v}$ باتجاه المحور x ، وأن $|V| = 16$

$\therefore$ باتجاه x ، $\vec{v} = t\langle 1,0,0\rangle$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$|\vec{V}| = |t| = 16$$

نفس الاتجاه $t = 16$

$$\begin{pmatrix} a + 2b \\ 3a + 2b \\ 5a + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a + 2b = 16$$

$$3a + 2b = 0$$

$$-2a = 16 \rightarrow a = -8$$

$$b = 12$$

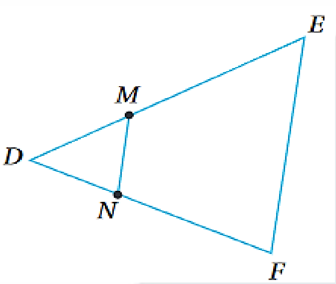
$$5a + bc = 0$$

$$-40 + 12C = 0 \rightarrow C = \frac{40}{12}$$

$$C = \frac{10}{3}$$

مثال (8)

في الشكل التالي $\overrightarrow{DE} = 12\vec{a}$ ، $\overrightarrow{DF} = 8\vec{b}$ ، والنقطة M تقسم DE بنسبة 1:2 ، والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة 1:2



a) أثبت أن: FEMN شبه منحرف

b) إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة FEMN .

a) لإثبات أن الشكل شبه منحرف نثبت أن الشكل منحرف نثبت أن $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{EF}$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$$

$$= -12\vec{a} + 8\vec{b} \quad \dots (1)$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3} \times 12\vec{a} = 4\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3} \times 8\vec{b} = \frac{8}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DN}$$

$$= -4\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b} \quad \dots (2)$$

$$\overrightarrow{EF} = 3\left(-4\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b}\right) = 3\overrightarrow{MN}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{MN}$$

b) نحسب مساحة المثلث DMN

$$A1 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DF}| \sin\theta = 72$$

$$A2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DN}||\overrightarrow{DM}| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}|DF| \times \frac{1}{3}|DE| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{9} \times 72 = 8$$

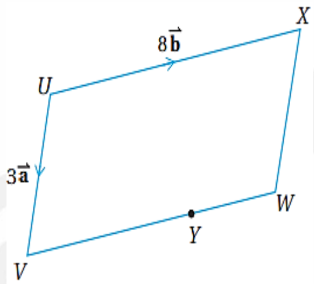
$$\therefore \quad Area\ (FEMN) = A1 - A2$$

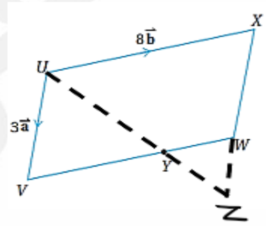
$$= 72 - 8 = 64$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (9)

يمثل الشكل التالي متوازي الأضلاع UVWX . إذا كان: $\overrightarrow{UV} = 3\vec{a}$ و $\overrightarrow{UX} = 8\vec{b}$ ، وكانت النقطة Y تقع بين W , V ، حيث : $VY = 3YW$ ، و Z هي نقطة، حيث: $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$ فأثبت أن U , Y , Z تقع على استقامة واحدة.





$\overrightarrow{XW} = 3\vec{a}$ (خصائص متوازي الأضلاع)

$$\overrightarrow{XZ} = \frac{3}{4}(3\vec{a}) = 4\vec{a}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{WZ} = \vec{a}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{VW} = 8\vec{b} \to \overrightarrow{VY} = 6\vec{b}$$

لأن $\quad \overrightarrow{VY} = 3\overrightarrow{YW}$

$$\overrightarrow{VW} = 4\overrightarrow{YW} = 8\vec{b} \to \overrightarrow{YW} = 2\vec{b}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ} = 2\vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY} = 3\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{UY} = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\overrightarrow{YZ}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{UY}$$

2 معادلة المستقيم المتجه

1) نحتاج لايجاد المعادلة نقطة P ونحتاج متجه موازٍ لـ $\vec{v}$

المعادلة $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$ ، حيث $\vec{r}_0$ متجه الموقع لـ P

2) إذا طلب السؤال معادلة المستقيم المار بنقطتين A , B ، فإن المتجه الموازي يكون $\overrightarrow{BA}$ أو $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ونختار أي نقطة منهما

3) نستطيع أخذ عامل مشترك وإذا لم نأخذ يبقى الحل صحيح

4) لإثبات أن نقطة تقع على مستقيم، نكتب المستقيم بشكل إحداثيات ونساوي جميع إحداثيات المستقيم بإحداثيات النقطة إذا كانت t نفسها فإن النقطة تقع على المستقيم أو نجد t من إحداثي x ونعوض

5) يكون مستقيمين متوازيين إذا توازى $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

6) يتقاطع مستقيمين بمساواة إحداثيات المستقيمين ونجد t, λ ونعوض وتنتج نفس النقطة

7) إذا لم يكونا متوازيين أو متقاطعين فإنهما متخالفين

8) لايجاد الزاوية بين مستقيمين نجد الزاوية بين المتجهات الموازية $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

9) L_1, L_2 متعامدان إذا كان $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (10)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1) إن النقطة الواقعة على المستقيم الذي معادلته المتجه $\vec{r} = \langle 1,-5,2\rangle + t\langle 1,1,4\rangle$ والإحداثي z لهما يساوي 10

a) $(2,2,10)$ b) $(3,7,10)$

c) $(2,3,10)$ d) $(3,-3,10)$

2) إن معادلة المستقيم المتجه الذي يوازي $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - i\hat{k}$ ويمر بالنقطة التي موقع المتجه لها $\langle 2,2,1\rangle$ هي:

a) $\vec{r} = \langle 2,2,1\rangle + t\langle 3,2,1\rangle$

b) $\vec{r} = \langle 2,2,1\rangle + t\langle 3,2,-1\rangle$

c) $\vec{r} = \langle 3,2,-1\rangle + t\langle 2,2,1\rangle$

d) $\vec{r} = \langle 3,2,-1\rangle + t\langle 2,2,-1\rangle$

3) إن المعادلة المتجه للمستقيم المار بالنقطتين $(3,3,11)$ ، $(1,-1,3)$ هي:

a) $\vec{r} = \langle 1+t, -1-2t, 3+4t\rangle$

b) $\vec{r} = \langle 1+3t, -1-3t, 3+11t\rangle$

c) $\vec{r} = \langle 1+t, -1+2t, 3+4t\rangle$

d) $\vec{r} = \langle 1-t, -1+2t, 3+4t\rangle$

4) إذا وقعت النقطة $(1,b,c)$ على المستقيم L الذي معادلة المتجه $\vec{r} = \langle -5,8,4\rangle + t\langle 3,-2,9\rangle$ فإن قيم b,c على الترتيب هي:

a) $4, 22$ b) $4, 12$

c) $-4, 22$ d) $4, 16$

5) إن نقطة تقاطع المستقيم $\vec{r} = \langle 3,-1,7\rangle + t\langle 2,4,1\rangle$ مع المستوى xy هي:

a) $(-11,-29,0)$ b) $(-11,29,0)$

c) $(-11,-14,0)$ d) $(-11,-27,0)$

مثال (11)

إذا كانت المعادلة المتجه للمستقيم L_1 هي $\vec{r} = \langle 2,0,1\rangle + t\langle 3,3,1\rangle$ وكذلك معادلة L_2 هي $\vec{r} = \langle 5,-3,6\rangle + u\langle 1,3,-1\rangle$:

a) حدّد إذا كان L_1, L_2 متقاطعان أم متوازيان أم متخالفان.

b) إذا كانت A نقطة تقاطع L_1 مع المستوى xy ، B نقطة تقاطع L_2 مع المستوى xz ، جد المسافة بين A , B .

a) أولاً: $L_1 \nparallel L_2$ لأن $\frac{3}{1} \neq \frac{3}{3}$

ثانياً التقاطع: $\vec{r}_1 = \langle 2+3t, 3t, 1+t\rangle$

$\vec{r}_2 = \langle 5+u, -3+3u, 6-u\rangle$

$2+3t = 5+u \rightarrow 3t-u = 3 \quad \dots(1)$

$3t = -3+3u \rightarrow 3t-3u = -3 \quad \dots(2)$

$(1)-(2) \rightarrow 2u = 6 \rightarrow u = 3$

$t = 2$

$P_1(8,6,3) \quad , \quad P_2(8,6,3)$

$\therefore$ L_1, L_2 متقاطعان

b) تقاطع المستوى L_1 مع المستوى xy

$z = 0 \rightarrow 1+t = 0 \rightarrow t = -1$

$A(-1,-3,0)$

تقاطع L_2 مع xz ← $y = 0$

$$-3 + 3u = 0 \to u = 1$$

$$B(6,0,5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7)^2 + (3)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 9 + 25} = \sqrt{83}$$

مثال (12)

إذا كانت:

$\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\0\\7\end{pmatrix}$ معادلة متجه للمستقيم L_1 ، وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-3\\-17\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجه للمستقيم L_2 أجب عن اسؤالين التاليين تباعاً:

a) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين L_1, L_2

b) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين L_1, L_2

(a $\vec{r} = \langle -2 - 5\lambda , -5 , 9 + 7\lambda \rangle$

$$\vec{r} = \langle -3 + 2\mu, -17 + 4\mu , 5 - \mu \rangle$$

$$-2 - 5\lambda = -3 + 2\mu$$

$$5\lambda + 2\mu = 1 \quad \dots(1)$$

$$-5 = -17 + 4\mu \quad \to \quad \mu = 3$$

$$\therefore \quad \lambda = -1$$

$$P_{\text{التقاطع}}(3, -5,2)$$

(b الزاوية بين L_1, L_2 نفسها بين $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ المتجهات الموازية

$$\vec{v}_1 = \langle -5,0,7 \rangle$$

$$\vec{v}_1 = \langle 2 , 4 , -1 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-10 + 0 + 7}{\sqrt{74} \times \sqrt{21}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74} \times \sqrt{21}}\right) \approx 115.5°$$

$\therefore$ الزاوية الحادة تساوي

$$180^0 - 115.5^0 = 64.5^0$$

مثال (13)

إذا كانت $A(1, 4, -5)$ ، $B(3, 0, 2)$ ، $c(-4, 1, 3)$ ، أجب عن الأسئلة التالية تباعاً:

a) اكتب معادلة المتجه للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

b) اكتب معادلة المتجه للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

c) إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ ، أثبت أن:

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

d) جد مساحة المثلث ABC

(a $\overrightarrow{AB} = \langle 2, -4,7 \rangle$

$$P(1,4, -5)$$

$$\vec{r} = \langle 1,4, -5 \rangle + t\langle 2, -4,7 \rangle$$

(b $\overrightarrow{AC} = \langle -5, -3,8 \rangle$

$$P(1,4, -5)$$

$$\vec{r} = \langle 1,4, -5 \rangle + u\langle -5, -3,8 \rangle$$

(c θ هي نفسها الزاوية بين L_1, L_2 أي بين $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

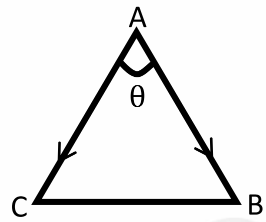
$$\cos\theta = \frac{-10 + 12 + 56}{\sqrt{69} \times \sqrt{98}}$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$= \frac{58}{\sqrt{69}\sqrt{2\times 49}}$$

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}} \qquad \#$$

(d



$$|AB| = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{98}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{69}\times\sqrt{98}\times\sin\theta$$

$$= \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \sqrt{\frac{1699}{3381}} \approx 29.15$$

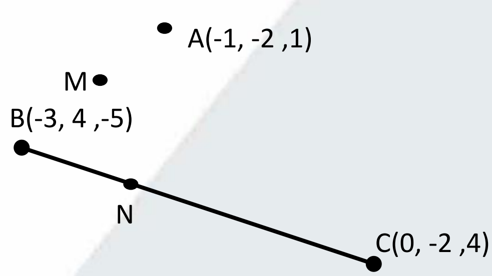
مثال (14)

إذا كانت $\mathbf{A(-1,-2,1)}$ ، $\mathbf{B(-3,4,-5)}$ ، $C(0,-2,4)$ ، فأجب عن الأسئلة التالية تباعاً:

a) جد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف $\overline{\mathbf{AB}}$

b) إذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة $\overline{\mathbf{BC}}$ ، وكان: $2|\overrightarrow{\mathbf{BN}}| = |\overrightarrow{\mathbf{NC}}|$ ، فجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين **M , N** .

(a



$$M(-2,1,-2)$$

b) المطلوب معادلة المستقيم المتجه $\overrightarrow{MN}$ حيث $M(-2,1,-2)$

نحتاج $\qquad \vec{v} = \overrightarrow{MN}$

$$|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}| \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC} \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

الآن نجد $\overrightarrow{MN}$ على قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$$

$$= \langle -1,3,-3\rangle + \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$$

$$= \langle 0,1,0\rangle = \vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle -2,1,-2\rangle + t\langle 0,1,0\rangle$$

مثال (15)

يمر المستقيم $\mathbf{L_1}$ بالنقطتين: $\mathbf{Q(-2,-3,3)}$ ، $\mathbf{P(-5,2,4)}$ ، ويمر المستقيم $\mathbf{L_2}$ بالنقطتين: $\mathbf{R(0,-8,-1)}$ ، $\mathbf{S(12,-23,a)}$. إذا المستقيمين $\mathbf{L_1, L_2}$ متقاطعين، فما قيمة a ؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

نجد اتجاه $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -2--5, -3-2, 3-4\rangle$$
$$= \langle 3,-5,-1\rangle$$

معادلة L_1 ← $\vec{r} = \langle -2,-3,3\rangle + t\langle 3,-5,-1\rangle$

اتجاه $\overrightarrow{RS}$

$$\overrightarrow{RS} = \langle 12,-15,a+1\rangle$$

معادلة L_2

$$\vec{r} = \langle 0,-8,-1\rangle + u\langle 12,-15,a+1\rangle$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

نجد التقاطع بمساواة الإحداثيات المتناظرة

$$-2+3t=12u \quad \dots(1)$$

$$-3-5t=-8-15u$$

$$5-5t=-15u$$

نقسم على 5 ← $1-t=3u \quad \dots(2)$

$$3-t=-1+4(a+1)$$

$$4-t=u(a+1) \quad \dots(3)$$

$$4\times(2)+(1)\rightarrow t=2$$

$$u=\frac{1}{3}$$

نعوض في المعادلة (3)

$$4-2=\frac{1}{3}(a+1)\rightarrow a=5$$

نقطة التقاطع: إما نعوض t أو u

$t=2$ في L_1 ←

$$\vec{r}=\langle -2,-3,3\rangle+2\langle 3,-5,-1\rangle=(4,-13,1)$$

مثال (16)

يمر المستقيم L_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q}=\langle -6,14,-19\rangle$ ، ويمر أيضاً بالنقطة S التي متجه الموقع لها $\vec{s}=\langle -4,6,-3\rangle$ ، ويمر المستقيم L_2 بالنقطة $T(1,9,9)$ ، ويوازي المستقيم: $\vec{r}=\langle 0,-6,1\rangle+t\langle 4,7,4\rangle$ ، إذا تقاطع المستقيمان L_1, L_2 في النقطة U ، فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين.

$$\overrightarrow{QS}=\langle -4--6, 6-14, -3--19\rangle$$

$$\overrightarrow{QS}=\langle 2,-8,16\rangle = 2<1,-4,8\rangle$$

معادلة L_1

$$\vec{r}=\langle -6,14,-19\rangle+t\langle 1,-4,8\rangle$$

معادلة L_2

$$\vec{r}=\langle 1,9,9\rangle+u\langle 4,7,4\rangle$$

نجد تقاطع L_1, L_2

$$-6+t=1+4u$$

$$t-4u=7 \quad \dots(1)$$

$$14-4t=9+7u$$

$$-7u-4t=-5 \quad \dots(2)$$

$$4\times(1)+(2)\rightarrow -23u=23$$

$$u=-1\rightarrow t=3$$

$$-19+8t=9+4u \quad \dots(3)$$

نعوض $u=-1 \ , \ t=3$

← تحقق معادلة (3)

نعوض $u=-1$ في L_2

نقطة التقاطع $(-3,2,5)$

رؤوس المثلث:

$u(-3,2,5)$ ، $S(-4,6,-3)$ ، $T(1,9,9)$

$$TU=\sqrt{16+49+16}=9$$

$$SU=\sqrt{1+16+64}=9$$

∴ المثلث متطابق الضلعين.

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (17)

إذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}8\\2\\-12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجه للمستقيم L_1، وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-4\\10\\P\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}h\\2\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجه للمستقيم L_2، النقطة $A(9,-1,14)$ تقع على المستقيم L_1، والنقطة C تقع على المستقيم L_2، فأجب عن الأسئلة التالية:

a) إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متعامدان جد قيمة h

b) إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متقاطعان جد قيمة P وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

c) رُسمت دائرة مركزها النقطة C فقطعت المستقيم L_1 في النقطتين A , B جد متجه الموقع للنقطة B .

a) $\vec{v} = \langle -1,2,3 \rangle$ المتجه الموازي للمستقيم L_1

$\overrightarrow{w} = \langle h,2,-1 \rangle$ المتجه الموازي للمستقيم L_2

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \rightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{w}$$

$$-h + 6 - 2 = 0 \rightarrow h = 4$$

b) $L_1 = L_2$

$$\begin{pmatrix}8\\2\\-12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\10\\p\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$8 - t = -4 + 4u$$

$$t + 4u = 12 \quad \dots(1)$$

$$2 + 3t = 10 + 2u$$

$$3t - 2u = P - u$$

$$-12 + 2t = 8 \quad \dots(2)$$

$$2t + u = P + 12 \quad \dots(3)$$

$$(1) + 2(2) \rightarrow 7t = 28 \rightarrow t = 4$$

$$4 + 4u = 12 \rightarrow u = 2$$

نعوض $t = 4, u = 2$ في المعادلة (3)

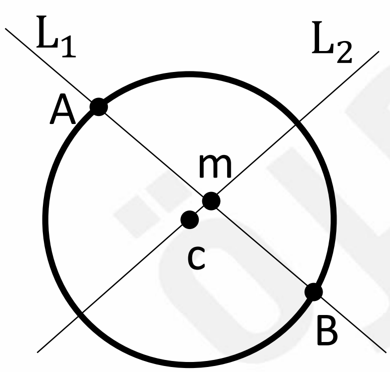
$$10 = P + 12 \rightarrow P = -2$$

لايجاد نقطة التقاطع نعوض

$t = 4$ في L_1 ، أو $u = 2$ في L_2

$(4,14,-4)$

c)



m نقطة تقاطع L_1, L_2 ، c مركز الدائرة

$\overline{AB}$ وتر في الدائرة

نظرية

العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه m نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$ نفرض النقطة $B(x,y,z)$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$\left(\frac{x+9}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{14+z}{2}\right) = (4,14,-4)$$

$$\frac{x+9}{2} = 4 \rightarrow x = -1$$

$$\frac{-1+y}{2} = 14 \rightarrow y = 29$$

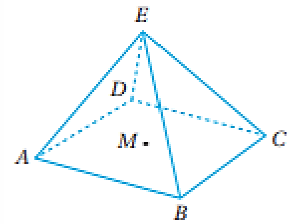
$$\frac{14+z}{2} = -4 \rightarrow z = -22$$

النقطة $B(-1,29,-22)$

$$\overrightarrow{OB} = \langle -1,29,-22 \rangle$$

مثال (18)

يمثل الشكل التالي الهرم ABCDE الذي قاعدته المربعة ABCD وإحداثيات رؤوسه هي: $A(1,1,-1)$ ، $B(9,-1,-3)$ ، $C(9,-7,3)$ ، $D(1,-5,5)$، $E(8,3,7)$ ومركزه النقطة m ، جد ما يلي:



a) أثبت أن $m\angle AmE = 90°$

b) حجم الهرم

a) يكون $m\angle AmE = 90°$

إذا كان $\overrightarrow{mA} \cdot \overrightarrow{mE} = 0$

لكن m تمثل مركز المربع. يمكن ايجادها عن طريق نقطة منتصف أحد قطري المربع، وليكن القطر $\overline{AC}$

$$m = \left(\frac{10}{2}, \frac{-6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (5,-3,1)$$

$$\overrightarrow{mA} = \langle -4,4,-2 \rangle$$

$$\overrightarrow{mE} = \langle 3,6,6 \rangle$$

$$\overrightarrow{mA} \cdot \overrightarrow{mE} = -12 + 24 - 12 = 0$$

وهذا يعني أن $m\angle EDB = 90°$

b) حجم الهرم $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة×الارتفاع

مساحة القاعدة = مساحة المربع

الارتفاع = طول العمود $\overline{Em}$

$$\overline{BC} = \sqrt{0+36+36} = \sqrt{72}$$

$$\overline{Em} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$$

مساحة القاعدة $= \left(\sqrt{72}\right)^2 = 72$

حجم الهرم $= \frac{1}{3}(72)(9)$

$= 216$ وحدة حجم

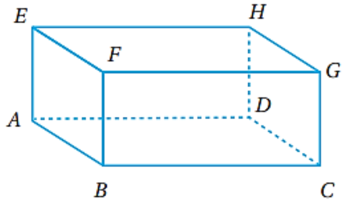
مثال (19)

رُسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياسها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overrightarrow{AE} = -6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -10\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$



الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

فأجب عمّا يلي:

a) إذا كانت $B(8,3,-2)$ جد إحداثيات النقطة H
b) جد قياس الزاوية GAC إلى أقرب عُشر درجة

$$\overrightarrow{AE} = \langle -6,-3,6 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2,4,4 \rangle$$

$$\overrightarrow{AD} = \langle -10,10,5 \rangle$$

a) المطلوب النقطة H علماً أن النقطة $B(8,3,-2)$
الشكل متوازي مستطيلات، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DH} = \langle -6,-3,6 \rangle$$

إذا عُلِمت النقطة D نحدّد النقطة H

بما ، النقطة B معلومة يمكن ايجاد النقطة A عن طريق متجهات الموقع والإزاحة والمتجه $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\langle 2,4,4 \rangle = \langle 8,3,-2 \rangle - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA} = \langle 8,3,-2 \rangle - \langle 2,4,4 \rangle = \langle 6,-1,-6 \rangle$$

النقطة $A(6,-1,-6)$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد النقطة E من المتجه $\overrightarrow{AE}$ ومتجهات الموقع والإزاحة

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OE} = \langle -6,-3,6 \rangle + \langle 6,-1,-6 \rangle = \langle 0,-4,0 \rangle$$

النقطة $E(0,-4,0)$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد النقطة D من المتجه $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OD} = \langle -10,10,-5 \rangle + \langle 6,-1,-6 \rangle = \langle -4,9,-11 \rangle$$

النقطة $D(-4,9,-11)$

بما أن الشكل متوازي مستطيلات

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DH} = \langle -6,-3,6 \rangle$$

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OH} = \langle -6,-3,6 \rangle + \langle -4,9,-11 \rangle = \langle -10,6,-5 \rangle$$

النقطة $H(-10,6,-5)$

b) $m\angle GAC$

نحدّد متجهين لهما نفس نقطة البداية شرط أن $\angle GAC$ محصورة بينهما، $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$

نجد النقطة G والنقطة C بنفس طريقة الفرع السابق.

- النقطة C

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \langle -10,10,-5 \rangle$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC} = \langle -10,10,-5 \rangle + \langle 8,3,-2 \rangle = \langle -2,13,-7 \rangle$$

النقطة $C(-2,13,-7)$

- النقطة G

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = \langle -6,-3,6 \rangle$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OG} = \langle -6,-3,6 \rangle + \langle -2,13,-7 \rangle = \langle -8,10,-1 \rangle$$

النقطة $G(-8,10,-1)$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

نجد المتجهات $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AG} = \langle -14,11,5 \rangle \ , \ \overrightarrow{AC} = \langle -8,14,-1 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right)$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = -112 + 154 - 5 = 261$$

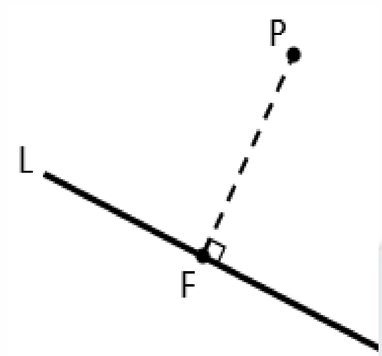
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64 + 196 + 1} = \sqrt{261}$$

$$|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{196 + 121 + 25} = \sqrt{342}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{261}{\sqrt{342} \cdot \sqrt{261}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.874) \approx 29.1°$$

3 مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجية



الشكل السابق

L : مستقيم في الفضاء

P : نقطة خارج المستقيم لاتقع عليه

<u>مطاليب السؤال</u>

1) حدد مسقط العمود من النقطة P على L

خطوات الحل:

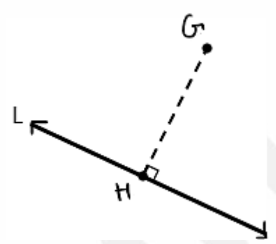
1. نفرض مسقط P على L هو F
2. نكتب F بدلالة وسيط L (t , u , λ)
3. نكوّن متجه $\overrightarrow{PF}$ ويكون $\overrightarrow{PF} \perp L$
   $\therefore \quad \overrightarrow{PF} \perp \vec{v}$
4. $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v} = 0$

2) جد أقصر مسافة بين L , P ،
جد البعد بين (P , L) ، أي المطلوب $|\overrightarrow{PF}|$

مثال (20)

إذا مر المستقيم L بالنقطتين $E(-3,7,12)$ ، $F(1,-3,5)$ وكانت النقطة $G(0,-6,4)$ لا تقع على المستقيم L ، فجد :

a) مسقط العمود من النقطة G على المستقيم L
b) البعد بين النقطة G والمستقيم L



a) نجد معادلة المستقيم المار بـ E , F

$$\overrightarrow{FE} = \langle -4,10,7 \rangle = \vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 1,-3,5 \rangle + t\langle -4,10,7 \rangle$$

ليكن H هو مسقط G

$$H(1-4t, -3+10t, 5+7t)$$

نكوّن متجه $\overrightarrow{GH}$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$\overrightarrow{GH} = \langle 1 - 4t\ , 3 + 10t\ , 1 + 7t \rangle$$

$$\overrightarrow{GH} \perp L \ \ \rightarrow \ \ \overrightarrow{GH} \perp \vec{v}$$

$$(1 - 4t)(-4) + (3 + 10t)10 + (1 + 7t)7 = 0$$

$$165t = -33 \ \ \rightarrow \ \ t = \frac{-33}{165}$$

$$\therefore \ \ H = \left(\frac{9}{5}, -5, \frac{18}{5}\right)$$

b) نجد

$$\overrightarrow{GH} = \left\langle \frac{4}{5}, 1, \frac{-2}{5} \right\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \sqrt{\frac{22}{5}} \approx 21$$

مثال (21)

إذا كانت معادلة المتجه للمستقيم L_1 هي $\vec{r} = \langle -5, 7, 1 \rangle + t\langle 3, 1, 4 \rangle$

ومعادلة المتجه للمستقيم L_2 هي:

$\vec{r} = \langle 2, 8, -1 \rangle + u\langle 2, 0, 3 \rangle$ ،

ومعادلة المتجه للمستقيم L_3 هي:

$\vec{r} = \langle 3, 19, 10 \rangle + v\langle -1, 3, 1 \rangle$

إذا تقاطع المستقيم L_2 والمستقيم L_1 في النقطة T وكانت النقطة F تقع على المستقيم L_3 حيث أن $\overrightarrow{TF} \perp L_3$ ، فجد:

a) إحداثيات النقطة F

b) البعد بين النقطة T والمستقيم L_3

a) النقطة F هي مسقط النقطة T على المستقيم L_3

نجد أولاً النقطة T نقطة تقاطع L_1, L_2

$$L_1 = L_2$$

$$-5 + 3t = 2 + 2u$$

$$3t - 2u = 7 \quad \dots (1)$$

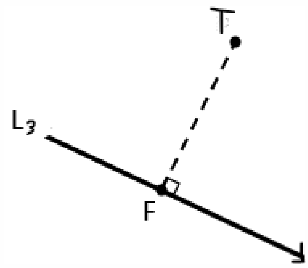
$$7 + t = 8 \rightarrow t = 1$$

نعوض $t = 1$ في معادلة المستقيم L_1

$$\vec{r} = \langle -5,7,1 \rangle + 1 \times \langle 3,1,4 \rangle$$

$$t(-2,8,5)$$

نجد النقطة F وهي مسقط النقطة T على L_3



$$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT}$$

$$\overrightarrow{OT} = \langle -2,8,5 \rangle$$

نجد النقطة F حيث تحقق L_3

$$\overrightarrow{OF} = \langle 3,19,10 \rangle + v\langle -1,3,1 \rangle$$

$$\overrightarrow{OF} = \langle 3 - v, 19 + 3v, 10 + v \rangle$$

$$\overrightarrow{TF} = \langle 5 - v, 11 + 3v, 5 + v \rangle$$

$$\overrightarrow{TF} \perp L_3$$

المتجه الموازي للمستقيم $L_3 = \vec{A}$

$$\vec{A} = \langle -1,3,1 \rangle$$

$$\overrightarrow{TF} \cdot \vec{A} = 0$$

$$(-1)(5 - v) + 3(11 + 3v) + (1)(5 + v) = 0$$

$$-5 + v + 33 + 9v + 5 + v = 0$$

$$11v + 33 = 0 \rightarrow v = -3$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

نعوض $v = -3$ في $\overrightarrow{OF}$

$$\overrightarrow{OF} = \langle 6,10,7 \rangle \quad \rightarrow \quad F(6,10,7)$$

b) البعد بين النقطة T والمستقيم L_3 يساوي $|\overrightarrow{TF}|$

نجد $|\overrightarrow{TF}|$ ونعوّض $v = -3$ في $|\overrightarrow{TF}|$

$$\overrightarrow{TF} = \langle 8,2,2 \rangle$$

$$|\overrightarrow{TF}| = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$$

إجابة سؤال الدوائر ص3

رقم الدائرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الإجابة	d	b	c	c	a	a	b	d	a

إجابة سؤال الدوائر ص8

رقم الدائرة	1	2	3	4	5
الإجابة	d	b	c	a	a