* التكامل بالأجزاء :

نلجأ إلى التكامل بالأجزاء عندما نريد إيجاد تكامل حاصل ضرب أو خارج قسمة اقترانين ولا يوجد بينهما مشهد غير مألوف .

مثل : $\int \text{س جا٢س د س}$ $\quad$ $\int \text{س قا}^{٢}(\tfrac{١}{٢}\text{س})\ \text{د س}$

$\int \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}+١}\ \text{د س}$ $\quad$ $\int \text{س}\sqrt{٢-٥\text{س}}\ \text{د س}$ $\quad$ $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٣}}\ \text{د س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س د س}$ حيث نختار أحد الاقترانين للاشتقاق وإعطاؤه الرمز (ص) والاقتران الآخر للتكامل اعطاؤه الرمز (دهـ) بحيث يكون ص اقتراناً منتهياً تفاضله (أي مشتقة تصل إلى الصفر) بشرط أن يكون الاقتران الآخر (دهـ) معروف تكامله لدينا .

---

* **ملاحظة** : في حالات خاصة جداً قد نحتاج إلى تغيير تلك التسمية

مثال : $\int ١٢\text{س}\sqrt[٣]{١-٢\text{س}}\ \text{د س} = \int ١٢\text{س}\,(١-٢\text{س})^{\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = ١٢\text{س} \qquad \text{د هـ} = (١-٢\text{س})^{\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$

$\text{د ص} = ١٢\ \text{د س} \qquad \text{هـ} = \frac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}$

$I = \text{ص}\times\text{هـ} - \int \text{هـ}\times\text{د ص} \Leftarrow I = (١٢\text{س})\left(\frac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}\right) - \int \frac{(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}\,(١٢\ \text{د س})$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} + \int \frac{٩}{٢}(١-٢\text{س})^{\frac{٤}{٣}}\ \text{د س}$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} + \frac{٩}{٢}\times\frac{(١-٢\text{س})^{\frac{٧}{٣}}}{-٢\times\frac{٧}{٣}} + \text{جـ}$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}\text{س}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٤}} - \frac{٢٧}{٢٨}\sqrt[٣]{(١-٢\text{س})^{٧}} + \text{جـ}$

__مثال:__ جد التكاملات التالية :

① $\int \text{س جاس دس} \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \text{دهـ} = \text{جاس دس} & \text{ص} = \text{س} \arrow[dl, "\times"'] \\ \text{هـ} = -\text{جتاس} \arrow[r, bend right, "-"'] & \text{دص} = \text{دس} \end{tikzcd}$$

$I = -\text{س جتاس} - \int -\text{جتاس دس} = -\text{س جتاس} + \text{جاس} + \text{جـ}$

---

② $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٤س جتا٢س دس} \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \text{دهـ} = \text{جتا٢س دس} & \text{ص} = \text{٤س} \arrow[dl, "\times"'] \\ \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \arrow[r, bend right, "-"'] & \text{دص} = \text{٤ دس} \end{tikzcd}$$

$I = \text{٤س} \times \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \times \text{٤ دس}$

$= \text{٢س جا٢س} \Big|^{\frac{\pi}{٢}} - ٢ \times -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س} \Big|^{\frac{\pi}{٢}} = \text{٢س جا٢س} \Big|^{\frac{\pi}{٢}} + \text{جتا٢س} \Big|^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \left(٢ \times \frac{\pi}{٢} \times ٠ - ٠\right) + (-١-١) = -٢$

---

③ $\int \frac{(\text{٢س}+٣)}{\text{قا٢س}} \text{دس} = \int (\text{٢س}+٣)\,\text{جتا٢س دس}$

$$\begin{tikzcd} \text{دهـ} = \text{جتا٢س دس} & \text{ص} = \text{٢س}+٣ \arrow[dl, "\times"'] \\ \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \arrow[r, bend right, "-"'] & \text{دص} = \text{٢ دس} \end{tikzcd}$$

$I = \frac{(\text{٢س}+٣)}{٢}\,\text{جا٢س} - \int \text{جا٢س دس} = \frac{(\text{٢س}+٣)}{٢}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٢}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

---

④ $\int \frac{\text{٢س}^٢}{\text{قتا٢س}} \text{دس} = \int \text{٢س}^٢ \text{جا٢س دس} \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \text{دهـ} = \text{جا٢س دس} & \text{ص} = \text{٢س}^٢ \arrow[dl, "\times"'] \\ \text{هـ} = -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س} \arrow[r, bend right, "-"'] & \text{دص} = \text{٤س دس} \end{tikzcd}$$

$I = \text{٢س}^٢ \times -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س} - \int -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س} \times \text{٤س دس}$

بالأجزاء مرة أخرى

$= -\text{س}^٢\text{جتا٢س} + \int \text{٢س جتا٢س دس}$

$$\begin{tikzcd} \text{دهـ} = \text{جتا٢س دس} & \text{ص} = \text{٢س} \arrow[dl, "\times"'] \\ \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \arrow[r, bend right, "-"'] & \text{دص} = \text{٢ دس} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow I = -\text{س}^٢\text{جتا٢س} + \text{٢س} \times \frac{١}{٢}\text{جا٢س} - \int \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \times \text{٢ دس}$

$\Rightarrow I = -\text{س}^٢\text{جتا٢س} + \text{س جا٢س} + \frac{١}{٢}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

مثال٤: جد ∫ ١٦س² جتا٢س دس ⟸ ص = ١٦س² ، دهـ = جتا٢س دس

دص = ٣٢س دس ، هـ = $\frac{1}{2}$ جا٢س

I = (١٦س²)($\frac{1}{2}$ جا٢س) − ∫($\frac{1}{2}$ جا٢س)(٣٢س دس)

I = ٨س² جا٢س − ∫١٦س جا٢س دس　　أجزاء مرة أخرى

ص = ١٦س ، دهـ = جا٢س دس

دص = ١٦ دس ، هـ = − $\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = ٨س² جا٢س − (١٦س × − $\frac{1}{2}$ جتا٢س) − ∫(− $\frac{1}{2}$ جتا٢س)(١٦ دس)

= ٨س² جا٢س + ٨س جتا٢س − ∫٨ جتا٢س دس

= ٨س² جا٢س + ٨س جتا٢س − ٨ × $\frac{1}{2}$ جا٢س + جـ

طريقة أخرى للحل: ∫١٦س² جتا٢س دس

	الاقتران نشتقه ص	الاقتران الذي نكامله دهـ
+	١٦س²	جتا٢س
−	٣٢س	$\frac{1}{2}$ جا٢س
+	٣٢	− $\frac{1}{4}$ جتا٢س
−	صفر	− $\frac{1}{8}$ جا٢س
		▨

I = ٨س² جا٢س + ٨س جتا٢س − ٤جا٢س + جـ

مثال٤: ∫ $\frac{٤س}{قا^2 س}$ دس = ∫٤س جتا²س دس = ∫٤س × $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س) دس

= ∫٢س × (١ + جتا٢س) دس = ∫٢س دس + ∫٢س جتا٢س دس

= ∫٢س دس + ∫$\underbrace{٢س}_{ص}$ $\underbrace{جتا٢س دس}_{دهـ}$
مباشر　　أجزاء　　ثم نكمل - - -

مثال: ∫ س (جاس + جتاس)^٢ دس = ∫ س (جا^٢س + ٢جاس جتاس + جتا^٢س) دس

= ∫ س (جا^٢س + جتا^٢س + ٢جاس جتاس) دس = ∫ س (١ + جا٢س) دس

$= \int (\underbrace{س}_{مباشر} + \underbrace{س}_{ع}\ \underbrace{جا٢س\ دس}_{ده})$ $= \frac{س^٢}{٢} + \int س\ جا٢س\ دس$

ع = س ، دع = دس

ده = جا٢س دس ، ه = $-\frac{١}{٢}$ جتا٢س

$I = \frac{س^٢}{٢} + س \times -\frac{١}{٢}$ جتا٢س $- \int -\frac{١}{٢}$ جتا٢س دس

$= \frac{س^٢}{٢} - \frac{١}{٢}$ س جتا٢س $+ \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

مثال: اذا كان ق(١) = ٣ ، ق′(١) = −٢ ، ق(٢) = ٥ ، ق′(٢) = ٧

ق(٤) = −٩ ، ق′(٤) = −٨

جد قيمة $\int_{٢}^{٤}$ ٣س ق″$(\frac{١}{٢}$س) دس

الحل:

ع = ٣س ، دع = ٣ دس

ده = ق″$(\frac{١}{٢}$س) دس ، ه = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ ق′$(\frac{١}{٢}$س)

I = ٣س × ٢ق′$(\frac{١}{٢}$س) − ∫ ٢ق′$(\frac{١}{٢}$س) × ٣ دس $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ق′$(\frac{١}{٢}$س) − ∫ ٦ ق′$(\frac{١}{٢}$س) دس $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ق′$(\frac{١}{٢}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$ − ٦ × $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ ق$(\frac{١}{٢}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ق′$(\frac{١}{٢}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$ − ١٢ ق$(\frac{١}{٢}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$		ثم نعوض

ونكمل الحل

مثال : جد التكاملات التالية :

① $\int_{1}^{4} \frac{6\text{س}}{\sqrt{2\text{س}+1}}\,\text{دس}$ يمكن إيجاد التكامل بالتعويض أو الأجزاء : $\int_{1}^{4} 6\text{س}\,(2\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = 6\text{س}$ $\qquad \text{دهـ} = (2\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = 6\,\text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}(2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}$

$I = 6\text{س} \times (2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \Big|_{1}^{4} - \int_{1}^{4} (2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \times 6\,\text{دس}$

$= 6\text{س}\sqrt{2\text{س}+1} \Big|_{1}^{4} - 6 \times \frac{1}{2} \times 2\,\frac{(2\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{1}^{4}$

$= (24 \times \sqrt{9} - 0) - 2\left((9)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right) = 72 - 0 - 2\left((3^{2})^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

$= 72 - 2(27 - 1) = 72 - 52 = 20$

---

② $\int \text{جا}\sqrt{2\text{س}+3}\,\text{دس}$ (إذا كان ما داخل الجا أو الجتا مقادير ليست خطية يجب البدء بالتعويض)

نفرض $\text{ص} = \sqrt{2\text{س}+3} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\text{س}+3}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}}$

$\text{دس} = \sqrt{2\text{س}+3}\,\text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \text{ص}\,\text{دص}$

$= \int \text{جاص} \times \text{ص}\,\text{دص} = \int \text{ص}\,\text{جاص}\,\text{دص}$

$\text{ع} = \text{ص}$ $\qquad \text{دهـ} = \text{جاص}\,\text{دص}$

$\text{دع} = \text{دص}$ $\qquad \text{هـ} = -\text{جتاص}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

$I = -\text{ص}\,\text{جتاص} - \int -\text{جتاص}\,\text{دص} = -\text{ص}\,\text{جتاص} + \text{جاص} + \text{جـ}$

$= -\sqrt{2\text{س}+3}\,\text{جتا}\sqrt{2\text{س}+3} + \text{جا}\sqrt{2\text{س}+3} + \text{جـ}$

---

③ $\int \text{س}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}^{2}+1}\,\text{دس} = \int \text{س}\,\text{جتاص}\,\frac{\text{ص}\,\text{دص}}{\text{س}}$

$= \int \text{ص}\,\text{جتاص}\,\text{دص}$

$\text{ع} = \text{ص}$ $\qquad \text{دهـ} = \text{جتاص}\,\text{دص}$

$\text{دع} = \text{دص}$ $\qquad \text{هـ} = \text{جاص}$

$I = \text{ص}\,\text{جاص} - \int \text{جاص}\,\text{دص} = \text{ص}\,\text{جاص} + \text{جتاص} + \text{جـ}$

$= \sqrt{\text{س}^{2}+1}\,\text{جا}\sqrt{\text{س}^{2}+1} + \text{جتا}\sqrt{\text{س}^{2}+1} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{2}+1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^{2}+1}}$

$= \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$\text{دس} = \frac{\text{ص}\,\text{دص}}{\text{س}}$

③ ∫ (س+٣)^{٢} جتا٢س دس

هـ = (س+٢)^{٢}　　دع = جتا٢س دس

دهـ = ٢(س+٢) دس　　ع = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

= (س+٢)^{٢} × $\frac{١}{٢}$ جا٢س − ∫ $\frac{١}{٢}$ جا٢س × ٢(س+٢) دس

= $\frac{(س+٢)^{٢}}{٢}$ جا٢س − ∫ (س+٢) جا٢س دس　　أجزاء مرة أخرى

هـ = س+٢　　دع = جا٢س دس

دهـ = دس　　ع = −$\frac{١}{٢}$ جتا٢س

= $\frac{(س+٢)^{٢}}{٢}$ جا٢س − ((س+٢) × −$\frac{١}{٢}$ جتا٢س − ∫ −$\frac{١}{٢}$ جتا٢س دس)

= $\frac{(س+٣)^{٢}}{٢}$ جا٢س + $\frac{(س+٢)}{٢}$ جتا٢س − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

---

④ ∫ س^{٥} جتاس^{٣} دس = ∫ س^{٥} جتاص $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

= $\frac{١}{٣}$ ∫ س^{٣} جتاص دص = $\frac{١}{٣}$ ∫ $\underbrace{ص}_{هـ}$ $\underbrace{جتاص دص}_{دع}$

ص = س^{٣}

$\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢}

دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

ثم نكمل الحل ـ ـ ـ.

⑤ ∫ $\frac{س جاس}{قاس}$ دس = ∫ س جاس جتاس دس = ∫ $\underbrace{\frac{١}{٢} س}_{هـ}$ $\underbrace{جا٢س دس}_{دع}$ ـ ـ نكمل

⑥ ∫ جاس (س + قتا^{٣}س) دس = ∫ جاس (س + $\frac{١}{جا^{٣}س}$) دس

= ∫ (س جاس + $\frac{١}{جا^{٢}س}$) دس = ∫ $\underbrace{س}_{هـ}$ $\underbrace{جاس}_{دع}$ + $\underbrace{قتا^{٢}س}_{مباشر}$ دس

هـ = س　　دع = جاس دس

دهـ = دس　　ع = − جتاس

I = − س جتاس − ∫ − جتاس دس − ظتاس + جـ

= − س جتاس + جاس − ظتاس + جـ

⑦ $\int_{1}^{2} \underbrace{\text{٥٦}(\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}}}_{\text{ق}} \underbrace{(\text{س}-\text{١})^{\text{٥}}}_{\text{دهـ}} \, \text{دس}$

$\text{ق} = \text{٥٦}(\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}}$ $\text{دهـ} = (\text{س}-\text{١})^{\text{٥}}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \text{١١٢}(\text{س}-\text{٢})\,\text{دس}$ $\text{هـ} = \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٦}}}{\text{٦}}$

$= \text{٥٦}(\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}} \times \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٦}}}{\text{٦}} \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٦}}}{\text{٦}} \times \text{١١٢}(\text{س}-\text{٢})\,\text{دس}$

$= (\text{٠}-\text{٠}) - \int_{1}^{2} \frac{\text{٥٦}}{\text{٣}} (\text{س}-\text{٢})(\text{س}-\text{١})^{\text{٦}}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}-\text{٢}$ $\text{دهـ} = (\text{س}-\text{١})^{\text{٦}}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \text{دس}$ $\text{هـ} = \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٧}}}{\text{٧}}$

$= -\frac{\text{٥٦}}{\text{٣}} \left((\text{س}-\text{٢}) \times \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٧}}}{\text{٧}} \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٧}}}{\text{٧}}\,\text{دس} \right.$

$= -\frac{\text{٥٦}}{\text{٣}} \left(\text{٠} - \frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٨}}}{\text{٧}\times\text{٨}} \Big|_{1}^{2} \right) = \frac{\text{١}}{\text{٣}} (\text{س}-\text{١})^{\text{٨}} \Big|_{1}^{2} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} (\text{١}-\text{٠}) = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

---

⑧ $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا٢ص} \times \text{٢ص}\,\text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{جا٢ص}\,\text{دص}}_{\text{دهـ}}$ ← يكمل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ص}}$

$\text{دس} = \text{٢ص}\,\text{دص}$

⑨ $\int \frac{\text{س}\,\text{جاس}}{\text{قاس}}\,\text{دس} = \int \text{س}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{دس} = \int \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا٢س}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{جا٢س}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}} \Leftarrow$

$\text{ق} = \text{س}$ $\text{دهـ} = \text{جا٢س}$

$\text{دق} = \text{دس}$ $\text{هـ} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جتا٢س}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(\text{س} \times -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جتا٢س} - \int -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جتا٢س}\,\text{دس} \right)$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(-\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س}\,\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جا٢س} \right) + \text{جـ}$

سؤال ٤- $\int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{جا٢س}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

"الإرادة تصنع التفوق"

١٠) ∫ س جاس/جتا³س دس

ع = س   ده = جاس/جتا³س

دع = دس   هـ = ∫ جاس/جتا³س دس (تعويض)

ص = جتاس

دص/دس = -جاس ⟸ دس = دص/-جاس ⟸ ∫ جاس/ص³ × دص/-جاس = -∫ ص⁻³ دص

= -ص⁻²/-٢ = ١/٢ص² = ١/٢جتا²س = ½ قا²س

⟸ I = س × ½ قا²س - ∫ ½ قا²س دس = ½س قا²س - ½ ظاس + ج

---

١١) ∫ جا٢س (س + جتا²س) دس = ∫ (جا٢س × س + جا٢س جتا²س) دس

= ∫ (س جا٢س + ٢ جاس جتاس جتا²س) دس

= ∫ س جا٢س دس + ٢∫ جاس جتا³س دس ← نفرض ص = جتاس

دص/دس = -جاس

دس = دص/-جاس

ع = س   ده = جا٢س دس

دع = دس   هـ = -½ جتا٢س

I = س × -½ جتا٢س - ∫ -½ جتا٢س دس + ٢∫ جاس ص³ دص/-جاس

= -½ س جتا٢س + ½ × ½ جا٢س + -٢∫ ص³ دص

= ½ س جتا٢س + ¼ جا٢س - ٢ ص⁴/٤ + ج

= ½ س جتا٢س + ¼ جا٢س - ½ جتا⁴س + ج

---

١٢) ∫ (جاس/س² - جتاس/س) دس = ∫ جاس × س⁻² دس - ∫ جتاس/س دس

ع = جاس   ده = س⁻² دس

دع = جتاس   هـ = س⁻¹/-١ = -١/س

I = جاس × -١/س - ∫ -١/س × جتاس دس - ∫ جتاس/س دس

= -جاس/س + ~~∫ جتاس/س دس~~ - ~~∫ جتاس/س دس~~ = -جاس/س + ج

مثال: اذا كانت ق(١) = قَ(٥) = ٦ ، ق(٥) = قَ(١) = ٢ جد

$\int_{١}^{٥}$ س قً(س) دس

الحل: $\int_{١}^{٥}$ س قً(س) دس

ع = س دهـ = قً(س) دس

دع = دس هـ = قَ(س)

I = س قَ(س) $\Big|_{١}^{٥}$ − $\int_{١}^{٥}$ قَ(س) دس = س قَ(س) $\Big|_{١}^{٥}$ − ق(س) $\Big|_{١}^{٥}$

= (٥×٦ − ١×٢) − (٢ − ٦) = ٣٠ − ٢ + ٤ = ٣٢

مثال: اذا كان ق(١) = ٤ ، ق(−١) = ٣ ، $\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس = ٢٠ نجد:

$\int_{٢}^{٣}$ ٨س قَ(٥ − ٢س) دس

الحل: نفرض ص = ٥ − ٢س ⟸ دص/دس = −٢ ⟸ دس = دص/−٢

⟸ ٢س = ٥ − ص ⟸ س = (٥ − ص)/٢

عندما س = ٢ ⟵ ص = ١

س = ٣ ⟵ ص = −١

$\int_{٢}^{٣}$ ٨س قَ(٥ − ٢س) دس = $\int_{١}^{-١}$ ٨س قَ(ص) دص/−٢ = $\int_{١}^{-١}$ ٨ (٥ − ص)/٢ قَ(ص) دص/−٢

= −٢ $\int_{١}^{-١}$ (٥ − ص) قَ(ص) دس ا جزاء

ع = ٥ − ص دهـ = قَ(ص) دص

دع = − دص هـ = ق(ص)

I = −٢((٥ − ص) × ق(ص) $\Big|_{١}^{-١}$ − $\int_{١}^{-١}$ ق(ص) × − دص

= −٢[٦ × ق(−١) − (٤ × ق(١)) + $\int_{١}^{-١}$ ق(ص) دص

= −٢[٦×٣ − ٤×٤ + (−٢٠)]

= −٢(١٨ − ١٦ − ٢٠) = −٢ × −١٨ = ٣٦

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان ق(١) = ٦ ، $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = ٤$ جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}٢\text{س}\ \text{ق}'(\text{جاس})\,\text{دس}$

الحل: نفرض ص = جاس ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$ ⟸ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٠

س = $\frac{\pi}{2}$ فإن ص = ١

$$\text{I} = \int_{0}^{1} ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\ \text{ق}'(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = ٢\int_{0}^{1} \underbrace{\text{ص}}_{\text{ع}}\ \underbrace{\text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}}_{\text{دهـ}}$$

ع = ص ، دهـ = ق′(ص) دص

دع = دص ، هـ = ق(ص)

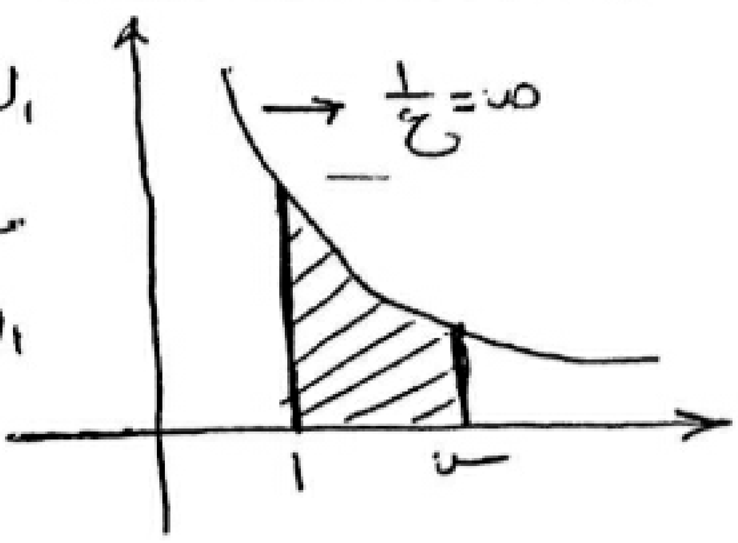
$$\text{I} = ٢\left(\text{ص}\ \text{ق}(\text{ص})\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}\right)$$

$$= ٢(١\times٦ - ٠ - ٤) = ٢\times٢ = ٤$$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

---

* الاقترانات اللوغاريتمية:



الشكل يمثل منحنى ص = $\frac{1}{\text{ع}}$ حيث ع > ٠

مساحة المنطقة المظللة هي $\int_{1}^{\text{س}} \frac{1}{\text{ع}}\,\text{دع}$ ويسمى هذا التكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \int_{1}^{\text{س}} \frac{1}{\text{ع}}\,\text{دع}$

تسمى هـ العدد النيبيري وهو غير نسبي قيمته تقريباً ٢,٧ وهي قيمة تمثل مساحة وحدة واحدة وبذلك فإننا نحتاج الى اللوغاريتم لايجاد $\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

س: أهم خواص اللوغاريتم:

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = ٠$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢} = ٢$ -- $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ن}} = \text{ن}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}\times\text{ب} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}^{\text{س}} = \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}$

نظرية (١): إذا كانت ص = $لو_{هـ}$ س فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

(٢): إذا كانت ص = $لو_{هـ}$ ق(س) أو ص = $لو_{هـ}$ |ق(س)| فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{ق'(س)}{ق(س)}$

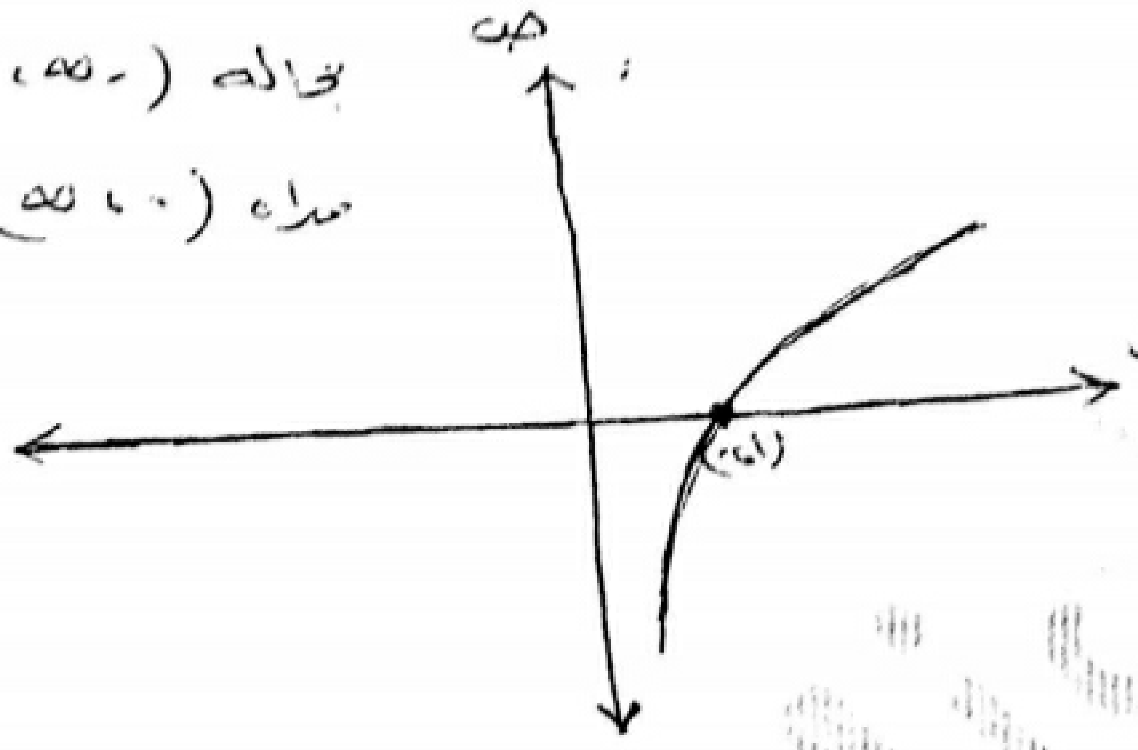
- التمثيل البياني لاقتران اللوغاريتم:

ص = ق(س) = $لو_{2}$ س

س	ص
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣
$\frac{1}{2}$	-١
$\frac{1}{4}$	-٢
$\frac{1}{8}$	-٣

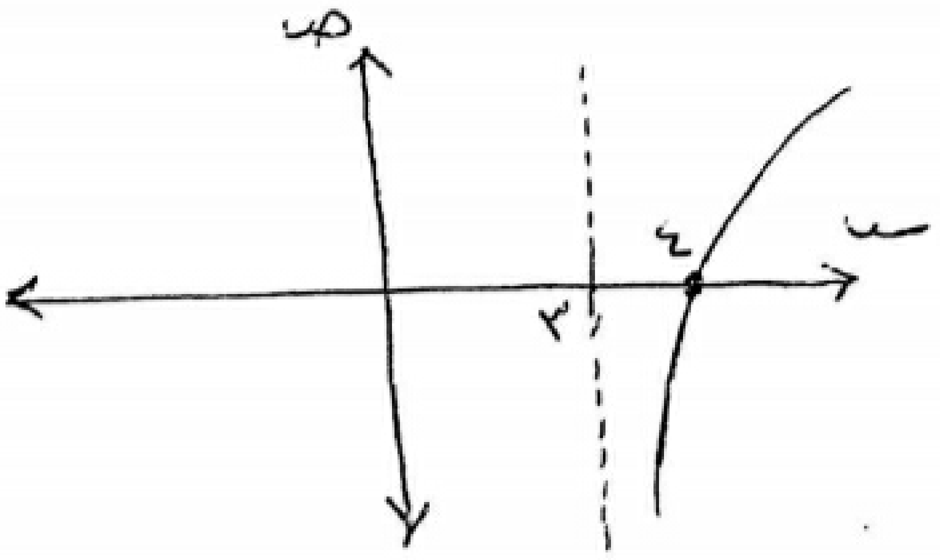
مجاله $(-\infty، \infty)$

مداه $(٠، \infty)$



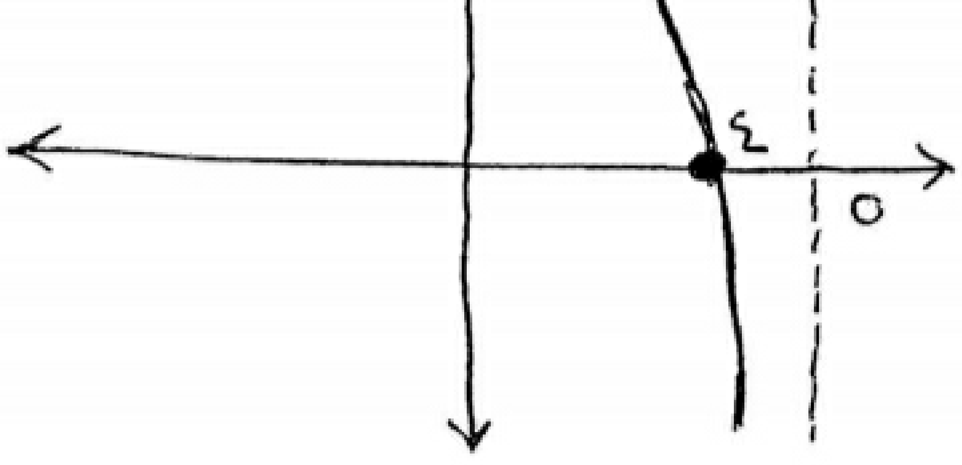
ص = $لو_{2}$(س-٣) ⇐ س-٣ > ٠ ⇐ س > ٣ ⇐ س-٣ = ١

⇐ $\boxed{س = ٤}$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات



ص = $لو_{2}$(٥-س) ⇐ ٥-س > ٠ ⇐ ٥ > س ⇐ ٥-س = ١

⇐ $\boxed{س = ٤}$



مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

① $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{٣س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣س}} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$

② $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٥س}) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٤س} + \text{٥}}{\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٥س}}$

③ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

④ $\text{ص} = \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

مثال: اذا كانت $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{جـ}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل: $\text{ق(س)} = \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \text{١} = \text{١} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي:

① $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٥س}^{\text{٢}} + \text{١}} \Leftarrow \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{٣}} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٥س}^{\text{٢}} + \text{١})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}}} - \frac{\text{١٠س}}{\text{٥س}^{\text{٢}} + \text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{س}} - \frac{\text{١٠س}}{\text{٥س}^{\text{٢}} + \text{١}}$

② $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٩س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٩س})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٩س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٩}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٩س}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٩س}}$

③ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})^{\text{٥}}}{(\text{٧} - \text{٢س})^{\text{٤}}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})^{\text{٥}} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٧} - \text{٢س})^{\text{٤}}$

$= \text{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) - \text{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٧} - \text{٢س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٥} \times \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} - \frac{\text{٤} \times -\text{٢}}{\text{٧} - \text{٢س}} = \frac{\text{١٠س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} + \frac{\text{٨}}{\text{٧} - \text{٢س}}$

④ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{٣س} = \text{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}\,\text{٣س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢} \times \text{قا}^{\text{٢}}\,\text{٣س} \times \text{٣}}{\text{ظا}\,\text{٣س}} = \text{٦}\,\frac{\text{قا}^{\text{٢}}\,\text{٣س}}{\text{ظا}\,\text{٣س}}$

مثال: جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي:

① $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$

الحل: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}$

② $\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣} \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$

* $\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١}^{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ١ - ٠ = ١$

② $\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{٥}{\text{س}}\,\text{ءس} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١}^{\text{هـ}^{٣}} = ٥\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٣} - \text{لو}_{\text{هـ}}١) = ٥\,(٣ - ٠) = ١٥$

③ $\int_{٥}^{٤٥} \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ءس} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١٥}^{٤٥} = ٢\,(\text{لو}_{\text{هـ}}٤٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}١٥) = ٢\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٤٥}{١٥}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

④ $\int \frac{٣\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{٣\text{س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int ٣ + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= ٣\text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

⑤ $\int \frac{١}{\text{أس}+\text{ب}}\,\text{ءس} \Rightarrow$ نفرض $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب} \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ} \Rightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$

$\Rightarrow \int \frac{١}{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{أ}} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{أس}+\text{ب}| + \text{جـ}$ (نتيجة)

⑥ $\int \frac{٥}{٤\text{س}+٣}\,\text{ءس} = \frac{٥}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٤\text{س}+٣| + \text{جـ}$

⑦ $\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{٣-٢\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{٨}{-٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣-٢\text{س}|\Big|_{٢}^{٣} = -٤\,(\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}١) = -٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة يعطى بالعلاقة $\frac{٧}{٢\text{س}-٣}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٢، ٥) اكتب قاعدة الاقتران ق(س)

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{٧}{٢\text{س}-٣} \Rightarrow \text{ق}(\text{س}) = \int \frac{٧}{٢\text{س}-٣}\,\text{ءس} = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-٣| + \text{جـ}$

نلاحظ: $\text{ق}(٢) = ٥ \Rightarrow ٥ = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ + \text{جـ} \Rightarrow ٠ + \text{جـ} = ٥ \Rightarrow \boxed{\text{جـ} = ٥}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-٣| + ٥$

* **نظرية** : $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

مثال ٤ : $\int \frac{٣\text{س}^٢+٥}{\text{س}^٣+٥\text{س}+٦}\,\text{دس}$ البسط هنا مشتقة المقام $= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢+٥\text{س}+٦| + \text{جـ}$

---

② $\int (\text{ظتاس} + \text{ظاس})\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

---

③ $\int \frac{٤(١+\text{ظا}^٢\text{س})}{\text{ظاس}}\,\text{دس} = \int \frac{٤\,\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{دس} = ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{جـ}$

---

④ $\int \frac{٥}{\text{ظاس}} + \frac{٢\,\text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{دس} = \int ٥\,\text{ظتاس} + ٢\,\text{ظاس}\,\text{دس}$

$= \int ٥\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + ٢\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

---

⑤ $\int \frac{\text{س}^٢+٥}{\text{س}^٣+١٥\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\int \frac{٣(\text{س}^٢+٥)}{(\text{س}^٣+١٥\text{س})} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣+١٥\text{س}| + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{ظتا}٣\text{س}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\int \frac{٣\,\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}}\,\text{دس}$ (ضربنا البسط والمقام في ٣)

$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}٣\text{س}| + \text{جـ}$

---

⑦ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٥-٣\,\text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$　　نفرض $\text{ص} = ٥-٣\,\text{جتا}^٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٦\,\text{جتاس} \times -\text{جاس}$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٦\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$　　عندما س = ٠ فإنه ص = ٢
س = $\frac{\pi}{٢}$ فإنه ص = ٥

$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} \frac{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{٦\,\text{جاس}\,\text{جتاس}} = \frac{١}{٣}\int_{٢}^{٥} \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|\Big|_{٢}^{٥} = \frac{١}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢)$

٨) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+1}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{3}+1} \times 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{2\text{ص}}$

$\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^{2}}{\text{ص}^{3}+1}\,\text{دص} = \frac{2}{3}\int \frac{3\text{ص}^{2}}{\text{ص}^{3}+1}\,\text{دص}$ (ضربنا في ×٣)

$= \frac{2}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}^{3}+1| + \text{ج} = \frac{2}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|(\sqrt{\text{س}})^{3}+1| + \text{ج}$

٩) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{7-\text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ص}}{7-\text{ص}^{3}\times\text{ص}} \times 3\text{ص}^{2}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \Leftarrow$

$\text{س} = \text{ص}^{3}$

$\text{دس} = 3\text{ص}^{2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{3\text{ص}^{3}}{7-\text{ص}^{4}}\,\text{دص} = \frac{3}{-4}\int \frac{-4\text{ص}^{3}}{7-\text{ص}^{4}}\,\text{دص}$

$= \frac{-3}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|7-\text{ص}^{4}| + \text{ج}$

١٠) $\int_{0}^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{س}+\text{هـ}} = \int_{0}^{\text{هـ}} \frac{1}{\text{س}+\text{هـ}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{هـ}|\Big|_{0}^{\text{هـ}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} 2\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{2\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

١١) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}(1+\sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ---- ثم نكمل

١٢) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$ بالأجزاء

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \quad \text{دو} = \text{دس}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \quad \text{و} = \text{س}$

$\text{I} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{ج}$

* ملاحظة : اذا وجد لو_هـ س داخل التكامل نستخدم التعويض إذا وجدت المشتقة واذا لم توجد نستخدم الأجزاء ويكون لو_هـ هو م

١٣) $\int \text{س}^{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \quad \text{دو} = \text{س}^{3}\,\text{دس}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \quad \text{و} = \frac{\text{س}^{4}}{4}$

ثم نكمل ---

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

(١٤) $\int \underbrace{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{د س}}_{\text{د هـ}} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} \times \text{س} - \int \text{س} \times 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 2\int \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{د س}}_{\text{د هـ}}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}\right)$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 2(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}) + \text{جـ}$

---

(١٥) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{د س}$　　نفرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Rightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}} \Rightarrow \text{د س} = \text{س د ص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}}{2} + \text{جـ}$

---

(١٦) $\int \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{د س}$　　نفرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Rightarrow \text{د س} = \text{س د ص}$

$= \int \frac{1}{\text{س ص}} \times \text{س د ص} = \int \frac{1}{\text{ص}}\,\text{د ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

---

(١٧) $\int \text{ظتا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} \Rightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\text{د س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\,\text{د ص}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتا س}}}{\cancel{\text{جا س}}} \times \text{ص} \times \frac{\cancel{\text{جا س}}}{\cancel{\text{جتا س}}}\,\text{د ص} = \int \text{ص د ص}$

$= \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س})^{2}}{2} + \text{جـ}$

---

(١٨) $\int \underbrace{\text{جتا س}}_{\text{د هـ}}\,\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}}_{\text{ع}}\,\text{د س}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}$　　$\text{د هـ} = \text{جتا س د س}$

$\text{د ع} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\,\text{د س}$　　$\times$　　$\text{هـ} = \text{جا س}$

$\therefore\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} \times \text{جا س} - \int \text{جا س} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\,\text{د س}$

$= \text{جا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} - \int \text{جتا س د س} = \text{جا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} - \text{جا س} + \text{جـ}$

---

(١٩) $\int \underbrace{\text{قا}^{2}\text{س}}_{\text{د هـ}}\,\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا س}}_{\text{ع}}\,\text{د س}$　　————　　ثم نكمل

⑳ $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا س}\ \text{د س}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظا س} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$$= \int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{د ص} = \int \underbrace{(١+\text{ظا}^{٢}\text{س})}_{\text{د هـ}} \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{ع}}\ \text{د ص}$$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad \text{د هـ} = ١ + \text{ظا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{ص}^{٢}$

$\text{د ع} = \frac{١}{\text{ص}}\text{د ص}$ $\qquad \text{هـ} = \text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$

$$\text{آ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \times \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) - \int \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \times \frac{١}{\text{ص}}\ \text{د ص}$$

$$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int ١ + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣}\ \text{د ص}$$

$$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٩}\right) + \text{جـ}$$

$$= \left(\text{ظا س} + \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا س} - \left(\text{ظا س} + \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٩}\right) + \text{جـ}$$

㉑ $\int \underbrace{\text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ع}}\ \underbrace{\text{د س}}_{\text{د هـ}}$

$\text{ع} = \text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad \text{د هـ} = \text{د س}$

$\text{د ع} = \text{جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{د س}$ $\qquad \text{هـ} = \text{س}$

$$\text{آ} = \text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{د س}$$

$$= \text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underbrace{\text{جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{هـ}}\ \underbrace{\text{د س}}_{\text{د هـ}}$$

$\text{ع} = \text{جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad \text{د هـ} = \text{د س}$

$\text{د ع} = -\text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{د س}$ $\qquad \text{هـ} = \text{س}$

$$\text{آ} = \text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \left(\text{جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \cancel{\text{س}} \times -\text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\cancel{\text{س}}}\ \text{د س}\right)$$

$$= \text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \boxed{\text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س د س}}$$ التكامل الأصلي

$$\Leftarrow ٢ \int \text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س د س} = \text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\therefore \int \text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س د س} = \frac{\text{س جا لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س جتا لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٢}$$

(٢٢) $\int ٤س^{٢}\,\text{لو}_{هـ}س\,ءس$ $ص = \text{لو}_{هـ}س$ $ءهـ = ٤س^{٢}\,ءس$

$ءص = \frac{١}{س}\,ءس \xrightarrow{\times} هـ = \frac{٤}{٣}س^{٣}$ $-$

$أ = \text{لو}_{هـ}س \times \frac{٤}{٣}س^{٣} - \int \frac{٤}{٣}س^{٣} \times \frac{١}{س}\,ءس$

$= \frac{٤}{٣}س^{٣}\,\text{لو}_{هـ}س - \int \frac{٤}{٣}س^{٢}\,ءس = \frac{٤}{٣}س^{٣}\,\text{لو}_{هـ}س - \frac{٤}{٣} \times \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

$= \frac{٤}{٣}س^{٣}\left(\text{لو}_{هـ}س - \frac{١}{٣}\right) + جـ$

---

(٢٣) $\int \frac{٢س + ظاس}{جتا^{٢}س}\,ءس = \int \frac{٢س}{جتا^{٢}س} + \frac{ظاس}{جتا^{٢}س}\,ءس$

$= \int \underbrace{٢س}_{ص}\,\underbrace{قا^{٢}س}_{ءهـ} + \underbrace{ظاس}_{ص}\,قا^{٢}س\,ءس$

$= \int ٢س\,قا^{٢}س\,ءس + \int ص\,\cancel{قا^{٢}س}\,\frac{ءص}{\cancel{قا^{٢}س}}$

$ص = ظاس$

$\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}س$

$ءس = \frac{ءص}{قا^{٢}س}$

$ص = ٢س$ $ءهـ = قا^{٢}س\,ءس$

$ءص = ٢\,ءس \xrightarrow{\times} هـ = ظاس$ $-$

$\therefore \int = ٢س\,ظاس - \int ٢\,ظاس\,ءس + \int ص\,ءص$

$= ٢س\,ظاس - \int ٢\,\frac{جاس}{جتاس}\,ءس + \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ$

$= ٢س\,ظاس + ٢\,\text{لو}_{هـ}|جتاس| + \frac{ظا^{٢}س}{٢} + جـ$

---

(٢٤) $\int ٦س\,\text{لو}_{هـ}\frac{٣}{\sqrt{س}}\,ءس = \int ٦س\left(\text{لو}_{هـ}٣ - \text{لو}_{هـ}\sqrt{س}\right)ءس = \int ٦س\left(\text{لو}_{هـ}٣ - \frac{١}{٢}\text{لو}_{هـ}س\right)ءس$

$= \int ٦س\,\text{لو}_{هـ}٣ - \underbrace{٣س}_{ءهـ}\,\underbrace{\text{لو}_{هـ}س}_{ص}\,ءس = ٣س^{٢}\,\text{لو}_{هـ}٣ - \left(\text{لو}_{هـ}س \times \frac{٣س^{٢}}{٢} - \int \frac{٣س^{٢}}{٢} \times \frac{١}{س}\,ءس\right)$

$= ٣س^{٢}\,\text{لو}_{هـ}٣ - \frac{٣س^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{هـ}س + \int \frac{٣}{٢}س\,ءس$

$= ٣س^{٢}\,\text{لو}_{هـ}٣ - \frac{٣}{٢}س^{٢}\,\text{لو}_{هـ}س + \frac{٣}{٤}س^{٢} + جـ$

(٢٥) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}\ \text{دس} = \int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \int (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$= \int \underbrace{(١ - \text{ص}^{٢})}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{م}}\ \text{دص}$

$\text{ص} = \text{جا س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{دهـ} = ١ - \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$\text{دم} = \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} \qquad \text{هـ} = \text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$

$\text{I} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) - \int \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \times \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(١ - \frac{\text{ص}^{٢}}{٣}\right) \text{دص} = \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٩}\right) + \text{جـ}$

$= \left(\text{جا س} - \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} - \left(\text{جا س} - \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٩}\right) + \text{جـ}$

مثال: جد التكاملات التالية:

(١) $\int \frac{\text{س قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{س قا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$= \int \underbrace{\frac{١}{\text{س}}}_{\text{م}}\ \underbrace{\text{قا}^{٢}\text{س}}_{\text{هـ}}\ \text{دس} - \int \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ظا س} - \int \text{ظا س} \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}} - \int \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$= \frac{١}{\text{س}}\ \text{ظا س} + \int \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}} - \int \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ظا س} + \text{جـ}$

(٢) $\int ٢\ \text{جا س جتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}\ \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{جا س}$ ثم نكمل بالأجزاء

(٣) $\int \frac{\text{ظا س}}{١ + \text{قا س}}\ \text{دس} = \int \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{١ + \frac{١}{\text{جتا س}}}\ \text{دس} = \int \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{\frac{\text{جتا س} + ١}{\text{جتا س}}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س} + ١}\ \text{دس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا س} + ١| + \text{جـ}$ (لأن البسط مشتقة المقام)

(٤) $\int \text{قا س}\ \text{دس} = \int \frac{\text{قا س}\ (\text{قا س} + \text{ظا س})}{\text{قا س} + \text{ظا س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قا س ظا س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}}\ \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا س} + \text{ظا س}| + \text{جـ}$

(٥) $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\ \text{دس} = \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}} - \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

ونغير الحدود

ثم نكمل - - -

⑥ $\int_{1}^{\text{هـ}^{3}} \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{دس}$ نفرض ص $= 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ نغير الحدود ونكمل ——

⑦ $\int \frac{4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}^2+5}}{\text{س}^2+5}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+5)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+5}$

$\text{دس} = \frac{(\text{س}^2+5)\,\text{دص}}{2\text{س}}$

$= \int \frac{4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+5)^{\frac{1}{2}}}{\text{س}^2+5}\,\text{دس} = \int \frac{2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+5)}{\text{س}^2+5}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{2\text{س}}\ \text{ص}}{\cancel{\text{س}^2+5}} \cdot \frac{\cancel{(\text{س}^2+5)}}{\cancel{2\text{س}}}\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$

$= \frac{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+5)\right)^2}{2} + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}{\sqrt{\text{س}+2}}\,\text{دس}$ نفرض $\sqrt{\text{س}+2} = \text{ص}$ ثم نكمل بالأجزاء ——

⑨ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}+2}\,\text{دس} = \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)^{\frac{1}{2}}}{\text{س}+2}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}{\text{س}+2}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}+2} \Leftarrow \text{دس} = (\text{س}+2)\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+2}}\,\cancel{(\text{س}+2)}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)\right)^2 + \text{جـ}$

مثال٤ اذا كانت ع'(س) × جاس − ع(س) × جتاس = ٠ ، وكان $\text{ع}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ جد $\text{ع}(\frac{\pi}{4})$

الحل: ع'(س) × جاس = ع(س) × جتاس

$\Leftarrow \frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \Leftarrow \int \frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ} \xLeftarrow{\text{لكن}} \text{ع}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2} = \text{لو}_{\text{هـ}}1 + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2} = \text{جـ}}$ $\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع}(\frac{\pi}{4}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\frac{\pi}{4} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع}(\frac{\pi}{4}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2} = \text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2} = \text{صفر}$

$\therefore \text{ع}(\frac{\pi}{4}) = \text{هـ}^{0} = 1$

مثال : يتحرك جسم بحيث أن سرعته $ع = \frac{لو_{هـ} ن}{ن}$ فإذا قطع الجسم مسافة ٤م بعد ١ث ، جد المسافة المقطوعة بعد مرور $هـ^{٢}$ من الثواني .

الحل : $ع = \frac{دف}{دن} = \frac{لو_{هـ} ن}{ن} \Leftarrow دف = \frac{لو_{هـ} ن}{ن} دن$

$\Leftarrow \int دف = \int \frac{لو_{هـ} ن}{ن} دن$

$\Leftarrow ف = \int \frac{ص}{\cancel{ن}} \times \cancel{ن} دص = \int ص دص = \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ$

$\Leftarrow ف = \frac{(لو_{هـ} ن)^{٢}}{٢} + جـ \overset{لكن}{\Leftarrow} ف(١) = ٤$

$\therefore ٤ = \frac{(لو_{هـ} ١)^{٢}}{٢} + جـ \Leftarrow ٤ = ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

$\therefore ف = \frac{(لو_{هـ} ن)^{٢}}{٢} + ٤ \Leftarrow ف(هـ^{٢}) = \frac{(لو_{هـ} هـ^{٢})^{٢}}{٢} + ٤ = \frac{٤}{٢} + ٤ = ٦$

$ص = لو_{هـ} ن$

$\frac{دص}{دن} = \frac{١}{ن}$

$دن = ن دص$

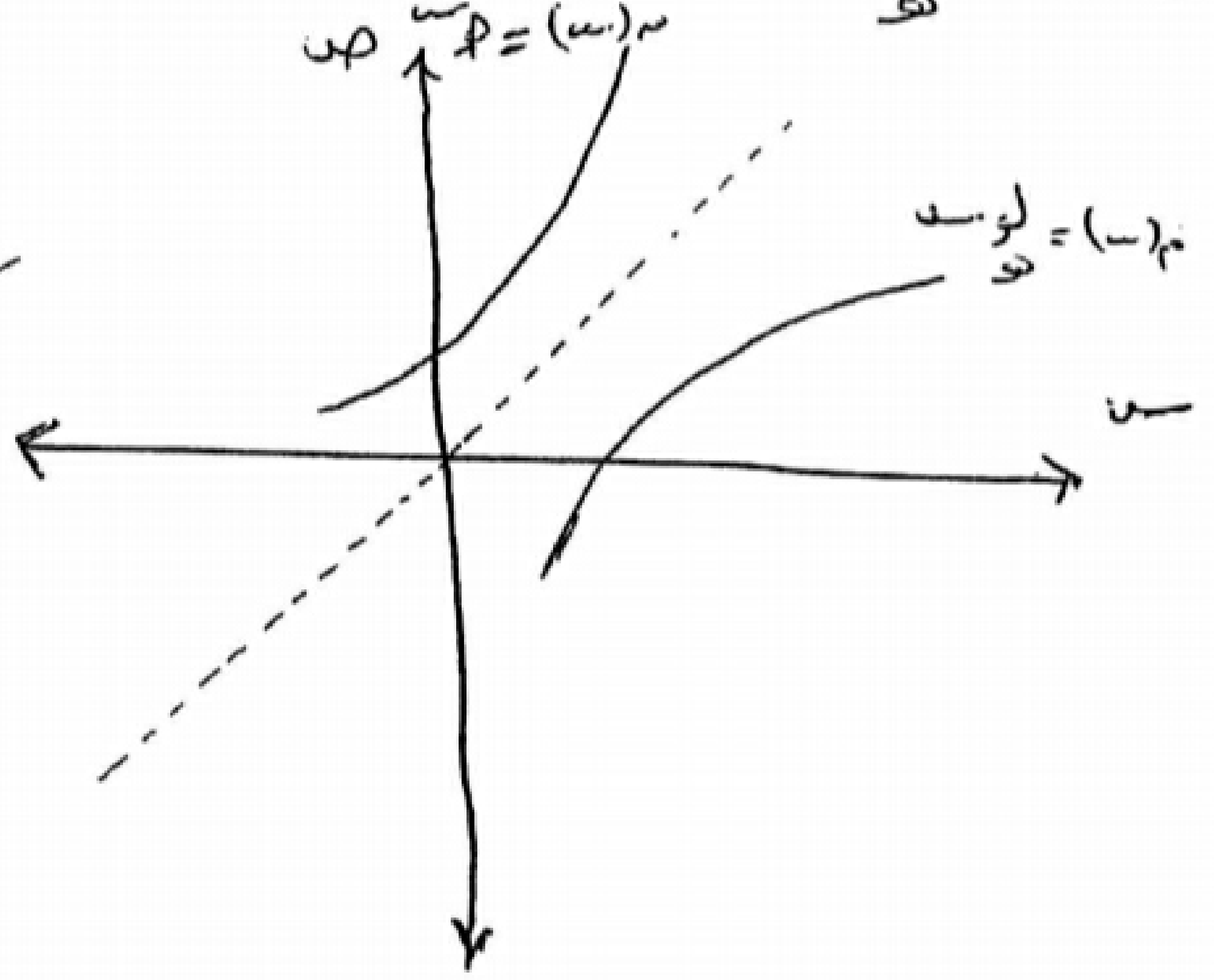
---

* الاقتران الأسي : هو الاقتران العكسي للاقتران $م(س) = لو_{هـ} س$

$ص = لو_{هـ} س$ فإن $س = هـ^{ص}$

* $هـ^{٠} = ١$ ، $هـ^{أ} \times هـ^{ب} = هـ^{أ+ب}$ ، $(هـ^{أ})^{ب} = هـ^{أب}$ ، $\frac{هـ^{أ}}{هـ^{ب}} = هـ^{أ-ب}$

ويكون $لو_{هـ} هـ^{ق(س)} = ق(س)$ وأيضاً $هـ^{لو_{هـ} ق(س)} = ق(س)$



* **نظرية:** اذا كانت $ص = هـ^{س}$ فإن $\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

البرهان: - $ص = هـ^{س} \Leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{س} = س$ نشتق الطرفين

$\Leftarrow \frac{1}{ص} \frac{دص}{دس} = ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ص = هـ^{س}$ #

$\boxed{\text{نتيجة}}$: اذا كانت $ص = هـ^{ق(س)}$ فإن $\frac{دص}{دس} = ق'(س) \times هـ^{ق(س)}$

مثال: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي:

① $ص = ٥س^{٢} + ٢هـ^{جاس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ١٠س + ٢جتاس\, هـ^{جاس}$

② $س = هـ^{ص} \Leftarrow ١ = هـ^{ص} \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{هـ^{ص}} = \frac{١}{س}$

③ $ص = \sqrt{هـ^{٤س^{٢}}} \Leftarrow ص = \left(هـ^{٤س^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} = هـ^{٢س^{٢}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٤س\, هـ^{٢س^{٢}}$

④ $ق(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(٢س+١)$ جد $ق'(٠)$

الحل: $ق'(س) = جتاس\, هـ^{جاس} + \frac{٢}{٢س+١} \Leftarrow ق'(٠) = ١ \times هـ^{٠} + \frac{٢}{٠+١} = ١+٢ = ٣$

⑤ $ق(س) = هـ^{٢لو_{هـ} س^{٢}}$ جد $ق'(-\frac{١}{٢})$

الحل: $ق(س) = هـ^{لو_{هـ} س^{٤}} = س^{٤} \Leftarrow ق'(س) = ٤س^{٣}$

$ق'(-\frac{١}{٢}) = ٤ \times \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} = ٤ \times -\frac{١}{٨} = -\frac{١}{٢}$

مثال: $\int ق(س)\, دس = هـ^{٢س} + لو_{هـ}(جتاس + ٢س) + جـ$ جد $ق(٠)$

الحل: $ق(س) = ٢هـ^{٢س} + \frac{-جاس + ٢}{جتاس + ٢س} \Leftarrow ق(٠) = ٢ \times ١ + \frac{٠+٢}{١+٠} = ٢+٢ = ٤$

مثال: اذا كان $\int ق(س)\, دس = هـ^{س^{٢}} + لو_{هـ} جاس + جـ$ جد $ق'(س)$

الحل: $ق(س) = ٢س\, هـ^{س^{٢}} + \frac{جتاس}{جاس} = ٢س\, هـ^{س^{٢}} + ظتاس$

$ق'(س) = ٢س \times ٢س\, هـ^{س^{٢}} + هـ^{س^{٢}} \times ٢ + - قتا^{٢}س$

$= ٤س^{٢} هـ^{س^{٢}} + ٢هـ^{س^{٢}} - قتا^{٢}س$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م س}}$ وكانت $\text{ص}'' - ٣\text{ص}' + ٢\text{ص} = ٠$ جد م

الحل: $\text{ص}' = \text{م هـ}^{\text{م س}} \Leftarrow \text{ص}'' = \text{م}^٢\text{هـ}^{\text{م س}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' - ٣\text{ص}' + ٢\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م}^٢\text{هـ}^{\text{م س}} - ٣\text{م هـ}^{\text{م س}} + ٢\text{هـ}^{\text{م س}} = ٠$

$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{م س}}\underbrace{(\text{م}^٢ - ٣\text{م} + ٢)}_{\text{عبارة تربيعية}} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{\text{م س}}(\text{م} - ٢)(\text{م} - ١) = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٢ \text{ ، } \text{م} = ١$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = ٥^{٣\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \frac{١}{٣}$

نشتقه

الحل: نأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}٥^{٣\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٣\text{س لو}_{\text{هـ}}٥ \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = (٣\text{ لو}_{\text{هـ}}٥)(\text{س})$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{ لو}_{\text{هـ}}٥ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{ لو}_{\text{هـ}}٥ \times \text{ص} = ٣\text{ لو}_{\text{هـ}}٥ \times ٥^{٣\text{س}}$

وعند $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٣}}$ $= ٣\text{ لو}_{\text{هـ}}٥ \times ٥^{٣\times\frac{١}{٣}} = ١٥\text{ لو}_{\text{هـ}}٥$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ $\boxed{\text{عندما س} = ٠}$

الحل: عند $\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = ٠ + \text{ص} \Leftarrow ١ = \text{ص}$ نشتق

$\text{هـ}^{\text{س ص}} \times \left(\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ١\right) = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تعوض $\text{س} = ٠ \text{ ، } \text{ص} = ١$

$\text{هـ}^{٠}\left(٠ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ١\right) = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow ١ = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

مثال: اذا كان $\text{م(س)} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\text{ لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ وكان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\text{ لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$

أثبت أن م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) ثم جد $\int_{١}^{٢}\text{ق(س) دس}$

الحل: $\text{م}'\text{(س)} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times ٢\text{هـ}^{٢\text{س}} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\text{ لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) = \text{ق(س)}$

∴ م(س) اقتران بدائي لـ ق(س)

$\Leftarrow \int_{١}^{٢}\text{ق(س) دس} = \text{م(٢)} - \text{م(١)}$

$= \text{هـ}^{٤}\text{ لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{هـ}^{٢}\text{ لو}_{\text{هـ}}١ = \text{هـ}^{٤}\text{ لو}_{\text{هـ}}٢$

مثال: اذا كانت $\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{جاس}$ أثبت أن $\text{ص}'' + (\text{ص}')^{٢} + ١ = ٠$

الحل: $\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{جاس}$ نشتق $\Leftarrow$ $\text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{ص}' = \text{جتاس}$ نشتق مرة أخرى

$$\text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{ص}'' + \text{ص}' \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{ص}' = -\text{جاس}$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{ص}'' + \text{هـ}^{\text{ص}} \times (\text{ص}')^{٢} + \text{جاس} = ٠$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{ص}'' + \text{هـ}^{\text{ص}} \times (\text{ص}')^{٢} + \text{هـ}^{\text{ص}} = ٠$$ نقسم على $\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\Leftarrow \text{ص}'' + (\text{ص}')^{٢} + ١ = ٠$$

$$* \boxed{\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}}$$

مثال: $\int_{٠}^{٢} ٥\text{س}^{٣} + ٤\text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس} = \frac{٥\text{س}^{٤}}{٤} + ٤\text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{٠}^{٢}$

$$= \left(٥ \times \frac{١٦}{٤} + ٤\text{هـ}^{٢}\right) - \left(٠ + ٤ \times ١\right) = ٢٠ + ٤\text{هـ}^{٢} - ٤ = ١٦ + ٤\text{هـ}^{٢}$$

$$* \boxed{\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} \, \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}} \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{جـ}}$$

مثال: ١) $\int ٨\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{٤}} \, \text{دس} = ٨ \times \frac{١}{(\frac{١}{٤})} \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{٤}} + \text{جـ} = ٣٢\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{٤}} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{٥ + ٢\text{هـ}^{٧\text{س}}}{\text{هـ}^{٤\text{س}}} \, \text{دس} = \int \frac{٥}{\text{هـ}^{٤\text{س}}} + \frac{٢\text{هـ}^{٧\text{س}}}{\text{هـ}^{٤\text{س}}} \, \text{دس} = \int ٥\text{هـ}^{-٤\text{س}} + ٢\text{هـ}^{٣\text{س}} \, \text{دس}$

$$= \frac{٥}{-٤} \text{هـ}^{-٤\text{س}} + \frac{٢}{٣} \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جـ}$$

٣) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{هـ}-١} \, \text{دس} = \frac{١}{\text{هـ}-١} \text{س} \Big|_{١}^{\text{هـ}^{٢}} = \frac{١}{\text{هـ}-١} (\text{هـ}^{٢} - ١) = \frac{١}{\cancel{\text{هـ}-١}} \cancel{(\text{هـ}-١)}(\text{هـ}+١)$

$$= \text{هـ} + ١$$

٤) $\int \text{هـ}^{٣\text{س}} \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \, \text{دس} = \int \text{هـ}^{٣\text{س}} \sqrt{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^{٢}} \, \text{دس}$

$$= \int \text{هـ}^{٣\text{س}} |\text{هـ}^{\text{س}} + ١| \, \text{دس} = \int \text{هـ}^{٣\text{س}} (\text{هـ}^{\text{س}} + ١) \, \text{دس} = \int \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{هـ}^{٣\text{س}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{هـ}^{٤\text{س}} + \frac{١}{٣} \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جـ}$$

⑤ $\int \text{هـ}^{\text{٥س}} + \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{هـ}^{\text{٢س+٤}}}}\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{٥س}} + \frac{\text{١}}{(\text{هـ}^{\text{٢س+٤}})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}\ \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{٥س}} + \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س+٢}}}\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{٥س}} + \text{هـ}^{\text{-س-٢}}\ \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{هـ}^{\text{٥س}} + \text{-١هـ}^{\text{-س-٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{هـ}^{\text{٥س}} - \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س+٢}}} + \text{جـ}$

⑥ $\int_{\text{-٣}}^{\text{٠}} \sqrt[\text{٣}]{\text{هـ}^{\text{٦-س}}}\ \text{دس} = \int_{\text{-٣}}^{\text{٠}} (\text{هـ}^{\text{٦-س}})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{دس} = \int_{\text{-٣}}^{\text{٠}} \text{هـ}^{\text{٢-}\frac{\text{س}}{\text{٣}}}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{(\text{-}\frac{\text{١}}{\text{٣}})}\text{هـ}^{\text{٢-}\frac{\text{س}}{\text{٣}}}\Big|_{\text{-٣}}^{\text{٠}} = (\text{-٣هـ}^{\text{٢}}) - (\text{-٣هـ}^{\text{٣}}) = \text{-٣هـ}^{\text{٢}} + \text{٣هـ}^{\text{٣}}$

$= \text{٣هـ}^{\text{٢}}(\text{هـ-١})$

سؤال: اذا كان $\text{س هـ}^{\text{ص}} - \text{ص}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{٥س - ص + ٤}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال: ① $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{لوهـ هـ}^{\text{٢س}}\ \text{دس} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢س دس} = \text{س}^{\text{٢}}\Big|_{\text{١}}^{\text{٢}} = \text{٤-١} = \text{٣}$

② $\int_{\text{٠}}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥}} \text{هـ}^{\text{س}}(\text{٣ - ٤هـ}^{\text{س}})\ \text{دس} = \int_{\text{٠}}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥}} (\text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤هـ}^{\text{٢س}})\ \text{دس} = \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٢هـ}^{\text{٢س}}\Big|_{\text{٠}}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥}}$

$= (\text{٣هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٥}} - \text{٢هـ}^{\text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{٥}}) - (\text{٣×١ - ٢×١})$

$= (\text{٣×٥ - ٢هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٢٥}}) - (\text{١}) = \text{١٥} - (\text{٢×٢٥}) - \text{١} = \text{-٣٦}$

مثال: $\int \text{٦هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ص}} \Leftarrow \text{دس} = \text{٢ص دص}$

$\Leftarrow \int \text{٦هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \text{٦هـ}^{\text{ص}} \times \text{٢ص دص} = \int \text{١٢ص هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$ أجزاء

$\text{م} = \text{١٢ص} \qquad \text{دو} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{دم} = \text{١٢ دص} \qquad \text{و} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{I} = (\text{١٢ص})(\text{هـ}^{\text{ص}}) - \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{١٢ دص} = \text{١٢ص هـ}^{\text{ص}} - \text{١٢هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$\therefore \text{I} = \text{١٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - \text{١٢هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

مثال: ① $\int (\text{س}^{٢}+٤)\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١٢\text{س}}\,\text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} + ١٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} + ١٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}+١٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^{٢}+٤)}$

$= \int \cancel{(\text{س}^{٢}+٤)}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{٣\cancel{(\text{س}^{٢}+٤)}}$

$= \frac{١}{٣}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١٢\text{س}} + \text{جـ}$

② $\int^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{جاس}$ ونغير الحدود ثم نكمل ـــ

③ $\int \text{جا٢س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

$= \int \cancel{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \text{جـ}$

④ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)^{٢}} = \int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{ص}^{٢}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$= \int \text{ص}^{-٢}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{-١}}{-١} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{هـ}^{\text{س}}+١} + \text{جـ}$

سؤال: جد $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$ ـــ (دوري)

مثال: جد التكاملات التالية :

① $\int_{٠}^{٢} \underbrace{٣س}_{م}\, \underbrace{هـ^{\frac{١}{٢}س+١}}_{دهـ}\, دس = ٣س \times ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \times ٣\, دس$

$= ٦س\, هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢} - ٦ \times ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢}$

$= (١٢هـ^{٢} - ٠) - (١٢هـ^{٢} - ١٢هـ) = ١٢هـ$

② $\int جا٢س\, هـ^{جاس} .\, دس = \int ٢جاس\, جتاس\, هـ^{جاس}\, دس$ نفرض ص = جاس

ثم نكمل بالأجزاء ———

③ $\int قا^{٢}س\, هـ^{\sqrt{ظاس}}\, دس$ ——— نفرض $ص = \sqrt{ظاس} \Leftarrow ص^{٢} = ظاس$

ثم نكمل بالأجزاء ——

④ $\int س^{٥}\, هـ^{س^{٢}}\, دس = \int س^{٥}\, هـ^{ص}\, \frac{دص}{٢س}$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٤}\, هـ^{ص}\, دص = \frac{١}{٢}\int \underbrace{ص^{٢}}_{م}\, \underbrace{هـ^{ص}}_{دهـ}\, دص$

$ص = س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$م = ص^{٢} \times دهـ = هـ^{ص}\, دص$

$دم = ٢ص\, دص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$I = \frac{١}{٢}\int \left(ص^{٢} \times هـ^{ص} - \int هـ^{ص} \times ٢ص\, دص\right) = \frac{١}{٢}\left(ص^{٢}هـ^{ص} - \int \underbrace{٢ص}_{م}\, \underbrace{هـ^{ص}\, دص}_{دهـ}\right)$

$م = ٢ص \times دهـ = هـ^{ص}\, دص$

$دم = ٢\, دص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$أ = \frac{١}{٢}\left(ص^{٢}هـ^{ص} - \left(٢ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص}\, ٢\, دص\right)\right)$

$أ = \frac{١}{٢}\left(ص^{٢}هـ^{ص} - ٢ص\, هـ^{ص} + ٢هـ^{ص}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢}\left(س^{٤}هـ^{س^{٢}} - ٢س^{٢}هـ^{س^{٢}} + ٢هـ^{س^{٢}}\right) + جـ$

⑤ $\int هـ^{\sqrt[٣]{س}}\, دس$ ——— نفرض $ص = \sqrt[٣]{س} \Leftarrow ص^{٣} = س \Leftarrow دس = ٣ص^{٢}\, دص$

$= \int هـ^{ص} \times ٣ص^{٢}\, دص = \int \underbrace{٣ص^{٢}}_{م}\, \underbrace{هـ^{ص}\, دص}_{دهـ}$ أجزاء مرتين ———

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

⑥ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ظتا}^{2}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \int \text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{ظتا}^{2}\text{ص}\, \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ظتا}^{2}\text{ص}\, \text{دص} = \int \text{ص}\, \text{ظتا}^{2}\text{ص}\, \text{دص}$

$= \int \text{ص}\,(\text{قتا}^{2}\text{ص} - 1)\, \text{دص} = \int \underset{\text{م}}{\text{ص}}\, \underset{\text{دهـ}}{\underline{\text{قتا}^{2}\text{ص}}} - \underset{\text{تكامل مباشر}}{\underline{\text{ص}}}\, \text{دص}$

$= \text{ص} \times -\text{ظتا ص} - \int -\text{ظتا ص}\, \text{دص} - \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ}$

$= -\text{ص ظتا ص} + \int \frac{\text{جتا ص}}{\text{جا ص}}\, \text{دص} - \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ}$

$= -\text{ص ظتا ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا ص}| - \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ}$

$= -\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ظتا هـ}^{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا هـ}^{\text{س}}| - \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{جـ}$

⑦ $\int \underset{\text{م}}{\underline{\text{س هـ}^{\text{س}}}}\, \underset{\text{دهـ}}{\underline{(\text{س}+1)^{-2}\, \text{دس}}}$

$\text{م} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $\text{دهـ} = (\text{س}+1)^{-2}\, \text{دس}$

$\text{دم} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $\text{هـ} = \frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{\text{س}+1}$

$\text{I} = \text{س هـ}^{\text{س}} \times \frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1} - \int \frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1} \times (\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\, \text{دس}$

$= \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{1}{\cancel{\text{س}+1}} \times \underset{\text{عامل مشترك}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \cancel{(\text{س}+1)}\, \text{دس} = \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

⑧* ملغى $\int \underset{\text{دهـ}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \underset{\text{م}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\, \text{دس}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underset{\text{م}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \times \underset{\text{دهـ}}{\frac{1}{\text{س}}\, \text{دس}}$

$\text{م} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس}$

$\text{دم} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \left(\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{دس}\right)$

$\text{I} = \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} - \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{دس}$ (لا يجوز)

مثال: أوجد التكاملات التالية:

① $\int \text{هـ}^{\text{س}^٣ + ٢\,\text{لوس}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^٣ + \text{لو}_\text{هـ}\text{س}^٢}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^٣} \times \text{هـ}^{\text{لو}_\text{هـ}\text{س}^٢}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^٢ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^٢}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}^٣} \times \text{س}^٢\,\text{دس} = \int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}^٣}\,\text{دس} = \int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^٢}$

$= \frac{١}{٣}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^٣} + \text{جـ}$

---

② $\int \text{س}(\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_\text{هـ}\text{س}})\,\text{دس} = \int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}\,\text{دس} = \int \underset{\text{م}}{\text{س}^٢}\,\underset{\text{دهـ}}{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}$

$\text{م} = \text{س}^٢ \quad \times \quad \text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دم} = ٢\text{س}\,\text{دس} \swarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{I} = \text{س}^٢ \times \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times ٢\text{س}\,\text{دس} = \text{س}^٢\text{هـ}^{\text{س}} - \int \underset{\text{م}}{٢\text{س}}\,\underset{\text{دهـ}}{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}$

$= \text{س}^٢\text{هـ}^{\text{س}} - (٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times ٢\,\text{دس})$

$= \text{س}^٢\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

---

③ $\int ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{دس} = \int \underset{\text{م}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\underset{\text{دهـ}}{\text{جا}٢\text{س}\,\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times -\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} - \int -\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}\int \underset{\text{م}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\underset{\text{دهـ}}{\text{جتا}٢\text{س}\,\text{دس}}$

$= -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}\left(\text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}\right)\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س} - \boxed{\frac{١}{٤}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س}\,\text{دس}}$ التكامل الأصلي

$\Leftarrow \frac{٥}{٤}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س}\,\text{دس} = -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{٤}{٥}\left(-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٢\text{س}\right) + \text{جـ}$

---

④ $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جاهـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاص}\,\text{دص} = \int \underset{\text{م}}{\text{ص}}\,\underset{\text{دهـ}}{\text{جاص}\,\text{دص}}$ — أجزاء ثم نكمل

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة (س، ص) يعطى بالعلاقة ٤س $\text{هـ}^{\text{س}^2}$ ، جد معادلة هذا المنحنى علماً أنه يمر ب (٠، ٣) .

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س هـ}^{\text{س}^2} \Leftarrow \text{دص} = \text{٤س هـ}^{\text{س}^2}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int \text{دص} = \int \text{٤س هـ}^{\text{س}^2}\ \text{دس}$　معادلة تكاملية

$\text{ع} = \text{س}^2$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{٢س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دع}}{\text{٢س}}$

$\Leftarrow \text{ص} = \int \text{٤س هـ}^{\text{ع}}\ \frac{\text{دع}}{\text{٢س}}$

$\Leftarrow \text{ص} = \int \text{٢هـ}^{\text{ع}}\ \text{دع} \Leftarrow \text{ص} = \text{٢هـ}^{\text{ع}} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ص} = \text{٢هـ}^{\text{س}^2} + \text{جـ}$　لكنه يمر بالنقطة (٠، ٣)

$\Leftarrow ٣ = \text{٢هـ}^{٠} + \text{جـ} \Leftarrow ٣ = ٢ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١}$

$\therefore \text{ص} = \text{٢هـ}^{\text{س}^2} + ١$

مثال: يتناقص حجم الماء في بركة بمعدل $\frac{١}{١٠}$ حجمها سنوياً ، فإذا كان حجم الماء الآن هو $\text{هـ}^{٢٥}$ جد حجم الماء بعد مرور ٢٠ سنة .

الحل: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -\frac{١}{١٠}\text{ح} \Leftarrow \text{دح} = -\frac{١}{١٠}\text{ح دن} \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{ح}} = -\frac{١}{١٠}\ \text{دن}$

$\int \frac{\text{دح}}{\text{ح}} = \int -\frac{١}{١٠}\ \text{دن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = -\frac{١}{١٠}\text{ن} + \text{جـ}$　الشرط: $\text{ح} = \text{هـ}^{٢٥}$ عندما $\boxed{\text{ن} = ٠}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٢٥} = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٢٥}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = -\frac{١}{١٠}\text{ن} + ٢٥$　وعند $\boxed{\text{ن} = ٢٠}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = -\frac{١}{١٠}(٢٠) + ٢٥ = ٢٣$

$\therefore \text{ح} = \text{هـ}^{٢٣}$

مثال: تتكاثر نوع من الحشرات في مزرعة وفق المعادلة $\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = \frac{١}{٤}\text{ك}$ لكل ساعة حيث ك تدل على عدد الحشرات. اذا كانت ك = ٢٠٠ في البداية (ن = ٠)، ما عدد الحشرات بعد ٨ ساعات، (اعتبر $\text{هـ}^{٢} = ٧,٤$)،

الحل: $\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = \frac{١}{٤}\text{ك} \Leftarrow \text{دك} = \frac{١}{٤}\text{ك دن} \Leftarrow \frac{\text{دك}}{\text{ك}} = \frac{١}{٤}\text{دن}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{دك}}{\text{ك}} = \int \frac{١}{٤}\text{دن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{١}{٤}\text{ن} + \text{جـ}$ لكن: ك = ٢٠٠ عندما $\boxed{\text{ن} = ٠}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠ = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{١}{٤}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠$ وعندما $\boxed{\text{ن} = ٨}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{١}{٤} \times ٨ + \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠ = ٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠$

$\therefore \text{ك} = \text{هـ}^{٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠} = \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢٠٠} = ٧,٤ \times ٢٠٠ = ١٤٨٠$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س} + ٣)(\text{س}^{٢} - ٤)}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}} = \frac{(\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\text{س}\cancel{(\text{س} - ٢)}}\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}}\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}}\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}} + \frac{٥\text{س}}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس} \Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\therefore \int \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \int \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس} \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{ص}} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\text{س} + ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: تنمو البكتيريا بمعدل $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٣٠٠٠}{١ + ٠,٢٥\text{ن}}$ في الساعة حيث ن الزمن، أوجد عدد البكتيريا بعد مرور ٤ ساعات علماً بأن العدد الأصلي هو ١٠٠٠.

الحل: $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٣٠٠٠}{١ + ٠,٢٥\text{ن}} \Leftarrow \text{دع} = \frac{٣٠٠٠}{١ + ٠,٢٥\text{ن}}\text{دن}$

$\int \text{دع} = \int \frac{٣٠٠٠}{١ + ٠,٢٥\text{ن}}\text{دن} \Leftarrow \text{ع} = \frac{٣٠٠٠}{٠,٢٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + ٠,٢٥\text{ن}| + \text{جـ}$

$= ١٢٠٠٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + ٠,٢٥\text{ن}| + \text{جـ}$ لكن ع = ١٠٠٠ عندما ن = ٠

$\therefore ١٠٠٠ = ١٢٠٠٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٠) + \text{جـ} \Leftarrow ١٠٠٠ = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١٠٠٠}$

$\text{ع} = ١٢٠٠٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + ٠,٢٥\text{ن}| + ١٠٠٠$ وعندما $\boxed{\text{ن} = ٤}$ فإن $\text{ع} = ١٢٠٠٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ + ١٠٠٠$

مثال: يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت بعد ن من الزمن يرتبط بسرعته ع بالعلاقة ت ع = ٥٫٠ حيث ع > ٠ ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢٧ ثانية من بدء الحركة اذا علمت أن سرعته عند بدء الحركة ٣ سم/ث وأن ف = ١٨ عند ن = ٠

الحل: ت ع = ٥٫٠ ⇐ ت = $\frac{٥٫٠}{\text{ع}}$ ⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٥٫٠}{\text{ع}}$ ⇐ ع دع = ٥٫٠ دن

⇐ ∫ ع دع = ∫ $\frac{١}{٢}$ دن ⇐ $\frac{\text{ع}^{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}\text{ن} + \text{جـ}$

⇐ ع = ٣ عند ن = ٠ ⇐ $\frac{٩}{٢}$ = ٠ + جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = \frac{٩}{٢}}$

∴ $\frac{\text{ع}^{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}\text{ن} + \frac{٩}{٢}$ ⇐ $\text{ع}^{٢} = \text{ن} + ٩$ ⇐ $\text{ع} = \sqrt{\text{ن} + ٩}$

⇐ ف = $\int \sqrt{\text{ن}+٩}\ \text{دن} = \frac{٢(\text{ن}+٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$

⇐ ف = ١٨ عند ن = ٠ ⇐ $١٨ = \frac{٢}{٣}(٩+٠)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٠}$

∴ ف = $\frac{٢}{٣}(\text{ن}+٩)^{\frac{٣}{٢}}$ وعند $\boxed{\text{ن} = ٢٧}$ ⇐ ف = $\frac{٢}{٣}(٢٧+٩)^{\frac{٣}{٢}} = ١٤٤$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢\text{ص} = ٠$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{ص}$ ⇐ دص = ٢ص دس ⇐ $\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int ٢\ \text{دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٢\text{س} + \text{جـ}$ ⇐ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}+\text{جـ}}$ ⇐ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \underline{\underline{\text{هـ}^{\text{جـ}}}}$

∴ $\text{ص} = \text{جـ}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

مثال: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{جتا}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) + \int \frac{\text{س}}{٣\text{س}+٥} + \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

تكامل محدود مشتقته صفر

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{٣\text{س}+٢} + \text{صفر}$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \text{م}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ وكانت $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٢\text{هـ}^{٢} + ١$ جد م

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{م}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٣\text{م}\,\text{هـ}^{٣} + \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ \times \frac{١}{١} = ٣\text{م}\,\text{هـ}^{٣} + ١ = ٢\text{هـ}^{٢} + ١$

⇐ $٣\text{م}\,\text{هـ}^{٣} = ٢\text{هـ}^{٢}$ ⇐ $\text{م} = \frac{٢\text{هـ}^{٢}}{٣\text{هـ}^{٣}} = \frac{٢}{٣\text{هـ}}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{س}^٢-٤} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+٣)}{\text{س}^٢-٢\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+٣)(\text{س}^٢-٤)}{\text{س}^٢-٢\text{س}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}} = \frac{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)\,\text{دس}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}+٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}} + \frac{٥\text{س}}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \int \text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص} = \int \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}} = \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٥\text{س} + ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

---

* التكامل بالكسور الجزئية:

وهو تقسيم الكسر الواحد إلى عدة كسور

نلجأ إلى التكامل بالكسور الجزئية إذا أردنا إيجاد التكامل لاقتران نسبي مقامه محللاً إلى عوامل أو قابلاً للتحليل

مثل: $\int \frac{٢٠\text{س}+٥}{\text{س}(٢\text{س}-١)(٣\text{س}+٧)}\,\text{دس}$

$\int \frac{٩}{٤\text{س}^٢-٢٥}\,\text{دس}$ (يتحلل)

$\int \frac{\text{س}+٧}{٢\text{س}^٢-٧\text{س}+٥}\,\text{دس}$ (يتحلل)

مثال ٨ جد $\int \frac{٦س - ٥}{٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ٣س} \, \text{دس} = \int \frac{٦س - ٥}{س(٢س^{٢} - ٥س + ٣)} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٦س - ٥}{س(٢س - ٣)(س - ١)} \, \text{دس}$ من فكرة الكسور الجزئية .

نفرض :

$$\frac{٦س - ٥}{س(٢س - ٣)(س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{٢س - ٣} + \frac{جـ}{س - ١} \quad \times \boxed{س(٢س - ٣)(س - ١)}$$

$\Leftarrow ٦س - ٥ = أ(٢س - ٣)(س - ١) + ب(س)(س - ١) + جـ(س)(٢س - ٣)$

بوضع $\boxed{س = ٠}$

$\Leftarrow -٥ = أ(-٣)(-١) + \text{صفر} + \text{صفر} \Leftarrow \boxed{أ = \frac{-٥}{٣}}$

بوضع $٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \frac{٣}{٢}}$

$\Leftarrow ٤ = \text{صفر} + ب(\frac{٣}{٢})(\frac{١}{٢}) + \text{صفر} \Leftarrow \boxed{ب = \frac{١٦}{٣}}$

بوضع $س - ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$\Leftarrow ١ = \text{صفر} + \text{صفر} + جـ(١)(-١) \Leftarrow \boxed{جـ = -١}$

$$\therefore I = \int \left(\frac{\frac{-٥}{٣}}{س} + \frac{\frac{١٦}{٣}}{٢س - ٣} + \frac{-١}{س - ١} \right) \text{دس}$$

$$= \frac{-٥}{٣} \text{لو}_{هـ}|س| + \frac{١٦}{٣} \times \frac{١}{٢} \text{لو}_{هـ}|٢س - ٣| - \text{لو}_{هـ}|س - ١| + جـ$$

مثال ٩ : $\int_{٣}^{٤} \frac{٦}{٢س - س^{٢}} \, \text{دس} \Leftarrow \frac{٦}{٢س - س^{٢}} = \frac{٦}{س(٢ - س)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{٢ - س}$

بالضرب في $س(٢ - س) \Leftarrow ٦ = أ(٢ - س) + ب(س)$

بوضع $\boxed{س = ٠} \Leftarrow ٦ = ٢أ - ٠ + ٠ \Leftarrow ٦ = ٢أ \Leftarrow \boxed{أ = ٣}$

بوضع $٢ - س = ٠ \Leftarrow س = ٢ \Leftarrow ٦ = ٢ب \Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

$$\therefore \int_{٣}^{٤} \frac{٦}{٢س - س^{٢}} \, \text{دس} = \int_{٣}^{٤} \frac{٣}{س} + \frac{٣}{٢ - س} \, \text{دس} = ٣\text{لو}_{هـ}|س| - ٣\text{لو}_{هـ}|٢ - س| \Big]_{٣}^{٤}$$

$$= (٣\text{لو}_{هـ}٤ - ٣\text{لو}_{هـ}٢) - (٣\text{لو}_{هـ}٣ - ٣\text{لو}_{هـ}١)$$

$$= ٣\text{لو}_{هـ}٤ - ٣\text{لو}_{هـ}٢ - ٣\text{لو}_{هـ}٣ - ٠$$

سؤال ٤ $\int \frac{٤س - ٥}{٢س^{٢} - س - ٣}\, ءس$

* ملاحظة: إذا كانت درجة البسط $\geq$ درجة المقام يجب القسمة أولاً

مثال ٤ أوجد $\int \frac{١٢س^{٢} - ٥}{(٢س - ٣)(٣س + ١)}\, ءس$ (درجة البسط = درجة المقام)

$$= \int \frac{١٢س^{٢} - ٥}{٦س^{٢} - ٧س - ٣}\, ءس$$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ١٢س^{٢} - ٥ & ٦س^{٢} - ٧س - ٣ \\ \mp ١٢س^{٢} \pm ١٤س \pm ٦ & \\ \hline ١٤س + ١ \quad \text{الباقي} & \end{array}$$

$$\therefore ت = \int ٢ + \frac{١٤س + ١}{(٢س - ٣)(٣س + ١)}\, ءس = ٢س + \int \frac{١٤س + ١}{(٢س - ٣)(٣س + ١)}\, ءس$$

$$\frac{١٤س + ١}{(٢س - ٣)(٣س - ١)} = \frac{أ}{٢س - ٣} + \frac{ب}{٣س + ١} \times \boxed{(٢س - ٣)(٣س + ١)}$$

$\Leftarrow ١٤س + ١ = أ(٣س + ١) + ب(٢س - ٣)$ بوضع $٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \frac{٣}{٢}}$

$\Leftarrow ١٤\left(\frac{٣}{٢}\right) + ١ = أ\left(\frac{١١}{٢}\right) + صفر$

$\Leftarrow ٢٢ = \frac{١١}{٢} أ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

بوضع $٣س + ١ = صفر \Leftarrow \boxed{س = -\frac{١}{٣}}$

$\Leftarrow ١٤\left(-\frac{١}{٣}\right) + ١ = صفر - \frac{١١}{٣} ب \Leftarrow -\frac{١١}{٣} = -\frac{١١}{٣} ب \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

$$\therefore ت = ٢س + \int \frac{٤}{٢س - ٣} + \frac{١}{٣س + ١}\, ءس$$

$$ت = ٢س + ٤ \times \frac{١}{٢} \text{لو}_{هـ}|٢س - ٣| + \frac{١}{٣} \text{لو}_{هـ}|٣س + ١| + جـ$$

سؤال ٤ ١) $\int \frac{س^{٢}}{س + ٣}\, ءس$ (درجة البسط > درجة المقام)

٢) $\int \frac{س^{٣} + س^{٢}}{س^{٢} - ١}\, ءس$ (درجة البسط > درجة المقام)

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{٢س}{س^٢ - ٦س + ٩}\,دس = \int \frac{٢س}{(س-٣)^٢}\,دس$ ← العوامل غير مختلفة (بالأجزاء)

$= \int \underbrace{٢س}_{ع}\,\underbrace{(س-٣)^{-٢}\,دس}_{دهـ} = ٢س \times \frac{١}{١} \times \frac{(س-٣)^{-١}}{-١} - \int \frac{(س-٣)^{-١}}{-١} \times ٢\,دس$

$= \frac{-٢س}{س-٣} + \int \frac{٢}{س-٣}\,دس = \frac{-٢س}{س-٣} + ٢\,لو_{هـ}|س-٣| + جـ$

---

② $\int \frac{\sqrt{س^٤ + ٢س^٢ + ١}}{س^٢ - س}\,دس = \int \frac{\sqrt{(س^٢+١)^٢}}{س^٢ - س}\,دس = \int \frac{|س^٢+١|}{س^٢ - س}\,دس$

$= \int \frac{س^٢+١}{س^٢ - س}\,دس$ درجة البسط = درجة المقام

$\begin{array}{r|l} & ١ \\ س^٢ - س & س^٢ + ١ \\ & -س^٢ \oplus س \\ \hline & س + ١ \end{array}$

$\Leftarrow \int ١ + \frac{س+١}{س^٢ - س}\,دس = س + \int \frac{س+١}{س(س-١)}\,دس$

$\Leftarrow \frac{س+١}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} \quad \times \boxed{س(س-١)}$

$\Leftarrow س + ١ = أ(س-١) + ب(س)$ بوضع $س - ١ = صفر \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$\Leftarrow ب = ١ + ١ \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

بوضع $س = صفر \Leftarrow -أ = ٠ + ١ = ١ \Leftarrow \boxed{أ = -١}$

$\therefore \underline{أ} = س + \int \frac{-١}{س} + \frac{٢}{س-١}\,دس = س - لو_{هـ}|س| + ٢\,لو_{هـ}|س-١| + جـ$

---

③ $\int \frac{١}{س^{١٠} + س}\,دس = \int \frac{١}{س(س^٩+١)}\,دس$

نفرض $ص = س^٩$

$\frac{دص}{دس} = ٩س^٨$

$دس = \frac{دص}{٩س^٨}$

$= \int \frac{١}{س(ص+١)} \cdot \frac{دص}{٩س^٨} = \frac{١}{٩} \int \frac{١}{س^٩(ص+١)}\,دص$

$= \frac{١}{٩} \int \frac{١}{ص(ص+١)}\,دص \Leftarrow \frac{١}{ص(ص+١)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+١} \quad \times \boxed{ص(ص+١)}$

$\Leftarrow ١ = أ(ص+١) + ب\,ص$ ...... ثم نكمل ونعيد الفرض

④ $\int \frac{س^3}{س^8 + ٢س^4}\, دس = \int \frac{س^3}{س^4(٢ + س^4)}\, دس$

$= \int \frac{س^3}{ص(٢ + ص)} \cdot \frac{دص}{٤س^3} = \frac{1}{٤}\int \frac{1}{ص(٢ + ص)}\, دص$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ونعيد الفرض ; — —

$ص = س^4$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^3$

$دس = \frac{دص}{٤س^3}$

---

⑤ $\int \frac{1}{س^3 + س}\, دس = \int \frac{1}{س(س^2 + 1)}\, دس$

$= \int \frac{1}{س(ص + 1)} \cdot \frac{دص}{٢س} = \frac{1}{٢}\int \frac{1}{س^2(ص + 1)}\, دص$

$= \frac{1}{٢}\int \frac{1}{ص(ص + 1)}\, دص$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد الفرض

$ص = س^2$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

---

⑥ $\int \frac{س + ٣}{س^3 - س}\, دس \Rightarrow \int \frac{س + ٣}{س(س^2 - 1)}\, دس = \int \frac{س + ٣}{س(س - 1)(س + 1)}\, دس$

$\Rightarrow \frac{س + ٣}{س(س - 1)(س + 1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - 1} + \frac{جـ}{س + 1}$ ثم نكمل — —

---

⑦ $\int \underline{لو_{هـ}(س^2 + ٢س)}\, \underbrace{دس}_{دهـ} = لو_{هـ}(س^2 + ٢س) \times س - \int س \times \frac{٢س + ٢}{س^2 + ٢س}\, دس$

درجة البسط = درجة المقام ⟵

$= س\, لو_{هـ}(س^2 + ٢س) - \int \frac{\cancel{س}(٢س + ٢)}{\cancel{س}(س + ٢)}\, دس$

$$\begin{array}{r|l} & ٢ \\ \hline س + ٢ & ٢س + ٢ \\ & \cancel{-٢س} \mp ٤ \\ \hline & -٢ \end{array}$$

$\Rightarrow = س\, لو_{هـ}(س^2 + ٢س) - \int \left(٢ - \frac{٢}{س + ٢}\right) دس$

$= س\, لو_{هـ}(س^2 + ٢س) - \left(٢س - ٢\, لو_{هـ}|س + ٢|\right) + جـ$

---

⑧ $\int \frac{1}{س\left((لو_{هـ}س)^2 + لو_{هـ}س\right)}\, دس$ نفرض $ص = لو_{هـ}س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} \Rightarrow دس = س\, دص$

$= \int \frac{1}{\cancel{س}(ص^2 + ص)} \times \cancel{س}\, دص \Rightarrow \frac{1}{ص(ص + 1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص + 1}$ ثم نكمل

بالكسور الجزئية ———

⑨ $\int \frac{\text{٤ لوهـ س}}{(\text{س} - ١)^{٢}}\,\text{دس} = \int \underbrace{\text{٤ لوهـ س}}_{\text{ق}}\,\underbrace{(\text{س} - ١)^{-٢}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}$ أجزاء

$= \text{٤ لوهـ س} \times \frac{(\text{س} - ١)^{-١}}{-١} - \int \frac{(\text{س} - ١)^{-١}}{-١} \times ٤ \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{-\text{٤ لوهـ س}}{\text{س} - ١} + \int \frac{٤}{(\text{س} - ١)(\text{س})}\,\text{دس} \Leftarrow \frac{٤}{(\text{س} - ١)(\text{س})} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}}$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ـــ ـــ ـــ $\boxed{\text{أ} = ٤}$ $\boxed{\text{ب} = -٤}$

---

⑩ $\int \frac{\text{ظاس}}{٩ - (\text{لوهـ جتاس})^{٢}}\,\text{دس}$ نفرض ص = لوهـ جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{ظاس}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{ظاس}}}{٩ - \text{ص}^{٢}} \cdot \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{ظاس}}} = \int \frac{١}{\text{ص}^{٢} - ٩}\,\text{دص}$

$= \int \frac{١}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)}\,\text{دص}$

$\frac{١}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٣}$ ثم نكمل ——— $\boxed{\text{أ} = \frac{١}{٦}}$ $\boxed{\text{ب} = \frac{-١}{٦}}$

---

⑪ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٩}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ٩} \times \text{٢ص دص}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{\text{٢ص}}$

$\text{دس} = \text{٢ص دص}$

$= \int \frac{\text{٢ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٩}\,\text{دص}$ (درجة البسط = درجة المقام) نقسم

$= \int ٢ + \frac{١٨}{\text{ص}^{٢} - ٩}\,\text{دص} = \text{٢س} + \int \frac{١٨}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)}\,\text{دص}$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد الفرض

---

⑫ $\int \frac{١}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٦}\,\text{دس} = \int \frac{١}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٦} \times \text{٢ص دص}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{\text{٢ص}}$

$\text{دس} = \text{٢ص دص}$

$= \int \frac{\text{٢ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٦}\,\text{دص} = \int \frac{\text{٢ص}}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٢)}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \frac{\text{٢ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٦} = \frac{\text{٢ص}}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٣}$ ثم نكمل ونعيد الفرض

$\boxed{\text{أ} = \frac{٦}{٥}}$ $\boxed{\text{ب} = \frac{٤}{٥}}$

⑬

$$\int \frac{\sqrt{٤\text{س}+٢٠}-٣}{\sqrt{\text{س}+٥}+٣}\,\text{د}\text{س} = \int \frac{٢\sqrt{\text{س}+٥}-٣}{\sqrt{\text{س}+٥}+٣}\,\text{د}\text{س}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}-٣}{\text{ص}+٣} \times ٢\text{ص}\,\text{د}\text{ص} = \int \frac{٤\text{ص}^٢-٦\text{ص}}{\text{ص}+٣}\,\text{د}\text{ص}$$

درجة البسط > درجة المقام
نقسم

$$= \int ٤\text{ص}-١٨+\frac{٥٤}{\text{ص}+٣}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= ٢\text{ص}^٢-١٨\text{ص}+٥٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+٣|+\text{جـ}$$

$$= ٢(\text{س}+٥)-١٨\sqrt{\text{س}+٥}+٥٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+٥}+٣|+\text{جـ}$$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٥}$

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٥}} = \frac{١}{٢\text{ص}}$

$\text{د}\text{س} = ٢\text{ص}\,\text{د}\text{ص}$

---

⑭

$$\int \frac{١}{\text{س}(\sqrt[٣]{\text{س}}-١)}\,\text{د}\text{س} = \int \frac{١}{\text{ص}^٣(\text{ص}-١)} \times ٣\text{ص}^٢\,\text{د}\text{ص}$$

$$= \int \frac{٣}{\text{ص}(\text{ص}-١)}\,\text{د}\text{ص}$$ ثم نكمل كسور جزئية ـــ

$\boxed{\text{م} = -٣}$ $\boxed{\text{ب} = ٣}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

$\text{ص}^٣ = \text{س}$

$٣\text{ص}^٢\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = ١$

$\text{د}\text{س} = ٣\text{ص}^٢\,\text{د}\text{ص}$

---

⑮

$$\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}-\text{هـ}^{\text{س}}-٢}\,\text{د}\text{س} = \int \frac{\text{ص}^٣}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\cdot\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$= \int \frac{\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\,\text{د}\text{ص}$$ (درجة البسط = درجة المقام)
نقسم

$$= \int ١+\frac{\text{ص}+٢}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= \text{ص} + \int \frac{\text{ص}+٢}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+١)}\,\text{د}\text{ص} \Leftarrow \frac{\text{ص}+٢}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+١)} = \frac{\text{م}}{\text{ص}-٢}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}$$

ثم نكمل كسور جزئية ـــــ $\boxed{\text{م} = \frac{٤}{٣}}$ $\boxed{\text{ب} = -\frac{١}{٣}}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{ص}}$

---

⑯

$$\int \sqrt{١-\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{د}\text{س} = \int \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{١-\text{ص}^٢}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}^٢}{١-\text{ص}^٢}\,\text{د}\text{ص}$$ (درجة البسط = درجة المقام)
نقسم

$$= \int -٢+\frac{٢}{١-\text{ص}^٢}\,\text{د}\text{ص} = -٢\text{ص} + \int \frac{٢}{(١-\text{ص})(١+\text{ص})}\,\text{د}\text{ص}$$

ثم نكمل كسور جزئية ـــ ـــ $\boxed{\text{م} = ١}$ $\boxed{\text{ب} = ١}$

$\text{ص} = \sqrt{١-\text{هـ}^{-\text{س}}}$

$\text{ص}^٢ = ١-\text{هـ}^{-\text{س}}$

$٢\text{ص}\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{س}}$

$٢\text{ص}\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = ١-\text{ص}^٢$

$\text{د}\text{س} = \frac{٢\text{ص}}{١-\text{ص}^٢}\,\text{د}\text{ص}$

⑰

$$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس} - ٦}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٦} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}} = \int \frac{١}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٦}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{١}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٢)}\,\text{دص}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢}$$ ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{\text{أ} = \frac{١}{٥}}$ $\boxed{\text{ب} = \frac{١}{٥}}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

---

⑱

$$\int \frac{\text{جتاس}}{٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{٣ + (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{٤ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{جاس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{٤ - \text{ص}^{٢}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int \frac{١}{٤ - \text{ص}^{٢}}\,\text{دص} = \int \frac{١}{(٢ - \text{ص})(٢ + \text{ص})}\,\text{دص}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{(٢ - \text{ص})(٢ + \text{ص})} = \frac{\text{أ}}{٢ - \text{ص}} + \frac{\text{ب}}{٢ + \text{ص}}$$ ثم نكمل —— $\boxed{\text{أ} = \frac{١}{٤}}$ $\boxed{\text{ب} = \frac{١}{٤}}$

---

⑲

$$\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{جاس} + ٢}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\,\text{دص} = \int \frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{١ - \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\,\text{دص} = \int \frac{\cancel{(١ - \text{ص})}\,\overset{-}{(١ + \text{ص})}}{(\text{ص} - ٢)\cancel{(\text{ص} - ١)}}\,\text{دص} = \int \frac{-١ - \text{ص}}{\text{ص} - ٢}\,\text{دص}$$

(درجة البسط = درجة المقام) ⇐ نقسم

$$\Leftarrow \int ١ + \frac{-٣}{\text{ص} - ٢}\,\text{دص} = -\text{ص} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ٢| + \text{جـ}$$

$$= -\text{جاس} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} - ٢| + \text{جـ}$$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

② $\int \frac{1}{س\sqrt{1+س}}\,دس = \int \frac{1}{(ص^2-1)\times ص} \times 2ص\,دص$

$= \int \frac{2}{ص^2-1}\,دص = \int \frac{2}{(ص-1)(ص+1)}\,دص$

$\Leftarrow \frac{2}{(ص-1)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}$

ثم نكمل كسور جزئية — $\boxed{أ=1}$ $\boxed{ب=-1}$

$ص = \sqrt{1+س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{1+س}}$

$= \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\,دص$

$س = ص^2 - 1$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^2}{س^2-س}$

الحل: $\frac{دص}{ص^2} = \frac{دس}{س^2-س} \Leftarrow \int \frac{دص}{ص^2} = \int \frac{دس}{س^2-س}$

$\Leftarrow \int ص^{-2}\,دص = \int \frac{دس}{س(س-1)} \Leftarrow \frac{ص^{-1}}{-1} = \int \frac{دس}{س(س-1)}$

$\frac{1}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} \times \boxed{س(س-1)}$

$\Leftarrow 1 = أ(س-1) + ب(س)$

بوضع $س - 1 = 0 \Leftarrow س = 1$

$\boxed{ب=1}$

بوضع $س = 0$ ، $\Leftarrow 1 = -أ \Leftarrow \boxed{أ=-1}$

$\therefore \frac{-1}{ص} = \int \left(\frac{-1}{س} + \frac{1}{س-1}\right) دس$

$\Leftarrow \frac{-1}{ص} = -لو_{هـ}|س| + لو_{هـ}|س-1| + جـ$

مثال ٤ إذا كانت $\frac{دص}{دس} = ص^2 هـ^{-س}$ وكانت $ص = 2$ عند $س = 0$ ، أثبت

أن $ص = \frac{2هـ^{س}}{2 - هـ^{س}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ص^2 هـ^{-س} \Leftarrow \frac{دص}{ص^2} = هـ^{-س}\,دس \Leftarrow \int ص^{-2}\,دص = \int هـ^{-س}\,دس$

$\frac{-1}{ص} = -هـ^{-س} + جـ \Leftarrow \frac{-1}{ص} = \frac{-1}{هـ^{س}} + جـ$ لكن: $ص = 2$ عند $س = 0$:

$\Leftarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{-1}{ص} = \frac{-1}{هـ^{س}} + \frac{1}{2}$ بالضرب في (-1)

$\Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{1}{هـ^{س}} - \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{2 - هـ^{س}}{2هـ^{س}} \Leftarrow ص = \frac{2هـ^{س}}{2 - هـ^{س}}$