مكثف وحدة الأعداد المركبة

قاعدة:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$i^{2} = -1$$

الصورة القياسية للمركب

$$z = x + iy$$

الجزء الحقيقي　عدد تخيُّلي　الجزء التخيُّلي

تساوي الأعداد المركبة

يتســاوى العـددان المركبـان: $a+ib \,,\, c+id$

إذا وفقط إذا كان: $a=c, b=d$

حيث a,b,c,d أعداد حقيقية

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب المكتوب في الصورة القياسية:

$z = a+ib$ فهو العدد المركب: $\overline{z} = a-ib$

مقياس العدد المركب

مقياس العدد المركب: $z = a+ib$ هو:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ حيث a,b عددان حقيقيان

سعة العدد المركب

إذا كان a,b عددين حقيقيين موجبين فإن:

العدد المركب z	الربع الذي يقع فيه z	$Arg(z)$
$z=a+ib$	الأول	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z=-a+ib$	الثاني	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z=-a-ib$	الثالث	$-\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z=a-ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

قاعدة:

ايجاد السعة في حالة a او b تساوي صفر

الصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان: $z = a+ib$ عدداً مركباً فإن سعته العدد المركـــــب $Arg(z) = \theta$ و مقيـــــاسه $|z| = r$ يستعملان لكتابة الصورة المثلثية كما يلي :

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

مثال 1 :

أجد قيم كل من x، وy الحقيقية التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة :

$$x^2-1+i(2y-5)=8+9i$$

مثال 2 :

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربا

1... $z=1$

$$Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)=0$$

2... $z=3i$

$$Arg(z)=\frac{\pi}{2}$$

3... $z=-5-5i$

$$Arg(z)=-(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right))=-\frac{3\pi}{4}$$

4.... $z=1-i\sqrt{3}$

$$Arg(z)=-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

5.... $z=6\sqrt{3}+6i$

$$Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

6.... $z=3-4i$

$$Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\approx-0.93$$

مثال 3 :

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

1-. $r=|z|=2, Arg(z)=\frac{\pi}{2}$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=2(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))$$

2- .$r=|z|=3, Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=3(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$$

3- .$r=|z|=7, Arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=7(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}))$$

مثال 4 :

إذا كان: $Arg(5+2i)=\alpha$ فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α مبررا إجابتي :

1) $-5-2i$

$$Arg(5+2i)=\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

2) $Arg(-5-2i)=$

$$-(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right))=-(\pi-\alpha)=-\pi+\alpha$$

3) . $5-2i=$

$$Arg(5-2i)=-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=-\alpha$$

4) -5+2i

$$Arg(-5+2i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\pi-\alpha$$

مثال5:

اذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة، مبررا إجابتي.

$$|z| = \sqrt{(5)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25 + 9k^2} = 13$$

$$\rightarrow 25 + 9k^2 = 169 \rightarrow k = \pm 4$$

مثال6

أجد نـاتج كـل ممـا يـأتي، ثـم أكتبـه بالصـورة القياسية:

1) $5i(3-7i)$

$$= 15i + (-35)(-1) = 35 + 15i$$

2) $(6+2i)(7-3i)$

$$= 42 - 18i + 14i - 6i^2$$

$$= (42+6) + (-18+14)i = 48 - 4i$$

3) $(3+6i)^2$

$$(3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2$$

$$= 9 + 36i - 36 = -27 + 36i$$

4) $\frac{8-5i}{3-2i}$

$$\frac{8-5i}{3-2i} = \frac{8-5i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}$$

$$= \frac{24+16i-15i+10}{9+4}$$

$$= \frac{34+i}{13} = \frac{34}{13} + \frac{1}{13}i$$

5) $\frac{3+5i}{2i}$

$$\frac{3+5i}{2i} = \frac{3+5i}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{3i+5i^2}{2i^2}$$

$$= \frac{3i-5}{-2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

مثال7:

إذا كان:

$$z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$$

وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $z_1 z_2$

$$= 2\times 10\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

$$= \frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

$$= 5\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

مثال 8:

أجد الجذرين التربيعين لأعداد المركبة الآتية:

1) $z = 21-20i$

الحل:

$$\sqrt{z} = x+iy$$

$$z = (x+iy)^2$$

$$21-20i = (x+iy)^2$$ عوض قيمة z

$$21-20i = x^2+2ixy+i^2y^2$$ بفك الاقواس

$$21-20i = x^2-y^2+2ixy$$

$$21 = x^2-y^2$$

$$-20 = 2xy$$

$$x^2-y^2 = 21\ldots(1)$$

$$2xy = -20\ldots(2)$$

$$y = -\frac{10}{x}$$

$$x^2-\left(-\frac{10}{x}\right)^2 = 21$$

$$x^4-100 = 21x^2$$

$$x^4-21x^2-100 = 0$$

$$(x^2-25)(x^2+4) = 0$$

$$x^2 = 25 \quad or \quad x^2 = -4$$

بما أن x عدد حقيقي، فإن: $x = \pm 5$

$$x = 5 \Rightarrow y = -2$$

$$x = -5 \Rightarrow y = 2$$

إذن الجـذران التربيعيـان للعـدد المركـب: $21-20i$

هما: $-5+2i\,,\,5-2i$

مثال 9 :

أجـد جميـع الجـذور الحقيقيـة والجـذور المركبـة للمعادلة: $z^3+4z^2+z = 26$

الحل:

المعادلة: $z^3+4z^2+z-26 = 0$

بحسـب نظريـة الأصـفار النسـبية فإنـه يكـون أحـد عوامـل الحـد الثابــت (-26) وهـــي:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$$

بالتعويض أجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة:

$$2^3+4(2)^2+2-26 = 0$$

إذن $z-2$ هو أحد عوامل كثير الحدود

أقسم z^3+4z^2+z-26 على $z-2$ لإيجاد العامل التربيعي باستعمال طريقة الجدول على النحو الآتي:

×	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13x$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

إذن

$$z^3+4z^2+z-26=(z-2)(z^2+6z+13)=0$$

$$z^2+6z+13=0 \quad or \quad z-2=0$$

$$z=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=-3\pm 2i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور ، هي:

$$2\,,-3+2i\,,-3-2i$$

مثال 10:

إذا كــان: $3+9i$ هــو أحــد جــذور المعادلــة: $x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من a,b

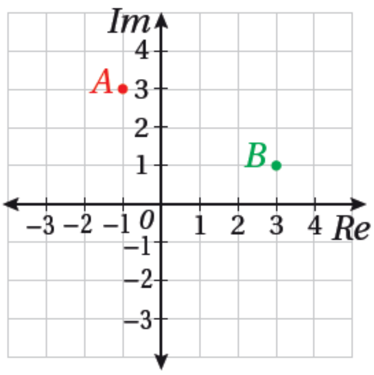
الحل:

مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أن: $a=-6\,,b=90$

$$x^2-6x+90=0$$

مثال 11:

معتمــدا المستوى المركــب المجــاور الــذي يبــين العددين المركبين A,B أجد السعة والمقياس للعدد المركب AB



الحل:

$$z_1=-1+3i \quad , \quad z_2=3+i$$

$$z_1z_2=(-1+3i)(3+i)$$

$$=-3-i+9i-3=-6+8i$$

$$|z_1z_2|=\sqrt{36+64}=10$$

$$Arg(z_1z_2)=\pi-\tan-1\left(\frac{8}{6}\right)\approx 2.21$$

مثال 12 :

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ مما يأتي :

1) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

الحل:

$$a+7+(6-b)i=-2+5i$$

$$a+7=-2 \quad , \quad 6-b=5$$

$$a=-9 \quad , \quad b=1$$

مثال 13 :

أَضرِب العدد المُركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$\overline{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$z\overline{z} = \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i\right)\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)$$

$$= 32 + 32 = 64$$

مثال14 :

إذا : $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \,,\, z_2 = \sqrt{5} - \sqrt{15}i$

$z_3 = 2 - 2i$ ، فأجد المقياس والسعة الرئيسية

لكلٍّ ممّا يأتي :

1) $\dfrac{z_2}{z_1}$

الحل:

$$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$|z_2| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$$

$$|z_3| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

2) $\dfrac{1}{z_3}$

الحل:

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(1) - Arg(z_2)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

3) $\dfrac{z_3}{\overline{z_2}}$

الحل:

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15}$$

$$\left|\overline{z_2}\right| = |z_2| = 2\sqrt{5}$$

$$Arg\left(\overline{z_2}\right) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{z_2}\right| = \frac{|z_3|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = Arg(z_3) - Arg(z_2)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$$

مثال15 :

إذا كـــان: $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

1) احسب المقياس والسعة للعدد المركب

الحل:

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$$

اذن مقياس x يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$

2) أجد الجذرين التربيعيين للعدد z

الحل:

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4-4\sqrt{3}i} = x + iy$$

$$-4-4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$-4-4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$-4 = x^2 - y^2 \quad , \quad -4\sqrt{3} = 2xy$$

$$y = \frac{-2\sqrt{3}}{x}$$

$$x^2 - y^2 = -4$$

$$x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$$

$$x^4 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2+6)(x^2-2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

عندما $x = \sqrt{2}$ فإن $y = -\sqrt{6}$

وعندما $x = -\sqrt{2}$ فإن $y = \sqrt{6}$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما:

$$\sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad , \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

مثال16:

إذا كـان: $(a-3i)$ و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $55-48i$ ، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية : a، b و، c

الحل:

بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو ايضا جذر له ومنه:

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن:

$b=-a$ و $c=3$ ومنه:

$$(a-3i)^2 = 55-48i$$

$$a^2 - 6ia - 9 = 55 - 48i$$

$$a^2 - 9 = 55 \,, -6a = -48 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = -8$$

مثال17:

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كُلٍّ مما يأتي :

1) $x^3+x^2+15x=225,5$

الحل:

$x^3+x^2+15x=225$

$x^3+x^2+15x-225=0$

بما أن 5 جذر لهذه المعادلة اذن $(x-5)$ عوامل كثير الحدود بالقسمة عليه نحصل على:

$$x^3+x^2+15x-225=(x-5)(x^2+6x+45)=0$$

$x=5$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-180}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{-144}}{2}=\frac{-6\pm 12i}{2}=-3\pm 6i$$

حلول هذه المعادلة هي:

$x=5\,,\,x=-3+6i\,,\,x=-3-6i$

مثال 18 :

أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا ، مُبرِّرًا إجابتي :

1) أجد ناتج : $(p+iq)^2$ ، حيث p وq عددان حقيقيان

الحل:

$$(p+iq)^2=p^2+2ipq+i^2q^2$$
$$=p^2+2ipq-q^2$$

2) إذا كان: $(p+iq)^2=45+im$ ، حيث p وq عددان صحيحان موجبان ، و $p>q$ ، فأجد ثلاث قيم مُمكنة للعدد الحقيقي m

الحل:

$$(p+iq)^2=45+im=p^2-q^2+2ipq$$

$p^2-q^2=45 \quad , \quad m=2pq$

$p^2-q^2=45 \Rightarrow (p+q)(p-q)=45$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p>q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان ايضا و $(p+q)>(p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 الى عاملين صحيحين موجبين احدهما اكبر من الآخر، لدينا 3 حالات لتحليل 45 الى عاملين صحيحين موجبين هي:

الحالة الاولى: $45=45\times 1$

فإن: $p+q=45 \quad , \quad p-q=1$

ومنه: $p=23 \quad , \quad q=22$

أي أن: $m=2pq=1012$

الحالة الثانية: $45=15\times 3$

فإن: $p+q=15 \quad , \quad p-q=3$

ومنه: $p=9 \quad , \quad q=6$

أي أن: $m=2pq=108$

الحالة الثالثة: $45=9\times 5$

فإن: $p+q=9 \quad , \quad p-q=5$

ومنه: $p=7$, $q=2$

أي أن: $m=2pq=28$

قيم m المطلوبة هي: 1012 , 108 , 28

3) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركب: $45-108i$

الحل:

المطلوب ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

$$45-108i$$

بما أن $m=2pq=-108$

اذن العددان p و q مختلفان بالاشارة ، من السؤال السابق نجد أن:

$p=9\,,q=-6$ أو $p=-9\,,q=6$

الجذران المطلوبان هما: $-9+6i$, $9-6i$

مثال19 :

أثبت أنّ: $z\bar{z}=|z|^2$ لأي عدد مُركب z .

الحل:

ليكن $z=x+iy$ اذن $\bar{z}=x-iy$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$$

$$=x^2-y^2i^2$$

$$=x^2+y^2$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=|z|^2$$

مثال20 :

إذا كـــان z عــــددًا مُركبًــــا ، حيـــث:

$$|z|=5\sqrt{5}\,,\ Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

وكـــان: $\frac{z}{3+4i}=p+q$ ، فأُثبـــت أن:

$$p+q=1$$

الحل:

ليكن $z=x+iy$

بما أن $Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

اذن يقع العدد المركب z في الربع الاول ويكون

$x=2y$ لان $\tan\theta=\frac{1}{2}=\frac{y}{x}$

$$z=2y+iy$$

$$|z|=5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2+y^2=125$$

$$y^2=25\Rightarrow y=5,x=10$$

اذن $z=10+5i$

$$\frac{z}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$p+iq=\frac{30-40i+15i+20}{9+16}$$

$$=\frac{50-25i}{25}=2-i$$

اذن $p=2, q=-1$ ويكون $p+q=1$

مثال21 :

العدد المُركب: $z=(10-i)-(2-7i)$ هو أحد جذور المعادلة:

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحل المعادلات الآتية: $x^6+164x^2=20\left(x^4+20\right)$

الحل:

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

بما أن $(8+6i)$ جذر لهذه المعادلة اذن مرافقه $(8-6i)$ هو ايضا جذر لهذه المعادلة

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$$(8-6i),(8+6i)$$

$$(8+6i)+(8-6i)=16$$

$$(8+6i)\times(8-6i)=64+36=100$$

$$z^2-16z+100=0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3-20z^2+164z-400$ على $z^2-16z+100$ فنجد أن:

$$z^3-20z^2+164z-400=$$

$$\left(z^2-16z+100\right)(z-4)=0$$

$$z=4 \quad , \quad z=8\pm 6i$$

حلول هذه المعادلة هي:

$$z=4 \quad , \quad z=8+6i \quad , \quad z=8-6i$$

المعادلة الجديدة هي:

$$x^6-20x^4+164x^2-400=0$$

اذا عوضنا $z=x^2$ تتحول هذه المعادلة الى

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

اذن حلول المعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة

$$x^3-20z^2+164z-400=0$$

اذن حلول هذه المعادلة هي:

$$x=\pm\sqrt{8-6i}\ ,\ x=\pm\sqrt{8+6i}\ ,\ x=\pm 2$$

نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8+6i$

$$\sqrt{8+6i}=h+ik$$

$$8+6i=h^2-k^2+2ihk$$

$$8=h^2-k^2 \quad , \quad 6=2hk$$

$$h=\frac{3}{k}$$

$$h^2-k^2=8$$

$$h^2-\frac{9}{k^2}=8$$

$$h^4-8h^2-9=0$$

$$\left(h^2+1\right)\left(h^2-9\right)=0$$

$$h=\pm 3 \Rightarrow k=\pm 1$$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8-6i$ هما:

$3+i \quad , \quad -3-i$

بالمثل نجد أن الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما:

$3-i \quad , \quad -3+i$

ويكـــــون للمعادلـــــة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ ســـتة حلول هي:

$x=2 \quad , \quad x=-2$

$x=3+i \quad , \quad x=3-i$

$x=-3+i \quad , \quad x=-3-i$

مثال 22 :

إذا كـــــان: $z=-3+3i\sqrt{3}$ وكـــــان: $|w|=18, \operatorname{Arg}(w)=-\dfrac{\pi}{6}$ فأجد نـاتج كل مما يأتي:

1) $\operatorname{Arg}(z)$

الحل:

$$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

2) $|z|$

الحل:

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+27}=6$$

3) $\operatorname{Arg}(zw)$

الحل:

$$Arg(zw)=Arg(z)+Arg(w)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

4) $|zw|$

الحل:

$$|zw|=|z|\times|w|=6\times18=108$$

مثال 23:

إذا كان: $\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ فأكتبه بالصورة المثلثية مبيناً أن $\omega^3=1$

الحل:

$$Arg(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$|\omega^3|=|\omega|\times|\omega|\times|\omega|=1\times1\times1=1$$

$$Arg(\omega^3)=Arg(\omega)+Arg(\omega)+Arg(\omega)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$$

$$\omega^3=1(\cos\pi+i\sin\pi)=1$$

مثال 24:

إذا كـان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5$ فما قيمة u علما بأنها سالبة؟

الحل:

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5 \Rightarrow \frac{|u-9i|}{|3+i|}=5$$

$$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{9+1}}=5$$

$$\sqrt{u^2+81}=5\sqrt{10}$$

$$u^2+81=250 \Rightarrow u^2=169 \Rightarrow u=\pm 13$$

لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u=-13$

مثال 25 :

إذا كـــــان: $(1+4i)$ جــــــذراً للمعادلـــــــة: $x^3+5x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كـل مـن العـددين الحقيقيـين a,b والجـذرين الآخـرين لهـذه المعادلة

الحل:

بمـــــا أن $(1+4i)$ جــــــذر للمعادلـــــــــة $x^3+5x^2+ax+b=0$ فإنـه يحقـق المعادلـة، أي أن:

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$(1+8i+16i^2)(1+4i)+5(1+8i+16i^2)+a(1+4i)+b=0$$

$$(-15+8i)(1+4i)+5(-15+8i)+a(1+4i)+b=0$$

$$-15+52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$$

$$-122+a+b+i(4a-12)=0$$

$$-122+a+b=0\,,\,4a-12=0$$

$$a=3 \quad , \quad b=119$$

فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة فإن $1-4i$ جذر آخر لها

نكون معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$(x-(1+4i))(x-(1-4i))=(x-1-4i)(x-1+4i)$$

$$=x^2-2x+17$$

ثـم نقسـم كثيـر الحـدود $x^3+5x^2+3x+119$ علـى $x^2-2x+17$ ، فنحصل على:

$$x^3+5x^2+3x+119=(x^2-2x+17)(x+7)$$

الجذران الآخران لهذه المعادلة هما:

$$x=-7 \quad , \quad x=1-4i$$

مثال 26:

أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7+24i)$ هو $(4+3i)$ ثم أجد الجذر التربيعي الآخر

الحل:

اذا كان $(4+3i)$ جذرا تربيعيا للعدد $(7+24i)$

فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة:

$$(4+3i)^2=7+24i$$

نستطيع التأكد من ذلك بالحساب:

$$(4+3i)^2 = 16+24i-9 = 7+24i$$

إذن هو فعلاً أحد جذري $(7+24i)$ ويكون الجذر الآخر هو: $-4-3i$

مثال 27 :

أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$

الحل:

$$\theta_1 = Arg(7+24i) = \tan^{-1}\frac{24}{7} \approx 1.287$$

$$\theta_2 = Arg(4+3i) = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$$

$$2\times\theta_2 = 2(0.6435) = 1.287 = \theta_1$$

$$\therefore Arg(7+24i) = Arg(4+3i)$$

مثال 28:

أثبت أن مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$

الحل:

$$|7+24i| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$$

$$|4+3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow |7+24i| = |4+3i|^2$$

مثال 29:

إذا كان: $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a,b

الحل:

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$$

$$\frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$$

$$\frac{3a-ia}{10}+\frac{b-2ib}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a-i\frac{a}{10}+\frac{b}{5}-i\frac{2b}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a+\frac{b}{5}=1 \quad , \quad \frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$$

$$3a+2b=10 \quad , \quad a+4b=10$$

$$b=2 \quad , \quad a=2$$

مثال 30 :

إذا كان: $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فأجد قيمة a وقيمة b ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة

الحل:

بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فإن:

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$-7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$

$-7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-4b+10)=0$

$-2-2a+3b=0 \quad , \quad -14+11a-4b=0$

$a=2 \quad , \quad b=2$

المعادلة هي: $z^4+2z^3+2b^2+10z+25=0$

بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة فإن $(-2-i)$ جذر آخر لها . نكون معادلة لها هذان الجذران:

$(z-(-2+i))(z-(-2-i))=(z+2-i)(z+2+i)$

$=z^2+4z+5$

ثـم نقسـم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ علـى z^2+4z+5 فنحصل على:

$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4z+5)(z^2-2z+5)$

$z^2-2z+5=0$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$$

جذور المعادلة هي:

$x=1-2i \, , \, x=1+2i \, , \, x=-2+i \, , \, x=-2-i$

مثال 31:

أجـد المحـل الهندسـي الـذي تمثلـه المعادلـة: $|z+5-4i|=7$ ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

$|z-(-5+4i)|=7$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7

$(x+5)^2+(y-4)^2=49$

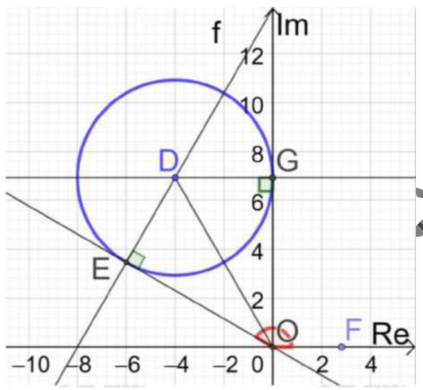
مثال 32:

إذا كانـت: $|z+4-4\sqrt{3}i|=4$ ، فأجيـب عـن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب .

الحل:

وهـذه معادلـة دائـرة فـي المسـتوى المركـب مركزهـا $(-4,4\sqrt{3})$ وطول نصف قطرها 4



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة

الحل:

$$\tan\angle GOD=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle GOD=\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

القيمـة العظمـى لسعـة الاعـداد المركبـة z التـي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$

مثال 33:

أجـد المحـل الهندسـي الــذي تمثلــه المعادلــة: $|z+1|=|z-5i|$ ، ثـم أكتـب المعادلـة بالصيغة الديكارتية

الحل:

هـذه معادلـة المنصــف العمــودي للقطعـة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0),(0,5)$

$$(x+1)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-10y+25$$

$$2x+10y-24=0$$

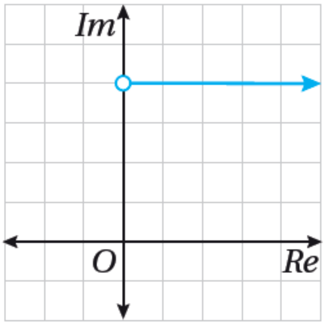
اذن معادلــة المنصـــف العمــودي للقطعــة المســتقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

مثال 34:

أجد المحل الهندسي الذي تمثلـه كل معادلـة ممّا يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المُركب:

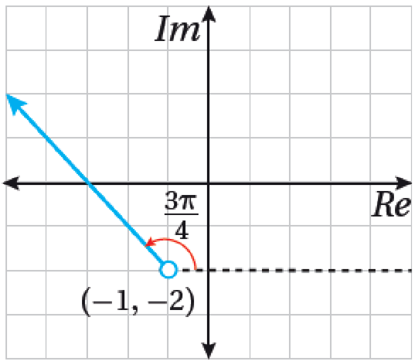
1) $Arg(z-4i)=0$

الحل:



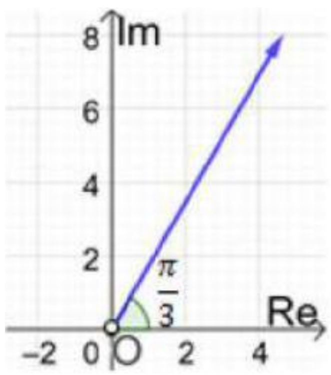
2) $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

الحل:



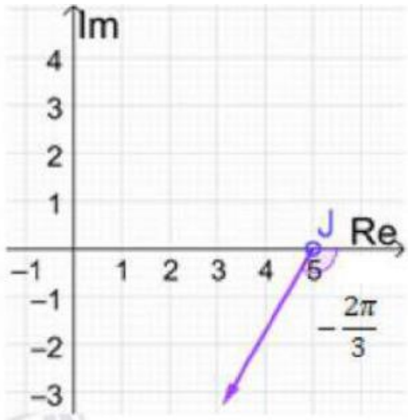
3) $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

الحل:



4) $Arg(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

الحل:

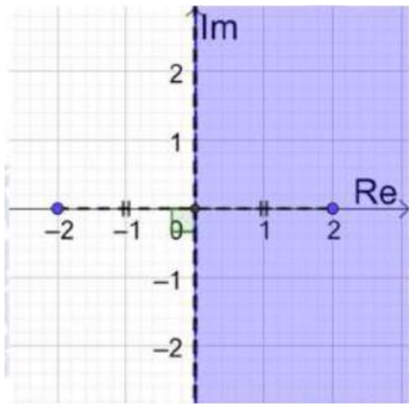


مثال 35:

أُمثِّل في المُستوى المُركب المنطقة التي تُحددها كل مُتباينة ممّا يأتي :

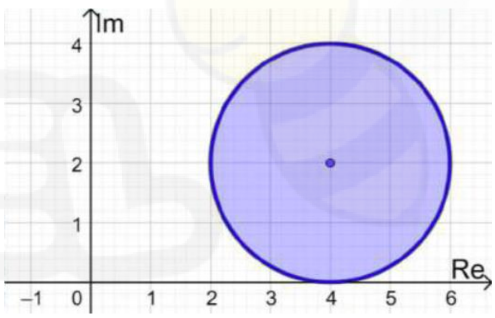
1) $|z-2|<|z+2|$

الحل:



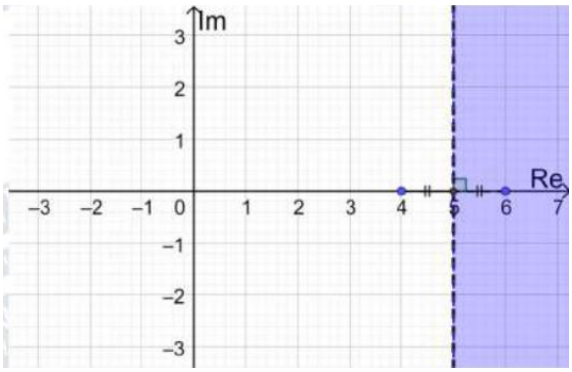
2) $|z-4-2i|\le 2$

الحل:



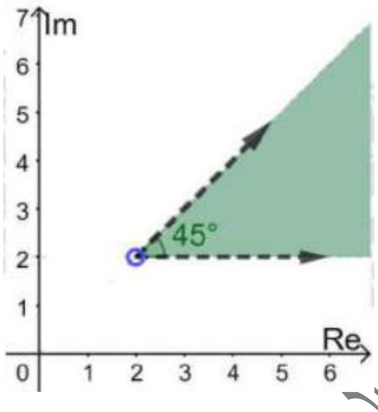
3) $|z-4|>|z-6|$

الحل:



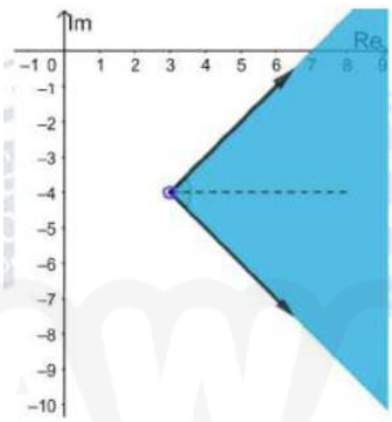
4) $0<Arg\left(z-2-2i\right)<\frac{\pi}{4}$

الحل:



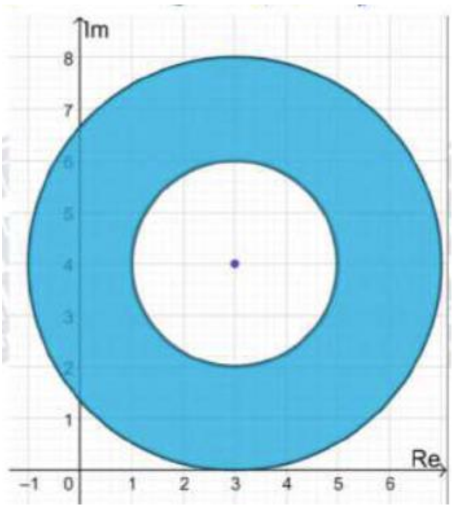
5) $-\frac{\pi}{4}\le Arg\left(z-3+4i\right)\le\frac{\pi}{4}$

الحل:



6) $2\le|z-3-4i|\le 4$

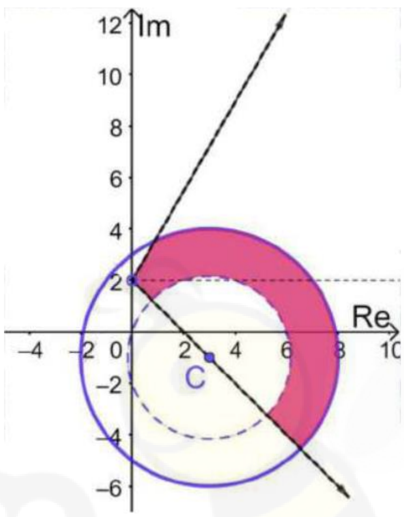
الحل:



مثال 36:

أُمثِّل في المُستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّقُ المُتباينة: $-\frac{\pi}{4} \le Arg(z-2i) \le \frac{\pi}{3}$ والمُتباينة: $2 < |z-3+i| \le 5$

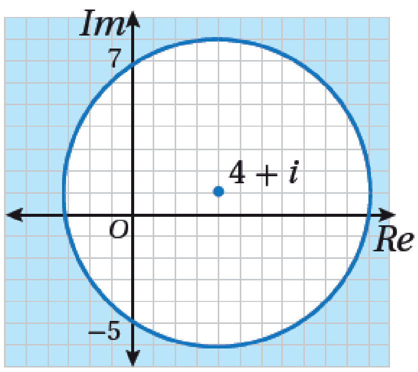
الحل:



مثال 37:

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المُظللة في كل ممّا يأتي:

1)

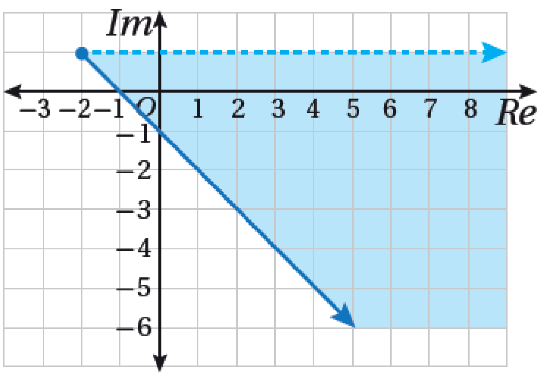


الحل:

$$r=\sqrt{(4-0)^2+(1-7)^2}=\sqrt{52}$$

$$|z-(4+i)| \ge \sqrt{52}$$

2)



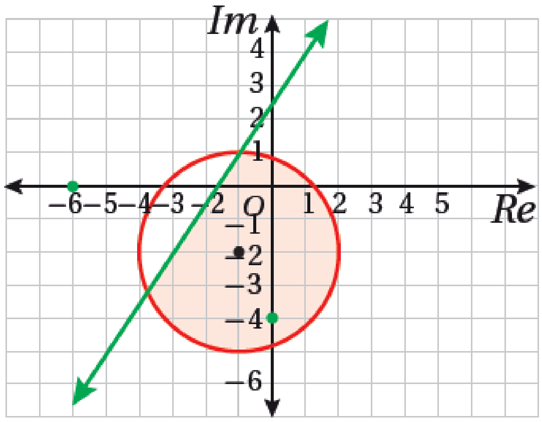
الحل:

قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1

$$-\frac{\pi}{4} \le Arg(z+2-i) < 0$$

مثال 38 :

أكتــب (بدلالــة z) نظــام متبايـنــات يُمثِّـل المحــل الهندسي المُبين في الشكل المجاور



الحل:

$$|z+2+i| \le 3$$

$$|z+6| \ge |z+4i|$$

مثال 39:

أجد (بدلالـة الثابت الحقيقي a) العددين المُركبين اللذين يُحقِّقان المعادلة: $|z-a| = 2a$ والمعادلة:

$$|z-a| = |z+a(2+i)|$$

الحل:

نفرض ان $a \neq 0$

$$|z-a| = |z+a(2+i)|$$

$$|x-a+iy| = |x+2a+i(y+a)|$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+2a)^2 + (y+a)^2$$

$$y = -3x - 2a \ldots (1)$$

$$|z-a| = 2a$$

$$|x-a+iy| = 2a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = 4a^2 \ldots (2)$$

$$(x-a)^2 + (-3x-2a)^2 = 4a^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 9x^2 + 12ax + 4a^2 = 4a^2$$

$$10x^2 + 10ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-10a \pm \sqrt{100a^2 - 40a^2}}{20}$$

$$x = \frac{-10a \pm \sqrt{60a^2}}{20} = \frac{-10a \pm 2a\sqrt{15}}{20}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}$$

$$y = -3\left(\frac{-a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}\right) - 2a = \frac{a}{2} \mp \frac{3a\sqrt{15}}{10}$$

اذا كان $a \neq 0$ فإن العددين المطلوبين هما:

$$-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{15}}{10} - \left(\frac{a}{2} + \frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{15}}{10} - \left(\frac{a}{2} - \frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

أما اذا كـان $a = 0$ فيوجـد عـدد مركـب وحيد يحقق المعادلتين وهو: $z = 0$

مثال40:

إذا كــان العــدد المُركــب z يُحقِّــق المعادلــة: $|z-3+4i|=2$ ، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

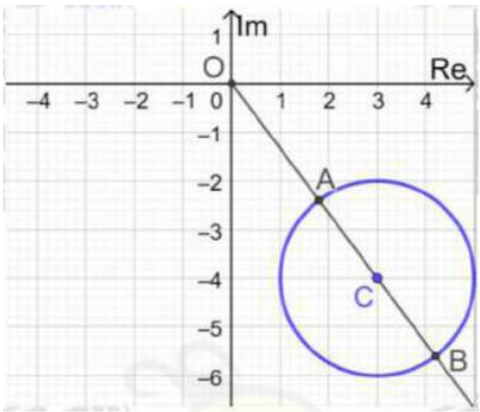
الحل:

$$|z-3-4i|=2$$

$$|z-(3-4i)|=2$$

z يقــع علــى الــدائرة التــي مركزهــا $(3,-4)$ وطــول نصف قطرها 2

نفرض $z=x+iy$ فإن: $|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الاصل في المستوى الديكارتي



من الشكل اعلاه نجد أن:

$$OC=\sqrt{9+16}=5$$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z|=OC-r=5-2=3$$

أكبر قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z|=OC+r=5+2=7$$

مثال41:

إذا كانــت: $z=5+2i$ ، فأُجيــب عــن الســؤالين الآتيين تباعًا :

1) أُبين أَنَّ: $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{29}(21+20i)$

الحل:

$$z=5+2i\Rightarrow \bar{z}=5-2i$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{5+2i}{5-2i}\times\frac{5+2i}{5+2i}$$

$$=\frac{25+20i-4}{25+4}=\frac{21+20i}{29}$$

$$=\frac{1}{29}(21+20i)$$

2) بناءً علــى البحــث فــي ســعة كــلٍّ مــن الأعــداد المُركبـــــــــة: z , $\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ أُبــــــــــين أَنَّ:

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

الحل:

$$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg(\bar{z})=-\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=-\tan^{-1}\frac{20}{21}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=Arg(z)-Arg(\bar{z})$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=\tan^{-1}\frac{2}{5}-\left(-\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=2\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

مثال42:

أُثبــت أنَّ المعادلـــة: $|z-6|=2|z+6-9i|$

تُمثِّل دائِرة، ثُم أجد مركزها وطول نصف قُطرها.

الحل:

$$|z-6|=2|z+6-9i|$$

$$|x-6+iy|=2|(x+6)+i(y-9)|$$

$$(x-6)^2+y^2=4\left((x+6)^2+(y-9)^2\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2=4\left(x^2+12x+36+y^2-18y+81\right)$$

$$x^2+y^2+20x-24y+144=0$$

$$(x+10)^2+(y-12)^2=100$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف

قطرها 10