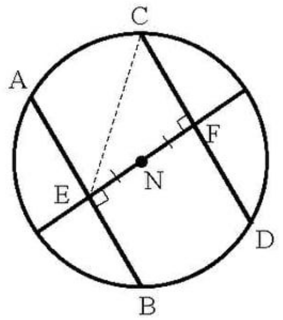
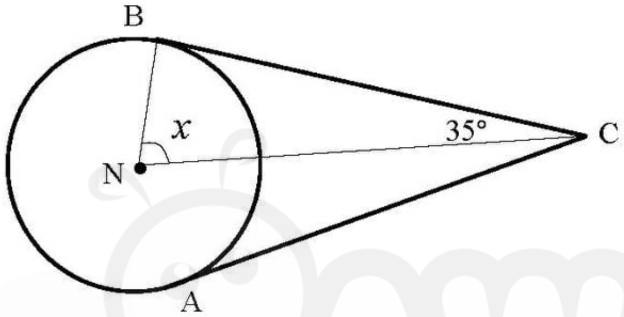
مقترح امتحان الشهر الثاني – الفصل الأول
وحدة الدائرة
الأستاذ منير أبو بكر

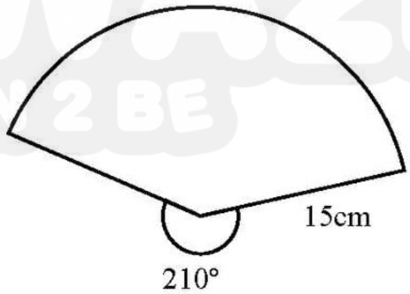
1) AB وَ CD في الشكلِ الآتي وتران في دائرةٍ مركزُها N. إذا كانَ $AB = 6$ cm ، وَ $EF = 4$ cm ،
فجد مايلي :
a) طول CF .
b) طول CE .



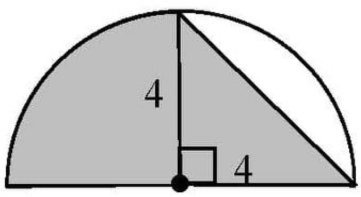
2) AC، وَ BC مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 5 cm ،
و CN = 13 فجد مايلي :
a) فجد طول كل من المماسين AC , BC
b) قياس الزاوية x .



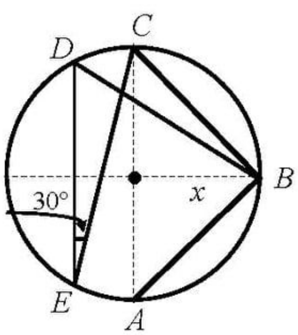
3) أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



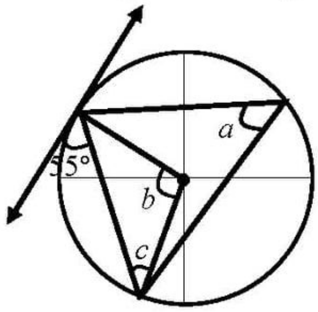
4) جد مساحة المنطقة المظللة .



5) جد قياس الزاوية x .



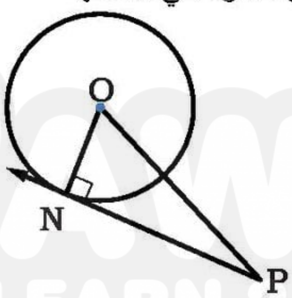
6) جد قياس كل من الزوايا الآتية : a , b , c والمبينة في الشكل المجاور .



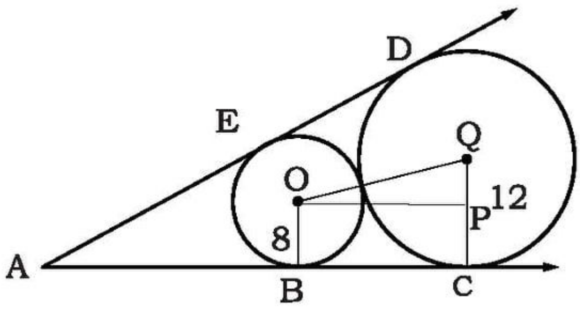
7) أكتب معادلة الدائرة في الحالتين الآتيتين :
a) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 6 وحداتٍ.
b) المركزُ(3- , 2-) ، وتمرُّ بالنقطةِ (5 , 4)

8) أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$

9) أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ P(7 , 3) ، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 9$.



10) يُبيّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ منَ النقطةِ A لدائرتيْن متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ إذا كان $OP \perp QC$ أثبت أنّ المستطيل OPCB مستطيل ثم أَجِدُ طولَ $\overline{OP}$ باستعمالِ القياسات المُبيَّنةِ في الشكلِ.



8) أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$

بإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي x ينتجُ $x^2 + 10x = (x + \frac{10}{2})^2 - (\frac{10}{2})^2 = (x + 5)^2 - 25$

بإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ $y^2 - 12y = (y - \frac{12}{2})^2 - (\frac{12}{2})^2 = (y - 6)^2 - 36$

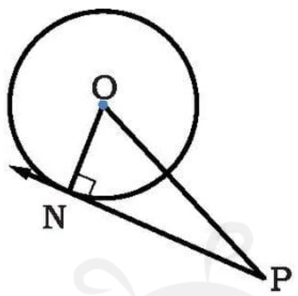
وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$ إلى :

$$(x + 5)^2 - 25 + (y - 6)^2 - 36 + 12 = 0$$
$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 - 49 = 0$$
$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 49$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، نجدُ أنَّ:

$$(a, b) = (-5, 6) \quad , \quad r = 7$$

9) أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P(7, 3)$ ، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$.



أَرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ، وَ N نقطةَ التَّماسّ.
لحسابِ طولِ المماسِّ PN ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ القائمِ ONP ، الذي يُمكِنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، هما :نصفُ القُطْرِ ON ، والوترُ OP.
من معادلة الدائرة المعطاة فإنّ : طولُ نصفِ القُطْرِ ON هوَ 5 ولحسابِ OP ،
أَجِدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرةِ $O(-5, -2)$ والنقطةِ $P(7, 3)$
باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

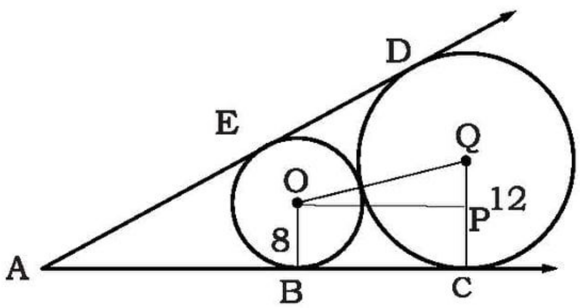
$$(OP)^2 = (7 - (-5))^2 + (3 - (-2))^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$$

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ ONP :

$$(PN)^2 = (OP)^2 - (ON)^2 = 169 - 9 = 160$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $PN = \sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10} = 4\sqrt{10}$

10) يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ منَ النقطةِ A لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ إذا كان $OP \perp QC$ أثبت أنّ المستطيل OPCB مستطيل ثم أَجِدُ طولَ $\overline{OP}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ.



المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس $m\angle OBC = m\angle QCB = 90°$

لأنّ $OP \perp QC$ $m\angle OPC = 90°$

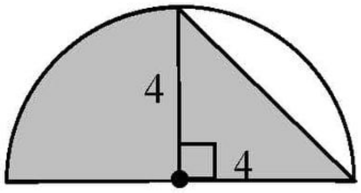
مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ $360°$ $m\angle POB = 90°$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ OPCB مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

حسب فيثاغورس : $(OP)^2 = (OQ)^2 + (OP)^2$

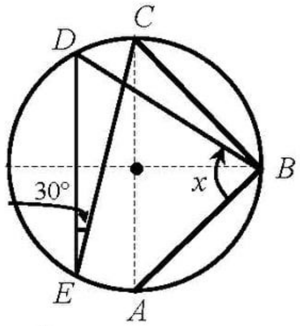
$$= (8 + 12)^2 - (12 - 8)^2$$
$$= 20^2 - 4^2 = 400 - 16 = 384$$
$$OP = \sqrt{384} = \sqrt{64 \times 6} = 8\sqrt{6}$$

4) جد مساحة المنطقة المظللة .



مساحة المنطقة المظللة = مساحة القطاع المظلل كاملاً + مساحة المثلث المظلل

$$\frac{90}{360°} \times \pi\,(4)^2 \quad + \frac{1}{2}\,(4)(4) = 4\,\pi + 8 = 20.56$$

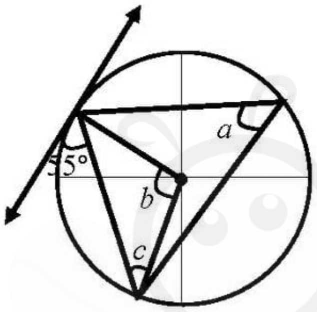


5) جد قياس الزاوية x .

زاويتين محيطيتين تحصران نفس القوس $m\angle CBD = m\angle CED = 30°$

زاوية محيطية تحصر نصف قوس الدائرة $m\angle ABC = 90°$

$x = 90° - 30° = 60°$



6) جد قياس كل من الزوايا الآتية : $a\ ,\ b\ ,\ c$ والمبينة في الشكل المجاور .

قياسُ الزاويةِ المماسّيّةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ :

أي أنّ : $a = 55°$

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ

أي أنّ : $b = 2a = 2 \times 55° = 110°$

المثلث الذي رأسه في مركز الدائرة متطابق الضلعين لأن ضلعيه أنصاف أقطار :

مجموع زوايا المثلث الداخلية $b + c + c = 180°$

$110° + 2c = 180° \;\rightarrow\; 2c = 180° - 110°$

$2c = 70° \;\rightarrow\; c = 35°$

7) أكتب معادلة الدائرة في الحالتين الآتيتين :

a) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 6 وحداتٍ.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $x^2 + y^2 = r^2$

بتعويض $r = 6$ $x^2 + y^2 = 6^2$

$x^2 + y^2 = 36$

b) المركزُ(3- , 2-) ، وتمرُّ بالنقطةِ (5 , 4)

قانون المسافة بين نقطتين $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

بالتعويض $r^2 = (4 - -2)^2 + (5 - -3)^2$

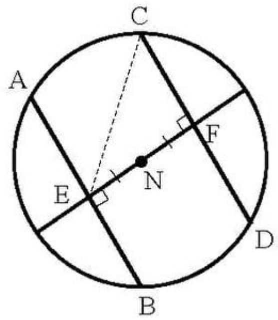
$= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

والآنَ، أُعوّضُ إحداثيَّي المركزِ وقيمةَ r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$(x - -2)^2 + (y - -3))^2 = 100$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 100$

حل مقترح امتحان الشهر الثاني – الفصل الأول
وحدة الدائرة
الأستاذ منير أبو بكر



1) AB وَ CD في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها N. إذا كانَ $AB = 6$ cm، وَ $EF = 4$ cm،
فجد مايلي :

a) طول CF .

وتران متطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة **$AB = CD$**

نصف القطر عمودي على الوتر فهو ينصفه أي : $CF = AE = EB = 3$

b) طول CE .

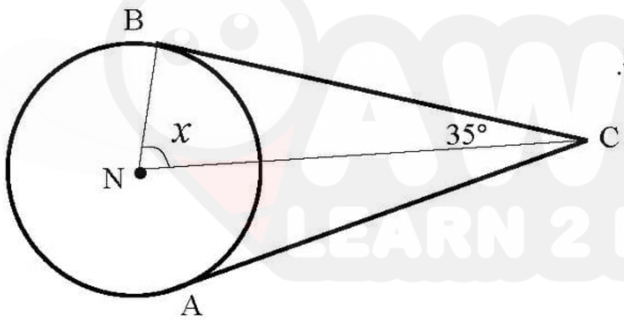
حسب فيثاغورس : $(CE)^2 = (CF)^2 + (EF)^2$

$= (4)^2 + (3)^2$

$= 16 + 9 = 25$

$CE = \sqrt{25} = 5$

2) **AC، وَ BC مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 5 cm ،**
و $CN = 13$ فجد مايلي :



a) فجد طول كل من المماسين AC , BC

المماسّانِ المرسومانِ للدائرةِ مِنْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

أي : $AC = BC$

NB نصف قطر عمودي على المماس في نقطة التماس

حسب فيثاغورس : $(BC)^2 = (NC)^2 - (NB)^2$

$= (13)^2 - (5)^2$

$= 169 - 25 = 144$

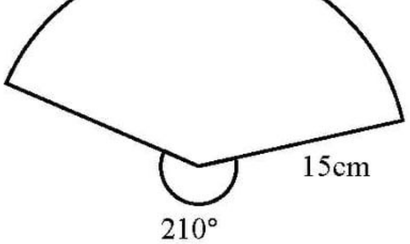
$BC = \sqrt{144} = 12$

b) قياس الزاوية x .

مجموع زوايا المثلث: $x + 90° + 35° = 180°$

$x + 125° = 180° \rightarrow x = 180° - 125° = 55°$

3) أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



$\theta = 360° - 210° = 150°$

قانون طول القوس $l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$= \frac{150}{360°} \times 2\pi \times 15 = 12.5\,\pi = 39.25$

قانون مساحة القطاع $A = \frac{150}{360°} \times \pi\,(15)^2$

$= 93.75\,\pi = 294.4$