مكثف وحدة الأعداد المركبة

قاعدة:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$i^{2} = -1$$

الصورة القياسية للمركب

$$z = x + i\,y$$

الجزء الحقيقي　　عدد تخيُّلي　　الجزء التخيُّلي

تساوي الأعداد المركبة

يتساوى العددان المركبان: $a+ib\,,\,c+id$ إذا

وفقط إذا كان: $a=c, b=d$

حيث a,b,c,d أعداد حقيقية

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب المكتوب في الصورة القياسية:

$z=a+ib$ فهو العدد المركب: $\overline{z} = a-ib$

مقياس العدد المركب

مقياس العدد المركب: $z=a+ib$ هو:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ حيث a,b عددان حقيقيان

سعة العدد المركب

إذا كان a,b عددين حقيقيين موجبين فإن:

العدد المركب z	الربع الذي يقع فيه z	$Arg(z)$
$z=a+ib$	الأول	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z=-a+ib$	الثاني	$\pi-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z=-a-ib$	الثالث	$-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z=a-ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

قاعدة:

إيجاد السعة في حالة a او b تساوي صفر

الصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان: $z=a+ib$ عدداً مركباً فإن سعته العدد المركب $Arg(z)=\theta$ و مقياسة $|z|=r$ يستعملان لكتابة الصورة المثلثية كما يلي :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال 1 :

أجد قيم كل من x وy الحقيقية التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة :

$x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

مثال 2 :

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية ،مقربا إجـ

$1\ldots z = 1$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

$2\ldots z = 3i$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$3\ldots z = -5 - 5i$

$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)) = -\frac{3\pi}{4}$

$4\ldots. z = 1 - i\sqrt{3}$

$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$5\ldots. z = 6\sqrt{3} + 6i$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$6\ldots. z = 3 - 4i$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.93$

مثال 3 :

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

1-. $r = |z| = 2, Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$

2- .$r = |z| = 3, Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

3- .$r = |z| = 7, Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 7(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$

مثال 4 :

إذا كان: $Arg(5 + 2i) = \alpha$ فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α مبررا إجابتي :

1) $-5 - 2i$

$Arg(5 + 2i) = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

2) $Arg(-5 - 2i) =$

$-(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)) = -(\pi - \alpha) = -\pi + \alpha$

3) . $5 - 2i =$

$Arg(5 - 2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\alpha$

4) -5+2i

$Arg(-5 + 2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \pi - \alpha$

مثال5:

اذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$،

فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة ، مبررا

إجابتي .

$$|z| = \sqrt{(5)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25 + 9k^2} = 13$$

$$\to 25 + 9k^2 = 169 \to k = \pm 4$$

مثال6

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $5i(3-7i)$

$$=15i+(-35)(-1)=35+15i$$

2) $(6+2i)(7-3i)$

$$=42-18i+14i-6i^2$$

$$=(42+6)+(-18+14)i=48-4i$$

3) $(3+6i)^2$

$$(3+6i)^2=9+36i+36i^2$$

$$=9+36i-36=-27+36i$$

4) $\frac{8-5i}{3-2i}$

$$\frac{8-5i}{3-2i}=\frac{8-5i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$

$$=\frac{24+16i-15i+10}{9+4}$$

$$=\frac{34+i}{13}=\frac{34}{13}+\frac{1}{13}i$$

5) $\frac{3+5i}{2i}$

$$\frac{3+5i}{2i}=\frac{3+5i}{2i}\times\frac{i}{i}=\frac{3i+5i^2}{2i^2}$$

$$=\frac{3i-5}{-2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

مثال7:

إذا كان: $z_1=10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$

وكان: $z_2=2\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) z_1z_2

$$=2\times10\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$=20\left(\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

$$=\frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$=5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

$$=5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

$$=5\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

مثال 8:

أجد الجذرين التربيعين لأعداد المركبة الآتية:

1) $z=21-20i$

الحل:

$$\sqrt{z}=x+iy$$

$$z=(x+iy)^2$$

$$21-20i=(x+iy)^2$$ عوض قيمة z

$$21-20i=x^2+2ixy+i^2y^2$$ بفك الاقواس

$$21-20i=x^2-y^2+2ixy$$

$$21=x^2-y^2$$

$$-20=2xy$$

$$x^2-y^2=21\ldots(1)$$

$$2xy=-20\ldots(2)$$

$$y=-\frac{10}{x}$$

$$x^2-\left(-\frac{10}{x}\right)^2=21$$

$$x^4-100=21x^2$$

$$x^4-21x^2-100=0$$

$$(x^2-25)(x^2+4)=0$$

$$x^2=25 \quad or \quad x^2=-4$$

بما أن x عدد حقيقي، فإن: $x=\pm5$

$$x=5\Rightarrow y=-2$$

$$x=-5\Rightarrow y=2$$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب: $21-20i$ هما: $-5+2i\,,\,5-2i$

مثال 9 :

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة: $z^3+4z^2+z=26$

الحل:

المعادلة: $z^3+4z^2+z-26=0$

بحسب نظرية الأصفار النسبية فإنه يكون أحد عوامل الحد الثابت (-26) وهي: $\pm1\,,\pm2\,,\pm13\,,\pm26$

بالتعويض أجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة:

$$2^3+4(2)^2+2-26=0$$

إذن $z-2$ هو أحد عوامل كثير الحدود

أقسم z^3+4z^2+z-26 على $z-2$ لإيجاد العامل التربيعي باستعمال طريقة الجدول على النحو الآتي:

$\times$	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13x$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

إذن

$$z^3+4z^2+z-26=(z-2)\left(z^2+6z+13\right)=0$$

$$z^2+6z+13=0 \quad or \quad z-2=0$$

$$z=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=-3\pm 2i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور، هي:

$$2\,,-3+2i\,,-3-2i$$

مثال 10:

إذا كـــان: $3+9i$ هـــو أحـــد جـــذور المعادلـــة: $x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من a,b

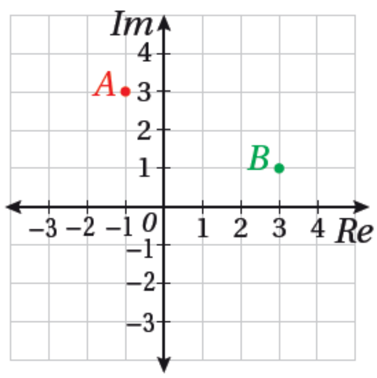
الحل:

مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أن: $a=-6\,,b=90$

$$x^2-6x+90=0$$

مثال 11:

معتمدا المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين A,B أجد السعة والمقياس للعدد المركب AB



الحل:

$$z_1=-1+3i \quad , \quad z_2=3+i$$

$$z_1z_2=(-1+3i)(3+i)$$

$$=-3-i+9i-3=-6+8i$$

$$|z_1z_2|=\sqrt{36+64}=10$$

$$Arg\left(z_1z_2\right)=\pi-\tan-1\left(\frac{8}{6}\right)\approx 2.21$$

مثال 12:

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ مما يأتي :

1) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

الحل:

$$a+7+(6-b)i=-2+5i$$

$$a+7=-2 \quad , \quad 6-b=5$$

$$a=-9 \quad , \quad b=1$$

مثال 13:

أَضرِب العدد المُركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه

$$z=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$$

$$\bar{z}=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$$

$$z\bar{z}=\left(4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i\right)\left(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\right)$$

$$=32+32=64$$

مثال 14:

إذا : $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \,, z_2 = \sqrt{5} - \sqrt{15}i$ ، $z_3 = 2 - 2i$ فأجد المقياس والسعة الرئيسية لكلٍّ ممّا يأتي :

1) $\frac{z_2}{z_1}$

الحل:

$$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$|z_2| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$$

$$|z_3| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

2) $\frac{1}{z_3}$

الحل:

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(1) - Arg(z_2)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

3) $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

الحل:

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15}$$

$$\left|\overline{z_2}\right| = |z_2| = 2\sqrt{5}$$

$$Arg\left(\overline{z_2}\right) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{z_2}\right| = \frac{|z_3|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = Arg(z_3) - Arg(z_2)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$$

مثال15 :

إذا كان: $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

1) احسب المقياس والسعة للعدد المركب

الحل:

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$$

اذن مقياس x يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$

2) أجد الجذرين التربيعيين للعدد z

الحل:

$$z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)=-4-4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4-4\sqrt{3}i}=x+iy$$

$$-4-4\sqrt{3}i=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-4-4\sqrt{3}i=x^2-y^2+2ixy$$

$$-4=x^2-y^2 \quad , \quad -4\sqrt{3}=2xy$$

$$y=\frac{-2\sqrt{3}}{x}$$

$$x^2-y^2=-4$$

$$x^2-\frac{12}{x^2}=-4$$

$$x^4+4x^2-12=0$$

$$\left(x^2+6\right)\left(x^2-2\right)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

عندما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=-\sqrt{6}$

وعندما $x=-\sqrt{2}$ فإن $y=\sqrt{6}$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما:

$$\sqrt{2}-i\sqrt{6} \quad , \quad -\sqrt{2}+i\sqrt{6}$$

مثال 16:

إذا كـان: $(a-3i)$ و $(b+ic)$ همـا الجـذرين التربيعيين للعدد المركب: $55-48i$ ، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية : a، وb ، و c

الحل:

بمـا أن $a-3i$ جـذر للعـدد المركـب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو ايضا جذر له ومنه:

بالمقارنـة مـع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن:

$b=-a$ و $c=3$ ومنه:

$$(a-3i)^2=55-48i$$

$$a^2-6ia-9=55-48i$$

$$a^2-9=55\,,\,-6a=-48\Rightarrow a=8\Rightarrow b=-8$$

مثال17:

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كُلٍّ مما يأتي :

1) $x^3+x^2+15x=225,5$

الحل:

$$x^3+x^2+15x=225$$

$$x^3+x^2+15x-225=0$$

بما أن 5 جذر لهذه المعادلة اذن $(x-5)$ عوامل كثير الحدود بالقسمة عليه نحصل على:

$$x^3+x^2+15x-225=(x-5)\left(x^2+6x+45\right)=0$$

$$x=5$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-180}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-6 \pm 12i}{2} = -3 \pm 6i$$

حلول هذه المعادلة هي:

$x = 5 \, , x = -3 + 6i \, , x = -3 - 6i$

مثال 18 :

أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا ، مُبرِّرًا إجابتي :

1) أجد ناتج : $(p+iq)^2$ ، حيث p و q عددان حقيقيان

الحل:

$$(p+iq)^2 = p^2 + 2ipq + i^2q^2$$
$$= p^2 + 2ipq - q^2$$

2) إذا كان: $(p+iq)^2 = 45 + im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، و $p>q$ ، فأجد ثلاث قيم مُمكنة للعدد الحقيقي m

الحل:

$$(p+iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$$

$$p^2 - q^2 = 45 \quad , \quad m = 2pq$$

$$p^2 - q^2 = 45 \Rightarrow (p+q)(p-q) = 45$$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فــإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عــددان صــحيحان موجبان ايضا و $(p+q) > (p-q)$ ومنه يكفي تحليـل العـدد 45 الـى عـاملين صـحيحين مـوجبين احدهما اكبر من الآخر، لدينا 3 حالات لتحليل 45 الى عاملين صحيحين موجبين هي:

الحالة الاولى: $45 = 45 \times 1$

فإن: $p + q = 45 \quad , \quad p - q = 1$

ومنه: $p = 23 \quad , \quad q = 22$

أي أن: $m = 2pq = 1012$

الحالة الثانية: $45 = 15 \times 3$

فإن: $p + q = 15 \quad , \quad p - q = 3$

ومنه: $p = 9 \quad , \quad q = 6$

أي أن: $m = 2pq = 108$

الحالة الثالثة: $45 = 9 \times 5$

فإن: $p + q = 9 \quad , \quad p - q = 5$

ومنه: $p = 7 \quad , \quad q = 2$

أي أن: $m = 2pq = 28$

قيم m المطلوبة هي: 28 , 108 , 1012

3) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركب : $45 - 108i$

الحل:

المطلوب ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

$45 - 108i$

بما أن $m = 2pq = -108$

اذن العددان p و q مختلفان بالاشارة ، من السؤال السابق نجد أن:

$p = 9 \, , q = -6$ أو $p = -9 \, , q = 6$

الجذران المطلوبان هما: $9-6i\ ,\ -9+6i$

مثال19 :

أُثبت أنّ: $z\bar{z}=|z|^2$ لأي عدد مُركب z .

الحل:

ليكن $z=x+iy$ اذن $\bar{z}=x-iy$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$$

$$=x^2-y^2i^2$$

$$=x^2+y^2$$

$$=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2}=|z|^2$$

مثال20 :

إذا كان z عددًا مُركبًا ، حيث:

$|z|=5\sqrt{5}\ ,\ Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ وكان:

$\frac{z}{3+4i}=p+q$ ، فأُثبت أن: $p+q=1$

الحل:

ليكن $z=x+iy$

بما أن $Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

اذن يقع العدد المركب z في الربع الاول ويكون

$x=2y$ لان $\tan\theta=\frac{1}{2}=\frac{y}{x}$

$$z=2y+iy$$

$$|z|=5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2+y^2=125$$

$$y^2=25\Rightarrow y=5,x=10$$

اذن $z=10+5i$

$$\frac{z}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$p+iq=\frac{30-40i+15i+20}{9+16}$$

$$=\frac{50-25i}{25}=2-i$$

اذن $p=2,q=-1$ ويكون $p+q=1$

مثال21 :

العدد المُركب: $z=(10-i)-(2-7i)$ هو أحد جذور المعادلة:

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحل المعادلات الآتية: $x^6+164x^2=20\left(x^4+20\right)$

الحل:

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

بما أن $(8+6i)$ جذر لهذه المعادلة اذن مرافقه $(8-6i)$ هو ايضا جذر لهذه المعادلة

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$$(8-6i),(8+6i)$$

$$(8+6i)+(8-6i)=16$$

$$(8+6i)\times(8-6i)=64+36=100$$

$$z^2 - 16z + 100 = 0$$

ثـــــم نقســـــم كثيـــــر الحــــدود $z^3 - 20z^2 + 164z - 400$ علـــــــــى $z^2 - 16z + 100$ فنجد أن:

$$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 =$$

$$\left(z^2 - 16z + 100\right)(z - 4) = 0$$

$$z = 4 \quad , \quad z = 8 \pm 6i$$

حلول هذه المعادلة هي:

$$z = 4 \quad , \quad z = 8 + 6i \quad , \quad z = 8 - 6i$$

المعادلة الجديدة هي:

$$x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$$

اذا عوضنا $z = x^2$ تتحول هذه المعادلة الى

$$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$$

اذن حلـــــــول المعادلـــــــــــــة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هـــــي الجـــــذور التربيعيـــــة لحلـــــول المعادلــــــة

$$x^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$$

اذن حلول هذه المعادلة هي:

$$x = \pm\sqrt{8 - 6i}\ ,\ x = \pm\sqrt{8 + 6i}\ ,\ x = \pm 2$$

نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8 + 6i$

$$\sqrt{8 + 6i} = h + ik$$

$$8 + 6i = h^2 - k^2 + 2ihk$$

$$8 = h^2 - k^2 \quad , \quad 6 = 2hk$$

$$h = \frac{3}{k}$$

$$h^2 - k^2 = 8$$

$$h^2 - \frac{9}{k^2} = 8$$

$$h^4 - 8h^2 - 9 = 0$$

$$\left(h^2 + 1\right)\left(h^2 - 9\right) = 0$$

$$h = \pm 3 \Rightarrow k = \pm 1$$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8 - 6i$ هما:

$$3 + i \quad , \quad -3 - i$$

بالمثـل نجـد أن الجـذرين التـربيعيين للعـدد المركـب $8 - 6i$ هما:

$$3 - i \quad , \quad -3 + i$$

ويكـــــــــــــون للمعادلـــــــــــــــــــة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي:

$$x = 2 \quad , \quad x = -2$$

$$x = 3 + i \quad , \quad x = 3 - i$$

$$x = -3 + i \quad , \quad x = -3 - i$$

مثال 22 :

إذا كـــــــــان: $z = -3 + 3i\sqrt{3}$ وكـــــــــان: $|w| = 18, \operatorname{Arg}(w) = -\frac{\pi}{6}$ فأجـد نـاتج كـل ممـا يأتي:

1) $\text{Arg}(z)$

الحل:

$$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

2) $|z|$

الحل:

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=6$$

3) $\text{Arg}(zw)$

الحل:

$$Arg(zw)=Arg(z)+Arg(w)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

4) $|zw|$

الحل:

$$|zw|=|z|\times|w|=6\times18=108$$

مثال 23:

إذا كان: $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ فأكتبه بالصورة المثلثية

مبيناً أن $\omega^3=1$

الحل:

$$Arg(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$$

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left|\omega^3\right|=|\omega|\times|\omega|\times|\omega|=1\times1\times1=1$$

$$Arg\left(\omega^3\right)=Arg(\omega)+Arg(\omega)+Arg(\omega)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$$

$$\omega^3=1(\cos\pi+i\sin\pi)=1$$

مثال 24:

إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5$ فما قيمة u علما بأنها سالبة؟

الحل:

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5\Rightarrow\frac{|u-9i|}{|3+i|}=5$$

$$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{9+1}}=5$$

$$\sqrt{u^2+81}=5\sqrt{10}$$

$$u^2+81=250\Rightarrow u^2=169\Rightarrow u=\pm13$$

لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u=-13$

مثال 25:

إذا كان: $(1+4i)$ جذراً للمعادلة: $x^3+5x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a,b والجذرين الآخرين لهذه المعادلة

الحل:

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ فإنه يحقق المعادلة، أي أن:

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$\left(1+8i+16i^2\right)(1+4i)+5\left(1+8i+16i^2\right)+a(1+4i)+b=0$$

$$(-15+8i)(1+4i)+5(-15+8i)+a(1+4i)+b=0$$

$$-15+52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$$

$$-122+a+b+i(4a-12)=0$$

$$-122+a+b=0\,,\,4a-12=0$$

$$a=3 \quad , \quad b=119$$

فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة فإن $1-4i$ جذر آخر لها

نكون معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$(x-(1+4i))(x-(1-4i))=(x-1-4i)(x-1+4i)$$

$$=x^2-2x+17$$

ثـم نقسـم كثيـر الحـدود $x^3+5x^2+3x+119$ علـى $x^2-2x+17$ ، فنحصل على:

$$x^3+5x^2+3x+119=(x^2-2x+17)(x+7)$$

الجذران الآخران لهذه المعادلة هما:

$$x=-7 \quad , \quad x=1-4i$$

مثال 26:

أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7+24i)$ هو $(4+3i)$ ثم أجد الجذر التربيعي الآخر

الحل:

اذا كان $(4+3i)$ جذرا تربيعيا للعدد $(7+24i)$ فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة:

$$(4+3i)^2=7+24i$$

نستطيع التأكد من ذلك بالحساب:

$$(4+3i)^2=16+24i-9=7+24i$$

إذن هو فعلاً أحد جذري $(7+24i)$ ويكون الجذر الآخر هو: $-4-3i$

مثال 27 :

أثبـت أن سـعة $(7+24i)$ تسـاوي ضـعف سـعة $(4+3i)$

الحل:

$$\theta_1=Arg(7+24i)=\tan^{-1}\frac{24}{7}\approx 1.287$$

$$\theta_2=Arg(4+3i)=\tan^{-1}\frac{3}{4}\approx 0.6435$$

$$2\times\theta_2=2(0.6435)=1.287=\theta_1$$

$$\therefore Arg(7+24i)=Arg(4+3i)$$

مثال 28:

أثبـت أن مقيـاس $(7+24i)$ يسـاوي مربـع مقيـاس $(4+3i)$

الحل:

$$|7+24i|=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$$

$$|4+3i|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$\Rightarrow |7+24i|=|4+3i|^2$$

مثال 29:

إذا كان: $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a,b

الحل:

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$$

$$\frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$$

$$\frac{3a-ia}{10}+\frac{b-2ib}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a-i\frac{a}{10}+\frac{b}{5}-i\frac{2b}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a+\frac{b}{5}=1 \quad , \quad \frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$$

$$3a+2b=10 \quad , \quad a+4b=10$$

$$b=2 \quad , \quad a=2$$

مثال 30 :

إذا كان: $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فأجد قيمة a وقيمة b ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة

الحل:

بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فإن:

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$$-7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$$

$$-7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-4b+10)=0$$

$$-2-2a+3b=0 \quad , \quad -14+11a-4b=0$$

$$a=2 \quad , \quad b=2$$

المعادلة هي: $z^4+2z^3+2b^2+10z+25=0$

بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة فإن $(-2-i)$ جذر آخر لها . نكون معادلة لها هذان الجذران:

$$(z-(-2+i))(z-(-2-i))=(z+2-i)(z+2+i)$$
$$=z^2+4z+5$$

ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4z+5 فنحصل على:

$$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4z+5)(z^2-2z+5)$$

$$z^2-2z+5=0$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$$

جذور المعادلة هي:

$$x=1-2i\ ,\ x=1+2i\ ,\ x=-2+i\ ,\ x=-2-i$$

مثال 31:

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $|z+5-4i|=7$ ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

$$|z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$

وطول نصف قطرها 7

$$(x+5)^2+(y-4)^2=49$$

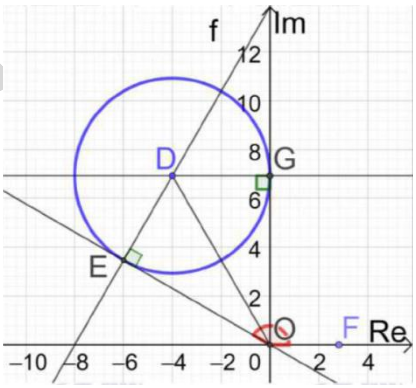
مثال 32:

إذا كانت: $\left|z+4-4\sqrt{3}i\right|=4$ **، فأجيب عن السؤاليين الآتيين تباعًا:**

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب .

الحل:

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $\left(-4,4\sqrt{3}\right)$ وطول نصف قطرها 4



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة

الحل:

$$\tan\angle GOD=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle GOD=\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

القيمة العظمى لسعة الاعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$

مثال 33:

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $|z+1|=|z-5i|$ **، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية**

الحل:

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0),(0,5)$

$$(x+1)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-10y+25$$

$$2x+10y-24=0$$

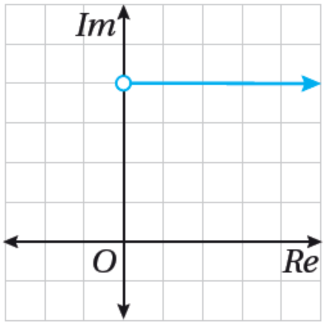
اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

مثال 34:

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة ممّا يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المُركب:

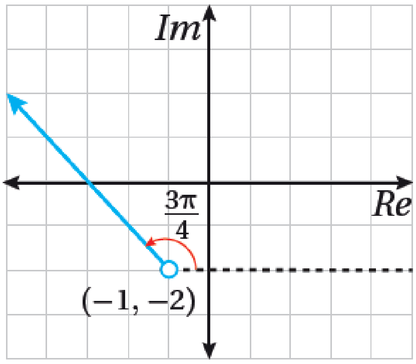
1) $Arg(z-4i)=0$

الحل:



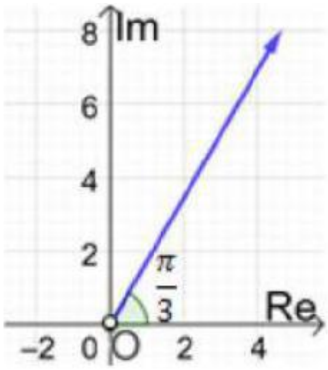
2) $Arg(z+1+2i)=\dfrac{3\pi}{4}$

الحل:



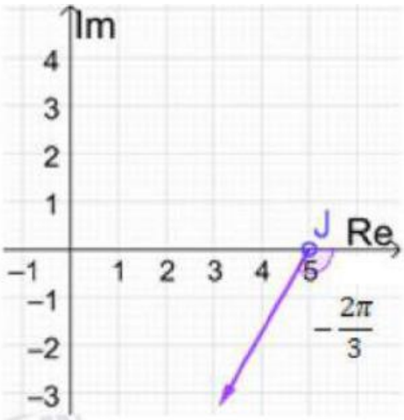
3) $Arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$

الحل:



4) $Arg(z-5)=-\dfrac{2\pi}{3}$

الحل:

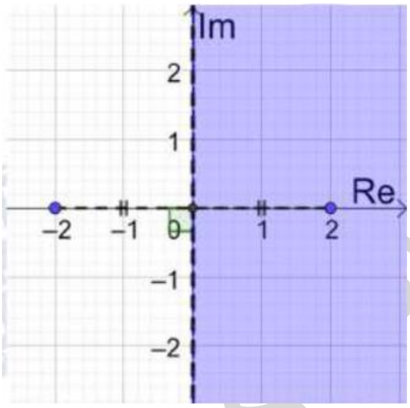


مثال 35:

أُمثِّل في المُستوى المُركب المنطقة التي تُحددها كل مُتباينة ممّا يأتي :

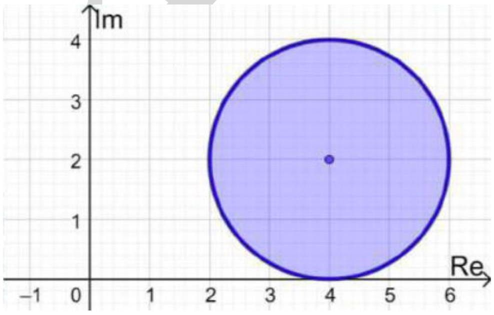
1) $|z-2|<|z+2|$

الحل:



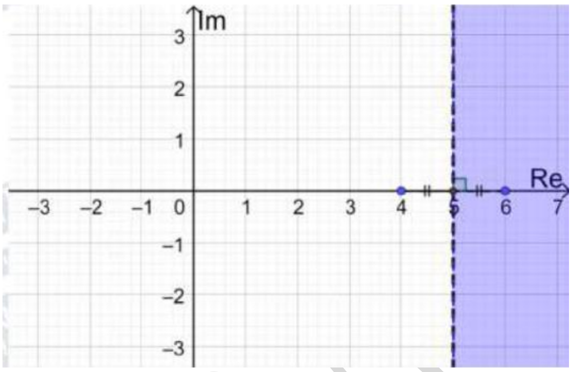
2) $|z-4-2i|\le 2$

الحل:



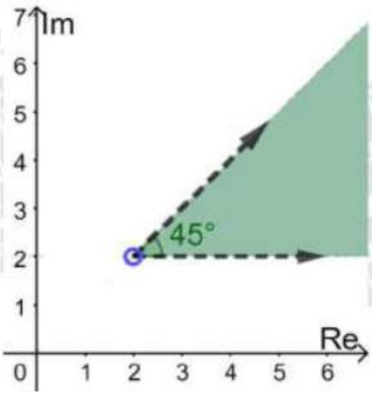
3) $|z-4|>|z-6|$

الحل:



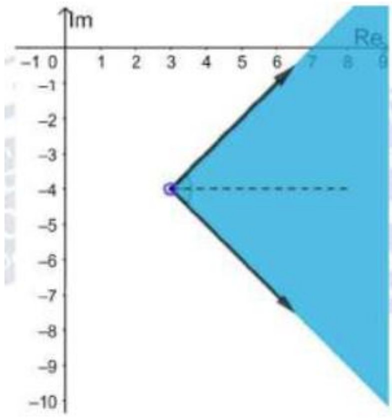
4) $0 < Arg\left(z - 2 - 2i\right) < \dfrac{\pi}{4}$

الحل:



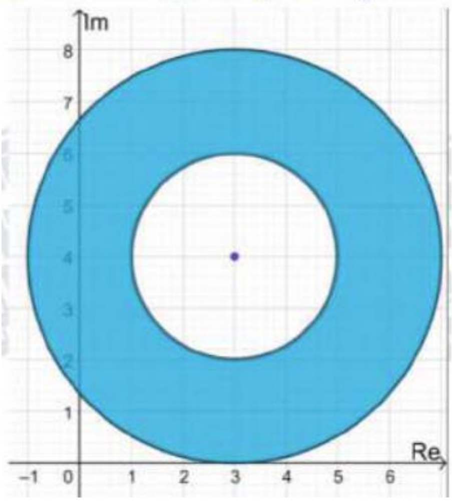
5) $-\dfrac{\pi}{4} \le Arg\left(z - 3 + 4i\right) \le \dfrac{\pi}{4}$

الحل:



6) $2 \le \left|z - 3 - 4i\right| \le 4$

الحل:

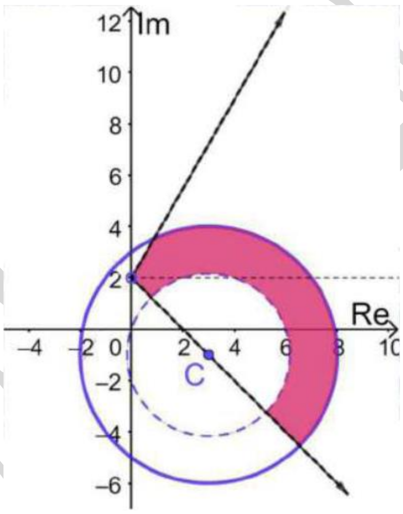


مثال 36:

أُمثِّل في المُستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّقُ المُتباينة: $-\dfrac{\pi}{4} \le Arg\left(z - 2i\right) \le \dfrac{\pi}{3}$ **والمُتباينة:**

$2 < \left|z - 3 + i\right| \le 5$

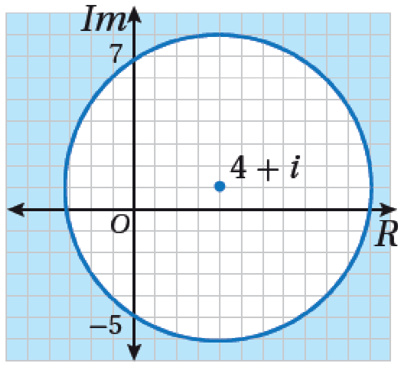
الحل:



مثال 37:

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المُظللة في كل ممّا يأتي:

1)

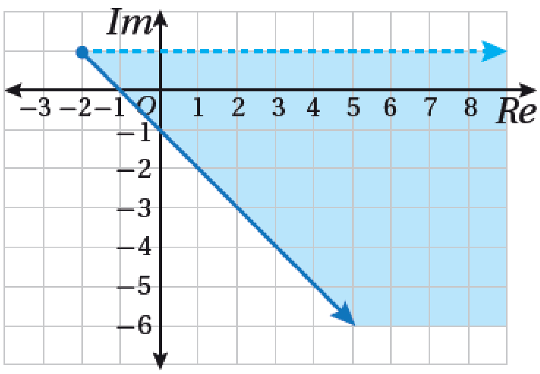


الحل:

$$r=\sqrt{(4-0)^2+(1-7)^2}=\sqrt{52}$$

$$|z-(4+i)|\geq\sqrt{52}$$

2)



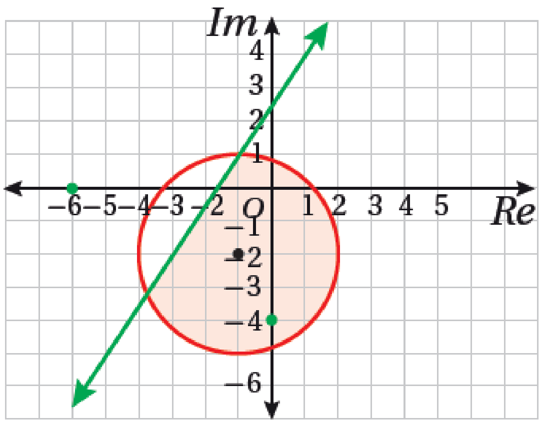
الحل:

قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1

$$-\frac{\pi}{4}\leq Arg(z+2-i)<0$$

مثال38 :

أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبين في الشكل المجاور



الحل:

$$|z+2+i|\leq 3$$

$$|z+6|\geq|z+4i|$$

مثال39:

أجد (بدلالة الثابت الحقيقي a) العددين المُركبين اللذين يُحقّقان المعادلة: $|z-a|=2a$ والمعادلة:

$$|z-a|=|z+a(2+i)|$$

الحل:

نفرض ان $a\neq 0$

$$|z-a|=|z+a(2+i)|$$

$$|x-a+iy|=|x+2a+i(y+a)|$$

$$(x-a)^2+y^2=(x+2a)^2+(y+a)^2$$

$$y=-3x-2a\ldots(1)$$

$$|z-a|=2a$$

$$|x-a+iy|=2a$$

$$(x-a)^2+y^2=4a^2 \dots (2)$$

$$(x-a)^2+(-3x-2a)^2=4a^2$$

$$x^2-2ax+a^2+9x^2+12ax+4a^2=4a^2$$

$$10x^2+10ax+a^2=0$$

$$x=\frac{-10a\pm\sqrt{100a^2-40a^2}}{20}$$

$$x=\frac{-10a\pm\sqrt{60a^2}}{20}=\frac{-10a\pm 2a\sqrt{15}}{20}$$

$$x=-\frac{a}{2}\pm\frac{a\sqrt{15}}{10}$$

$$y=-3\left(\frac{-a}{2}\pm\frac{a\sqrt{15}}{10}\right)-2a=\frac{a}{2}\mp\frac{3a\sqrt{15}}{10}$$

اذا كان $a\neq 0$ فإن العددين المطلوبين هما:

$$-\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{15}}{10}-\left(\frac{a}{2}+\frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

$$-\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{15}}{10}-\left(\frac{a}{2}-\frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

أما اذا كان $a=0$ فيوجد عدد مركب وحيد يحقق المعادلتين وهو: $z=0$

مثال40:

إذا كان العدد المُركب z يُحقِّق المعادلة: $|z-3+4i|=2$ ، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

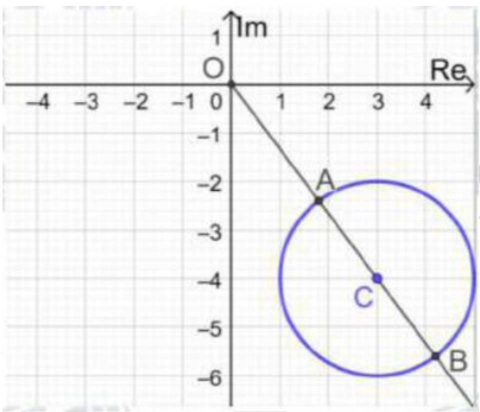
الحل:

$$|z-3-4i|=2$$

$$|z-(3-4i)|=2$$

z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2

نفرض $z=x+iy$ فإن: $|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الاصل في المستوى الديكارتي



من الشكل اعلاه نجد أن:

$$OC=\sqrt{9+16}=5$$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z|=OC-r=5-2=3$$

أكبر قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z|=OC+r=5+2=7$$

مثال41:

إذا كانت: $z=5+2i$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

1) أُبين أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{29}(21+20i)$

الحل:

$$z=5+2i \Rightarrow \bar{z}=5-2i$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{5+2i}{5-2i}\times\frac{5+2i}{5+2i}$$

$$=\frac{25+20i-4}{25+4}=\frac{21+20i}{29}$$

$$=\frac{1}{29}(21+20i)$$

2) بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركبة: z , $\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ أُبين أنَّ:

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

الحل:

$$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg(\bar{z})=-\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=-\tan^{-1}\frac{20}{21}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=Arg(z)-Arg(\bar{z})$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=\tan^{-1}\frac{2}{5}-\left(-\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=2\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

مثال42:

أُثبت أنَّ المعادلة: $|z-6|=2|z+6-9i|$ تُمثِّل دائِرة، ثُم أجد مركزها وطول نصف قُطرها.

الحل:

$$|z-6|=2|z+6-9i|$$

$$|x-6+iy|=2|(x+6)+i(y-9)|$$

$$(x-6)^2+y^2=4\left((x+6)^2+(y-9)^2\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2=4\left(x^2+12x+36+y^2-18y+81\right)$$

$$x^2+y^2+20x-24y+144=0$$

$$(x+10)^2+(y-12)^2=100$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10