المرجع في الريـاضيـات

للصف الثانـي ثانـوي العلمي

كتاب الطالب

الفصل الأول

الوحدة الأولى (التفاضل)

يـعتـبـر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة ويـحـتـوي على:

مسألة اليوم / الأمثلة / أتـحقق من فهمي / أتـدرب وأحل المسائل / أسئلة الوحدة

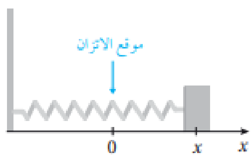
الأستـاذ: معتـصم ابـراهيـم

0788586401

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

مسألة اليوم : يهتز جسم مثبت في زنبرك أفقياً على سطح أملس كما في الشكل المجاور ، ويمثل الاقتران $x(t) = 8\sin t$ موقع الجسم ، حيث t الزمن بالثواني ، و x الموقع بالسنتيمترات :

1) أجد موقع الجسم ، وسرعته وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$.



أولاً : أيجاد موقع الجسم:

$$x(t) = 8\sin t$$

$$x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$$

ثانياً : أيجاد سرعة الجسم:

$$x(t) = 8\sin t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t$$

$$v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$v\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$$

ثالثاً : أيجاد تسارع الجسم:

$$v(t) = 8\cos t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t$$

$$a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

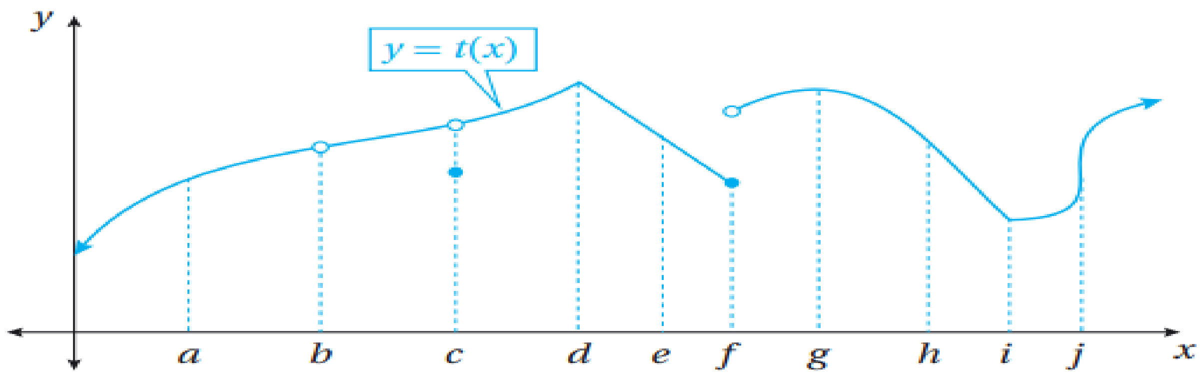
$$a\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm/s^2$$

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$.

بما أن السرعة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$.

الاتصال والاشتقاق (صفحة 8)

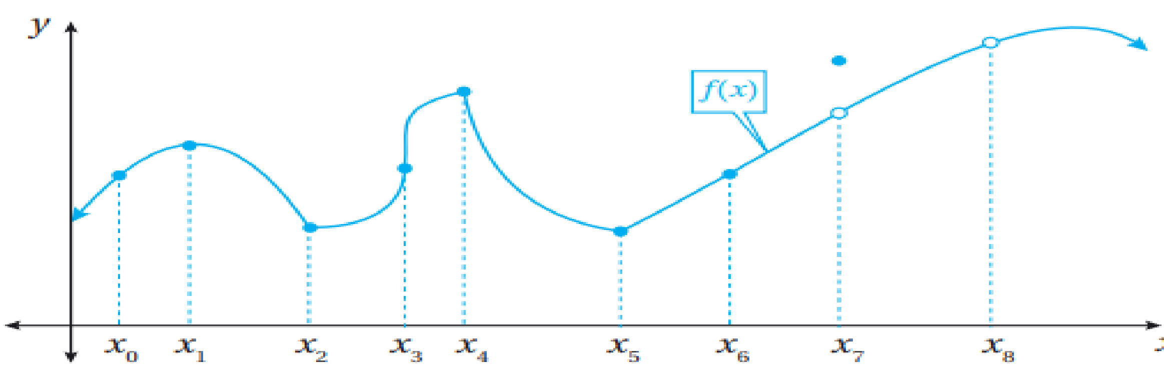
مثال 1 : يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ ، غير قابل للاشتقاق ، مبرراً إجابتي .



الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = b$ و $x = c$ و $x = f$ ، لأنه غير متصل عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = i$ و $x = d$ ، نظراً إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = j$ ، نظراً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

أتحقق من فهمي:

يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ ، غير قابل للاشتقاق ، مبرراً إجابتي .



الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_5$ و $x = x_4$ و $x = x_2$ ، لأن لمنحناه رأس حاد عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_8$ و $x = x_7$ ، لأنه غير متصل عندهما ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ ، نظراً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي (صفحة 11)

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ f(x) = 3\,e^x$

$\acute{f}(x) = 3\,e^x$

$2)\ f(x) = x^2 + e^x$

$\acute{f}(x) = 2x + e^x$

$3)\ y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$

$= \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$

$= x^{\frac{-2}{3}} - 2e^x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}} - 2e^x$

$= -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$

أتحقق من فهمي: (صفحة12)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ f(x) = 5\,e^x + 3$

$\acute{f}(x) = 5\,e^x$

$2)\ f(x) = \sqrt{x} - 4\,e^x$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 4\,e^x$

$3)\ f(x) = 8\,e^{x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$f(x) = 8\,e^{x} + 4x^{\frac{-1}{5}}$

$\acute{f}(x) = 8\,e^{x} - \dfrac{4}{5}x^{\frac{-6}{5}}$

$\acute{f}(x) = 8\,e^{x} - \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^{6}}}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (صفحة 13)

مثال 3: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: صفحة 14

$1)\ f(x) = \ln(x^{4})$

$f(x) = 4\ln x$

$\acute{f}(x) = \dfrac{4}{x}$

$2)\ f(x) = \ln(xe^{x}) + \ln 7x$

$f(x) = \ln x + \ln e^{x} + \ln 7 + \ln x$

$f(x) = 2\ln x + x + \ln 7$

$\acute{f}(x) = 2\dfrac{1}{x} + 1 + 0$

$\acute{f}(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

أتحقق من فهمي (صفحة14)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$f(x) = \sqrt{x} + \ln 4 + \ln x$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 + \frac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \ln(2x^3)$

$f(x) = \ln 2 + 3\ln 2x$

$\acute{f}(x) = 0 + \frac{3}{x}$

$\acute{f}(x) = \frac{3}{x}$

مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام (صفحة 15)

مثال 4: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 3\sin x + 4$

$\acute{f}(x) = 3\cos x$

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

اتحقق من فهمي: (صفحة16)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$1)\quad y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cos x - 3\sin x$$

$$2)\quad y = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \sin x + \cos\frac{\pi}{2}$$

تطبيقات معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما (صفحة 16)

مثال 5: إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln(\frac{x}{e})$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = \ln(\frac{x}{e})$$

$$f(x) = \ln x - \ln e$$

$$f(x) = \ln x - 1$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$ ميل المماس

$$\acute{f}(1) = \frac{1}{1}$$

$\boxed{\acute{f}(1) = 1}$ $x = 1$ ميل المماس عند

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 1(x - 1)$$

$$y + 1 = x - 1$$

$$y = x - 1 - 1$$

$$\boxed{y = x - 2}$$ معادلة المماس

2) ايجاد معادلة العمودي على المماس:

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$\mathrm{m}_1 = -\frac{1}{m}$$

$$\mathrm{m}_1 = -\frac{1}{1}$$

$$\mathrm{m}_1 = -1$$

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = \mathrm{m}_1(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y + 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 1 - 1$$

$$\boxed{y = -x}$$ معادلة العمودي على المماس

أتحقق من فهمي: (صفحة 17)

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln\sqrt{x}$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

1) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

$$f(x) = \ln\sqrt{x}$$

$$f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2x}$$ ميل المماس

$$\boxed{\acute{f}(e) = \frac{1}{2e}}$$ ميل المماس عند $x = e$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2e}e$$

$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2e}x}$$ معادلة المماس

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$\mathrm{m}_1 = -\frac{1}{m}$$

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{2e}}$$

$\boxed{m_1 = -2e}$ ميل العمودي على المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

$\boxed{y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}}$ معادلة العمودي على المماس

تطبيقات الحركة في خط مستقيم (صفحة17)

مثال 6: يمثل الاقتران : $t \geq 0$, $s(t) = 6t^2 - t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$

سرعة الجسم:

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

$$v(t) = \acute{s}(t) = 12t - 3t^2$$

$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$

$$v(2) = 24 - 12$$

$$\boxed{v(2) = 12 \;\; m/s}$$

تسارع الجسم

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$a(t) = \acute{v}(t) = 12 - 6t$

$a(2) = 12 - 6(2)$

$a(2) = 12 - 12$

$a(2) = 0 \;\; m/s^2$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$v(t) = 12t - 3t^2$

$12t - 3t^2 = 0$

$3t(4 - t) = 0$

إما $3t = 0$

$\boxed{t = 0}$

أو $4 - t = 0$

$\boxed{t = 4}$

إذن يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$ ، أي عندما $t = 4$

3) في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$

$v(t) = 12t - 3t^2$

$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$

$v(5) = 60 - 75$

$v(5) = -15$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي.

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$ ، ومنه فإن $s(0) = 0$

$s(t) = 6t^2 - t^3 = 0$

$6t^2 - t^3 = 0$

$t^2(6 - t) = 0$

إما $t^2 = 0$

$\boxed{t = 0}$

أو $6 - t = 0$

$\boxed{t = 6}$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $6\ s$

أتحقق من فهمي: (صفحة20)

يمثل الاقتران : $s(t) = t^2 - 7t + 8\ \ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

سرعة الجسم المتجهة

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$s(t) = t^2 - 7t + 8$

$v(t) = \acute{s}(t) = 2t - 7$

$v(4) = 2(4) - 7$

$v(2) = 8 - 7$

$\boxed{v(2) = 1\ \ m/s}$

تسارع الجسم

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$a(t) = \acute{v}(t) = 2$

$a(4) = 0\ \ m/s^2$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$$v(t) = 2t - 7$$

$$2t - 7 = 0$$

$$2t = 7$$

$$t = \frac{7}{2}\ s$$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$ ؟

$$v(t) = 2t - 7$$

$$v(2) = 2(2) - 7$$

$$v(2) = 4 - 7$$

$$v(2) = -3$$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$

$$s(t) = t^2 - 7t + 8$$

$$s(0) = (0)^2 - 7(0) + 8$$

$$s(0) = 8$$

$$t^2 - 7t + 8 = 8$$

$$t^2 - 7t = 8 - 8$$

$$t^2 - 7t = 0$$

$$t(t - 7) = 0$$

إما $\boxed{t = 0}$

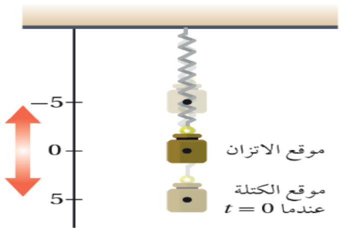
أو $\boxed{t = 7}$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $7\ s$

تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة (صفحة 20)

مثال7: (صفحة20)

زنبرك : يبين الشكل المجاور جسما معلقا بزنبرك ، شد 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$ ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل . ويمثل الاقتران $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات:



1) أجد اقترانا ً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقرانا ً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

اقتران السرعة المتجهة

$$v(t) = \acute{s}(t) = -5\sin t$$

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -5\cos t$$

2- أصف حركة الجسم.

1- اعتمادا ً على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع ، فإن الجسم يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s والقيمة السالبة تعني أن الجسم فوق موقع الإتزان .

2- ألاحظ قيمة السرعة تكون أكبر ما يمكن في الاتجاه الموجب ، والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$ وفي هذه الحالة ، فإن $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس) ، وبالرجوع إلى اقتران الموقع ، ألاحظ أن قيمته تصبح صفرا ً (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$ ،ما يعني أن سرعة الجسم تكون أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان .

3- اعتمادا ً على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإن قيمة تسارع الجسم تكون دائما معكوس قيمة موقع الجسم، ذلك أن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

4- تكون قيمة التسارع صفرا ً فقط عند موقع الاتزان، لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي إحداهما الأخرى عند هذه النقطة. ولكن إذا كان الجسم عند أي موقع اخر، فإن هاتين القوتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفرا ً .

أتحقق من فهمي : (صفحة 22)

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويمثل الاقتران : $s(t) = 7\,\text{Sin}\, t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار:

1- أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

اقتران موقع الجسم

$$s(t) = 7\,\text{Sin}\, t$$

اقتران السرعة المتجهة

$v(t) = \acute{s}(t) = 7\cos t$ لموقع

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -7\,\text{Sin}\, t$$

2- أصف حركة الجسم.

بالنظر لاقتران الموقع $s(x)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7m$ وهذا يعني ان الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين s $t = n\pi$ ، $s = -7m$ ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $f(x)$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب .

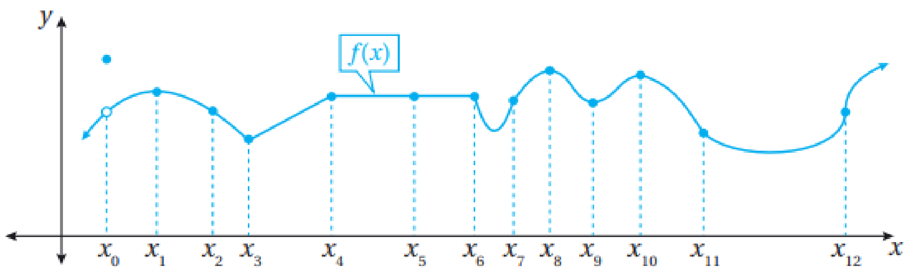
تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7m$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$) نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان) ، بينما تكون سرعة الجسم صفراً (يسكن لحظياً) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $|s(t)| = v(t) = 0$) عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) .

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون القوى المؤثرة على الجسم فيها صفراً .

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة22)

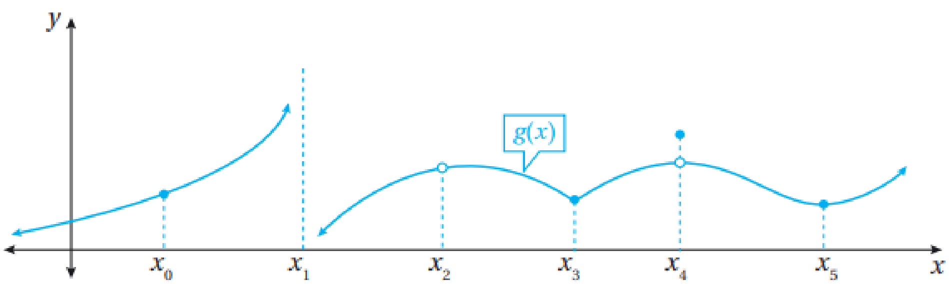
أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلاً للاشتقاق ، مبرراً إجابتي :

1



الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_6$ و $x = x_4$ و $x = x_3$ ، لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ ، لأنه غير متصل عندها ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ ، نظراً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

2



الاقتران $g(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ ، لأن لمنحناه رأس حاد عند هذه النقطة، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_4$ و $x = x_2$ و $x = x_1$ ، لأنه غير متصل عندها .

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

3) $f(x) = 2\sin x - e^x$

$\acute{f}(x) = 2\cos x - e^x$

4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$

$5)\ f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$f(x) = \ln 1 + \ln x^3 + x^4$

$f(x) = -3\ln x + x^4$

$\acute{f}(x) = \frac{-3}{x} + 4x^3$

$6)\ f(x) = e^{x+1} + 1$

$\acute{f}(x) = e^{x+1}.(1)$

$\acute{f}(x) = e^{x+1}$

$7)\ f(x) = e^x + x^e$

$\acute{f}(x) = e^x + x^{e-1}$

$8)\ f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$f(x) = \ln 10 - \ln x^n$

$f(x) = \ln 10 - n\ln x$

$\acute{f}(x) = \ln 10 - n\ln x$

$\acute{f}(x) = -n\left(\frac{1}{x}\right)$

$\acute{f}(x) = \frac{-n}{x}$

إذا كان : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

9) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$.

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$$

$$\acute{f}(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$$\acute{f}(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$\boxed{\acute{f}(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}}$$ ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x - \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)\pi$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi}$$

$$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

10) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو :

$$m_1 = \frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}}$$

$$m_1 = \left[\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}}\right] \times \frac{2}{2}$$

$$m_1 = \frac{-2}{-2+e^{\pi}}$$

$$m_1 = \frac{2}{2-e^{\pi}}$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2-e^{\pi}}(x-\pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)\pi$$

$$y = \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2\pi}{2-e^{\pi}}\right) + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

11) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^x - 2x$

$$f(x) = e^x - 2x$$

$$f'(x) = e^x - 2$$

$$e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$x\ln e = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

$$x \approx 0.69$$

12) اختيار من متعدد : أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

$a)\ y = -x + \pi - 1$ $\quad \boxed{b)\ y = x - \pi - 1}$ $\quad c)\ y = x - \pi + 1$ $\quad d)\ y = x + \pi + 1$

$f(x) = \sin x + \cos x$

$\acute{f}(x) = \cos x - \sin x$

$\acute{f}(\pi) = \cos \pi - \sin \pi$

$\acute{f}(\pi) = -1 - 0$

$\acute{f}(\pi) = -1$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو : $\acute{f}(x) = \cos x - \sin x$

بما أن ميل المماس هو 1 - إذن ميل العمودي على المماس هو 1

معادلة العمودي على المماس:

$y + 1 = 1(x - \pi)$

$\boxed{y = x - \pi - 1}$

13) إذا كان : $f(x) = \ln(kx)$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، و $x > 0$ ، فأبين أن $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$.

$f(x) = \ln(kx)$

$f(x) = \ln k + \ln x$

$\acute{f}(x) = 0 + \dfrac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{x}$

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

14) أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمر بنقطة الأصل .

ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو : $f'(e) = \frac{1}{e}$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{1}{e}x$$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته .

15) أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 1 = -e(x - e)$$

$$y = -ex + e^2 + 1$$

لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته

$$0 = -ex + e^2 + 1$$

$$ex = e^2 + 1$$

$$x = \frac{e^2 + 1}{e}$$

$$x = e + \frac{1}{e}$$

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني:

16) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$

$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$

$v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5$

$v(5) = 75 - 40 + 5$

$v(5) = 40\ \ m/s$

$a(t) = 6t - 8$

$a(5) = 6(5) - 8$

$a(5) = 30 - 8$

$a(5) = 22\ \ m/s^2$

17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$

$(3t - 5)(t - 1) = 0$

$3t - 5 = 0$

$3t = 5$

$t = \frac{5}{3}\ \ s$

$t - 1 = 0$

$t = 1\ \ s$

18) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$

$v(4) = 48 - 32 + 5$

$v(4) = 21\ \ m/s$

بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = 4$

19) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي للجسم : $s(0) = 0 \ m$

$s(t) = 0$

$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$

$t(t^2 - 4t + 5) = 0$

$t = 0$

$b^2 - 4ac$

$4^2 - 4(1)(5) = -4$ العبارة التربيعية مميزها سالب وبالتالي لا تساوي صفر

إذن لن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبداً

يمثل الاقتران : $s(t) = e^t - 4t, \ t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

20) أحدد الموقع الابتدائي للجسيم.

$s(0) = e^0 - 4(0)$

$s(0) = 1 \ m$

21) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

$s(t) = e^t - 4t$

$v(t) = \acute{s}(t) = e^t - 4$

$e^t - 4 = 0 \rightarrow \ e^t = 4$

$\ln e^t = \ln 4$

$t \ln e = \ln 4$

$t(1) = \ln 4$

$t = \ln 4$

$a(t) = \acute{v}(t) = e^t$

$a(\ln 4) = e^{\ln 4}$

$a(\ln 4) = 4 \ m/s^2$

زنبرك : يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويحدد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالأمتار :

22) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

$$s(t) = 4\cos t$$

$$v(t) = -4\sin t$$

$$a(t) = -4\cos t$$

23) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$$s(t) = 4\cos t$$

$$v(t) = -4\sin t$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\ \ m/s^2$$

$$a(t) = -4\cos t$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\, m/s^2$$

24) أصف حركة الجسم.

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين

$s = 4m , s = -4m$ ، وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب .

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين

$-4m/s$ و $4m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وان التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً .

مهارات التفكير العليا (صفحة 27)

25) تبرير : إذا كان الاقتران : $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مبرراً إجابتي .

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$$y = e^x - ax$$

$$x = 0 \rightarrow y = e^0 - a(0)$$

$$y = 1$$

النقطة هي $(0, 1)$

الخطوة الثانية: إيجاد المشتقة

$$y = e^x - ax$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - a$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل المماس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 - a$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1 - a$$

الخطوة الرابعة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = (1 - a)(0 - x_1)$$

$$y = (1 - a)(0 - x_1) + 1$$

26) تحد : أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران : $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو:

$$\acute{y} = 2e^x + 3 + 15x^2$$

لكل x فإن $2e^x > 0$

لكل x فإن $15x^2 \geq 0$

بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين : لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $\acute{y} > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة $\acute{y}$ تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير : إذا كان الاقتران $y = ke^x$ ، حيث $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

الاحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد $y = ke^0 = k$ ، أي أن إحداثيي P هما $(0, k)$

$$\frac{dy}{dx} = ke^x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = k$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - k = k(x - 0)$

$y = kx + k$ معادلة المماس

ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$

إذن نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي : $(-1, 0)$

28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{k}$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - k = -\frac{1}{k}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{k}x + k$$

وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أن:

$$0 = -\frac{1}{k}(100) + k$$

$$k^2 = 100$$

$$k = \pm 10$$

ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$

تحد : إذا كان الاقتران : $y = \log x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

29) أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

$$y = \log x$$

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log_{10} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$$

30) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق ، أجد $\frac{dy}{dx}$ للإقتران : $y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب .

$$y = \log ax^2$$

$$y = \log a + 2 \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x \ln 10}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = 4 - \sin t \ , t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

31) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 4 - \sin t$$

$$v(t) = -\cos t$$

$$a(t) = \sin t$$

32) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

$$v(t) = -\cos t \quad \to t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

ويكون موقعه عندها $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 3$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ m$$

33) أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً ، مبرراً إجابتي.

بما أن المطلوب تحديد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة، فهذا يتطلب إيجاد القيم القصوى لاقتران السرعة:

$$|v(t)| = |-\cos t|$$

$$|v(t)| = |\cos t|$$

ويمكن تحديدها من خصائص الاقتران وهما قيمتان : 0 (وهي قيمة صغرى) و 0 (وهي قيمة عظمى) ومنه :

$|v(t)| = 0 \ \rightarrow\ \cos t = 0 \ \rightarrow\ \sin t = \mp 1$ متطابقة فيثاغورس

$|v(t)| = 1 \ \rightarrow\ \cos t = 1 \ \rightarrow\ \sin t = 0$ متطابقة فيثاغورس

إذن يمكن إيجاد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة كالآتي :

$$\sin t = 1$$

$$s(t) = 4 - 1 = 3m$$

$$\sin t = -1$$

$$s(t) = 4 - (-1) = 5m$$

$$\sin t = 0$$

$$s(t) = 4 - 0 = 4m$$

الدرس الثاني: مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مسألة اليوم: (صفحة 26)

كلما زاد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلصت مساحة البؤبؤ ، يستعمل الاقتران $A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالمليمترات المربعة ، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm)، وتعرف حساسية العين للضوء بأنها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع ، أجد اقتراناً يمثل حساسية العين للضوء .

$$A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$$

$$A'(b)=\frac{\left(1+4b^{0.4}\right)\left(9.6b^{-0.6}\right)-\left(40+24b^{0.4}\right)\left(1.6b^{-0.6}\right)}{\left(1+4b^{0.4}\right)^2}$$

$$A'(b)=\frac{(9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})-(64b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$A'(b)=\frac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$A'(b)=\frac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

مشتقة ضرب اقترانين

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=(3x-2x^2)(5+4x)$

$f'(x)=(3x-2x^2)(4)+(5+4x)(3-4x)$

$f'(x)=(12x-8x^2)+(15-20x+12x-16x^2)$

$f'(x)=(12x-8x^2)+(15-8x-16x^2)$

$f'(x)=12x-8x^2+15-8x-16x^2$

$f'(x)=-24x^2+4x+15$

2) $f(x) = xe^x$

$$\acute{f}(x) = xe^x + (e^x \times 1)$$

$$\acute{f}(x) = xe^x + e^x$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 28)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$$\acute{f}(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$$

$$\acute{f}(x) = 14x^4 - 28x^3 + 42x - 4x^3 + 8x^2 - 12 + 21x^4 - 12x^3 - 28x^3 + 16x^2$$

$$\acute{f}(x) = 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$$

2) $f(x) = \ln x \ \cos x$

$$\acute{f}(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\acute{f}(x) = -\ln x \ \sin x + \frac{\cos x}{x}$$

مشتقة قسمة اقترانين

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 29)

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

$$f(x) = \frac{(x+1)(\frac{1}{x}) - (\ln x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x + 1 - \mathrm{x}\ln x}{x(x+1)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 30)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x+1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(2x+1) - (2x+2)}{(2x+1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x + 1 - 2x - 2}{(2x+1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^x)(\cos x) - (\sin x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

مثال 3: من الحياة (صفحة 31)

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران : $T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، وT درجة الحرارة بالفهرنهايت

1) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

$$T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$$

$$\acute{T}(t)=\frac{(1+t^2)\times(4)-(4t)\times(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$\acute{T}(t)=\frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\acute{T}(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

إذن معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو : $\acute{T}(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

2) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t=2$ ، مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{T}(2)=\frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$

$$\acute{T}(2)=\frac{4-16}{25}$$

$$\acute{T}(2)=\frac{-12}{25}$$

$$\acute{T}(2)=-0.48$$

إذن عندما يكون الزمن $2h$ ،فإن درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 32)

سكان : يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t الزمن بالسنوات ، وP عدد السكان بالآلاف :

1) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

$$P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{(2t+9)\times(1000t)-(500t^2)\times(2)}{(2t+9)^2}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{2000t^2+9000t-1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{1000t^2+9000t}{(2t+9)^2}$$

2) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{P}(12)=\frac{1000(12)^2+9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{144000000+108000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{144000+108000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{252000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)\approx 231.405$$

إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 نسمة سنوياً تقريباً .

مشتقة المقلوب

مثال 4: (صفحة 33)

أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

$$f(t) = \frac{1}{t + t^{-1}}$$

$$f(t) = (t + t^{-1})^{-1}$$

$$f(t) = -(t + t^{-1})^{-2}(1 - t^2)$$

$$f(t) = (-1 + t^2)(t + t^{-1})^{-2}$$

$$\acute{f}(t) = \frac{-1 - t^2}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2}$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 33)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-(5 - 2x)}{(5x - x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-5 + 2x}{(5x - x^2)^2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{-\left(\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f(x) = -\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$$

مشتقة الاقترانات المثلثية

مثال: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sec x$

$f'(x) = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$

2) $f(x) = \frac{\csc x}{1+\tan x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x) \times (-\csc x \cot x) - (\csc x) \times (\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x\,(1) - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 35)

1) $f(x) = x \cot x$

$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1)$

$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$

2) $f(x) = \frac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

المشتقات العليا

مثال 6: أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ صفحة 36

المشتقة الأولى $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية $f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة $f'''(x)=\frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة $f^{(4)}(x)=-\frac{24}{x^5}$

أتحقق من فهمي: ص 36

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران : $f(x)=x\sin x$

$$f(x)=x\sin x$$

$$f'(x)=x\cos x+\sin x$$

$$f''(x)=(x)(-\sin x)+(\cos x)(1)+\cos x$$

$$f''(x)=-x\sin x+\cos x+\cos x$$

$$f''(x)=2\cos x-x\sin x$$

$$f'''(x)=-2\sin x-(x\cos x+\sin x)$$

$$f'''(x)=-2\sin x-x\cos x-\sin x$$

$$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 36)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(2x-1)\times(3x^2)-(x^3)\times(2)}{(2x-1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$$

2) $f(x) = x^3 \sec x$

$$\acute{f}(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$

$$\acute{f}(x) = x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

4) $f(x) = e^x(\tan x - x)$

$$\acute{f}(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)\,(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = (e^x)(\tan^2 x) + (\tan x - x)\,(e^x)$$

قاعدة ← $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$$\acute{f}(x) = e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x$$

5) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{e^x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x\cos x - e^x\sin x - e^x\sin x - e^x \cos x}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-e^x 2\sin x}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2\sin x}{e^x}$$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$$\acute{f}(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$

$$\acute{f}(x) = x^3\cos x + 3x^2\sin x - x^2 \sin x + 2x\cos x$$

$$\acute{f}(x) = x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x$$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}} + 3)$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + \left(\frac{1}{3} \times 3x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

8) $f(x)=\frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\sec x\tan x-\sec^2 x\tan x+\sec x\tan x+\sec^2 x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\sec x\tan x+\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{2\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

9) $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$$f(x)=\frac{\frac{2x-1}{x}}{x-3}$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x}\times\frac{1}{x-3}$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{2x^2-6x-(4x^2-6x-2x+3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{2x^2-6x-4x^2+6x+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$f(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(x^2 + x + 1)$

$f'(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(5x^4 + 6x^2 - 3x^2 - 2)$

$f'(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(5x^4 + 3x^2 - 2)$

$f'(x) = \left(2x^6 + 4x^4 - 2x^4 - 4x^2 + x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right) + (5x^6 + 5x^5 + 5x^4 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x - 2)$

$f'(x) = \left(2x^6 + 2x^4 - 4x^2 + x^5 + x^3 - 2x\right) + (5x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)$

$f'(x) = 2x^6 + 2x^4 - 4x^2 + x^5 + x^3 - 2x + 5x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2$

$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$f'(x) = -1(\csc x + \cot x)^{-2}\,(-\csc x \cot x - \csc^2 x)$

$f'(x) = \dfrac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\csc x\,(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ،

و كان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$

فأجد كلا مما يأتي:

12) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$

$(fg)'(0) = (5 \times 2) + (-1 \times -3)$

$(fg)'(0) = (10) + (3)$

$(fg)'(0) = 13$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{(-1 \times -3) - (5 \times 2)}{(-1)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{3 - 10}{1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = -7$$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

$= 7f'(0) - 2(fg)'(0)$

$= 7(-3) - 2(13)$

$= -21 - 26$

$= -47$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

15) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $x = -2$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \times (2x) - (x^2 - 4) \times (2x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^3 + 8x) - (2x^3 - 8x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8x - 2x^3 + 8x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+4)^2 \times (16) - (16x) \times (2)(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(-2) = \frac{((-2)^2+4)^2 \times (16) - (16(-2)) \times (2)((-2)^2+4) \times (2(-2))}{((-2)^2+4)^4}$$

$$f''(-2) = \frac{(8)^2(16) - (-32)(2)(8)(-4)}{(8)^4}$$

$$f''(-2) = \frac{8(16) - (-32)(2)(-4)}{(8)^3}$$

$$f''(-2) = \frac{128 - 256}{512}$$

$$f''(-2) = \frac{128 - 256}{512}$$

$$f''(-2) = -\frac{1}{4}$$

16) $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}, x = 8$

تحليل الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$f(x) = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = 1 - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{3} \times -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right) + \left(-\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^4}}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9(2)^5}-\frac{2}{9(2)^4}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9(32)}-\frac{2}{9(16)}$$

$$f''(8)=\frac{1}{9(16)}-\frac{2}{9(16)}$$

$$f''(8)=\frac{1}{144}-\frac{2}{144}$$

$$f''(8)=-\frac{1}{144}$$

17) $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\ ,x=4$

$$f'(x)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)(-1)-(1-x)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{1+x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2\sqrt{x} - 2x - 1 + x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{x} - 2x - 1 + x}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{4\sqrt{4^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{32}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتني عند النقطة المعطاة:

18) $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}\ ,\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

ميل المماس عند النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هو :

$$f'(0) = \frac{1 - 0e^x}{(1+e^0)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{(1+1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(x - (0))$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

19) $f(x) = e^x \cos x + \sin x \ , (0, 1)$

$$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + (\cos x)$$

$\acute{f}(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + (\cos x)$

ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو :

$\acute{f}(0) = (e^0)(-\sin 0) + (\cos 0)(e^0) + (\cos 0)$

$\acute{f}(0) = (1)(0) + (1)(1) + (1)$

$\acute{f}(0) = 2$

معادلة المماس هي:

$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$

$y - 1 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 1$

أثبت صحة كل مما يأتي معتمداً أن $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$:

20) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \leftarrow (1)\text{قاعدة}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{(\cos x)(0) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(\sin x)(0) - (1)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23) $f'(x) = 2 - \frac{2}{x}$, $f'''(x)$

$f''(x) = 2 - 2x^{-1}$

$f'''(x) = 2x^{-2}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^2}$

24) $f'''(x) = 2\sqrt{x},\ f^{(4)}(x)$

$f^{(4)} = \dfrac{2(1)}{2\sqrt{x}}$

$f^{(4)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

25) $f^{(4)}(x) = 2x + 1,\ f^{(6)}(x)$

$f^{(5)}(x) = 2$

$f^{(6)}(x) = 0$

26) نباتات هجينة : وجد باحثون زراعيون انه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من نبات تباع الشمس h بالأمتار ، بإستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور . أجد معدل تغير النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$h(t) = \dfrac{3t^2}{4 + t^2}$

$h'(t) = \dfrac{(4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4 + t^2)^2}$

$h'(t) = \dfrac{(24t + 6t^3) - (6t^3)}{(4 + t^2)^2}$

$h'(t) = \dfrac{24t + 6t^3 - 6t^3}{(4 + t^2)^2}$

$h'(t) = \dfrac{24t}{(4 + t^2)^2}$

إذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = e^x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (e^x)(-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(e^x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \cos x + e^x \cos x$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x}$$

28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

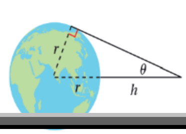
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(e^x)(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2e^x \cos x + 2e^x \sin x) - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x + 2e^x \sin x - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x$$

أقمار صناعية : عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض ، فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبينة في في الشكل المجاور،



. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً .

29) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

$$\csc\theta = \frac{r+h}{r}$$

$$r + h = r\csc\theta$$

$$h = r\csc\theta - r$$

$$\boxed{h = r(\csc\theta - 1)}$$

30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ افترض أن $r = 6371\ km$

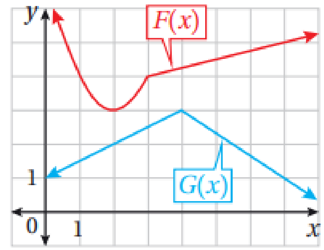
$$h = r(\csc\theta - 1)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-2\times\sqrt{3}\right)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} \approx 22070\ km/rad$$

31) إذا كان : $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.



$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + (-4x^{-3})$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{4}{4x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3}$$

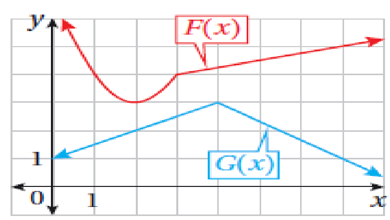
$$f'(x) = \frac{9x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

32) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $F(x)$ و $G(x)$

إذا كان $P(x) = F(x)G(x)$ و $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



32) $P'(2)$

$$P(x) = F(x)G(x)$$

$$P'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$

$G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$ و$(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-2}{4-2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$\acute{F}(2)$ ميل المماس الأفقي ويساوي صفراً .

$$\acute{P}(2) = F(2)\acute{G}(2) + G(2)\acute{F}(2)$$

$$\acute{P}(2) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0$$

$$\acute{P}(2) = \frac{3}{2}$$

33) $\acute{Q}(7)$

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\acute{Q}(x) = \frac{G(x) \times \acute{F}(x) - F(x) \times \acute{G}(x)}{\left(G(x)\right)^2}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{G(7) \times \acute{F}(7) - F(7) \times \acute{G}(7)}{\left(G(7)\right)^2}$$

$\acute{F}(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(7,5)$ و$(3,4)$ ويساوي $\frac{1}{4}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-4}{7-3}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$\acute{G}(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و$(7,1)$ ويساوي $\frac{2}{3}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-1}{4-7}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{10}{3}}{1}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{43}{12}$$

مهارات التفكير العليا: (صفحة 38)

تبرير إذا كان : $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) أجد ميل المماس عند الأصل.

$$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$y = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$y = \frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)\times(e^x)-(e^x-1)\times(e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^x+e^x-2e^x+e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2(1)}{(1+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

35) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y ، مبررا ً إجابتي :

إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرا ً ، أي أن : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=0$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $e^x=0$ ، ولكن $e^x>0$ لجميع الأعداد الحقيقية x ،ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية .

تحد : إذا كان $y=\frac{x+1}{x-1}$ ، حيث $x\neq 1$ ، فأجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعا ً :

36) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)\times(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

37) أعد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير x (x اقتران بالنسبة إلى y) ، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x + 1 = y(x-1)$$

$$x = yx - y - 1$$

$$x - yx = -y - 1$$

$$x(1-y) = -y - 1$$

$$x = \frac{-y-1}{1-y}$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)\times(1) - (y+1)(1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1-y-1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = -2 \times \frac{(x-1)^2}{4}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(x-1)^2}{-2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

تبرير : إذا كان : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

39- أثبت أن $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$ ، مبرراً إجابتي .

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3)\left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x^2) - (3x^2 - 6x^2\ln x)}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

40) أجد قيمة المقدار : $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

$$= x^4 \times \frac{6\ln x - 5}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 \times 1 - 2\ln x) + (2 \times \ln x) + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 - 8\ln x) + (2\ln x) + 1$$

$$= 6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$$= 0$$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة

مسالة اليوم : يمكن نمذجة انتشار الانفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران : $P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}}$ ، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الانفلونزا أول مرة في المدرسة ، أجد سرعة انتشار الانفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام ، مبرراً إجابتي .

$$P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100e^{3-3}}{(1+e^{3-3})^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100(1)}{(1+1)^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100}{4}$$

$$\acute{P}(3)=25$$

أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 5 أيام بمعدل 5 طالباً / يوم .

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\cos 2x$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(\cos 2x)=-\sin 2x\times 2=-2\sin 2x$$

2) $f(x)=e^{(x+x^2)}$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)})=(e^{(x+x^2)}\times(1+2x)$$

3) $f(x)=\ln(\sin x)$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(\ln(\sin x))=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

أتحقق من فهمي: صفحة 41

1) $f(x) = \tan 3x^2$

$\acute{f}(x) = 6x\sec^2 3x^2$

2) $f(x) = e^{\ln x}$

$f(x) = x$

$\acute{f}(x) = 1$

3) $f(x) = \ln(\cot x)$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$$

قاعدة سلسلة القوة

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}} \times 2x$$

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

2) $f(x) = \tan^4 x$

$$f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$$

$$\acute{f}(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$$

3) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

$f(x)=(\ln x)^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}(\ln x)$

$=\frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

أتحقق من فهمي: صفحة 42

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{5}}$

$\acute{f}(x)=\frac{2}{5}(x^2-1)^{\frac{-3}{5}}(2x)$

$\acute{f}(x)=\frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

2) $f(x)=\sqrt{\cos x}$

$\acute{f}(x)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

3) $f(x)=(\ln x)^5$

$\acute{f}(x)=5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right)$

$\acute{f}(x)=\frac{5(\ln x)^4}{x}$

الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة:

مثال 3: (صفحة 43)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{\csc 4x}$

$$\acute{f}(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

$$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

2) $f(x) = \sin(\tan \sqrt{3x^2+4})$

$$\acute{f}(x) = \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{3x^2+4})$$

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2+4})$$

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times (3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx}6x\,(3x^2+4)$$

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \times 6x$$

$$= \frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

أتحقق من فهمي: صفحة 44

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

$$\acute{f}(x) = 2\cos(7x^3+6x-1)(-\sin 7x^3+6x-1)(21x^2+6)$$

$$\acute{f}(x) = -2(21x^2+6)\cos(7x^3+6x-1)\sin(7x^3+6x-1)$$

$$\acute{f}(x) = -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$$ قانون نصف الزاوية

2) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

$\acute{f}(x) = 3(2 + (x^2 + 1)^4)^2(4(x^2 + 1)^3(2x))$

$\acute{f}(x) = 24x(2 + (x^2 + 1)^4)^2(x^2 + 1)^3$

قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة

مثال4 : أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$

$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$

$\acute{f}(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$

$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2\, e^{-0.2x}$

$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\sin 4(\frac{\pi}{8})$

$= -0.2e^{-0.025\pi}$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$ عندما $x = 0$

$f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$

$\acute{f}(x) = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times \frac{d}{dx}(\frac{3x-1}{x^2+3})$

$\acute{f}(x) = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times (\frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2})$

$= (\frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3})$

$\acute{f}(0) = (\frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$

$= \frac{-18}{27} = \frac{-2}{3}$

إذن ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$ هو $\frac{-2}{3}$: . ومنه،فإن ميل العمودي على المماس عندما $x = 0$ هو $\frac{2}{3}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 45)

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$

$$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$$

$$\acute{f}(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (2(1)+1)^5 4((1)^3-(1)+1)^3(3(1)^2-1) + ((1)^3-(1)+1)^4 5(2(1)+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4 5(3)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = 1944 + 810$$

$$\acute{f}(1) = 2754$$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

مثال 5: من الحياة: صفحة 45

أعمال: طرحت إحدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

إذا مثل الاقتران : $t > 0$ ، $N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرحه ، حيث t الزمن بالأسابيع ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

1) أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن:

1) أجد $\acute{N}(t)$

$$N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\acute{N}(t) = \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000t^2) - (250000t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500000t) - (250000t^2)2(2t+1) \times 2}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500000t) - (100000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)(500000t)((2t+1) - 2t)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

2) أجد $\acute{N}(52)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{N}(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\acute{N}(52) = \frac{250000(52)^2}{(2(52)+1)^2}$$

$$\approx 22$$

إذن $\acute{N}(52) = 22$ وهذا يعني أن إجمالي عدد القطع المبيعة من المنتج يزداد بمعدل 22 قطعة لكل أسبوعاً على طرح المنتج في الأسواق .

أتحقق من فهمي: صفحة 46

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تحسب بالدينار ، باستعمال الاقتران : $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج .

1) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج.

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$\acute{U}(x) = 80\frac{\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = 40\frac{\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = \frac{\frac{200}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = \frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

2- أجد $\acute{U}(20)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{U}(20) = \frac{200}{(3(20)+4)^2}\sqrt{\frac{3(20)+4}{2(20)+1}}$$

$$\acute{U}(20) = \frac{200}{4096}\sqrt{\frac{64}{41}}$$

$$\acute{U}(20) \approx 0.061$$

وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار / قطعة تقريباً .

مشتقة $a^{(g(x))}$

مثال 6: صفحة 47

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 8^{5x}$

$\acute{f}(x) = (\ln 8)8^{5x}(5)$

$\acute{f}(x) = (5\ln 8)8^{5x}$

2) $f(x) = 6^{x^2}$

$\acute{f}(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x)$

$\acute{f}(x) = (2x\ln 6)6^{x^2}$

$3)\ f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$\acute{f}(x) = 3e^{3x} + (3\ln 2)2^{3x}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 48)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ f(x) = \pi^{\pi x}$

$\acute{f}(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x}$

$\acute{f}(x) = \pi^{1+\pi x} \ln \pi$

$2)\ f(x) = 6^{1-x^3}$

$\acute{f}(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

$3)\ f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$\acute{f}(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$

مشتقة $\log_a g(x)$

مثال 7: صفحة 49

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ f(x) = \log \cos x$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$$

$$2)\ f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$$

$f(x) = \log_2(x^2) - \log_2(x-1)$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{(\ln 2)x} - \frac{1}{(\ln 2)(x-1)}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 49)

1) $f(x) = \log \sec x$

$$\acute{f}(x) = \frac{\sec x \tan x}{(\ln 10) \sec x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

2) $f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x) \ln 8}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية

مثال 8: (صفحة 51)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$x = 2 \sin t \qquad y = 3 \cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x = 2 \sin t$$

$$x = 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y = 3 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = 3\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

$$x = 2\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{2\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\tan t$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}(1)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}$$

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2\sqrt{2}}$$

$$y + \frac{3}{2}x = \frac{6}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y+\frac{3}{2}x=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left[y+\frac{3}{2}x=\frac{6}{\sqrt{2}}\right] \quad \times 2$$

$$\boxed{2y+3x=6\sqrt{2}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 52)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t \qquad y=\tan t \qquad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x=\sec t$$

$$x=\sec\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{x=\sqrt{2}}$$

$$y=\tan t$$

$$y=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{y=1}$$

النقطة هي $(\sqrt{2},1)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t=\frac{\pi}{4}$

$$y=\tan t$$

$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$$

$$x=\sec t$$

$$\frac{dx}{dt}=\sec t\tan t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t\, t}{\tan t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$$

$$y-1=\sqrt{2}x-2$$

$$y=\sqrt{2}x-2+1$$

$$y=\sqrt{2}x-1$$

اتدرب وأحل المسائل: (صفحة 53)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=e^{4x+2}$

$$f'(x)=4e^{4x+2}$$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

$\acute{f}(x) = 100e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$\acute{f}(x) = -\sin(x^2 - 3x - 4)\,(2x - 3)$

$\acute{f}(x) = (-2x + 3)\sin(x^2 - 3x - 4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$\acute{f}(x) = (10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)(20)$

$\acute{f}(x) = -20x^2 xe^{-x^2} + 20xe^{-x^2}$

$\acute{f}(x) = 20xe^{-x^2}(1 - x^2)$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}}$

$f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$$

6) $f(x) = x^2 \tan\dfrac{1}{x}$

$$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$$

$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$\acute{f}(x) = 3 - (5)(2) - \sin(\pi x)^2\,(\pi x)(\pi)$

$\acute{f}(x) = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x(1+e^x) + e^x(1-e^x)}{(1+e^x)(1-e^x)}$

$\acute{f}(x) = \frac{(e^x+e^{2x}) + (e^x-e^{2x})}{(1-e^x+e^x-e^{2x})}$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x+e^{2x}+e^x-e^{2x}}{1-e^{2x}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

9) $f(x) = (\ln x)^4$

$\acute{f}(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$

10) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$f(x) = \sin x^{\frac{1}{3}} + (\sin x)^{\frac{1}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cos x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}(\cos x)(1)$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cos \sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

$$f(x) = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 8x)^{-\frac{4}{5}}(2x + 8)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x + 8}{5\sqrt[5]{(x^2 + 8x)^4}}$$

12) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}(1)}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(2x\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{3^{2x}(2x\ln 3 - 1)}{x^2}$$

13) $f(x) = 2^{-x}\cos \pi x$

$$\acute{f}(x) = (2^{-x})(\cos \pi x) + (\cos \pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$$

$$\acute{f}(x) = (2^{-x}) - (\sin \pi x)(\pi) + (\cos \pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$$

$$\acute{f}(x) = -\pi 2^{-x}\sin \pi x - 2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$$

14) $f(x) = \frac{10\log_4 x}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)\frac{10}{x\ln 4} - (10\log_4 x)(1)}{x^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{10}{\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$$

15) $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$$\acute{f}(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x)=\left(\frac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x)=\left(\frac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\acute{f}(x)=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

16) $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

17) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$

$$\acute{f}(x)=e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2)+\cos(e^{2x})(e^{2x})(2)$$

$$\acute{f}(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

18) $f(x) = tan^4(\sec\ (\cos x))$

$\acute{f}(x) = 4(tan(\sec\ (\cos x))^3(\sec^2(\sec\ (\cos x)) \times (\sec \cos x)(\tan \cos x)(-\sin x)$

$\acute{f}(x) = -4tan^3(\sec\ (\cos x))(\sec^2(\sec\ (\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

19) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}\quad , x = -2$

$f(-2) = 4e^{-0.5x^2}$

$f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2}$

$f(-2) = 4e^{-2}$

$f(-2) = \dfrac{4}{e^2}$

النقطة هي : $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$

$\acute{f}(x) = 4e^{-0.5x^2}(-x)$

$\acute{f}(x) = -4xe^{-0.5x^2}$

$\acute{f}(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2}$

$\acute{f}(-2) = 8e^{-2}$

$\acute{f}(-2) = \dfrac{8}{e^2}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(x - (-2))$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(x + 2)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}x + 2\dfrac{8}{e^2}$

$y = \dfrac{8}{e^2}x + \dfrac{16}{e^2} + \dfrac{4}{e^2}$

$y = \dfrac{8}{e^2}x + \dfrac{20}{e^2}$ معادلة المماس

$20)\ f(x) = x + \cos 2x \quad , x = 0$

$f(0) = 0 + \cos 2(0)$

$f(0) = \cos 0$

$f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = 1 + (-\sin 2x)(2)$

$\acute{f}(x) = 1 - 2\sin 2x$

$\acute{f}(0) = 1 - 2\sin 2(0)$

$\acute{f}(0) = 1 - 2\sin 0$

$\acute{f}(0) = 1 - 2(0)$

$\acute{f}(0) = 1$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 1(x - 0)$

$y - 1 = 1(x)$

$y = x + 1$ معادلة المماس

$21)\ f(x) = 2^x \quad , x = 0$

$f(0) = 2^0$

$f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = (\ln 2)2^x$

$\acute{f}(0) = (\ln 2)2^0$

$\acute{f}(0) = \ln 2$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \ln 2\,(x - 0)$

$y = (\ln 2)x + 1$ معادلة المماس

$22)\ f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2} \quad , x = 3$

$f(3) = \sqrt{3+1}\,\sin\frac{\pi 3}{2}$

$f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2}$

$f(3) = 2(-1)$

$f(3) = -2$

النقطة هي : $(3, -2)$

$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$f'(3) = \left(\sqrt{3+1}\right)\left(\cos\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3+1}}\right)$

$f'(3) = (2)(0)\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right)$

$f'(3) = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)$

$f'(3) = -\frac{1}{4}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$

$y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ معادلة المماس

23) إذا كان : $A(x)=f(g(x))$ ، وكان : $f(-2)=8, \acute{f}(-2)=4 , \acute{f}(5)=3 , g(5)=-2 , \acute{g}(5)=6$ ، فأجد $\acute{A}(5)$.

$$A(x)=f(g(x))$$

$$\acute{A}(x)=\acute{f}(g(x))\times\acute{g}(x)$$

$$\acute{A}(5)=\acute{f}(g(5))\times\acute{g}(5)$$

$$\acute{A}(5)=\acute{f}(-2)\times\acute{g}(5)$$

$$\acute{A}(5)=4\times 6$$

$$\acute{A}(5)=24$$

24) إذا كان : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(1)-(x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

بكتيريا :يمثل الاقتران : $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري :

25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

$A(t) = Ne^{0.1t}$

$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t}$

$A'(3) = 0.1Ne^{0.1(3)}$

$A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$

26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة الثابت N ؟

$A'(k) = 0.1Ne^{0.1(k)}$

$0.2 = 0.1Ne^{0.1(k)}$

$\frac{0.2}{0.1N} = \frac{0.1N}{0.1N}e^{0.1(k)}$

$e^{0.1(k)} = \frac{2}{N}$

$\ln e^{0.1(k)} = \ln\frac{2}{N}$

$0.1(k) = \ln\frac{2}{N}$

$\frac{0.1(k)}{0.1} = \frac{\ln\frac{2}{N}}{0.1}$

$k = 10\ln\frac{2}{N}$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

27) $f(x) = \sin\pi x \quad , f'''(x)$

$f'(x) = \pi\cos\pi x$

$f''(x) = -\pi\,\pi\sin\pi x$

$f''(x) = -\pi^2\sin\pi x$

$f'''(x) = -\pi^2\pi\cos\pi x$

$f'''(x) = -\pi^3\cos\pi x$

28) $f(x)=\cos(2x+1) \quad , f^{(5)}(x)$

$f'(x)=-2\sin(2x+1)$

$f''(x)=-2(2)\cos(2x+1)$

$f''(x)=-4\cos(2x+1)$

$f'''(x)=-(2)-4\sin(2x+1)$

$f'''(x)=8\sin(2x+1)$

$f^{(4)}(x)=(2)8\cos(2x+1)$

$f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$

$f^{(5)}(x)=-(2)16\sin(2x+1)$

$f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$

29) $f(x)=\cos x^2 \quad , f''(x)$

$f'(x)=-\sin x^2(2x)$

$f'(x)=-2x\sin x^2$

$f''(x)=(-2x)\cos x^2\,(2x)+(\sin x^2)(-2)$

$f''(x)=-4x^4\cos x^2-2\sin x^2$

30) إذا كان الاقتران : $y=e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0\,,1)$.

$y=e^{\sin x}$

$\frac{dy}{dx}=e^{\sin x}\cos x$

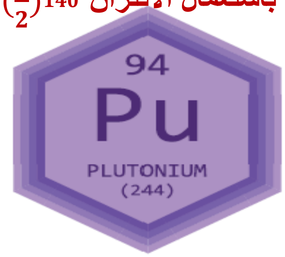
$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e^{\sin 0}\cos 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e^{0}(1)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=(1)(1)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$ ميل المماس

31) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20\ g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران $A(t) = 20(\frac{1}{2})^{\frac{t}{140}}$ ، أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.



$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$\acute{A}(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{140}\right)$$

$$\acute{A}(t) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{A}(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{A}(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{A}(2) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{70}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{A}(2) = 0.142 \times 0.99 \times (-0.693)$$

$$\acute{A}(2) \approx -0.098$$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل $0.098\ g$ كل يوم عندما $t = 2$.

زنبرك : تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويحدد الاقتران : $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات .

32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

$$v(t) = 0.1 \cos 2.4t(2.4)$$

$$v(t) = 0.24 \cos 2.4t$$

$$v(1) = 0.24 \cos 2.4(1)$$

$$v(1) = 0.24 \cos 2.4$$

$$v(1) = 0.24 \times -0.737$$

$$v(1) \approx -0.177\ cm/s$$

33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً .

$v(t) = 0 \ \rightarrow 0.24\cos 2.4t = 0$

$0.24\cos 2.4t = 0$

$\cos 2.4t = 0$

عندما يكون $\cos\theta = 0$ فهذا يعني ان $\sin\theta$ يساوي إما 1 أو -1 .

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t = \pm 1$ في اقتران الموقع نجد ان :

$s(t) = 0.1\sin 2.4t$

$s(1) = (0.1)(1)(1)$

$s(1) = 0.1$

$s(1) = (0.1)(-1)(1)$

$s(1) = -0.1$

إذن ، عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $0.1\ cm$ أو $-0.1\ cm$

34) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً .

$a(t) = 0.24 - \sin 2.4t\,(2.4)$

$a(t) = -5.76\sin 2.4t$

$a(t) = -5.76\sin 2.4t = 0$

$\sin 2.4t = 0$

بتعويض قيمة $\sin 2.4t = 0$ في اقتران الموقع نجد :

$s(t) = 0.1\sin 2.4t$

$s(t) = 0.1(0)$

$s(t) = 0$

إذن عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s = 0$ ، أي عند مرور بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

35) $x = t + 2 \quad , y = t^2 - 1 \, , t = 1$

$x = t + 2$

$x = 1 + 2$

$\boxed{x = 3}$

$y = (1)^2 - 1$

$\boxed{y = 0}$

النقطة هي : $(3, 0)$

$\frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dx}{dt} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1}$

$\frac{dy}{dx} = 2t$

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = 2(1)$

$m = 2$	ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = 2(x - 3)$

$y - 0 = 2x - 6$

$y = 2x - 6$	معادلة المماس

36) $x = \frac{t}{2} \quad , y = t^2 - 4 \, , t = -1$

$x = \frac{t}{2}$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

$y = t^2 - 4$

$y = (1)^2 - 4$

$y = 1 - 4$

$\boxed{y = -3}$

نقطة التماس هي : $\boxed{\left(-\frac{1}{2}, -3\right)}$

$\frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 4t$

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = 4(-1)$

$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = -4 \qquad \text{ميل المماس}}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -4\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y + 3 = -4(x + \frac{1}{2})$$

$$y = -4x - 2 - 3$$

$\boxed{y = -4x - 5}$ معادلة المماس

37) $x = t - \sin t \quad , y = 1 - \cos t \ , t = \frac{\pi}{3}$

$$x = t - \sin t$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$y = 1 - \cos t$$

$$y = 1 - \cos\frac{\pi}{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})}$

$$\frac{dy}{dt} = -(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \qquad \text{ميل المماس}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}$$

$$y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$$

$$y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{4}{2}$$

$\boxed{y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+2 \quad \text{معادلة المماس}}$

38) $x=\sec^2 t-1 \quad , y=\tan t \quad , t=-\frac{\pi}{4}$

$$x=\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1$$

$$x=\left(-\sqrt{2}\right)^2-1$$

$$x=2-1$$

$$\boxed{x=1}$$

$$y=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{y=-1}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(1,-1)}$

$$y=\tan t$$

$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$$

$$x=\sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt}=2\sec t \sec t \tan t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2(-1)}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{معادلة المماس}}$$

39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ ، حيث : $0 \le t \le 2\pi$ ، أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما : $1 + \sqrt{2}$ ، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب .

$$y = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(-(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

$$x = 2(t - \sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t}{2(1 - \cos t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+1$$ ميل المماس

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$ ميل العمودي المماس

$$m_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$m_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$m_1 = -\sqrt{2}+1$$

$$m_1 = 1-\sqrt{2}$$ ميل العمودي المماس

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانيين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $h(x) = f(g(x))$ وكان $p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كلا مما يأتي :

40) $\acute{h}(1)$

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$\acute{h}(x) = \acute{f}\big(g(x)\big) \times \acute{g}(x)$$

$$\acute{h}(1) = \acute{f}(g(1)) \times \acute{g}(1)$$

$$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$$

$\acute{f}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$m = \frac{3-4}{5-2}$$

$$m = \frac{-1}{3}$$

$\acute{g}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = \frac{2-5}{3-0}$$

$$m = \frac{-3}{3}$$

$$m = -1$$

$$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$$

$$\acute{h}(1) = \frac{-1}{3} \times -1$$

$$\acute{h}(1) = \frac{1}{3}$$

41) $\acute{p}(1)$

$$\acute{p}(x) = \acute{g}(f(x)) \times \acute{f}(x)$$

$$\acute{p}(1) = \acute{g}\big(f(1)\big) \times \acute{f}(1)$$

$$\acute{p}(1) = \acute{g}(2) \times \acute{f}(1)$$

$\acute{g}(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = \frac{2-5}{3-0}$$

$$m = \frac{-3}{3}$$

$$m = -1$$

$\acute{f}(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = \frac{0-4}{0-2}$$

$$m = \frac{-4}{-2}$$

$$m = 2$$

$$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$$

$$\acute{h}(1) = 2 \times -1$$

$$\acute{h}(1) = -2$$

مهارات التفكير العليا: (صفحة57)

تبرير : إذا كان الاقتران : $y = \ln(ax+b)$ ، حيث a و b ثابتان موجبان ، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

42) أثبت أن الإحداثي x للنقطة p أقل من 1 .

$$y = \ln(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)فيكون ميل المماس عند P هو :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b}$$

$$\frac{a}{ax_1+b} = 1$$

$$ax_1 + b = a$$

$$ax_1 = a - b$$

$$\frac{ax_1}{a} = \frac{a-b}{a}$$

$$x_1 = \frac{a-b}{a}$$

$$x_1 = 1 - \frac{b}{a}$$

المقدار $(1 - \frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين .

إذن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43) أجد قيمة كل من a و b ، علماً بأن P هي النقطة $(0,2)$ ، ثم أبرر إجابتي .

$$y = f(x) = \ln(ax+b)$$

$$\acute{y} = \acute{f}(x) = \frac{a}{ax+b}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{a}{a(0)+b}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{a}{b}$$

ميل المماس عند النقطة $P(0,2)$ يساوي 1 أي أن : $\acute{f}(0) = 1$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$a = b$$

$$f(x) = \ln(ax+b)$$

$$f(0) = \ln(a(0)+b)$$

$$f(0) = \ln b$$

$$\ln b = 2$$

$$b = e^2$$

$$\boxed{a = b = e^2}$$

44) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

افترض ان النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)

بتعويض قيمة كل من a و b نجد أن :

$$f(x) = \ln(ax+b)$$

$$f(x) = \ln(e^2x+e^2)$$

$$f(x) = \ln\left(e^2(x+1)\right)$$

$$f(x) = 2 + \ln(x+1)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\acute{f}(x_1) = \frac{1}{x_1 + 1}$$

$$\frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 + 1 = 2$$

$$x_1 = 2 - 1$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

$$y_1 = f(x_1)$$

$$f(1) = \ln(e^2(1) + e^2)$$

$$f(1) = \ln(e^2 + e^2)$$

$$f(1) = \ln(2e^2)$$

$$f(1) = \ln 2 + \ln e^2$$

$$f(1) = \ln 2 + 2$$

إذن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, \ln 2 + 2)$

تبرير : يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2t$ ، $x = t^2$.

45) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

$$y = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$x = t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

46) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

$\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}}$ ميل المماس

$m_1 = -\frac{1}{m}$ ميل العمودي على المماس

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{t}}$$

$$m_1 = -\frac{1}{1} \times \frac{t}{1}$$

$\boxed{m_1 = -t}$ ميل العمودي على المماس

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$ معادلة العمودي على المماس

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

$$y - 2t = -tx + t^3$$

$\boxed{y = -tx + t^3 + 2t}$ معادلة العمودي على المماس

47) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $(2 + t^2)^2 \; |t| \frac{1}{2}$.

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته .

$$0 = -tx + t^3 + 2t$$

$$tx = t^3 + 2t$$

$$x = \frac{t^3 + 2t}{t}$$

$$x = t^2 + 2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$ في معادلته .

$$y = -t(0) + t^3 + 2t$$

$$y = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2} \times x \times y$$

$$A = \frac{1}{2} \times |t^2 + 2| \times |t^3 + 2t|$$

$$A = \frac{1}{2} \times |(t^2 + 2)| \times |t(t^2 + 2)|$$

$$A = \frac{1}{2} \times |t||(t^2 + 2)^2|$$

تحد : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

48) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

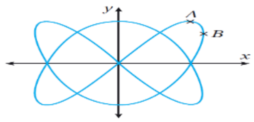
$$\frac{dy}{dx} = \cos \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

49) $y = e^x \sin^2 x \cos x$

$$y = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\left((e^x)(2 \sin x \cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\right)$$

$$y = -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$$



تحد: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t \qquad y = \sin 3t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

50) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، فأجد إحداثيي A .

$y = \sin 3t$

$\frac{dy}{dt} = \cos 3t\,(3)$

$\frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$

$x = \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = \cos 2t\,(2)$

$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$

$3\cos 3t = 0$

$\cos 3t = 0 \to 3t = \frac{\pi}{2} \to t = \frac{\pi}{6}$

$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$y = \sin\frac{\pi}{2}$

$\boxed{y = 1}$

إذن إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

51) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B ، فأجد إحداثيي B .

عند النقطة B يكون المماس موازياً لمحور y ، أي أن ميله غير معرف ، ومنه يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = \text{غير معرف}$$

$$2\cos 2t = 0$$

$$\cos 2t = 0 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

إذن إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل ، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة .

أي أن : $\sin 2t = 3\cos 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معاً عندما $t = 0$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3(1)}{2(1)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3}{2}$$

كما تتحققان أيضاً عندما $t = \pi$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3(-1)}{2(1)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{-3}{2}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$, $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

53) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - 4t^2 + 4t + 4t - 4}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

54) أجد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً.

$$v(t)=\frac{2t-2}{t^2-2t+1.9}=0$$

$$2t-2=0$$

$$2t=2$$

$$t=1$$

$$s(1)=\ln((1)^2-2(1)+1.9)$$

$$s(1)=\ln(1-2+1.9)$$

$$s(1)=\ln 0.9\ m$$

$$a(1)=\frac{-2(1)^2+4(1)-0.2}{((1)^2-2(1)+1.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{-2+4-0.2}{(1-2+1.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{1.8}{(0.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{1.8}{0.81}$$

$$a(1)\approx 2.2\ m/s^2$$

55) متى يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي؟

$$s(0)=\ln((0)^2-2(0)+1.9)$$

$s(0)=\ln(1.9)$ الموقع الابتدائي

$$s(t)=\ln(1.9)=\ln(t^2-2t+1.9)$$

$$1.9=t^2-2t+1.9$$

$$t^2-2t+1.9-1.9=0$$

$$t^2-2t=0$$

$t(t-2)=0$

$t-2=0$

إما $\boxed{t=2}$

أو $\boxed{t=0}$

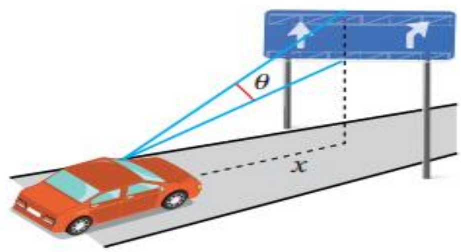
يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم:

يقود سائق سيارته في اتجاه لافته على طريق سريع كما في الشكل المجاور ، إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافته ، و x المسافة بينه وبين اللافته بالأمتار ، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي :

$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$ فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟



$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(4x^2+1008)-(8x^2)}{(x^2+252)^2}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\left(\frac{4x}{x^2+252}\right)^2\right)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\frac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}$$

العلاقة الضمنية ومشتقاتها:

مثال 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة57)

1) $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{d}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos \mathrm{y}) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$

$$\cos x - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة58)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 + y^2 = 13$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx}\ (10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx}\ \frac{(10y - \cos y)}{(10y - \cos y)} = \frac{-2}{(10y - \cos y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

مثال 2 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة58)

1) $2xy + y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}\ (y^3) = 0$$

$$2x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}\ (y^3)=0$$

$$2x\frac{dy}{dx}+2y-3y^2\frac{dy}{dx}\ =0$$

$$2x\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}\ =-2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x-3y^2)\ =-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{2x-3y^2}$$

2) $\sin(x+y)=y^2\cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y))=\frac{d}{dx}\ (y^2\cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y))=y^2\frac{d}{dx}\ (\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=-y^2\sin x+\cos x\,(2y\frac{dy}{dx})$$

$$\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=-y^2\sin x+2y\ \cos x\ \frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx}-2y\cos\ x\frac{dy}{dx}=-y^2\sin x-\cos x\,(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y)-2y\cos\ x)=-y^2\sin x-\cos x\,(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\sin x-\cos x\,(x+y)}{\cos(x+y)-2y\ \cos x}$$

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2y\frac{d}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة60)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3\left((x)(2y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(1)\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\frac{(6xy+3y^2)}{(6xy+3y^2)}\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{(6xy+3y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy+3y^2}$$

2) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\sec^2(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) = 2\left((x)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (y^3)(1)\right)$$

$$\sec^2(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + y^3$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$\sec^2(x-y) - 2y^3 = 6xy^2\frac{dy}{dx} + \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x-y)) = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(6xy^2+\sec^2(x-y))}{(6xy^2+\sec^2(x-y))} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{(6xy^2+\sec^2(x-y))}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2+\sec^2(x-y)}$$

3) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$2x = \frac{(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$$

$$2x(x+y)^2 = (x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x(x+y)^2 = \left(x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx}\right) - \left(x + x\frac{dy}{dx} - y - y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x(x+y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$$

$$2x(x+y)^2 = -2x\frac{dy}{dx} + 2y$$

$$2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x(x+y)^2}{x}$$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

مثال 3: (صفحة60)

أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $e^{2x}\ln y = x + y - 2$ عند النقطة (1،1) .

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y) + \ln y\frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(2)$$

$$e^{2x}\times\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} + \ln y\times 2\,e^{2x} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{e^{2x}}{y}\times\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (1,1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{(1)} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^2 - 1}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (1،1) هو : $\frac{1}{e^2-1}$

2- أجد ميل مماس منحنى العلاقة $y^2 = x$ عندما $x = 4$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$2y\,\frac{d}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{2y}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$

$$y^2 = x$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

إذن، أجد الميل عند النقطتين: (1, 2) و (1,-2)

الميل عند النقطة $(1, 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

الميل عند النقطة $(1, -2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة61)

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

$$y^2 = \ln x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\left[2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\right] \times \frac{1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e(1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عند النقطة $x = 6$

الخطوة الأولى : إيجاد النقطة :

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$(y-3)^2 = 4(6-5)$$

$$(y-3)^2 = 4$$

$$(y-3) = \pm 2$$

$$y = 2+3$$

$$\boxed{y = 5}$$

$$y = -2+3$$

$$\boxed{y = 1}$$

النقاط هي : $(6,5)$ و $(6,1)$

الخطوة الثانية : إيجاد ميل المماس عند النقاط و $(6,1)$ و$(6,5)$:

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{2(y-3)}{2(y-3)}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{-2}$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = -1$ ميل المماس عند النقطة الأولى هو

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 2$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 1$ ميل المماس عند النقطة الثانية هو

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

مثال 4: (صفحة62)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}$$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-1,2)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{5}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-1,2)$ هو : $\frac{4}{5}$

الخطوة 2 :أجد معادلة المماس عند النقطة $\frac{dy}{dx}$ $(-1,2)$.

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)$$

$$y-(2)=\mathrm{m}(x-(-1))$$

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$$ معادلة المماس

أتحقق من فهمي: (صفحة63)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^3+y^3-3xy=17$ عند النقطة $(2,3)$.

الخطوة الأولى : أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2,3)$.

$$x^3+y^3-3xy=17$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3x\frac{dy}{dx}-3y(1)=0$$

بتعويض $x=2$ و $y=3$ ينتج أن :

$$3(2)^2+3(3)^2\frac{dy}{dx}-3(2)\frac{dy}{dx}-3(3)=0$$

$$12+27\frac{dy}{dx}-6\frac{dy}{dx}-9=0$$

$$(27-6)\frac{dy}{dx}=9-12$$

$$21\frac{dy}{dx}=-3$$

$$\frac{21}{21}\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{21}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{7}$$ ميل المماس

الخطوة 2 :أجد معادلة المماس عند النقطة $\frac{dy}{dx}$ $(2,3)$.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + \frac{21}{7}$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7}$$ معادلة المماس

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

مثال 5: (صفحة63)

إذا كان : $2x^3 - 3y^3 = 8$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3\right) - \frac{d}{dx}\left(3y^2\right) = 0$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{dy}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{dy}{dx}(y)}{(y^2)}$$

$$= \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy - x^2(\frac{x^2}{y})}{y^2}$$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

اتحقق من فهمي : (صفحة64)

إذا كان : $xy + y^2 = 2x$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$xy + y^2 = 2x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=2-y$$

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=2-y$$

$$\frac{(x+2y)}{x+2y}\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x+2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right)-(2-y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y)-(2-y)(1+\left(2\times\frac{2-y}{x+2y}\right))}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y)-(2-y)(\frac{x+2y+4-2y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y)-(2-y)(\frac{x+4}{x+2y})\right)\left(\frac{1}{(x+2y)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)-(x+2y)-(x+4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-x-2y-x-4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-2x-2y-4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{-4x-4y-8+2xy+2y^2+4y}{(x+2y)^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{-4x-8+2xy+2y^2}{(x+2y)^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2xy-4x+2y^2-8}{(x+2y)^3}$$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

مثال 6: (صفحة64)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$

الخطوة 1: أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 + 8t^2$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 4t^3 + 16t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 + 16t}{3t^2 + 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t + 2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(t + 2)(t - 2)}{3(t + 2)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(t - 2)}$$

الخطوة 2: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 1$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t - 2)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3(3t^2 + 6t)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3(1)^2 + 6(1))}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{27}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة65)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$$

الخطوة 1: أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$y = t^3 - 2t^2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t}$$

$$x = 3t^2 + 1$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4t}{6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{6t} - \frac{4t}{6t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}}$$

الخطوة 2: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 2$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

مثال 7: (صفحة66)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

$1)\ \ y = x^x$

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{dy}{dx}(x \ln x)$

$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$

$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$

$2)\ \ y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$\ln y = 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ (x^2+9)$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left((2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ (x^2+9)\right)$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left((2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ \ln\ (x^2+9)\right)$

$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9}$

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(x-1)^2(x^2 + x + 18}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

أتحقق من فهمي : (صفحة67)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1) $y = x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = (\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x\right] \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x$$

2) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

$$y=\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}(\ln(x-1)-\ln(x^4+1))$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4x^3}{2(x^4+1)}$$

$$\left[\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{(x^4+1)}\right]\quad\times y$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{(x^4+1)}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}\right)$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة67)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2-2y^2=4$

$$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$-4y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{-4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$$x^{-2} + y^{-2} = \frac{1}{10}$$

$$-2x^{-3} - 2y^{-3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left[-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}\right] \times -\frac{y^3}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3}$$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$$(x^2 + y^2)^2 = 50x^2 - 50y^2$$

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$(2x^2 + 2y^2)(2x + 2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4x^3 + 4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4xy^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} + 100y\frac{dy}{dx} = 100x - 4x^3 - 4xy^2$$

$$\left[4\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 100x - 4x^3 - 4xy^2\right] \quad \div 4$$

$$\frac{dy}{dx}(yx^2+y^3+25y)=25x-x^3-xy^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{25x-x^3-xy^2}{yx^2+y^3+25y}$$

4) $e^x y = xe^y$

$$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right)+(e^y)(1)$$

$$e^x\frac{dy}{dx}+ye^x=xe^y\frac{dy}{dx}+e^y$$

$$e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$$

5) $3^x = y-2xy$

$$3^x\ln 3=\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-2y$$

$$\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}=3^x\ln 3+2y$$

$$\frac{dy}{dx}(1-2x)=3^x\ln 3+2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3^x\ln 3+2y}{1-2x}$$

6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=5$$

$$\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left[\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right]\times\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

7) $x=\sec\frac{1}{y}$

$$1=\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{(y.0)-(1.\frac{dy}{dx})}{y^2}$$

$$1=-\ \frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\left[1=-\ \frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}\right]\ \times -y^2$$

$$\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{\cos\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \cot\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ y^2\ \cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

$$2(\sin \pi x + \cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$\frac{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx})}{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)} = \frac{0}{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)}$$

$$\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi\cos\pi x}{\pi\sin\pi y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\pi x}{\sin\pi y}$$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$\frac{(x.x) + (y^2.y^2)}{xy^2} = 5$$

$$x^2 + y^4 = 5xy^2$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 5(x.2y\frac{dy}{dx} + y^2)$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 10xy\frac{dy}{dx} + 5y^2$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 10xy\frac{dy}{dx} = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y^2 - 2x}{4y^3 - 10xy}$$

10) $x + y = \cos(xy)$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy)((x)(\frac{dy}{dx}) + (y)(1))$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy)(x\frac{dy}{dx} + y)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -x\sin xy\frac{dy}{dx} - y\sin xy$$

$$x\sin xy\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-1-y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x\sin xy+1)=-1-y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x\sin xy+1)=-(1+y\sin xy)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy+1}$$

11) $x^2+y^2=\ln(x+y)^2$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)\,(1+\frac{dy}{dx})}{(x+y)^2}$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2\,(1+\frac{dy}{dx})}{(x+y)}$$

$$(2x+2y\frac{dy}{dx})(x+y)=2\,(1+\frac{dy}{dx})$$

$$2x^2+2xy+2xy\frac{dy}{dx}+2y^2\frac{dy}{dx}=2+2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy\frac{dy}{dx}+2y^2\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=2-2x^2-2xy$$

$$2\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)=2-2x^2-2xy$$

$$\frac{2\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)}{2(xy+y^2-1)}=\frac{2-2x^2-2xy}{2(xy+y^2-1)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}$$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$(\sin x)(-\sin y \frac{dy}{dx}) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$(-\sin x \sin y \frac{dy}{dx}) + 5\frac{dy}{dx} = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} - (\sin x \sin y - 5) = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{-(\sin x \sin y - 5)}{-(\sin x \sin y - 5)} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-(\sin x \sin y - 5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-\sin x \sin y + 5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + (\cos y)(\cos x)}{\sin x \sin y - 5}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة :

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , x = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2(\frac{1}{2})y - 1 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$2y - 1 = 0$$

$$2y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

$$y + 1 = 0$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+\left(2x.\frac{dy}{dx}\right)+(2y.1)=0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}(4y+2x)=-2y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(4y+2x)}{4y+2x}=\frac{-2y}{4y+2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{4y+2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2y+x}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{-y}{2y+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}$$

$$\boxed{=-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},-1\right)=\frac{-y}{2y+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-(-1)}{2(-1)+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{-2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{-2}{3}$$

$$\boxed{= \frac{-2}{3}}$$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , y = 1$

$(1)^3 + 2x^2 = 11(1)$

$1 + 2x^2 = 11$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{10}{2}$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

$3y^2 \frac{dy}{dx} + 4x = 11 \frac{dy}{dx}$

$3y^2 \frac{dy}{dx} - 11 \frac{dy}{dx} = -4x$

$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 11) = -4x$

$\frac{dy}{dx} \frac{(3y^2 - 11)}{3y^2 - 11} = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(\sqrt{5},1) = \frac{-4(\sqrt{5})}{3(1)^2-11}$$

$$= \frac{-4(\sqrt{5})}{8}$$

$$= \boxed{\frac{-(\sqrt{5})}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(-\sqrt{5},1) = \frac{-4(-\sqrt{5})}{3(1)^2-11}$$

$$= \frac{-4(-\sqrt{5})}{8}$$

$$= \boxed{\frac{(\sqrt{5})}{2}}$$

أجد ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25 \quad ,(3,-4)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(3,-4) = \frac{-x}{y}$$

$$\boxed{=\frac{-3}{4}}$$

16) $x^2 y = 4(2-y) \quad ,(2,1)$

$$(x^2 \frac{dy}{dx}) + (y.2x) = 4(-\frac{dy}{dx})$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+4) = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{-2xy}{x^2+4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2+4}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(2,1) = \frac{-2(2)(1)}{(2)^2+4}$$

$$= \frac{-4}{4+4}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}}$$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \quad ,(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$(e^{\sin x}).(\cos x) + (e^{\cos y}).(-\sin y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y} = \frac{e^{\cos y}\sin y}{e^{\cos y}\sin y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x-\cos y}\cos x}{\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{(1)-(0)}(0)}{1}$$

$$= 0$$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \quad ,(8,1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(8,1)$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{8}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{1}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3(2)} + \frac{2}{3(1)}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\right] \quad \times\frac{3}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{6}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (8,1) = -\frac{1}{2}}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

19) $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , (-4,3)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$2x + (x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x+2y)}{x+2y} = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (-4,3) = -\frac{2(-4)+(3)}{(-4)+2(3)}$$

$$= -\frac{-8+3}{-4+6}$$

$$= -\frac{-5}{2}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (-4,3) \quad = \frac{5}{2}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{20}{2} + 3$$

$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

20) $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \quad , (1, 0)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$x + y - 1 = \ln x^2 + \ln y^2$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + \frac{dy}{dx})(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + y^2 - 2y} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=\frac{2(1)-(1)^2-(0)^2}{(1)^2+(0)^2-2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=\frac{2-1}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=1$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)$$

$$y-0=1(x-1)$$

$$y=x-1$$

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

21) $x+y=\sin y$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y).(1)=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(1-\cos y)}{1-\cos y}=\frac{-1}{1-\cos y}=\frac{1}{-1+\cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{-1+\cos y}$$

$$=(-1+\cos y)^{-1}$$

$$=-(-1+\cos y)^{-2}(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$= (-1+\cos y)^{-2}(\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{(\sin y)\dfrac{1}{-1+\cos y}}{(-1+\cos y)^2}$$

$$= \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^2.(-1+\cos y)}$$

$$= \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$$

22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$12y^2\frac{dy}{dx} = 12x$$

$$\frac{12y^2\dfrac{dy}{dx}}{12y^2} = \frac{12x}{12y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{y^2}$$

$$= \frac{(y^2).(1)-(x).2y(\dfrac{dy}{dx})}{(y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\dfrac{x}{y^2}}{y^4}$$

$$= \frac{y - 2x\dfrac{x}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{y - \dfrac{2x^2}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{\dfrac{y^3 - 2x^2}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{y^3 - 2x^2}{y^3 . y^2}$$

$$= \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

23) $xy + e^y = e$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + \frac{dy}{dx}e^y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + e^y) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x + e^y).\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - (y).(1 + e^y\dfrac{dy}{dx})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y).\left(\dfrac{y}{x + e^y}\right) + (y).(1 + \dfrac{-y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+e^y).\left(\frac{y}{x+e^y}\right)+(y).(\frac{x+e^y-y}{x+e^y})}{(x+e^y)^2}$$

24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x-6)(y+4)=2$ عند النقطة $(7,-2)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x-6)(y+4)=2$$

$$(x-6)\left(\frac{dy}{dx}+0\right)+(y+4)(1+0)=0$$

$$(x-6)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y+4)(1)=0$$

$$x\frac{dy}{dx}-6\frac{dy}{dx}+y+4=0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x-6)}{x-6}=\frac{-y-4}{x-6}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4}{x-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-\frac{-2+4}{7-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-\frac{2}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-2$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$$m_1=-\frac{1}{m}$$

$$m_1 = -\frac{1}{-2}$$

$$m_1 = \frac{1}{2}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

25) اثبت أن لمنحنى العلاقة : $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين ، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

1) الخطوة الأولى : ايجاد مشتقة العلاقة $\frac{dy}{dx}$

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$

$$6x + (2x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (2y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x + 2y) = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(2x+2y)}{2x+2y}=\frac{-6x-2y}{2x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-6x-2y}{2x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x-y}{x+y}$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر

$$\frac{-3x-y}{x+y}=0$$

لكي يكون الناتج صفر يجب ان يكون البسط يساوي صفر

$$-3x-y=0$$

$$y=-3x$$

3) نعوض قيمة $y=-3x$ في العلاقة الرئيسية لإيجاد قيمة x

$$3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6$$

$$3x^2-6x^2+9x^2=6$$

$$\frac{6x^2}{6}=\frac{6}{6}$$

$$x^2=1$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$

$$\boxed{x=\pm 1}$$

4- نعوض قيمتي $x=\pm 1$ في العلاقة $y=-3x$ لإيجاد قيمة y

$$y=-3(1)=\boxed{-3}$$

$$y=-3(-1)=\boxed{3}$$

إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1,-3),(-1,3)$

26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى $x+y^2=1$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x+2y=0$

1- الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$x+y^2=1$$

$$1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$x+2y=0$$

$$1+2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2}{2}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}$$

3- الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{-1}{2y}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{-2y}{-2}=\frac{-2}{-2}$$

$$\boxed{y=1}$$

4- الخطوة الرابعة : نعوض قيمة $y=1$ في علاقة المنحني $x+y^2=1$

$$x+y^2=1$$

$$x+(1)^2=1$$

$$x+1=1$$

$$x=1-1$$

$$\boxed{x=0}$$

اذن النقطة المطلوبة هي $\boxed{(0,1)}$

27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى : $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم : $y + 3x - 5 = 0$

1- الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$y^3 = x^2$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{3y^2}{3y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$y + 3x - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -3$$ ميل المستقيم

$$\frac{1}{3}$$ ميل العمودي المستقيم

3- الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3}$$

$$6x = 3y^2$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{3y^2}{6}$$

$$x = \frac{1}{2} y^2$$

4- الخطوة الرابعة : نعوض قيمة $x = \frac{1}{2} y^2$ في علاقة المنحني $y^3 = x^2$

$$y^3 = x^2$$

$$y^3=(\frac{1}{2}y^2)^2$$

$$y^3=\frac{1}{4}y^4$$

$$y^3-\frac{1}{4}y^4=0$$

$$y^3(1-\frac{y}{4})=0$$

إما $y^3=0 \quad \rightarrow \boxed{y=0}$

أو $1-\frac{y}{4}=0$

$$\frac{y}{4}=1$$

$$\boxed{y=4}$$

4- الخطوة الخامسة : نعوض قيم y في $x=\frac{1}{2}y^2$ لإيجاد قيم x

$$x=\frac{1}{2}y^2$$

$$x=\frac{1}{2}(0)^2$$

$$\boxed{x=0}$$

$$x=\frac{1}{2}(4)^2$$

$$x=\frac{1}{2}16$$

$$\boxed{x=8}$$

اذن النقاط المطلوبة هي $\boxed{(8,4)}$ و $\boxed{(0,0)}$

28) إذا كان : $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ ، حيث $x \neq y \neq 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$$

$$\frac{\frac{(y.1)-(x.\frac{dy}{dx})}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{\left(x.\frac{dy}{dx}\right)-(y.1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\left[\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\right]\times\frac{2}{1}$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)(y^2\sqrt{\frac{x}{y}})$$

$$x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}(xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}) = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}\right) = \frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}}$$

29) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ ، التي يكون عندها ميل المماس صفراً .

1- الخطوة الأولى: ايجاد ميل المماس للاقتران

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\ln y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \ln x)}{x^2}}$$ ميل المماس

2- الخطوة الثانية: مساواة ميل المماس بالصفر

$$\frac{y(1 - \ln x)}{x^2} = 0$$

لكي يكون الناتج يساوي صفر يجب ان يكون البسط يساوي صفر بالتالي:

$$y(1 - \ln x) = 0$$

$$\frac{y(1 - \ln x)}{y} = \frac{0}{y}$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$\boxed{x = e}$

3- الخطوة الثالثة : نعوض قيم x في $y = x^{\frac{1}{x}}$ لإيجاد قيم y

$\boxed{y = e^{\frac{1}{e}}}$

4- النقطة المطلوبة هي $(e, e^{\frac{1}{e}})$

30) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $x^2 + y^2 = 100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

1) الخطوة الأولى: ايجاد ميل المماس للاقتران

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$ ميل المماس

2) الخطوة الثانية : مساواة ميل المماس بـ $\frac{3}{4}$

$$\frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$3y = -4x$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{-4x}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{-4x}{3}}$$

3) الخطوة الثالثة : نعوض المعادلة y في الاقتران لإيجاد قيم x

$$x^2 + \left(\frac{-4x}{3}\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$\left[\frac{25}{9}x^2 = 100\right] \quad \times \frac{9}{25}$$

$$x^2 = 36$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$$

$$\boxed{x = \pm 6}$$

$$\boxed{x = 6}$$

$$y = \frac{-4(6)}{3}$$

$$y = \frac{-24}{3}$$

$$\boxed{y = -8}$$

$$\boxed{x = -6}$$

$$y = \frac{-4(-6)}{3}$$

$$y = \frac{24}{3}$$

$$\boxed{y = 8}$$

4) الخطوة الرابعة : النقاط المطلوبة هي $\boxed{(-6, 8)}$ و $\boxed{(6, -8)}$

يمثل الاقتران $t > 0$ ، $s(t) = t^{\frac{1}{t}}$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

31) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه.

الخطوة الأولى: ايجاد مشتقة اقتران موقع الجسيم

$$s(t) = t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln s(t) = \ln t^{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + \ln t^{\frac{1}{t}}\,(-\frac{1}{t^2})$$

$$= \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$v(t) = s(t) \times \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$v(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$\ln v(t) = \ln(t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2})$$

$$\ln v(t) = \ln t^{\frac{1}{t}} + \ln(1-\ln t) - \ln t^2$$

$$\ln v(t) = \frac{1}{t}\ln t + \ln(1-\ln t) - 2\ln t$$

$$a(t) = v(t)(\frac{1-\ln t}{t^2} + \frac{-\frac{1}{\text{t}}}{1-\ln t} - \frac{2}{\text{t}})$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2}(\frac{1-\ln t}{t^2} - \frac{1}{t(1-\ln t)} - \frac{2}{\text{t}})$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}}(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1-\ln t)}{\text{t}^3})$$

32) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

$$v(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2} = 0$$

$$1 - \ln t = 0$$

$$\ln t = 1$$

$$t = e$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1-\ln t)}{t^3}\right)$$

$$a(t) = e^{\frac{1}{t}}\left(\frac{(1-\ln e)^2}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{2(1-\ln e)}{e^3}\right)$$

$$a(t) = -e^{\frac{1}{e}-3}\ m/s^2$$

33) إذا كان $y = \ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني :

$$y = \ln x\ , x > 0$$

بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن:

$$e^y = x$$

باشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة إلى x ينتج أن :

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

بتعويض $e^y = x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

34) $y = (x^2+3)^x$

$\ln y = x\ln(x^2+3)$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)\right] \quad \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$$

35) $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

$$\ln y = \ln\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

$$\ln y = \ln(x^4+1) + \ln\left(\sqrt{x+2}\right) - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\ln y = \ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

36) $y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$\ln y=\ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x^2(x+1)(x+2))$

$\ln y=\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$

$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right]\quad\times\frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

37) $y=x^{\sin x}\,, x>0$

$\ln y=(\sin x)\ln x$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sin x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\cos x)(\ln x)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sin x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(\cos x)\right]\quad\times\frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة :

38) $x = \sin t\,,\ y = \cos t\,,\ t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{\frac{1}{\sec t}}$$

$$= -\sec^2 t\,.\sec t$$

$$= -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4}$$

$$= -\sec^3\frac{\pi}{4}$$

$$= -(\frac{2}{\sqrt{2}})^3.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= -(\frac{2\sqrt{2}}{2})^3$$

$$= -\sqrt{2}^3$$

$$= -(2^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{2^3}$$

$$= -\sqrt{8}$$

$$= -\sqrt{4}.\sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{2}$$

39) $x = e^{-t},\ y = t^3 + t + 1\ ,\ t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2-1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t)+(-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-6e^t t - 3e^t t^2 + e^t}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{e^t(-6t-3t^2-1)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{e^t e^t(-6t-3t^2-1)}{-1}$$

$$= e^{2t}(6t+3t^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^{2t}(6t+3t^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^{2(0)}(6(0)+3(0)^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^0(1) = 1$$

إذا كانت العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً .

40) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول .

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$y = x$

$x^3 + (x)^3 = 6x(x)$

$x^3 + x^3 = 6x^2$

$$2x^3 = 6x^2$$

$$\frac{2x^3}{2} = \frac{6x^2}{2}$$

$$x^3 = 3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

إما $x^2 = 0$

$$\boxed{x = 0}$$

أو $(x-3) = 0$

$$\boxed{x = 3}$$

بما أن $y = x$ فإن $y = 3$ بالتالي نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$

2- الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس للمنحنى

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = (6x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (6y).(1)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{3y^2-6x}{3y^2-6x}\right) = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{2(3)-(3)^2}{(3)^2-2(3)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{6-9}{9-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{-3}{3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = -1 \quad \text{ميل المماس}}$$

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس للمنحنى

$$y - y_1 = \mathrm{m}_1(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x - 3)$$

$$y - 3 = -x + 3$$

$$y = -x + 3 + 3$$

$$\boxed{y = -x + 6 \quad \text{معادلة المماس}}$$

41) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول ، بحيث يكون مماس المنحنى أفقياً .

الخطوة الأولى : بما أن المماس أفقي نساوي المشتقة بالصفر ، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0$$

$$2y - x^2 = 0$$

$$2y = x^2$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$$

الخطوة الثانية : نعوض قيمة $y = \frac{1}{2}x^2$ **في العلاقة** $x^3 + y^3 = 6xy$ **لإيجاد قيم** x

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$x^3 + (\frac{1}{2}x^2)^3 = 6x(\frac{1}{2}x^2)$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x(x^2)$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\left[\frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0\right] \quad \times \frac{8}{1}$$

$$x^6 - 16x^3 = 0$$

$$x^3(x^3 - 16) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$x^3 - 16 = 0$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{16}$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{16}}$$

الخطوة الثالثة : نعوض قيم x المستخرجة في العلاقة $y = \frac{1}{2}x^2$ لإيجاد قيم y

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = \frac{1}{2}(0)^2$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي : $(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2})$

42) مصباح : يبين الشكل المجاور مصباحاً على ارتفاع h وحدة من المحور x ، إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح ، الذي يمس منحنى العلاقة : $x^2 + y^2 = 1$ فأجد ارتفاع المصباح h .

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

لتكن $P(1.25, 0)$ نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة :

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$\boxed{m = \frac{0 - y}{1.25 - x} = -\frac{x}{y}}$$

$$y^2 = 1.25x - x^2$$

$$1 - x^2 = 1.25x - x^2$$

$$1 = 1.25x - x^2 + x^2$$

$$\frac{1.25}{1.25}x = \frac{1}{1.25}$$

$$\boxed{x = \frac{4}{5}}$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y^2 = 1 - (\tfrac{4}{5})^2$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$$

$$y = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\boxed{y = \frac{3}{5}}$$

فتكون النقطة $P(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

ميل المماس عند النقطة P :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{4}{3}$$

$$m = \frac{h-0}{-2-\frac{5}{4}}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{h-0}{-2-\frac{5}{4}}$$

$$3h = 8+5$$

$$\frac{3h}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{13}{3}}$$

ارتفاع المصباح يساوي $h = \frac{13}{3}$ وحدة

مهارات التفكير العليا: : (صفحة69)

تبرير : إذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجب عن الاسئلة الأربعة الآتية تباعاً :

42) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

43) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة : $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية : $x = \sec t, y = \tan t$ ، حيث : $0 \leq t \leq 2\pi$.

استعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y = \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

44) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان ، مبرراً إجابتي .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان ، لأنه من نص السؤال : $x=\sec t$ و $y=\tan t$
ومنه فإن $\frac{x}{y}=\frac{\sec t}{\tan t}$

45) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة 2.

$$\frac{dy}{dx}=2 \ \rightarrow \frac{x}{y}=2 \ \rightarrow x=2y$$

$$x^2-y^2=1$$

$$(2y)^2-y^2=1$$

$$4y^2-y^2=1$$

$$3y^2=1$$

$$\sqrt{y^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x=2\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{x=\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x=-2\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{x=-\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

النقطة التي يكون عندها ميل المماس 2 هي : $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

46) تبرير : إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبرراً إجابتي .

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\quad\times\frac{2\sqrt{y}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1,y_1) فيكون ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس :

$$x=0\ \rightarrow y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(0-x_1)$$

$$y-y_1=\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$\boxed{y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

$$y = 0 \ \rightarrow 0 - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$-y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$\left[\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}\right] \ \times \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{y_1}}$$

$$x = \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1$$

$$\boxed{x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

مجموع المقطعين:

$$y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$= y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1$$

$$= \left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{k}\right)^2$$

$$= k$$

47) تحد : إذا كان مماس منحنى الاقتران : $y=(x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4,1)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة ΔOBC حيث O نقطة الاصل .

$$y=(x-3)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\ln(x-3)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\sqrt{x}\ln(x-3)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sqrt{x})\left(\frac{1}{(x-3)}\right)+\ln(x-3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right]\quad\times y$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=(x-3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=(4-3)^{\sqrt{4}}\left(\frac{\sqrt{4}}{(4-3)}+\frac{\ln(4-3)}{2\sqrt{4}}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=(1)^{2}\left(\frac{\sqrt{4}}{1}+\frac{\ln(1)}{2(2)}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=\left(2+\frac{0}{4}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = 2$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 4)$$

$$y - 1 = 2x - 8$$

$$y = 2x - 8 + 1$$

$$y = 2x - 7$$

المقطع x والمقطع y للمماس :

$$x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 7$$

$$y = -7$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = 2x - 7$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x = 3.5$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي :

$$A = \frac{1}{2} \times x \times y$$

$$A = \frac{1}{2} \times 3.5 \times |-7|$$

$$A = 12.25$$

اختبار نهاية الوحدة:

1) يمثل الاقتران $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم ، إحدى الآتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم المتجهة صفراً :

$s(t) = 3 + \sin t$

$v(t) = \cos t = 0$

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$ c) $\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$ d) $t = \pi$

2) إذا كان: $y = uv$ ، وكان : $u(1) = 2, \acute{u}(1) = 3 , v(1) = -1 , \acute{v}(1) = 1$ فإن $\acute{y}(1)$ تساوي :

$y = uv$

$\acute{y} = (u.\acute{v}) + (v.\acute{u})$

$\acute{y} = (2.1) + (-1.3)$

$\acute{y} = (2) + (-3)$

$\acute{y} = -1$

a) 1 b) $\boxed{-1}$ c) 1 d) 4

3) إذا كان $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، فإن $\acute{\acute{f}}(x)$ هو :

$f(x) = x - \frac{1}{x}$

$f(x) = x - x^{-1}$

$\acute{f}(x) = 1 + x^{-2}$

$\acute{\acute{f}}(x) = -2x^{-3}$

$\acute{\acute{f}}(x) = -\frac{2}{x^3}$

a) $1+\frac{1}{x^2}$ b) $1-\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $\boxed{-\frac{2}{x^3}}$

4) إذا كان $y=\tan 4t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو :

$y=\tan 4t$

$\acute{y}=\sec^2 4t\ (4)$

$\acute{y}=4\sec^2 4t$

a) $4\sec 4t\tan 4t$ b) $\sec 4t\tan 4t$ c) $\sec^2(4t)$ d) $\boxed{4\sec^2(4t)}$

5) إذا كان $y^2-x^2=1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1,\sqrt{2})$ هو :

$y^2-x^2=1$

$2y\frac{dy}{dx}-2x=0$

$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2}$

6) إذا كان $f(x)=\log\ (2x-3)$ ، فإن $\acute{f}(x)$ هو :

$f(x) = \log\ (2x-3)$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{(2x-3)\ln 10}(2)$

$\acute{f}(x) = \dfrac{2}{(2x-3)\ln 10}$

a) $\boxed{\dfrac{2}{(2x-3)\ln 10}}$　　b) $\dfrac{2}{(2x-3)}$　　c) $\dfrac{1}{(2x-3)\ln 10}$　　d) $\dfrac{1}{(2x-3)}$

7) إذا كان $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو :

$y = 2^{1-x}$

$\acute{y} = 2^{1-x}(-1)$

$\acute{y} = -2^{1-x}\ln 2$

$\acute{y} = -2^{1-2}\ln 2$

$\acute{y} = -2^{-1}\ln 2$

$\acute{y} = -\dfrac{\ln 2}{2}$

a) $-\frac{1}{2}$　　b) $\frac{1}{2}$　　c) $\frac{\ln 2}{2}$　　d) $\boxed{-\frac{\ln 2}{2}}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

8) $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$

$$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = e^x + \frac{\sqrt{x}}{2}e^x + \sqrt{x}e^x + xe^x + x\sqrt{x}e^x$$

$$\acute{f}(x) = e^x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right)$$

$$\acute{f}(x) = e^x\left(1 + \frac{3\sqrt{x}}{2} + x + x\sqrt{x}\right)$$

9) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(\tan x)\,(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

10) $f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$

$$f(x) = x^{-1} - 12\sec x$$

$$\acute{f}(x) = -x^{-2} - 12\sec x\tan x$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x\tan x$$

11) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x\,(\ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x\,(\frac{x\ln x - 1}{x})}{\ln^2 x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{e^{x}\,(x\ln x-1)}{x\ln^{2}x}$$

12) $f(x)=\frac{\ln x}{x^{4}}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x^{4})\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(4x^{3})}{x^{8}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x^{4})\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(4x^{3})}{x^{8}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{x^{3}-(\ln x)(4x^{3})}{x^{8}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1-(\ln x)(4)}{x^{5}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1-4\ln x}{x^{5}}$$

13) $f(x)=5^{2-x}$

$$\ln f(x)=\ln 5^{2-x}$$

$$\ln f(x)=(2-x)\ln 5$$

$$\ln f(x)=\ln 10-x\ln 5$$

$$\frac{\acute{f}(x)}{f(x)}=0-\ln 5$$

$$\frac{\acute{f}(x)}{f(x)}=-\ln 5$$

14) $f(x) = 10\sin 0.5x$

$\acute{f}(x) = 10\cos 0.5x\,(0.5)$

$\acute{f}(x) = 5\cos 0.5x$

15) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$$\acute{f}(x) = \left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{2x^2}{x^4} - \frac{2}{x^4} - \frac{3x^3}{x^4} - \frac{6x^2}{x^4} - \frac{3x}{x^4} - \frac{6}{x^4}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3 - 2x + 2x^2 - 2 - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 6}{x^4}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{-x^3 - 4x^2 - 5x - 8}{x^4}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{x^4}\right)$$

16) $f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$

$\acute{f}(x) = (e^{-1.5x})(-\sin x^2)(2x) + (\cos x^2)(e^{-1.5x})(-1.5)$

$\acute{f}(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2) + (\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$

$\acute{f}(x) = (-e^{-1.5x})(2x\sin x^2 + 1.5\cos x^2)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x=2$

وكان : $g'(2)=2$, $g(2)=1$, $f'(2)=-4$, $f(2)=3$ فأجد كلا مما يأتي :

17) $f(g)'\ (2)$

$f(g)'\ (2)=f(2)g'(2)+g(2)f'(2)$

$f(g)'\ (2)=(3\times 2)+(1\times -4)$

$f(g)'\ (2)=6-4$

$f(g)'\ (2)=-2$

18) $f(\frac{f}{g})'\ (2)$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2)=\frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2)=\frac{(1\times -4)-(3\times 2)}{(1)^2}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2)=\frac{-4-6}{1}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2)=-10$$

19) $(3f-4fg)'\ (2)$

$=3f'(2)-4(fg)'(2)$

$=3(-4)-4(2)$

$=-12-8$

$=-20$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$$

$$f'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$$

$$f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5)$$

$$f''(x) = 6x^5 + 7x^5 + 42x^5 \ln x$$

$$f''(x) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$$

21) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)\,(-\sin x) - (cosx)(1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{x} - \frac{cosx}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x)(-\cos x) - (-\sin x)(1)}{x^2} - \frac{(x^2)(-\sin x) - (cosx)(2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x\cos x + \sin x}{x^2} + \frac{x^2 \sin x + 2xcosx}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 \cos x + x^2 \sin x}{x^4} + \frac{x^2 \sin x + 2xcosx}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2xcosx}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x^2 \cos x + 2x\sin x + 2cosx}{x^3}$$

22) $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x)=\frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)(2(1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(x)=\frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)(1+\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(x)=\frac{(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}-\left(\frac{4+4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}-4-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x)=\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$$

23) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x-2x^3) - (2x-2x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)(-4) - (-4x)(2(2x)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4-4x^2+16x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{16x^2-4}{(1+x^2)^3}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة:

24) $f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad , x = 1$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f(1) = \frac{(1)^2}{1+1}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(1\,,\frac{1}{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x)(2x) - (x^2)(1)}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(1) = \frac{(1)^2 + 2(1)}{(1+1)^2}$$

$$\acute{f}(1) = \frac{1+2}{(2)^2}$$

$$\boxed{\acute{f}(1) = \frac{3}{4} \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 1)$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$$ معادلة المماس

25) $f(x)=\frac{x^2}{\cos x} \quad , x=\frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(2x)-(x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\cos\frac{\pi}{4})\left(2(\frac{\pi}{4})\right) - (\frac{\pi}{4})^2(-\sin\frac{\pi}{4})}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\cos\frac{\pi}{4})\left(2(\frac{\pi}{4})\right) - (\frac{\pi}{4})^2(-\sin\frac{\pi}{4})}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})\left(\frac{\pi}{2}\right) - (\frac{\pi^2}{16})(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\frac{8\pi}{16\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}})\frac{2}{1}$$

$$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}} \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = \frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})$$

26) $f(x) = \ln(x+5) \quad , x = 0$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس :

$$f(x) = \ln(x+5)$$

$$f(0) = \ln(0+5)$$

$$f(0) = \ln 5$$

نقطة التماس هي $\boxed{(0\,,\ln 5)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \ln(x+5)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{1}{0+5}$$

$$\boxed{\acute{f}(0) = \frac{1}{5} \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x - 0)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5}x + \ln 5 \quad \text{معادلة المماس}}$$

27) $f(x) = \sin x + \sin 3x \quad , x = \frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f(x) = \sin x + \sin 3x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin(\frac{3\pi}{4})$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \sin x + \sin 3x$$

$$\acute{f}(x) = \cos x + \cos 3x\,(3)$$

$$\acute{f}(x) = \cos x + 3\cos 3x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos 3\frac{\pi}{4}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}}$ ميل المماس

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{4}$$

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(\frac{\pi + 4}{4}\right)$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

28) $x = t^2 \quad , y = t + 2 \, , t = 4$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$x = t^2$

$x = (4)^2$

$\boxed{x = 16}$

$y = t + 2$

$y = 4 + 2$

$\boxed{y = 6}$

نقطة التماس هي $\boxed{(16 \, , 6)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{2(4)}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{8}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$

$y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16)$

$y = \frac{1}{8}x - 16\left(\frac{1}{8}\right) + 6$

$y = \frac{1}{8}x - 2 + 6$

$y = \frac{1}{8}x + 4$

29) $x = 4\cos t \quad , y = 3\sin t \ , \ \ t = \frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$x = 4\cos t$

$x = 4\cos\frac{\pi}{4}$

$x = 4(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\boxed{x = 2\sqrt{2}}$

$y = 3\sin\frac{\pi}{4}$

$y = 3(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$y = 3(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$

$\boxed{y = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(2\sqrt{2}\,, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = -4\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t}{-4\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}(1)$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2})$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}x + 2\sqrt{2}(\frac{3}{4})$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$$

إذا كان : $y = x\ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y = x\ln x$$

$$\acute{f}(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$

$$\acute{f}(x) = 1 + \ln x$$

$$\acute{f}(1) = 1 + \ln 1$$

$\boxed{\acute{f}(1) = 1 \quad \text{ميل المماس}}$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$\boxed{y = x - 1 \quad \text{معادلة المماس}}$

31) أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها .

$$\acute{f}(x) = 2$$
$$1 + \ln x = 2$$

$$\ln x = 2 - 1$$

$$\ln x = 1$$

$\boxed{x = e}$

$y = x \ln x$

$y = e \ln e$

$\boxed{y = e}$

نقطة المطلوبة هي $\boxed{(e\,,e)}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

32) $x(x+y) = 2y^2$

$x^2 + xy = 2y^2$

$2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx}$

$2x + y = 4y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} +$

$4y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = 2x + y$

$\frac{dy}{dx}(4y - x) = 2x + y$

$\frac{dy}{dx}\frac{(4y-x)}{4y-x} = \frac{2x+y}{4y-x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4y-x}$

33) $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

$x^3 - xy = 2y$

$3x^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 2\frac{dy}{dx}$

$$3x^2 - y = 2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(2+x)}{2+x} = \frac{3x^2 - y}{2+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{2+x}$$

34) $y\cos x = x^2 + y^2$

$$(y)(-\sin x) + (\cos x)(\frac{dy}{dx}) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\cos x - 2y\frac{dy}{dx} = 2x + y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(\cos x - 2y)}{\cos x - 2y} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

35) $2xe^y + ye^x = 3$

$$(2x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(2) + (y)(e^x) + (e^x)(\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xe^y\frac{dy}{dx} + e^x\frac{dy}{dx} = -2e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}(2xe^y + e^x) = -2e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}(\frac{2xe^y + e^x}{2xe^y + e^x}) = \frac{-2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$$

36) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1,-1)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2) - (x^3)(-x)}{(2-x)^2}$$

$$2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3(1)^2) - ((1)^3)(-1)}{(2-1)^2}$$

$$(-2)\frac{dy}{dx} = \frac{3+1}{1}$$

$$\frac{-2}{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2 \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$m = -2$ ميل المماس

$$m_1 = \frac{-1}{m}$$

$$m_1 = \frac{-1}{-2}$$

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ميل العمودي}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \qquad \text{معادلة العمودي}}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37) $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) + \ln(x+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right] \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

38) $y = x^{\ln x}$

$\ln y = \ln x^{\ln x}$

$\ln y = (\ln x)(\ln x)$

$\ln y = (\ln x)^2$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 2(\ln x)(\frac{1}{x})$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)x^{\ln x}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

39) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad ,(2,-1)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(2,-1)$

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$2(2) + 3(2)\frac{dy}{dx} + 3(-1) + 2(-1)\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$4 + 6\frac{dy}{dx} - 3 - 2\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 1 + 3 - 4$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,-1)} = 0$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 0(x - 2)$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1$$ معادلة المماس

40) $x^2 e^y = 1 \quad , (1, 0)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(1, 0)$

$$x^2 e^y \frac{dy}{dx} + 2xe^y = 0$$

$$(1)^2 e^0 \frac{dy}{dx} + 2(1)e^0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = -2$$

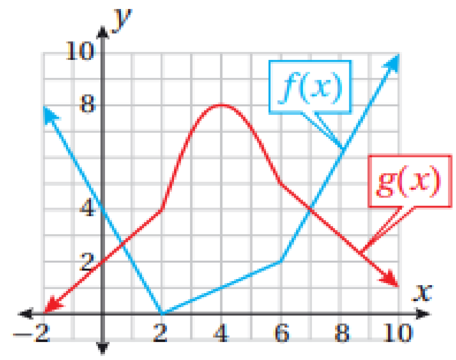
الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2$$ معادلة المماس

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانيين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان $p(x) = f(x)g(x)$ ، وكان $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فأجد كلا مما يأتي:



41) $p'(1)$

$$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$

$$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$

$$p'(1) = 2 \times 1 + 3 \times -2$$

$$p'(1) = -4$$

42) $p'(4)$

$$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4)$$

$$p'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5$$

$$p'(4) = 4$$

43) $q'(7)$

$$q'(7) = \frac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{(g(7))^2}$$

$$q'(7) = \frac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2}$$

$$q'(7) = \frac{12}{16}$$

$$q'(7) = \frac{3}{4}$$

44) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200\ g$ من عنصر مشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران : $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

$$R(t) = 200(0.9)^t$$

$$\frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} \approx -17.1\ g/day$$

45) يمثل الاقتران : $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالسنتيمترات ، و t الزمن بالثواني . أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

$$v(t) = 10\pi \frac{1}{4}\cos(10\pi t)$$

$$v(t) = \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$$

$$a(t) = -10\pi \frac{5\pi}{2}\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -5\pi \frac{5\pi}{1}\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$$