1 بحث قابلية الاشتقاق

A يتم بحث قابلية الاشتقاق بالتعريف.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to x}\frac{f(h)-f(x)}{h-x}$$

ويكون f قابل للاشتقاق عند نقطة إذا كانت النهاية موجودة.

B تذكر:

$\lim_{h\to 0}\frac{a}{h^n}$ (غير موجودة)

$a>0$ n زوجي ∞

$a<0$ n زوجي $-\infty$

n فردي يمين ويسار

جهة ∞

جهة أخرى $-\infty$

1) $\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}=\infty$

2) $\lim_{h\to 0}\frac{-3}{h^{\frac{2}{5}}}=-\infty$

3) $\lim_{h\to 0}\frac{5}{h^3}=$ $+ \to \infty$ ، $- \to -\infty$

4) $\lim_{h\to 0}\frac{-5}{h^{\frac{3}{7}}}=$ $+ \to -\infty$ ، $- \to \infty$

5) $\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}-\frac{2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}h-\frac{2}{h}$ $+ \to -\infty$ ، $- \to \infty$

C في أسئلة الدوائر نستخدم القواعد للسرعة بعد التأكد من الاتصال.

D علاقة المشتقة بالاتصال.

اقتران f متصل عند $x=a$

لا ← غير قابل للاشتقاق عند $x=a$

نعم ← نبحث في قابلية الاشتقاق

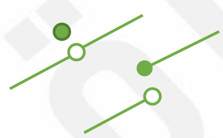
$f'_+(a)=f'_-(a)$

نعم ← f قابل للاشتقاق عند $x=a$

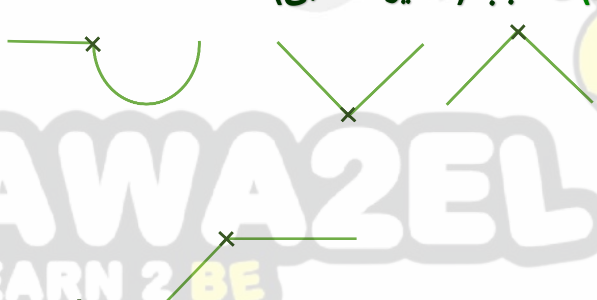
لا ← f غير قابل للاشتقاق عند $x=a$

E من رسم f يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق.

1) عدم الاتصال



2) المدبب (التغير المفاجئ)



3) المماس الرأسي على الشكل (S)

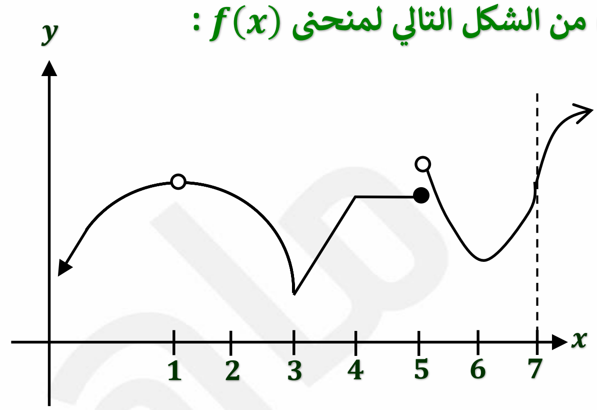
4) أطراف الفترات

مثال 1 في الأمثلة (1-3) اختر الإجابة الصحيحة:

1) إذا علمت أن $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ، فإن $f'(0)$ تساوي:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) غير موجودة

2) من الشكل التالي لمنحنى $f(x)$:



إن قيم x التي يكون عندها f غير قابل للاشتقاق:

a) $\{1,3,5\}$ b) $\{1,3,5,7\}$

c) $\{1,3,4,5,7\}$ d) $\{1,2,3,5,7\}$

3) إذا علمت أن

$$f(x)=\begin{cases}3a\,x^2+bx+5\,, x\geq 1\\ ax+2b\,x^2 \quad\quad ,x<1\end{cases}$$

فإن قيم b,a التي تجعل $f(x)$ قابل للاشتقاق على R:

a) $a=15, b=-25$

b) $a=-15, b=25$

c) $a=-15, b=-25$

d) $a=15, b=25$

مثال 2 ابحث في قابلية اشتقاق $f(x)$ عند

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1\,, x\geq -1\\ x+3\,, x<-1\end{cases} \quad ، \quad x=-1$$

الحل:

$f(x)$ متصل عند $x=-1$

$$f'_+(-1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(-1+h)^2+1-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{1}-2h+h^2-\cancel{1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(-2+h)}{\cancel{h}}=-2$$

$$f'_-(-1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-1+h)+3-2}{h}=1$$

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x=-1$

مثال 3 ابحث في قابلية اشتقاق f

عند $x=0$ ، $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$:

الحل: f متصل عند $x=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{5}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}=\infty\,,\ \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}=-\infty$$

$\therefore$ f غير قابل للاشتقاق عند $x=0$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

2 مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

1) الضرب:

(م .الأول)(الثاني) ⊕ (م .الثاني)(الأول)

2) القسمة:

$$\frac{(\text{م.المقام})(\text{البسط}) - (\text{م.البسط})(\text{المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

نتيجة (1)

$$f(x)=\frac{a}{\text{مقام}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-a\times(\text{م.المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

نتيجة (2)

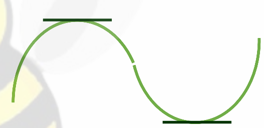
$$f(x)=\frac{\text{بسط}}{a} \Rightarrow f'(x)=\frac{\text{م.البسط}}{a}$$

✓ **تذكير:** أي مشتقة يرمز لها

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

مثلًا المشتقة الثانية $f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2}$

✓ **تذكير:** المشتقة من منحنى $f(x)$



1) القمة والقاع ← $f'=0$

2) عدم الاتصال ← غ.م f'

3) الثابت = صفر

4) الخطي

بوجود زاوية $f'(x_1)=\tan\theta_1$

لعدم وجود زاوية نبحث عن نقطتين $f'=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

✓ **تذكير:** في مشتقة القسمة نحاول التبسيط إما بالتحليل أو المتطابقات

في الأسئلة (1-9) اختر الإجابة الصحيحة:

1) إذا علمت أن $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$ ، فإن $f''(8)$ تساوي:

a) 36 b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{-1}{144}$ d) $\frac{1}{72}$

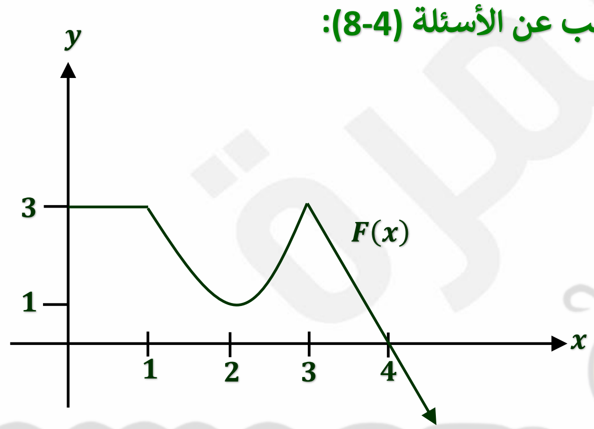
2) إذا علمت أن $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ، فإن $x^4f''(x)+4x^3f'(x)+2x^2f(x)+1$ تساوي:

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

3) إذا علمت أن $g(1)=5$, $f'(1)=2$ وأن $f(x)g(x)=10$ ، فإن $g'(1)$ تساوي:

a) 10 b) -10 c) 5 d) -5

❖ معتمدًا على الشكل التالي لمنحنى F، وأن $G(x)=x^3+x^2-1$ أجب عن الأسئلة (4-8):



4) إذا علمت أن $H(x)=F(x).G(x)$ جد $H'(2)$:

a) 16 b) 32 c) 0 d) 27

5) $\frac{d}{dx}(XF(x))\big|_{x=\frac{1}{2}}$ تساوي:

a) 0 b) 3.5 c) 3 d) 1

3 قواعد الاشتقاق

6) تساوي: $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)^2\Big|_{x=3}$

a) 0 b) 1 c) 9 d) غير موجودة

7) $H'(5)$, $H(x)=\frac{1}{F(x)}$ تساوي:

a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) غير موجودة

8) $\lim_{h\to 0}\frac{f(4)-f(4+2h)}{h}$ تساوي:

a) 3 b) -3 c) 6 d) -6

9) إذا علمت أن $x f(x)+2=x^2 f(x)$ ،
فإن $f'(2)$ تساوي:

a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{-3}{2}$ d) -3

A القواعد الأساسية التركيبية.

القاعدة	المشتقة
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} * g'(x)$
$\ln\left(g(x)\right)$ $g(x)>0$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$a^{g(x)}$	$a^{g(x)}.g'(x).\ln a$
$\log_b g(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x).\ln b}$
$\sin\left(g(x)\right)$	$\cos\left(g(x)\right).g'(x)$
$\cos\left(g(x)\right)$	$-\sin\left(g(x)\right).g'(x)$
$\tan\left(g(x)\right)$	$\sec^2\left(g(x)\right).g'(x)$
$\cot\left(g(x)\right)$	$-\csc^2\left(g(x)\right).g'(x)$
$\sec\left(g(x)\right)$	$\sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right).g'(x)$
$\csc\left(g(x)\right)$	$-\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right).g'(x)$
$(fog)(x)$	$f'\left(g(x)\right).g'(x)$
$y=f(u)$ $u=g(x)$ السلسلة الثنائية	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$
$y=f(u)$ $u=g(t)$ $t=h(x)$ السلسلة المكررة	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$

B قاعدة الأقواس ذات الأس.

$$f(x) = \left(g(x)\right)^n \Rightarrow f'(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} * g'(x)$$

- وعليها تندرج جميع الاقترانات المثلثية.

$$f(x) = \sin^n g(x) \Rightarrow f'(x)$$
$$= n\sin^{n-1} g(x) . \cos g(x) \times g'(x)$$

- كذلك الجذور تحول أقواس أسية.

$$f(x) = \sqrt[3]{g(x)} = \left(g(x)\right)^{\frac{1}{3}}$$

- قاعدة اشتقاق الجذر التربيعي.

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

✓ تنبيه: $\log , \ln$ نبسط قبل الاشتقاق حسب قوانين اللوغاريتم.

1) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b x^p = p\log_b x$

4) $\ln e^{g(x)} = g(x)$

5) $\log_b 1 = 0 , \log_b b = 1$

6) $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

مثال 1 في الأسئلة (1-23) اختر الإجابة الصحيحة:

1) إذا علمت أن $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ ، فإن $f'(1)$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2

2) إذا علمت أن $f(x) = \log\left(\frac{10}{x^n}\right)$ ، فإن $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{n}{x}$ b) $\frac{n}{x\ln 10}$ c) $\frac{-n}{x\ln 10}$ d) $\frac{-n}{x}$

3) إذا علمت أن $f(x) = \frac{e^{2x}-4}{e^x-2}$ ، فإن $f'(\ln 2)$ تساوي:

a) 2 b) -2 c) e^2 d) $-e^2$

4) إذا علمت أن $f(x) = (\ln x)^4$ ، فإن $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $4(\ln x)^3$ d) $\frac{4(\ln x)^3}{x}$

5) إذا علمت أن $y = \tan 2x$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $2\sec 2x\tan 2x$ b) $\sec^2 2x$
c) $\sec 2x\tan 2x$ d) $2\sec^2 2x$

6) إذا علمت أن $y = \sec^6 2x$ ، فإن y' تساوي:

a) $6\sec^5 2x\tan 2x$ b) $12y\tan 2x$
c) $6y\tan 2x$ d) $8y\tan 2x$

7) إذا علمت أن $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $\frac{-\ln 2}{2}$

8) إذا علمت أن b, a عددان موجبان ثابتان، وكان $a \neq b$ ، $y = \ln(ax+b)$ ، وكان لمنحنى y عند النقطة P مماس ميله 1 ، فإن الاحداثي x للنقطة P:

a) يساوي1　b) أكبر من 1
c) أقل من 1　d) أقل أو يساوي 1

9) إذا علمت أن $f(x) = \frac{3}{2-2\sin^2 x}$ ، فإن $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a) 6　b) $3\sqrt{2}$　c) $\frac{3}{2}$　d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

10) إذا علمت أن $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$ ، فإن $f'(0)$ تساوي:

a) 1　b) غير موجودة　c) 0　d) -2

11) إذا علمت أن $f'(1) = 16$ ، $f(1) = \frac{1}{3}$ وكان $g(x) = \sin^3(\pi f(x))$ ، فإن $g'(1)$ تساوي:

a) 18　b) 18π　c) $\frac{9}{8}\pi$　d) $\frac{9}{8}$

12) إذا علمت أن $f(x) = \sqrt[3]{\sin x + \cos x + 7}$ فإن $f'(0)$ تساوي:

a) $\frac{1}{4}$　b) $\frac{1}{7}$　c) $\frac{-1}{12}$　d) $\frac{1}{12}$

13) إذا علمت أن $f(x) = \frac{3+5^x}{3-5^x}$ ،فإن $f'(0)$ تساوي:

a) $\frac{11}{2}\ln 5$　b) $\frac{3}{2}\ln 5$
c) $\frac{11}{4}\ln 5$　d) $\frac{-1}{4}\ln 5$

14) إذا علمت أن $f(x) = 2^x * 8^{x^2}$ ، فإن $f'(0)$ تساوي:

a) $12\ln 2$　b) $7\ln 2$
c) $\ln 2$　d) $14\ln 2$

15) إذا علمت أن $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin^3 x}$ ، فإن $f'(x)$ تساوي:

a) $2\csc x$　b) $-2\csc x \cot x$
c) $2\csc x \cot x$　d) $2\sec x \tan x$

16) إذا علمت أن $f(x) = \log_3(1+\ln x)$ ، فإن $f'(1)$ تساوي:

a) 0　b) $\frac{2}{\ln 3}$　c) $\frac{1}{\ln 3}$　d) $\frac{1}{2\ln 3}$

17) إذا علمت أن $y = e^x \sin x$ ، فإن أحد العبارات التالية صحيحة:

a) $y'' = 2y' - 2y$　b) $y'' = 2y' + y$
c) $y'' = 2y' + 2y$　d) $y'' = 2y'$

18) إذا علمت أن $y = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}\cos x$ ، فإن $(y')^2 + y^2$ تساوي:

a) 1　b) 5　c) -5　d) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

19) إذا علمت أن $f(x) = \sin x - \cos x$ جد x ، حيث $x \in [\pi, 2\pi]$ ، وأن $f''(x) = 0$

a) $\frac{7\pi}{4}$　b) $\frac{3\pi}{4}$　c) $\frac{5\pi}{4}$　d) $\frac{\pi}{4}$

20) إذا علمت أن $f(x-1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ ، فإن $f'(1)$ تساوي:

a) $\frac{\pi^2}{64\sqrt{2}}$　b) 0　c) $\frac{\pi}{8}$　d) $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

21) إذا علمت أن

$y = 5u^2 + 6u - 1$,

$u = \sin t + \cos t$, $\frac{dt}{dx} = 2$

فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ تساوي:

a) 32　b) -32　c) 16　d) -16

22) إذا علمت أن

$f(1)=3, f'(1)=2, g(1)=1, g'(1)=-1$

فإن $\frac{d}{dx}\left(f^2(x^2)+(fog)(x)\right)$

عندما $x=1$ تساوي:

a) 10 b) 22 c) 20 d) 6

23) إذا علمت أن $f(x)=2x^n$ ، وأن n عدد صحيح موجب، وأن $f^{(3)}(x)=120\,x^{n-3}$، فإن n تساوي:

a) 6 b) 5 c) 7 d) 4

مثال 2 إذا علمت أن $f(x)=\sqrt{\ln(x)+4}$ جد $f'(1)$:

الحل:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x+4}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{0+4}}=\frac{1}{4}$$

مثال 3 إذا علمت أن

$$f(x)=\sin\left(\tan\left(\sqrt{3x^2+4}\right)\right)$$

جد $f'(x)$:

الحل:

$$f'(x)=\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\sec^2\sqrt{3x^2+4}\,.\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

$$=\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\sec^2\sqrt{3x^2+4}\,.\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

مثال 4 إذا علمت أن $f(x)=\log\csc x$ جد $f'(x)$ بدلالة a حيث $\sin x=a$ ، x: بالربع الثاني، $a\neq 0$

الحل:

$$f'(x)=\frac{-\cancel{\csc x}\cot x}{\cancel{\csc x}\ln 10}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{\ln 10\sin x}$$

$$\therefore \sin x=a \rightarrow \cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$$

(الربع الثاني)

$$\cos x=-\sqrt{1-a^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a\ln 10}$$

مثال 5 جد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y=e^x\sin^2 x\cos x$

الحل: (الضرب الثلاثي)

$$\frac{dy}{dx}=e^x\sin^2 x\cos x+2e^x\sin x\cos^2 x$$
$$+\ -e^x\sin^3 x$$

مثال 6 إذا علمت أن $y=3\cos t, x=2\sin t$ حيث $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}}$ ؟

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t}{2\cos t}=\frac{-3}{2}\tan t$$

لكن $\sqrt{2}=2\sin t\rightarrow \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$t=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{-3}{2}$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال 7 جد قيمة θ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

التي يكون عندها $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$

$$x = \sin^2\theta \quad , \quad y = 2\cos\theta$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$$

$$-\sec\theta = \sqrt{2} \to \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

θ بالربع الثاني والثالث

$$\theta = 135°, 225°$$

$$= \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

4 الاشتقاق الضمني

يستخدم الاشتقاق الضمني إذا لم يكن y موضع قانون عندها نشتق اعتيادي وأينما y نشتق نضرب بـ $\frac{dy}{dx}$ وللسهولة y'.

❖ حالات تحل على الضمني:

1) إذا كانت العلاقة معقدة، صعب اشتقاقها، نأخذ ln للطرفين.

2) $(\text{متغير})^{\text{متغير}}$ ، أي لدينا متغير له أس متغير مثلًا $x^{\ln x}, (\sin x)^x$.

3) المشتقة الثانية للمعادلات الوسطية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال 1 $\sin(x+y) = y^2\cos x$

جد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل: (نشتق طرفي العلاقة)

$$\cos(x+y)(1+y') = -y^2\sin x + 2yy'\cos x$$

$$\cos(x+y)\,y' - 2yy'\cos x = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$y' = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

مثال 2 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للعلاقة $xy + y^2 = 2x + 3$ ؟

الحل: (نجد المشتقة الأولى)

$$xy' + y + 2yy' = 2$$

$$y'(x+2y) = 2 - y$$

$$y' = \frac{2-y}{x+2y}$$

نشتق مرة أخرى

$$y'' = \frac{(x+2y)(-y') - (2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

نعوض y'

$$y'' = \frac{(x+2y)\left(-\frac{2-y}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1 + 2\frac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

نرتب المسألة

$$y'' = \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

مثال 3 جد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $x = \sqrt{y^2 + 8y}$
عندما $x = 3$ ؟

الحل: (نربع الطرفين)

$$x^2 = y^2 + 8y$$

نشتق $\Leftarrow$ $2x = 2yy' + 8y'$

لكن عندما $x = 3 \Leftarrow$ $3 = \sqrt{y^2 + 8y}$

نربع $\Leftarrow$ $9 = y^2 + 8y$

$$y^2 + 8y - 9 = 0 \Rightarrow (y+9)(y-1) = 0$$

$$(3,1), (3,-9)$$

أولًا: نعوض $(3,1) \Leftarrow$

$$6 = 2y' + 8y' \Rightarrow y' = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ثانيًا: نعوض $(3,-9) \Leftarrow$

$$6 = -18y' + 8y' \Rightarrow y' = \frac{-3}{5}$$

مثال 4 إذا علمت أن $x^2 = \tan y + x$
جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$ ؟

الحل: (نشتق طرفي العلاقة)

$$2x = \sec^2 y \, y' + 1$$

نعوض في العلاقة $x = 2$

$$4 = \tan y + 2 \Rightarrow \tan y = 2$$

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 5$$

نعوض في الاشتقاق $\Leftarrow$ $4 = 5y' + 1 \Rightarrow y' = \frac{3}{5}$

مثال 5 جد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $y = (1+x)^x$
عند النقطة $(2,9)$ ؟

الحل: (نأخذ ln للطرفين)

$$\ln y = x \ln(1+x)$$

نشتق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x)$$

$$y' = y\left[\frac{x}{1+x} + \ln(1+x)\right]$$

عندما $x = 2$, $y = 9$ نعوض

$$y' = 9\left[\frac{2}{3} + \ln 3\right] = 6 + 9\ln 3$$

مثال 6 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للعلاقة
$x = 3t^5 + 1$, $y = t^3 + t$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{15\, t^4} = \frac{1}{5} t^{-2} + \frac{1}{15} t^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-2}{5}t^{-3} - \frac{4}{15}t^{-5}}{15\, t^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{75} t^{-7} - \frac{4}{225} t^{-9}$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال 8 إذا علمت أن $\frac{dy}{dx} = \sin t + \cos t$
وأن $\frac{dx}{dt} = 2$ ، جد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \sin t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

مثال 8 إذا علمت أن $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 1$ أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ، حيث $x \neq y$ ، $x, y > 0$؟

الحل: (إما نربع الطرفين أو نرتب المسألة)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-1}{2}} = 1$$

نشتق الطرفين

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = 0$$

إما $\frac{y-xy'}{y^2} = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y}{x}}$

أو $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-3}{2}} = 0 \rightarrow x = y$

وهذا يناقض المعطى.

5 التطبيقات الهندسية

❖ **معادلة المماس والعمودي على المماس**

1) ميل المماس عند نقطة = ميل المنحنى عند نفس النقطة $= \frac{dy}{dx}$.

2) ميل العمودي على المماس عند نقطة $= \frac{-1}{m_{\text{المماس}}}$ حيث $m_{\text{المماس}} \cdot m_{\text{العمودي}} = -1$

3) معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة (x, y_1) هي

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

كذلك معادلة العمودي

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$

4) مفاتيح حل المسائل الهندسية:

✓ معادلة المماس (العمودي) المرسوم من نقطة، أو المار بنقطة (a, b) نتأكد أنها نقطة تماس.

✓ المماس أو المنحنى يقطع محور
- $x \leftarrow y = 0$
- $y \leftarrow x = 0$

✓ إذا كان منحنيين متقاطعين
- اقترانات $f = g$
- علاقات حذف أو تعويض

✓ إذا كان المنحنيين $(f$ ومماس$)$ متماسين
- الصور متساوية $f(a) = g(a)$
- المشتقات متساوية $f'(a) = g'(a)$

✓ مصطلح متوازيين ← $m_1 = m_2$.

✓ مصطلح متعامدين ← $m_1 * m_2 = -1$.

✓ المماس الأفقي ← يوازي محور x ← $m = 0$.

✓ **خطوات إيجاد نقطة تماس لمماس مرسوم من نقطة خارجية:**

1) نفرض التماس (x, y)

2) نجد ميل المماس من $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ونبدل y من f

أما العلاقات الضمنية لا نبدل.

3) نجد المشتقة.

4) نساوي المشتقة $= m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ونجد x.

5) نجد y ونجد المعادلة المطلوبة.

مثال 1 جد قيم x التي يكون عندها المماس أفقيًا لمنحنى $f(x) = e^x - 2x$ ؟

الحل: المطلوب قيم x التي تجعل $m = 0$

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \to e^x = 2$$

نأخذ $\ln$ ⇐ $x = \ln 2$

مثال 2 إذا كان $f(x) = \ln x$ أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

الحل:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \to m_{\text{المماس}} = \frac{1}{e}$$

$$m_{\text{العمودي}} = -e$$

معادلة العمودي $y - 1 = -e(x - e)$

مقطع x ← $y = 0$ ← $-1 = -e(x - e)$

$$\therefore x = \frac{1}{e} + e$$

مثال 3 إذا علمت أن $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ فجد:

a) جد ميل المماس عند نقطة الأصل.

b) بين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y.

الحل:

a)

$$f'(x) = \frac{(1+e^{-x})(e^{-x}) - (1-e^{-x})(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$$

$$f'(0) = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

b) إذا كان هنالك مماس أفقي ← $m = 0$

$$e^{-x} + \cancel{e^{-2x}} + e^{-x} - \cancel{e^{-2x}} = 0$$

هذا غير ممكن $2e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$

$\therefore$ لا يوجد أصفار m ← لا يوجد مماس أفقي.

مثال 4 إذا كان $y = \ln(ax + b)$ ، a،b عددان موجبان وعند النقطة P يكون ميل المماس 1:

a) أثبت أن الاحداثي x للنقطة P أقل من 1.

b) جد نقطة التماس التي يكون عندها ميل المماس $= \frac{1}{2}$ علمًا بأن P هي $(0, 2)$.

الحل:

a)

$$y' = \frac{a}{ax+b} = 1$$

$$ax + b = a \to x = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

$0 < \frac{b}{a} \Leftarrow x$ قيمة أقل من 1

b) $f(0)=2 \Rightarrow \ln b = 2 \to b = e^2$

$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \to a = b$

$\therefore a = e^2$

$y = \ln\left(e^2 x + e^2\right)$

$y' = \frac{e^2}{e^2 x + e^2} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \quad \left(1, \ln 2e^2\right)$

$= (1 \ , \ 2 + \ln 2)$

مثال 5 احسب مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس من نفس نقطة التماس $\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$ لمنحنى العلاقة $y = \sin t + \cos t \quad , \quad x = \cos t + 1$ ومحور x.

الحل: أولًا: نجد معادلة المماس والعمودي

$x_1 = 1 \quad , \quad y_1 = 1$

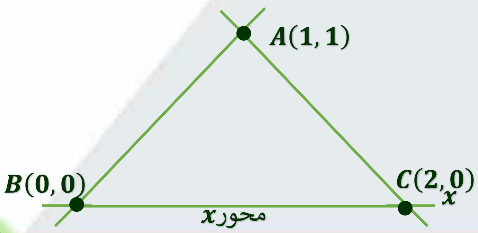
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \sin t}{-\sin t}$$

$m_{\text{المماس}} = 1 \to m_{\text{العمودي}} = -1$

$y - 1 = -1(x - 1)$

$y = -x + 2 \quad , \quad y - 1 = 1(x - 1)$

العمودي على المماس $\quad$ $y = x$ المماس



B تقاطع المماس مع محور x ← $y = 0$

$x = 0$

$\therefore \ B\,(0\,,0)$

C تقاطع العمودي مع محور x ← $y=0$

$\therefore x = 2 \to C(2,0)$

$Area = \frac{1}{2}(2-0)(1) = 1$

مثال 6 جد مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $x = 5t^2, y = 7t$ عندما $x = t$ والمحورين $(t > 0)$ بدلالة t.

الحل:

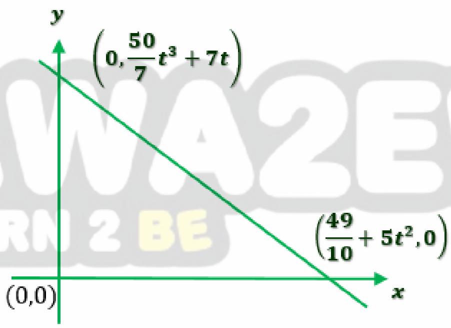
$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{10\,t} \Rightarrow m_{\text{العمودي}} = \frac{-10t}{7}$$

معادلة العمودي $y - 7t = \frac{-10}{7}t\left(x - 5t^2\right)$

يقطع المحور

x: $y = 0$, $y = \frac{49}{10} + 5t^2$

y: $x = 0$, $y = \frac{50}{7}t^3 + 7t$



$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{10} + 5t^2\right)\left(\frac{50}{7}t^3 + 7t\right)$$

مثال 7 جد معادلتي مماسي منحنى العلاقة
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
اللذان يمران بالنقطة $(4,0)$

الحل: $(4,0)$ ليست نقطة تماس لا تحقق المنحنى
نفرض التماس (x,y)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{x-4}$$

نجد المشتقة

$$\frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{9}=0\to y'=\frac{-1}{2}x\ .\ \frac{9}{2y}$$

$$y'=\frac{-9x}{4y}=\frac{y}{x-4}\to 4y^2=-9x^2+36x$$

$$y^2=\frac{-9}{4}x^2+9x$$

نعوض في العلاقة

$$\frac{x^2}{4}+\frac{\frac{-9}{4}x^2+9x}{9}=1\to x=1$$

$$y^2=\frac{27}{4}\to y=\pm\frac{\sqrt{27}}{2}$$

المعادلة الأولى:

$$x_1=1\quad ,\quad y_1=\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$m=\frac{y}{x-4}=\frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{-3}=\frac{-\sqrt{27}}{6}$$

$$y-\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{-\sqrt{27}}{6}(x-1)$$

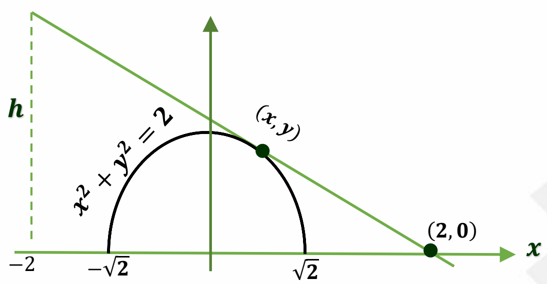
المعادلة الثانية:

$$x_1=1\quad ,\quad y_1=\frac{-\sqrt{27}}{2}$$

$$m=\frac{\frac{-\sqrt{27}}{2}}{-3}=\frac{\sqrt{27}}{6}$$

$$y+\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{\sqrt{27}}{6}(x-1)$$

مثال 8 من الشكل التالي جد:



الحل: نجد نقطة التماس (x,y)

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{x-y}$$

والمشتقة

$$2x+2yy'=0$$

$$y'=\frac{-x}{y}=\frac{y}{x-2}$$

$$y^2=-x^2+2x$$

$$y^2+x^2=2x\Rightarrow 2=2x\Rightarrow x=1$$

$$\therefore\ y^2=1\to y=1$$

التماس$(1,1)$

$$m_{\text{المماس}} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$y - 1 = -1(x-1) \Rightarrow y = 2 - x$$

نعوض $x = -2 \Leftarrow h = y = 4$

(تدريب منزلي)

اختر الإجابة الصحيحة:

1) ميل المماس لمنحنى $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$ عند $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ يساوي:

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{\pi}{2}$

2) إذا كان لمنحنى العلاقة $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماس أفقي عند نقطة فهي:

a) $(1,-3)$فقط b) $(-1,3)$فقط
c) $(1,-3),(-1,3)$ d) $(1,-3),(-1,-3)$

3) إن إحداثي النقطة التي تقع على $x + y^2 = 1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم $x + 2y = 0$ هي:

a) $(1,1)$ b) $(0,1)$
c) $(1,0)$ d) $(0,-1)$

4) إن إحداثي النقطة الواقعة على منحنى $y = x^{\frac{1}{x}}$ حيث $x > 0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا هي:

a) (e,e) b) $\left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$
c) (e,e^2) d) $(e,1)$

5) إن معادلة المماس للعلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ عند تقاطعه مع منحنى المعادلة $y = x$ حيث $x > 0$

a) $y = x$ b) $y = 6 + x$
c) $y = 6 - x$ d) $y = -6 - x$

5 التطبيقات الفيزيائية

$S(t)$ موقع الجسم

نشتق $s' = \frac{ds}{dt}$

$V(t)$ السرعة المتجه

نشتق $v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

$a(t)$ التسارع

1) السرعة المتجهة $V(t)$ ، السرعة $|V(t)|$

2) في حالة السكون اللحظي $\leftarrow v = 0$

3) إذا كان V

$V > 0$ الجسم يتحرك مع اتجاه الحركة

$V < 0$ الجسم يتحرك عكس اتجاه الحركة

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

4) إذا طلب السؤال بأي اتجاه يتحرك الجسم نعوض الزمن بالسرعة

+	-
مع اتجاه الحركة	عكس اتجاه الحركة

5) عندما يسأل متى يعود الجسم للموقع الابتدائي نعوض $S(0)$ ، ثمّ نساوي $S(t) = S(0)$

مثال 1 اختر الإجابة الصحيحة لما يلي:

تمثل المعادلة $S(t) = t^2 - 7t + 8$ موقع جسم متحرك في مسار مستقيم أجب عن (1-2):

1) أن سرعة الجسم عندما $t = 1$:

a) -5 b) 2 c) 5 d) -2

2) متى يعود الجسم للموقع الابتدائي:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 7

3) إذا علمت أن $S(t) = e^t - 4t$ يحدد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم. جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا:

a) e^4 b) 4 c) 0 d) -3

4) يمثل الاقتران $S(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، متى يعود الجسم لموقعه الابتدائي؟

a) $t = 2$ b) $t = 1$ c) $t = 1.9$ d) 0

مثال 2 يتحرك جسم حسب العلاقة
$S(t) = 4 - \sin t$

a) حدد موقع الجسم عندما كان في حالة السكون اللحظي أول مرة بعد انطلاقه.
b) حدد موقع الجسم عندما يصل إلى أقصى سرعة.

الحل:

a) $V(t) = -\cos t = 0$

$$t = \frac{\pi}{2} \;,\; \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = (3)m$$

b) $V(t) = |\cos t| \quad , \quad 0 \le |\cos t| \le 1$

1) $|\cos t| = 0 \rightarrow \sin t = \pm 1$

إذا كان $\sin t = 1$

$\therefore S(t) = (3)m$

$\sin t = 1 \quad \rightarrow \quad S(t) = (5)m$

2) $|\cos t| = 1 \rightarrow \sin t = 0$

$\therefore S(t) = (4)m$

مثال 3 يتحرك جسم وفق العلاقة
$S(t) = t^{\frac{1}{t}} \quad , \quad t > 0$

جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

الحل: نأخذ ln للطرفين

$$\ln S = \frac{1}{t} \ln t \Rightarrow \frac{v}{s} = \frac{1}{t^2} + \frac{-\ln t}{t^2}$$

$$0 = \frac{1}{t^2}(1 - \ln t)$$

$\ln t = 1 \rightarrow t = e \quad , \frac{1}{t^2} = 0$ غير ممكن

$$V(t) = S(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

$$a(t) = S(t)\frac{t^2 * \frac{-1}{t} - 2t(1-\ln t)}{t^4} + V(t)\frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$a(e) = e^{\frac{1}{e}}.\frac{e}{e^4} + 0 = e^{\left(\frac{1}{e}-3\right)}$$

مثال 4 الحركة التوافقية

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى والأسفل حيث $S(t) = 7\sin t$.

a) جد اقتران يمثل سرعة الجسم المتجهة وتسارعه.

b) صف حركة الجسم.

الحل:

a) $V(t) = 7\cos t \quad , \quad a(t) = -7 \sin t$

b) يتم وصف الحركة:

1) تحديد أعلى وأقل موقع يتحرك من الجسم.
2) تحديد موقع أكبر سرعة وأصغر سرعة.
3) الربط بين التسارع والازاحة.
2) تحديد أكبر وأصغر قيمة للتسارع.

1) $S(t) = 7\cos t \quad , \quad -7 \le S(t) \le 7$

لأن $-1 \le \sin t \le 1$

2) $V(t) = 7\cos t$

أعلى وأدنى قيمة للسرعة عندما

الأعلى $\cos t = \pm 1$

الأدنى $\cos t = 0$

موقع أعلى سرعة $\leftarrow \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$\sin^2 t = 0$

أي أعلى سرعة عن موقع الاتزان والأدنى عند الأطراف.

3) $a(t) = -7\sin t$

بالاعتماد على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع.

قيمة التسارع = معكوس قيمة الموقع

4) قيمة التسارع = صفر عند موقع الاتزان، لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي إحداهما الأخرى.

7 مسائل النمذجة

هنالك فكرة واحدة لمسائل النمذجة

معدل التغير = المشتقة

مثال 1

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات بالدينار باستعمال $U(t) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ عدد القطع المبيعة x.

a) جد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة.

b) جد $u'(20)$.

الحل:

a) $u'(x) = 40\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{-1}{2}} . \frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}$

b) $u'(20) = 40\left(\frac{41}{64}\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{128-122}{(64)^2} \simeq 0.061$

إجابة سؤال الدوائر ص2

رقم الدائرة	1	2	3
الإجابة	d	c	c

إجابة سؤال الدوائر ص(3+4)

رقم الدائرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الإجابة	C	b	d	A	c	d	b	c	c

إجابة سؤال الدوائر ص6+7

رقم الدائرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الإجابة	b	c	a	d	d	b	d	c	a

رقم الدائرة	10	11	12	13	14	15	16	17	18
الإجابة	b	b	d	b	c	b	c	a	b

رقم الدائرة	19	20	21	22	23
الإجابة	c	c	b	b	b

إجابة سؤال الدوائر ص14

رقم الدائرة	1	2	3	4	5
الإجابة	a	c	b	B	c

إجابة سؤال الدوائر ص15

رقم الدائرة	1	2	3	4
الإجابة	c	d	b	a