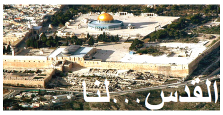
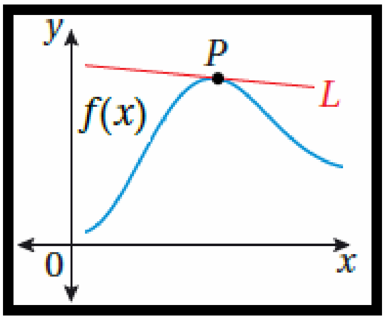


الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الدرس 1
مشتقة اقترانات خاصة
Differentiation of Special Functions

1-1) الاتصال والاشتقاق :

مشتقة الاقتران f(x) عند نقطة واقعة على منحناه هي
ميل المنحنى عند هذه النقطة (ميل المماس عند نقطة التماس)،
ويُرمَز إليها بالرمز f '(x)



العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال
الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق

ميل المماس = المشتقة الأولى

يكون الاقتران f(x) قابلاً للاشتقاق عند (x = a) إذا كانت f '(a) موجودة ، ويكون متصلاً عندها

باختصار :

1) إذا كان f(x) متصلاً عند x = a ، فإنه قد يكون قابلاً للاشتقاق وقد يكون غير قابل للاشتقاق عندها

2) إذا كان f(x) قابلاً للاشتقاق عند x = a ، فإنه قطعاً متصل عند(a)

3) إذا كان f(x) غير متصل عند x = a ، فإنه غير قابل للاشتقاق عندها

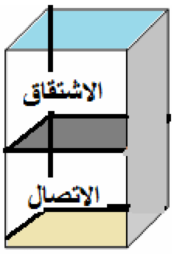
4) قابلية الاشتقاق عند نقطة تعني أنه يمكن رسم مماس لمنحنى الاقتران عند تلك النقطة
لذلك يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الرؤوس المدببة (الزوايا) مثل أصفار القيمة المطلقة
رغم اتصاله عندها ، وكذلك عندما يكون المماس رأسيا (لأن ميله غير معرف)

أو يمكن فهم الموضوع على أن هناك بناية مكونة من طابقين : الطابق الأول يمثل الاتصال والثاني يمثل الاشتقاق

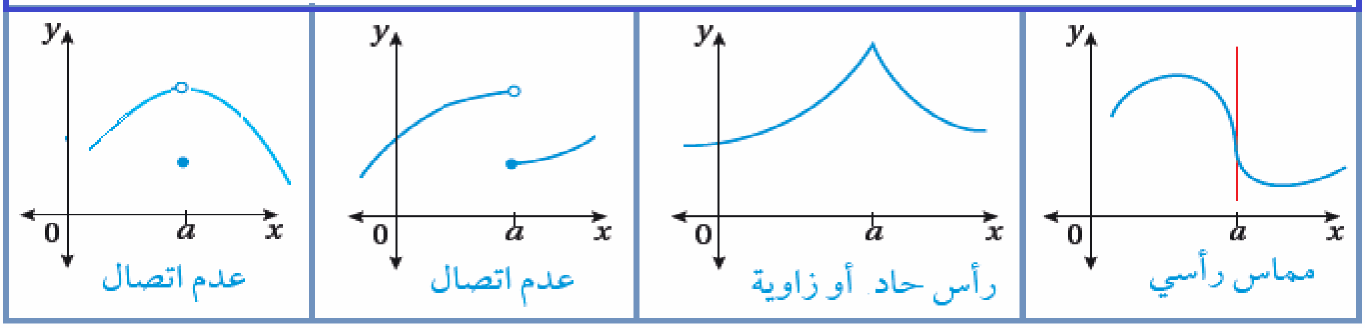
1- وجود طابق أول لا يعني وجود طابق ثاني ⇐ متصل لا يعني قابل للاشتقاق

2- وجود طابق ثاني يشترط وجود طابق أول ⇐ قابل للاشتقاق يعني متصل

3- عدم وجود طابق أول يعني استحالة وجود طابق ثاني ⇐ غير متصل يعني غير قابل للاشتقاق



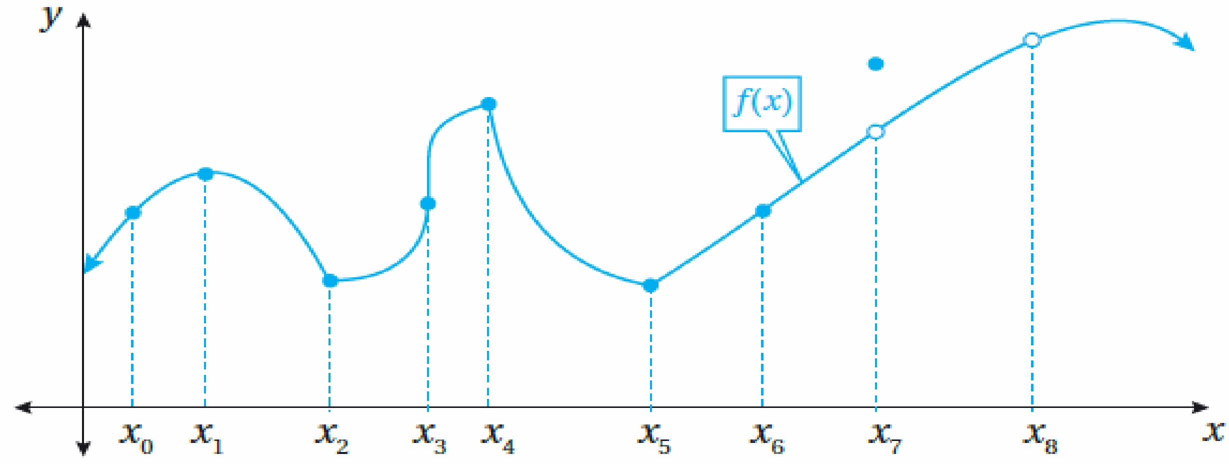
غير قابل للاشـــتقاق عندما $x = a$



ميل المستقيم الرأسي ..... غير مُعرَّف

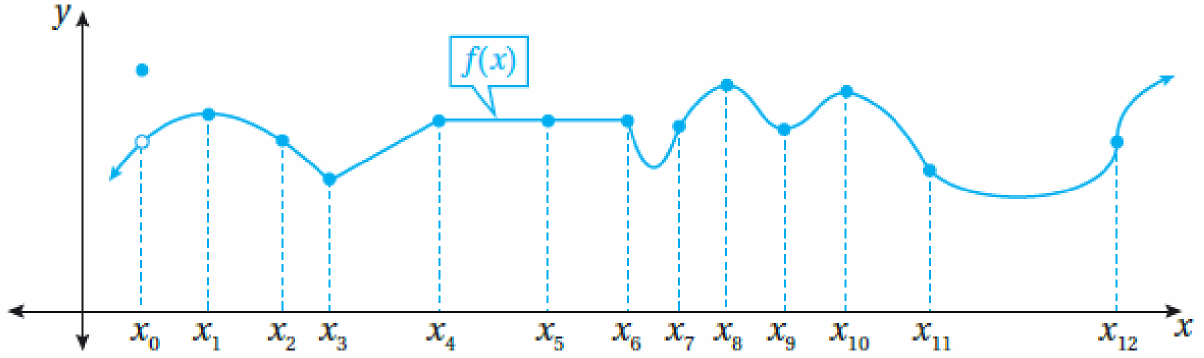
أتحقّق من فهمي 10

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.

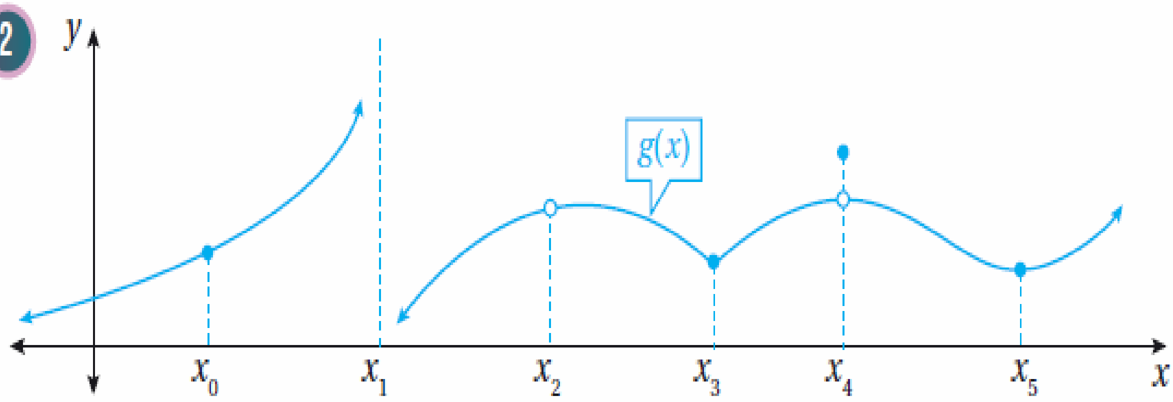


أتدرّب وأحُلّ المسائل 22

1 أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:



2



أتحقّق من فهمي 10

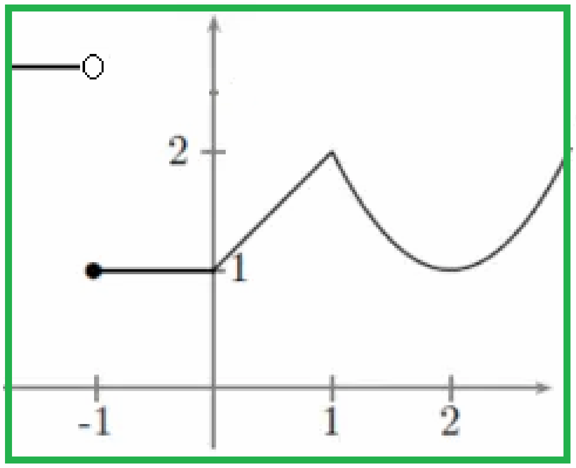
الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_2, x = x_4, x = x_5$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_7, x = x_8$ لأنه غير متصل عندها $x = x_3$

1 الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ غير متصل وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة

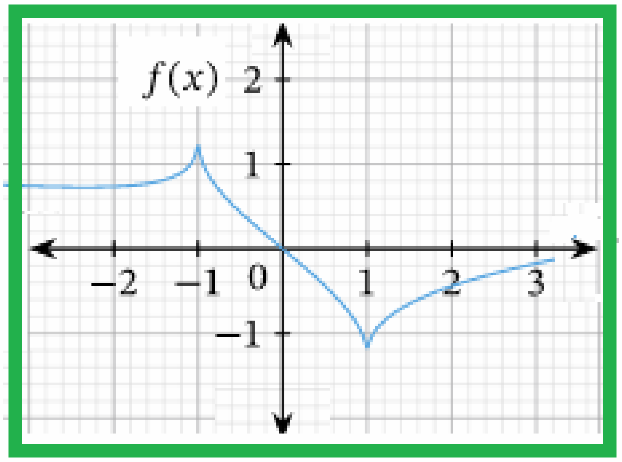
2 الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل

تمارين / واجب : حدد قيم (x) حيث f(x) غير قابل للاشتقاق مع ذكر السبب

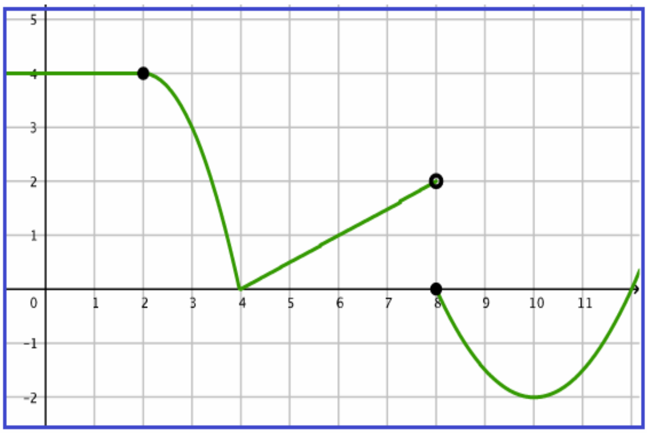
(1



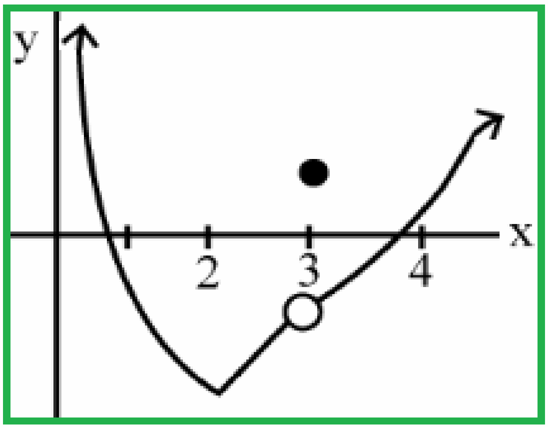
(2



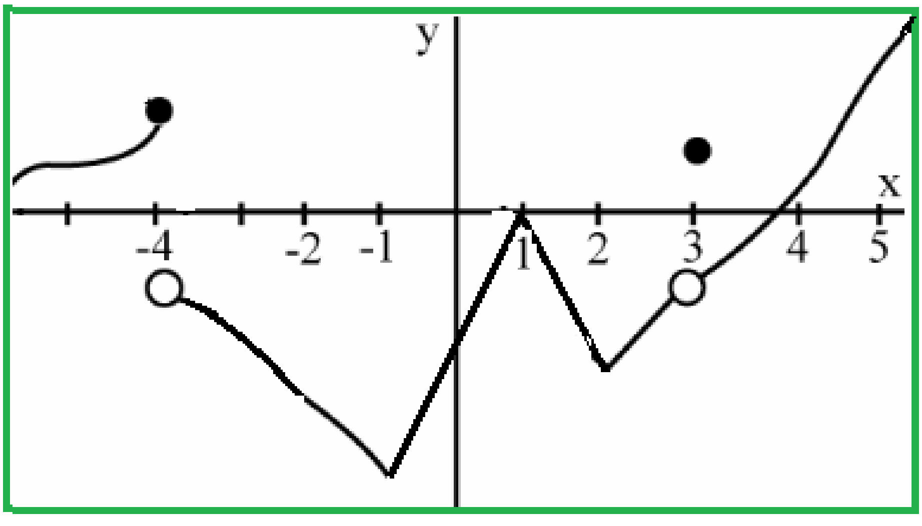
(3



(4



(5



مراجعة قواعد الاشتقاق :

إذا كان $y = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

إذا كان $y = c$ ، حيث c عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$

مشـــتقّة الثابت تساوي صفرًا.

قواعد الاشتقاق

y	$\frac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}
c	0
ax^n	anx^{n-1}
$u \pm v$	$\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

إذا كان $y = ax^n$ ، حيث n عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$

إذا كان $y = u \pm v$ ، حيث u و v اقترانا قوة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

إذا كان $y = (g(x))^n$ ، حيـــث n عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 10x - 3$

2) $f(x) = 5 - 3x^{-4} - x + \pi^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^{-5} - 1$

3) $f(x) = (3x+4)(x-1) = 3x^2 + x - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x + 1$

4) $\frac{d}{dx}(8 - x^3) = -3x^2$

البسط – المقام / المقام

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$$

5) $f(x) = x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

$\Rightarrow f'(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 = -32 + 12 = -20$

6) $f(x) = (3x^2 - 7x - 2)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}(3x^2 - 7x - 2)^{\frac{3}{2}}(6x - 7)$

7) $f(x) = \sqrt[7]{x^5} + \frac{3}{x^2} - 8 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{7}} + 3x^{-2} - 8$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}-1} + 3(-2)x^{-2-1} = \frac{5}{7}x^{\frac{-2}{7}} - 6x^{-3}$

$$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$

8) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^5}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$

$= x^{4-2} - 3x^{5-2} + x^{\frac{1}{3}-2} = x^2 - 3x^3 + x^{\frac{-5}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

$$\frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$$

9) $y=\sqrt{x}-\dfrac{5}{x^2}$

10) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{4}{x^2}+1$

توزيـع البسـط علـى المقـام

$$\frac{x\pm y}{z}=\frac{x}{z}\pm\frac{y}{z}$$

11) $y=7-5\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$

12) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

تحـذير

$$\frac{a}{b\pm c}\neq\frac{a}{b}\pm\frac{a}{c}$$

13) $y=\dfrac{x^5-x^{-2}}{x}$

14) $y=\dfrac{2-7x}{3x}$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3\div\tfrac{4}{5}=3\times\tfrac{5}{4}=\frac{3\times5}{4}$$

15) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-6}{\sqrt{x}}$

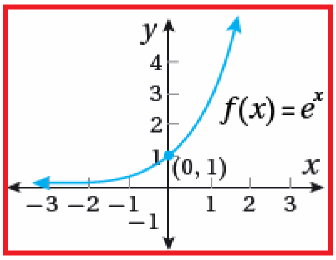
16) $y=\dfrac{x^5-8x^6}{4x^2}$

$$\frac{\frac{9}{2}}{7}=\tfrac{9}{2}\div7=\tfrac{9}{2}\times\tfrac{1}{7}=\frac{9}{2\times7}$$

17) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

18) $y=\dfrac{1}{(1-4x^2)^3}$

1-2) مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي



$f(x)=e^x$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الاقتران الأُسّي (exponential function) اقتران على الصورة $f(x)=ab^x$

حيث a, b عددان حقيقيان، و $a\neq 0, b\neq 1, b>0$: $f(x)=4(3^x)$

*** إذا كان أساس الاقتران هو العدد النيبيري (e) فإن الاقتران $f(x)=e^x$ يسمى الاقتران **الأسي الطبيعي** حيث (e) عدد غير نسبي يساوي تقريباً (2.7)

$e^{x+3}=e^x\times e^3$

نظرية إذا كان: $f(x)=e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ: $f'(x)=e^x$

مشتقته = نفسه

1) $f(x)=x^3+e^x+8 \Rightarrow f'(x)=3x^2+e^x$

2) $f(x)=3x+8e^{x+2}=3x+8e^xe^2 \Rightarrow f'(x)=3+8e^2e^x$

3) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{e^x}-\sqrt{e^x}+\sqrt[5]{x}=3x^{-2}+5e^{-x}-(e^x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{5}}$

$$=3x^{-2}+5e^{-1}e^x-(e^x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-6x^{-3}+5e^{-1}e^x+\frac{1}{2}(e^x)^{-\frac{1}{2}}(e^x)+\frac{1}{2}x^{\frac{-4}{5}}$$

4) $f(x)=3x-7e^x \Rightarrow f'(x)=3-7e^x$

$$\Rightarrow f'(0)=3-7e^0=3-7=-4 : \boxed{e^0=1}$$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{e^{3-x}}-e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}+\dfrac{6\sqrt[3]{x}-xe^x+4x^2}{2x} \Rightarrow f'(x)=$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=5e^x+3$ b) $f(x)=\sqrt{x}-4e^x$ c) $y=8e^x+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

	أتحقق من فهمي صفحة 14
a	$f'(x)=5e^x$
b	$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-4e^x=\frac{1}{2\sqrt{x}}-4e^x$
c	$f'(x)=8e^x-\frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}}=8e^x-\frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

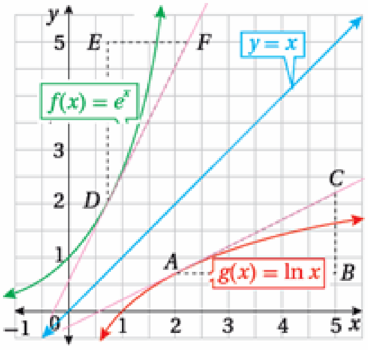
3-1) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $y = \ln x$

هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي الطبيعي: $y = e^x$

نظرية

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ: $f'(x) = \frac{1}{x}$



اللوغاريتم الطبيعي : يُسمّى اللوغاريتم للأساس (e) اللوغاريتم الطبيعي ، ويُرمز له (Ln)

$\boxed{\ln e = 1}$ $\boxed{\ln 1 = 0}$ $\boxed{\text{Ln}0: \text{غير معرف}}$ $\boxed{Ln\ x^3 = 3Ln\ x}$

$\boxed{Ln\ 3x^5 \neq 5Ln\ 3x}$ $\boxed{Ln\ 4x^2 = Ln\ 4 + Ln\ x^2 = Ln\ 4 + 2Ln\ x}$

1) $f(x) = 8Lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{x}$

2) $f(x) = Ln(5x^3) = Ln(5) + Ln(x^3) = Ln(5) + 3Ln(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 0 + \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$

3) $f(x) = (Lnx)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(Lnx)(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}Lnx$

4) $f(x) = Ln(x^2) = 2\text{Lnx} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$

استخدام قوانين اللوغاريتمات
يُسهل عملية الاشتقاق

5) $f(x) = Ln(5x)^2 \Rightarrow f'(x) =$

6) $f(x) = Ln(5x^2) \Rightarrow f'(x) =$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

b) $f(x) = \ln(2x^3)$

a	$f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x) = x^{\frac{1}{2}} + \ln 4 + \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
b	$f(x) = \ln(2x^3) = \ln 2 + 3\ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{x}$ أتحقق من فهمي صفحة 16

مفهوم اللوغاريتم ... وعلاقته بالأسس

$\log_2 8$: تعني

كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8)؟

الجواب: 3 مرات ، إذاً $\boxed{\log_2 8 = 3}$

إذا كان: $x > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$، فإنَّ:	
الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسّية
$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا	$b^y = x$

كذلك: $\log_5 25$ تعني : (5) أس كم تساوي (25) ؟؟؟ الجواب (2) . إذاً $\boxed{\log_5 25 = 2}$

1 $12^2 = 144 \Rightarrow 12^2 = 144 \to \log_{12} 144 = 2$	3 $(3)^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow (3)^{-4} = \frac{1}{81} \to \log_3 (\frac{1}{81}) = -4$
2 $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6 \to \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$	4 $34^0 = 1 \Rightarrow 34^0 = 1 \to \log_{34} 1 = 0$

$$10^y = x \Leftrightarrow y = Log x \ , \ x > 0$$

$$e^y = x \Leftrightarrow Ln e^y = Ln x \Leftrightarrow y Ln\cancel{e} = Ln x \Leftrightarrow y = Ln x \ , \ x > 0$$

قوانين اللوغاريتمات

$$Ln(x\, y) = Ln x + Ln y$$

$$Ln \frac{x}{y} = Ln x - Ln y$$

$$Ln(x)^a = a \ Ln(x)$$

1 $\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2 = 7 \log_5 x + 2 \log_5 y$

2 $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4 = 2 \log_7 (5x+3) - \log_7 4$

3 $\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2 = \log_4 x + 3 \log_4 y - 2 \log_4$

$$Log_b a = \frac{Log(a)}{Log(b)} = \frac{Ln(a)}{Ln(b)} = \frac{Log_c(a)}{Log_c(b)}$$

4-1) مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام :

$\boxed{f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x}$ or $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x}$ $\boxed{\sin^2 x=(\sin x)^2}$

$\boxed{f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x}$ or $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$ $\boxed{\sin x^2 \neq (\sin x)^2}$

1) $f(x)=\cos x+5\sin x+4 \Rightarrow f'(x)=-\sin x+5\cos x$

2) $f(x)=6\cos x+5x+4\pi \Rightarrow f'(x)=-6\sin x+5$

$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4-\sin x$ .....(خطأ)

$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4(-\sin x)=-4\sin x$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y=\dfrac{\sin x}{2}+3\cos x$

b) $f(x)=x^2+\cos x+\sin\dfrac{\pi}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة 18

a	$y=\dfrac{1}{2}\sin x+3\cos x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\cos x-3\sin x$
b	$f'(x)=2x-\sin x$	

أتدرّب وأحُلّ المسائل 22 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

3) $f(x)=2\sin x-e^x$

4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{4}-\pi\cos x$

5) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)+x^4$

6) $f(x)=e^{x+1}+1$

7) $f(x)=e^x+x^e$

8) $f(x)=\ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$

13) إذا كان: $f(x)=\ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x>0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y=\log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29) أُثبِت أنَّ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

30) مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\dfrac{dy}{dx}$ للاقتران: $y=\log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

3	$f'(x) = 2\cos x - e^x$
4	$f'(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$

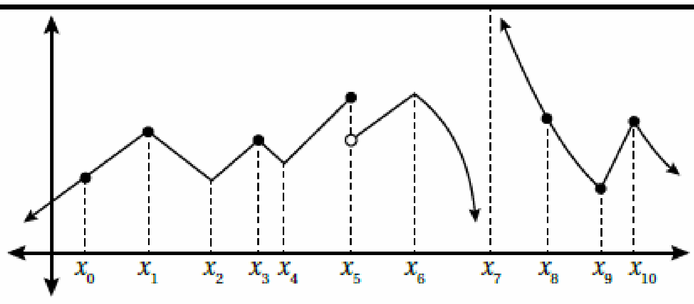
5	$f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$ $= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $= -3\ln x + x^4$ $f'(x) = -\dfrac{3}{x} + 4x^3$
6	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$

7	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
8	$f(x) = \ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n\ln x$ $f'(x) = 0 - n\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{n}{x}$

13	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

29	$y = \log x = \log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10}\ln x$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln 10} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln 10}$
30	$y = \log ax^2 = \log a + 2\log x$ $\dfrac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \dfrac{1}{x\ln 10} = \dfrac{2}{x\ln 10}$

1 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي: **4** $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$ **3** $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$ **2** $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

1	f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل، و f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لانه غير متصل عندهما.
2	$f'(x) = 9e^x - \dfrac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \dfrac{1}{6\sqrt{x^3}}$
3	$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \dfrac{2}{x^3}$
4	$f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin x$

تمارين / واجب

1) $f(x)=24\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(-8)=a)\ 1 \quad b)-2 \quad c)\ 2 \quad d)-48$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(3)=a)\ 9 \quad b)-9 \quad c)\ \dfrac{1}{9} \quad d)\ \dfrac{-1}{9}$

3) $f(x)=9x \Rightarrow f'(2)=a)\ 9 \quad b)\ 18 \quad c)\ 0 \quad d)\ 81$

4) $f(x)=2e^{x+1} \Rightarrow f'(0)=a)\ 2e \quad b)\ e \quad c)\ 2e^{3} \quad d)\ 1$

5) $f(x)=\ln x^{6} \Rightarrow f'(2)=a)\ 3 \quad b)\ 2 \quad c)\ 6 \quad d)\ 0$

Hasanat

Hasanat

6) $f(x)=\ln(x^{2}e^{3x}) \Rightarrow f'(x)=$

a) $\dfrac{2}{x}+3e^{3x}$ $\quad b)\dfrac{2}{x}+e^{2x} \quad c)\ 2x+3 \quad d)\dfrac{2}{x}+3$

7) $f(x)=\sin x+\sin\pi \Rightarrow f'(x)=a)\ \cos x \quad b)-\cos x$

$c)\ \cos x+\cos\pi \quad d)\ \cos x-1$

8) $f(x)=\ln\dfrac{e^{2x}}{x^{4}}+3x \Rightarrow f'(-1)=$

$a)\ e^{2} \quad b)\ e^{2}+3 \quad c)\ 1 \quad d)\ 9$

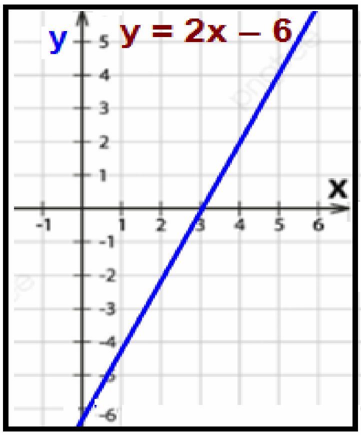
9) $f(x)=4\ln 2+\sin\pi-\cos x+(3x+2)^{2} \Rightarrow f'(0)=$

$a)\ 13 \quad b)\ 11 \quad c)\ 12 \quad d)\ 4$

10) $f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=a)\ \cos x+\sin x \quad b)\cos x-\sin x$

$c)-\cos x-\sin x \quad d)-\cos x+\sin x$

5-1) تطبيقات : معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما



مراجعة المستقيمات في المستوى الديكارتي

صور معادلة المستقيم : y = 2x – 6 أو 2x – y – 6 = 0

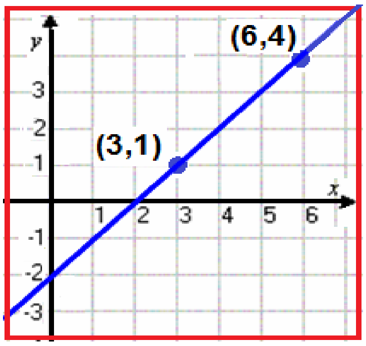
وهي تعني مجموعة النقاط التي تحقق هذه المعادلة :

(0 , – 6) , (1 , – 4)

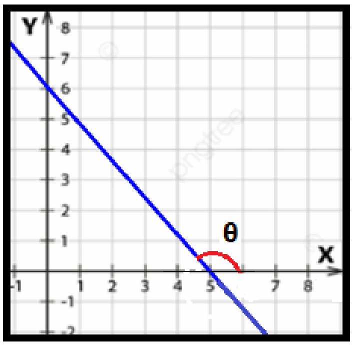
(3 , 0) , (4 , 2)

لكتابة معادلة المستقيم يلزمنا معرفة ميله ، وهناك ثلاث طرق (على الأقل) لمعرفة الميل :

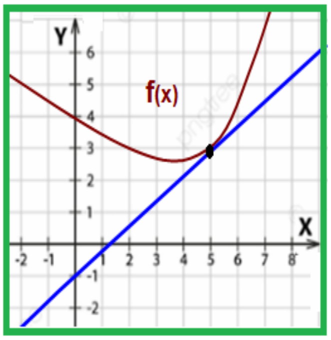
من خلال فرق الصادات على فرق السينات ..... ظل الزاوية مع السيني الموجب ..... مشتقة المنحنى عندما يكون مماسا عند نقطة التماس



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-3}{4-1}=1$$



$$m=\tan\theta$$



$$m=f'(x_1)=f'(5)$$

معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1\ (x_1, y_1)$، وميله m : $y-y_1=m(x-x_1)$

إذا توازى مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني

$$y=2x-5 \Rightarrow y'=2$$
$$4x+8-2y=0 \Rightarrow y=2x+8 \Rightarrow y'=2$$

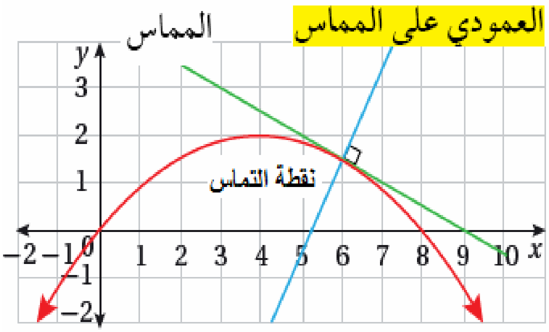
$\Rightarrow$ متوازيـــان

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (1–)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني

$$y=3x-1 \Rightarrow y'=3 \Rightarrow \boxed{m=3}$$
$$3y+x+2=0$$
$$\Rightarrow y=-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{3} \Rightarrow y'=-\tfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m=-\tfrac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ متعامـدان



معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad , \quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$$

ملاحظة : معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y - y_1) = m(x - x_1)$ ،

الجديد في معادلة المماس أن الميل(m) يساوي المشتقة الأولى عند نقطة التماس

مثال1) إذا كان $f(x) = Ln(\frac{1}{x})$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(e,-1)$

$$f(x) = Ln(\frac{1}{x}) = Ln1 - Lnx = -Lnx \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = -\frac{1}{e}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - -1 = f'(e)(x - e) \Rightarrow \boxed{y + 1 = -\frac{1}{e}(x - e)} \Rightarrow \boxed{\boxed{y + 1 = e(x - e)}}$$

مثال 2) إذا كان $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند (x= 2)

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$y = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -(x-1)^{-2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = -1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y - 1 = -1(x - 2)}} \quad , \quad \boxed{y - 1 = (x - 2)}$$

مثال 3) إذا كان $f(x) = 2e^x + \sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند (x = 0)

$$f(x) = 2e^x + \sin x \Rightarrow y_1 = f(0) = 2$$

$$f'(x) = 2e^x + \cos x \Rightarrow m = f'(0) = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y - 2 = 3(x - 0)}} \Rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

مثال 4) إذا كان $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند ($x=\frac{2\pi}{3}$)

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \Rightarrow y_1=f(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{4}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Rightarrow m=f'(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{-1}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y-\frac{3}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{4}(x-\frac{2\pi}{3})} \quad , \quad \boxed{y-\frac{3}{4}=\frac{4}{\sqrt{3}}(x-\frac{2\pi}{3})}$$

مثال 5) جد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^3 + x - 2$

والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $y = 13x + 7$

$$f(x)=x^3+x-2 \Rightarrow m=f'(x)=3x^2+1$$

$$y=13x+7 \Rightarrow m=y'=13 \quad \boxed{3x^2+1=13 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow (2,8),(-2,-12)}$$

مثال 6) جد المقطع (x) للمماس لمنحنى الاقتران $f(x)=2Lnx+6$ عند النقطة (1 , 6)

$$f(x)=2Lnx+6$$

$$f'(x)=\frac{2}{x} \Rightarrow m=f'(1)=2 \Rightarrow \boxed{y-6=2(x-1)}$$

$$y=0 \Rightarrow -6=2x-2 \Rightarrow x=-2$$

ملاحظة :

لإيجاد المقطع(x) نضع بدلاً من (y) صفر

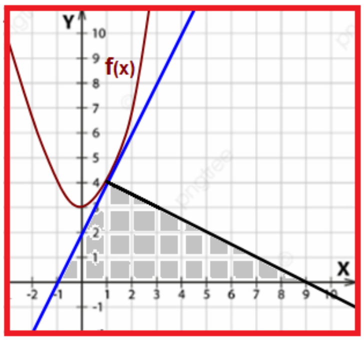
ولإيجاد المقطع(y) نضع بدلاً من (x) صفر

مثال 7) جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس والمحور (x)

لمنحنى الاقتران $f(x)= x^2 + 3$ عند النقطة (1 , 4)

$$f(x)=x^2+3 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f'(1)=2$$

$$\Rightarrow \boxed{y-4=2(x-1)} \quad , \quad \boxed{y-4=-\frac{1}{2}(x-1)}$$



$$y=0 \Rightarrow -4=2x-2 \quad , \quad y=0 \Rightarrow -4=-\frac{1}{2}x+2$$

$$\Rightarrow x=-1 \qquad\qquad \Rightarrow x=9 \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}(9--1)(4)=20}$$

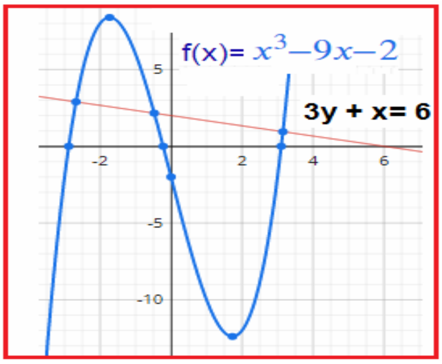
مثال 8) إذا كـان $f(x)=e^{x-3}-x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

المماس موازٍ للمحور x ⟵ $f'(x)=0$

$$f'(x)=e^{x-3}-1=0$$

$$\Rightarrow e^{x-3}=1=e^{0}\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3$$

مثال 9) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $f(x) = x^3 – 3x –2$ والتي يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم الذي معادلته $3y + x= 6$



$$f(x)=x^3-9x-2\Rightarrow m=f'(x)=3x^2-9$$

$$3y+x=6\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+6\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}\Rightarrow m=3$$

$$\boxed{3x^2-9=3\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2\Rightarrow(2,-12),(-2,8)}$$

مثال 10) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x –3$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x – 1$

$$f(x)=y\Rightarrow x^2+2x-3=x-1$$
$$\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=-2\quad,\quad x=1$$

$x=-2\Rightarrow y=-3\Rightarrow(-2,-3)$ $f'(x)=2x+2\Rightarrow f'(-2)=-2\Rightarrow m=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y--3=\frac{1}{2}(x--2)$	$x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow(1,0)$ $f'(1)=4\Rightarrow m=\frac{-1}{2}$ $\Rightarrow y-0=\frac{-1}{4}(x-1)$

أتحقَّق من فهمي إذا كان الاقتران: $f(x)=\ln\sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$. b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$.

	أتحقق من فهمي صفحة 19
a	$f'(x)=\frac{1}{2x}\to f'(e)=\frac{1}{2e}\to y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ $\to y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 23

إذا كان: $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}e^{x}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

10 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

11 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^{x}-2x$.

12 اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\sin x+\cos x$ عندما $x=\pi$؟

a) $y=-x+\pi-1$ b) $y=x-\pi-1$ c) $y=x-\pi+1$ d) $y=x+\pi+1$

إذا كان الاقتران: $f(x)=\ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

14 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

15 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e+\frac{1}{e}$.

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: إذا كان الاقتران: $y=e^{x}-ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

26 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y=2e^{x}+3x+5x^{3}$.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y=ke^{x}$، حيث: $k>0$، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

28 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

9	ميل المماس عند النقطة $\left(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$: $f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow f'(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}e^{\pi}=-1+\frac{1}{2}e^{\pi}$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$: $y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\left(-1+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x-\pi)$ $y=\left(-1+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)x+\pi-\frac{\pi}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}e^{\pi}$
10	ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}}=\frac{-2}{-2+e^{\pi}}=\frac{2}{2-e^{\pi}}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\frac{2}{2-e^{\pi}}(x-\pi) \Rightarrow y=\frac{2}{2-e^{\pi}}x-\frac{2\pi}{2-e^{\pi}}+\frac{1}{2}e^{\pi}$

11	$f(x)=e^{x}-2x \Rightarrow f'(x)=e^{x}-2$ $f'(x)=0 \Rightarrow e^{x}=2 \Rightarrow x=\ln 2\approx 0.69$

12	$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$ عندما $x = \pi$، فإن: $y = f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = -1$ ميل المماس عند $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos \pi - \sin \pi = -1$ بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1
b	معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$

14	$f'(x) = \frac{1}{x}$ ⇨ ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو: $f'(e) = \frac{1}{e}$ معادلة المماس هي: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$ وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته.
15	بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$ معادلة العمودي: $y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = -ex + e^2 + 1$ لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته $0 = -ex + e^2 + 1$ $ex = e^2 + 1 \quad \Rightarrow x = \frac{e^2+1}{e} = e + \frac{1}{e}$

25	$y = e^x - ax$ نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0,1)$ $x = 0 \quad \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$ $\frac{dy}{dx} = e^x - a$ ⇨ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$ معادلة معادلة المماس هي: $y - 1 = (1-a)(x - 0) \rightarrow y = (1-a)x + 1$
26	ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$ لكل x فإن $2e^x > 0$ و لكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$ بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $y' > 3$ إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

27	الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$ ، أي أن إحداثيي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = ke^0 = k$ معادلة المماس هي: $y - k = k(x - 0) \quad \Rightarrow y = kx + k$ ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \quad \Rightarrow \quad x = -1$ إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$
28	ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$ وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أنّ: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \mp 10$ ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

6 أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

5	$f(x) = 2e^x + x \quad , \quad x = 2$ $f(2) = 2e^2 + 2$ $f'(x) = 2e^x + 1 \Rightarrow f'(2) = 2e^2 + 1$ $y - 2e^2 - 2 = (2e^2+1)(x-2)$ $y = (2e^2+1)x - 2e^2$
6	$f'(x) = 3 + \cos x$ عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$ $3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$ وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \le \cos x \le 1$ إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f.

9	$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x \quad , x = e^2$ $f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \quad \Rightarrow (e^2, 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$ $y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$
10	ميل المستقيم $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3 $f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

11	$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$ $f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2$
12	نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = 2$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$ معادلة المماس: $y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$

تمارين إضافية / واجب

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لكل اقتران فيما يأتي عند قيمة (x) المبينة إزاءه : (الأسئلة من 1 – 3)

1) $f(x) = e^{x+2} + x \;,\; x = -2$

2) $f(x) = Ln(3x) \;,\; x = 1$

3) $f(x) = x + \cos x \;,\; x = \pi$

4) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $f(x) = x^3 - 5x$ عند نقطة (نقاط) تقاطعه مع المستقيم $y = 4x$

5) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 7x + 3$ ، والتي يكون المماس عندها:

(a موازيًا للمستقيم $5x + y - 3 = 0$ (b عموديًا على المستقيم $2x + 4y = 1$

6) أوجد قيمتي a ، b ، إذا كان منحنى $y = ax^3 + bx^2$ يمس المستقيم $3x + y - 1 = 0$ عند $(1, -2)$

7) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 4x + 3$ والتي يكون المماس عندها موازيًا للمحور x

8) جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم لمنحنى $y = \sqrt{x} \;,\; x > 0$ عند النقطة (2 , 4) والمحور (x) والمستقيم x = 4 (الجواب: 8)

9) إذا كان $f(x) = Ln\, x^4$ ، فجد قيم (x) التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $2x + 3y = 6$

10) إذا كان $f(x) = e^{2x+1} - 2x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

6-1) تطبيقات :الحركة في خط مستقيم : هناك ثلاثة مصطلحات :

$s(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow a(t)$

المسافة أو موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة velocity والتسارع acceleration
مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ..... ومشتقة السرعة تساوي التسارع

الحركة في خط مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، فإنَّ
سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$
وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$
أمّا سرعته فهي $|v(t)|$.

تُسمّى النقطة 0 على خط الأعداد نقطة الأصل.

سكون لحظي تعني أن السرعة تساوي صفرا $v(t) = 0$

يعود الجسم إلى موقعه الأصلي عندما $s(t) = s(0)$

وليس $s(t) = 0$

قواعد مهمة : 1) إذا عاد الجسم إلى موقعه الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً ($s(t) = s(0)$)

2) إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)
وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)
وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)
الموقع كمية متجهة.

3) لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم نساوي السرعة بالصفر ونجد t

1) يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$
أوجد سرعته عندما ينعدم التسارع.

$$s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$$
$$v = 3t^2 - 6t + 5$$
$$a = 6t - 6$$

عندما ينعدم التسارع، فإن $a = 0 \Leftarrow 6t - 6 = 0 \to t = 1$

$$(v)_{t=1\text{sec}} = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2 \text{ cm/sec}$$

2) يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = 12t^2 - t^3$ ، فجد
1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما t =2   3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي
2) قيم (t) التي يكون عندها في حالة سكون لحظي   4) اتجاه حركة الجسم عند t =3

$$s(t) = 12t^2 - t^3$$

1) $v(t) = 24t - 3t^2 \Rightarrow v(2) = 48 - 12 = 36$

1+) $a(t) = 24 - 6t \Rightarrow a(2) = 24 - 12 = 12$

2) $v(t) = 0 \Rightarrow 24t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0$ أو $t = 8$

3) $s(0) = 0 \Rightarrow s(t) = 12t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(12 - t) = 0 \Rightarrow t = 12$

4) $v(3) = 24(3) - 3(9) = 45 > 0 \Rightarrow +$

مثال : إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - t^2 + 6$ موقع جسم ، فجد

1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 3$ ، $t = 0.5$

الحل:

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$s(t) = t^3 - t^2 + 6$$

$$1)\quad v(t) = 3t^2 - 2t \Rightarrow v(2) = 3(2)^2 - 2(2) = 8$$

$$1+)\quad a(t) = 6t - 2 \Rightarrow a(2) = 6(2) - 2 = 10$$

$2) v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(3t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0$ أو $t = \frac{2}{3}$

$$3) s(t) = s(0) = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 + 6 = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 = 0$$

$$t^2(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$4)\ v(3) = 3(3)^2 - 2(3) = 21 \Rightarrow +$$

$$v(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{4}) - 2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -$$

مثال : يتحرك جسم ويحدد موقعه بالاقتران : $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ ، جد

1) موقع الجسم بعد (5) ثوان ، 2) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$

$s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9 \longrightarrow s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6$

$v(t) = 1.8t^2 - 1.5 \longrightarrow v(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5$

$a(t) = 3.6t \longrightarrow a(5) = 3.6(5) = 18$

أتحقق من فهمي يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم،

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

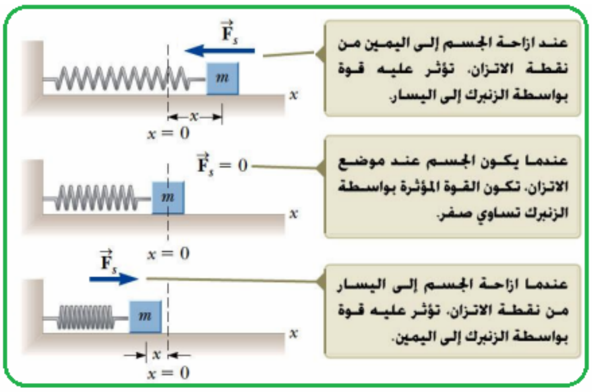
c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

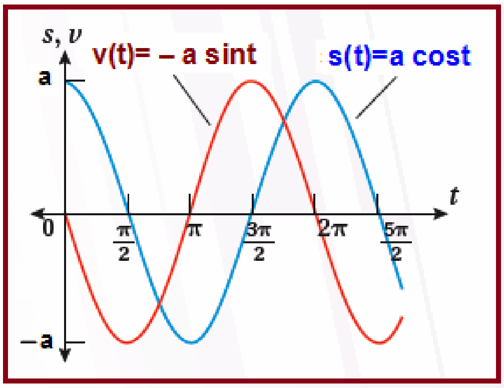
d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

	تحقق من فهمي صفحة 22
a	$s(t) = t^2 - 7t + 8$ $v(t) = 2t - 7 \rightarrow v(4) = 1\ m/s$ $a(t) = 2 \rightarrow a(4) = 2\ m/s^2$
b	$v(t) = 2t - 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{2}\ s$
c	$v(2) = -3\ m/s$ بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك لليسار عندما $t = 2$
d	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8\ m$ $s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t - 7) = 0 \rightarrow t = 0\ or\ t = 7$ إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7\ s$

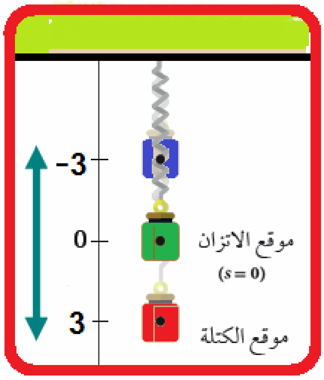
7-1) تطبيقات : الحركة التوافقية البسيطة

هي حركة جُسيم تحت تأثير قوة يتناسب مقدارها مع بعد الجُسيم عن موضع اتزانه واتجاهها دائمًا نحو موضع الاتزان





مثال) يُبيِّن الشكل المجاور كتلة معلقة بزنبرك ، تم شدها (3) وحدات أسفل الاتزان ،
ثم تُرك ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل حيث يُعطى موقعه بالاقتران $S(t)= 3\cos t$
جِد سرعة الكتلة المتجهة وتسارعها



الحل: السرعة = مشتقة الموقع $\quad v(t) = S'(t)= -3\sin t$

التسارع = مشتقة السرعة $\quad a(t) = v'(t) = -3\cos$

ملاحظات :

– يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 3$ والموقع $s = -3$ على المحور s،
والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان.

– تكون قيمة السرعة أكبر ما يُمكِن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$.
وفي هذه الحالة، فإنَّ $(\cos t = 0)$ أي أن قيمة اقتران الموقع تُصبِح صفرًا عند (موقع الاتزان)
وبالتالي فأنَّ سرعة الجسم تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

– قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ لأنَّ : مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وتسحبه الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

– يكون التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان ؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تتساويان ، ولا يكون التسارع صفرًا.

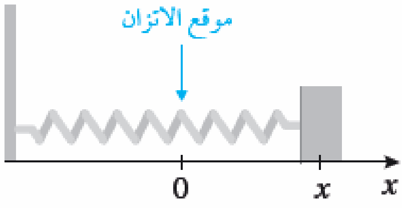
مثال) يُبيِّن الشكل المجاور جسماً مثبتاً في زنبرك بشكل أفقي على سطح أملس ،ويعطى موقعه بالاقتران $S(t)= 4\sin t$ ، جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه

الحل: السرعة = مشتقة الموقع $\quad v(t) = S'(t) = 4\cos t$

التسارع = مشتقة السرعة $\quad a(t) = v'(t) = -4\sin t$

مسألة اليوم

يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، و x الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الجسم، وسرعته المتجهه، وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$؟

1	**مسألة اليوم صفحة 8** $x(t) = 8\sin t \quad \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \quad \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \quad \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2$
2	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

a	**أتحقق من فهمي صفحة 24** $s(t) = 7\sin t \qquad v(t) = 7\cos t \qquad a(t) = -7\sin t$
b	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7\ m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودا وهبوطا بين الموقعين $s = 7\ m, s = -7\ m$ ، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi\ s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7\ m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $\lvert 7\cos t \rvert = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $\lvert s(t) \rvert = 7 \rightarrow v(t) = 0$ (اللحظات $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

17 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

18 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

19 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

20 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

21 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

22 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

23 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

24 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

32 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون لحظي أوَّل مرَّة بعد انطلاقه.

33 أجد موقع الجُسَيْم عندما يكون تسارعه صفرًا، مُبرِّرًا إجابتي.

16	$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ $v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \Rightarrow v(5) = 40\ m/s$ $a(t) = 6t - 8 \Rightarrow a(5) = 22\ m/s^2$

17	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $\rightarrow t = \frac{5}{3}\ s \quad or\ t = 1\ s$

18	$v(4) = 21\ m/s$ إشارة السرعة موجبة ⟸ الاتجاه موجب

19	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0\ m$ $s(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$ $\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0 \quad \Rightarrow t = 0$ $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية. إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا.

20	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1\ m$
21	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0 \Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t \Rightarrow a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4\ m/s^2$

22	$s(t) = 4\cos t \Rightarrow v(t) = -4\sin t \Rightarrow a(t) = -4\cos t$
23	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ \text{m/s}$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$
24	من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 4\ \text{m}, s = -4\text{m}$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين 4 m/s، و4 m/s− ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان. نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرًا.
31	$s(t) = 4 - \sin t \Rightarrow v(t) = -\cos t \Rightarrow a(t) = \sin t$
32	$v(t) = -\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$ ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3\ \text{m}$
33	$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أنَّ: $s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$ أي أن الجسيم يكون عند $s = 4\ \text{m}$ عندما يكون تسارعه صفرًا.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

7 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

8 أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

7	$s(t) = 3t^2 - t^3\ , t \geq 0$ السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$ التسارع: $a(t) = 6 - 6t$
8	يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ $v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$ $s(0) = 0, \qquad s(2) = 12 - 8 = 4$ إذن يكون الجسيم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0\ \text{m},\ s = 4\ \text{m}$

تمارين إضافية / واجب

1) إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ موقع جُسَيْم يتحرك في خط مستقيم ، فجد

1) جد سرعة الجُسَيْم عندما تكون سرعته 6 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 3$ ، $t = 1$

---

2) إذا مثل الاقتران $s(t) = 18t^2 - t^3$ موقع جسم ، فجد

1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 1$

---

3) يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4e^t - 8t + 2$, $t \geq 0$, موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

1) حدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

---

4) يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويُحدِّد الاقتران : $s(t) = 6 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق:

1) جد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة. 2) صِف حركة الجسم.

أسئلة الوزارة على الدرس الأول

3) يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما قيم t بالثواني التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي؟

a) $1 , \frac{3}{2}$ b) $1 , 2$ c) $\frac{3}{2} , 2$ d) $1 , 3$

15) يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 5$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

a) $(4 , \infty)$ b) $(0 , 4)$ c) $(2 , 4)$ d) $(2 , \infty)$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات