المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب

الفصل الأول

الوحدة الثالثة (الأعداد المركبة)

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

الأستاذ: معتصم ابراهيم
0788586401

الاعداد المركبة

الدرس الأول: الأعداد المركبة

مسألة اليوم : افترض عالم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديماً أن القيمة : $\sqrt{-1}$ تمثل حلاً للمعادلة $x^2+1=0$.

إذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة ما من مجموعات الأعداد ، فإن :

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2+1=0$$

$$-1+1=0$$

وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلاً للمعادلة $x^2+1=0$

مثال 1: (صفحة 137)

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-16}$

$= \sqrt{16\times -1}$

$= \sqrt{-1}\times\sqrt{16}$

$= i\times 4$

$= 4i$

2) $\sqrt{-72}$

$= \sqrt{36\times 2\times -1}$

$= \sqrt{36}\times\sqrt{2}\times\sqrt{-1}$

$= 6\times\sqrt{2}\times i$

$= 6\sqrt{2}i$

اتحقق من فهمي: (صفحة 137)

1) $\sqrt{-75}$

$= \sqrt{25 \times 3 \times -1}$

$= \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$

$= 5\sqrt{3}i$

2) $\sqrt{-47}$

$= \sqrt{49 \times -1}$

$= \sqrt{49} \times \sqrt{-1}$

$= 7i$

ضرب الأعداد التخيلية:

مثال 2: (صفحة 138)

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $i = \sqrt{-1}$:

1) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

$= \sqrt{8}i \times \sqrt{18}i$

$= \sqrt{144}i^2$

$= 12 \times -1$

$= -12$

2) $5i \times \sqrt{-4}$

$= 5i \times \sqrt{4}i$

$= 5i \times 2i$

$= 10i^2$

$= -10$

3) i^{15}

$= i^{15}$

$= i^{3}$

$= -i$

اتحقق من فهمي: (صفحة 138)

1) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$

$= \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48}$

$= i\sqrt{27} \times i\sqrt{48}$

$= i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3}$

$= 3i\sqrt{3} \times 4i\sqrt{3}$

$= 3i \times 4i \times 3$

$= 36i^{2}$

$= -36$

2) $\sqrt{-50} \times -4i$

$= \sqrt{-1 \times 50} \times -4i$

$= \sqrt{-1 \times 25 \times 2} \times -4i$

$= 5i\sqrt{2} \times -4i$

$= -20\sqrt{2}i^{2}$

$= 20\sqrt{2}$

3) i^{2021}

$= i^{2021}$

$= i^{1}$

$= i$

الاعداد المركبة

خاصية المساواة للأعداد المركبة:

مثال 3 : (صفحة 140)

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقتين اللتين تجعلان المعادلة : $2x-6+(3y+2)i=4x+8i$ صحيحية .

$2x-6+(3y+2)i=4x+8i$

$2x-6=4x$

$-6=4x-2x$

$-6=2x$

$\boxed{x=-3}$

$3y+2=8$

$3y=6$

$\boxed{y=2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 140)

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقتين اللتين تجعلان المعادلة : $x+5+(4y-9)i=12-5i$ صحيحية .

$x+5+(4y-9)i=12-5i$

$x+5=12$

$x=12-5$

$\boxed{x=7}$

$4y-9=-5$

$4y=-5+9$

$4y=4$

$\boxed{y=1}$

تمثيل العدد المركب ومرافقه بيانياً .

مثال 4: (صفحة 141)

أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

1) $z = -3 + 5i$

$\bar{z} = -3 - 5i$

يمثل الزوج المرتب $(-3, 5)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, -5)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

2) $z = 6 - 4i$

$\bar{z} = 6 + 4i$

يمثل الزوج المرتب $(6, -4)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(6, 4)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

3) $z = 2i$

$\bar{z} = -2i$

يمثل الزوج المرتب $(0, 2)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(0, -2)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 141)

أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

1) $z = 2 + 7i$

$\bar{z} = 2 - 7i$

يمثل الزوج المرتب $(2, 7)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(2, -7)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

2) $z = -3 - 2i$

$\bar{z} = -3 + 2i$

يمثل الزوج المرتب $(-3, -2)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, 2)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

3) $z = -3i$

$\bar{z} = 3i$

يمثل الزوج المرتب $(0, -3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(0, 3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

مقياس العدد المركب

مثال 5 : (صفحة 142)

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

1) $z = 3 - 4i$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$|z| = \sqrt{9 + 16}$

$|z| = \sqrt{25}$

$|z| = 5$

2) $z = 12i$

$|z| = \sqrt{(0)^2 + (12)^2}$

$|z| = \sqrt{0 + 144}$

$|z| = \sqrt{144}$

$|z| = 12$

أتحقق من فهمي: (صفحة 142)

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

1) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2}$

$|z| = \sqrt{9 + (36 \times 2)^2}$

$|z| = \sqrt{9 + (36 \times 2)}$

$|z| = \sqrt{9 + 72}$

$|z| = \sqrt{81}$

$|z| = 9$

2) $z = -2i$

$|z| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2}$

$|z| = \sqrt{4}$

$|z| = 2$

3) $z = 4 + \sqrt{-20}$

$|z| = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{-20}\right)^2}$

$|z| = \sqrt{16 + 20}$

$|z| = \sqrt{36}$

$|z| = 6$

سعة العدد المركب

مثال 6 : (صفحة 143)

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 4 + 3i$

يقع في الربع الأول

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$

2) $z = -3 + 8i$

يقع في الربع الثاني

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1.93$$

3) $z = -1 - 6i$

يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right) \approx -1.74$$

4) $z = 8 - 4i$

يقع في الربع الرابع

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right) \approx -0.46$$

أتحقق من فهمي : (صفحة 146)

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 8 + 2i$

يقع في الربع الأول

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$$

2) $z = -5 + 12i$

يقع في الربع الثاني

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$$

3) $z = -2 - 3i$

يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx -2.16$$

4) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

يقع في الربع الرابع

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$$

الصورة المثلثية للعدد المركب

مثال 7 : (صفحة 147)

اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 4, \ Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

2) $z = -2 - 5i$

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 25}$$

$$|z| = \sqrt{29}$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right) \approx -1.95$$

$$z = \sqrt{29}(\cos(-1.95) + i\sin(-1.95))$$

أتحقق من فهمي : (صفحة 148)

اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 4\sqrt{2}, \ Arg(z) = -\frac{3\pi}{6}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right)\right)$$

2) $z = -4 - 4i$

$|z| = \sqrt{(4)^2 + (4)^2}$

$|z| = \sqrt{16 + 16}$

$|z| = \sqrt{32}$

$|z| = \sqrt{16}\,.\sqrt{2}$

$|z| = 4\sqrt{2}$

$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) \approx -\frac{3\pi}{4}$

$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

3) $z = 2i$

$|z| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2}$

$|z| = 4$

$|z| = 2$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

اتدرب وأحل المسائل: صفحة 152

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-19}$

$= \sqrt{-1 \times 19}$

$= \sqrt{19}i$

2) $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{5} i$

3) $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{9}{32}}$

$= \frac{3}{4\sqrt{2}} i$

4) $\sqrt{-53}$

$= \sqrt{-1 \times 53}$

$= \sqrt{53} i$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $i = \sqrt{-1}$:

5) i^{26}

$= (i^2)^{13}$

$= (-1)^{13}$

$= -1$

6) i^{39}

$= (i^2)^{19} \times i$

$= (-1)^{19} \times i$

$= (-1) \times i$

$= -i$

7) $(i)(2i)(-7i)$

$= (2i^2)(-7i)$

$= (-2)(-7i)$

$= 14i$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

$= \sqrt{-1 \times 6} \times \sqrt{-1 \times 6}$

$= \sqrt{6}i \times \sqrt{6}i$

$= 6i^2$

$= -6$

9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

$= \sqrt{-1 \times 4} \times \sqrt{-1 \times 8}$

$= 2i \times 2\sqrt{2}i$

$= 4\sqrt{2}i^2$

$= -4\sqrt{2}$

10) $2i \times \sqrt{-9}$

$= 2i \times \sqrt{-1 \times 9}$

$= 2i \times 3i$

$= 6i^2$

$= -6$

اكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية :

11) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$

$=\frac{2+2i}{2}$

$=1+i$

12) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$

$=\frac{8+4i}{2}$

$=4+2i$

13) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

$=\frac{10-5\sqrt{2}i}{5}$

$=2-\sqrt{2}i$

أحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركب نفسه:

14) $z=2+15i$

$Re(z)=2\ ,Im(z)=15$

15) $z=10i$

$Re(z)=0\ ,Im(z)=10$

16) $z = -16 - 2i$

$Re(z) = -16 \;, Im(z) = -2$

أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

17) $z = -15 + 3i$

$\bar{z} = -15 - 3i$

يمثل الزوج المرتب $(-15, 3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-15, -3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

18) $z = 8 - 7i$

$\bar{z} = 8 + 7i$

يمثل الزوج المرتب $(8, -7)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(8, 7)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

19) $z = 12 + 17i$

$\bar{z} = 12 - 17i$

يمثل الزوج المرتب $(12, 17)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(12, -17)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

20) $z = -3 - 25i$

$\bar{z} = -3 + 25i$

يمثل الزوج المرتب $(-3, -25)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, 25)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

21) $3i$

$\bar{z} = -3i$

يمثل الزوج المرتب $(0, 3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(0, -3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

22) 15

$\bar{z} = 15$

يمثل الزوج المرتب $(15, 0)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(15, 0)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

أجد $|z|$ و $\bar{z}$ لكل مما يأتي :

23) $z = -5 + 5i$

$\bar{z} = -5 - 5i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2}$

$|z| = \sqrt{25 + 25}$

$|z| = \sqrt{50}$

$|z| = 5\sqrt{2}$

24) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$

$\bar{z} = 3 - 3i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2}$

$|z| = \sqrt{9 + 27}$

$|z| = 6$

25) $z = 6 - 8i$

$\bar{z} = 6 + 8i$

$|z| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$|z| = \sqrt{36 + 64}$

$|z| = 10$

أجد قيم كل من x و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الآتية صحيحية :

26) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

$x^2 - 1 = 8$

$x^2 = 9$

$\boxed{x = \pm 3}$

$2y - 5 = 9$

$2y = 14$

$\boxed{y = 7}$

27) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

$2x + 3y = 8 \ldots\ldots (1)$

$x - 2y = -3$

$x = -3 + 2y \ldots\ldots (2)$

$2(-3 + 2y) + 3y = 8 \ldots\ldots (1)$

$-6 + 4y + 3y = 8$

$-6 + 7y = 8$

$7y = 14$

$\boxed{y = 2}$

$x = -3 + 2(2) \ldots\ldots (2)$

$x = -3 + 4$

$\boxed{x = 1}$

28) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

$y - 3 = 9$

$\boxed{y = 12}$

$3x + 2 = y - 4$

$3x = y - 6$

$3x = 12 - 6$

$3x = 6$

$\boxed{x = 2}$

29) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

$2x - 5y = 3$

$2x = 3 + 5y$

$x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}y \ldots\ldots\ldots (1)$

$3x + 5y = 7 \ldots\ldots. (2)$

$3\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}y\right) + 5y = 7$

$\frac{9}{2} + \frac{15}{2}y + 5y = 7$

$\frac{15}{2}y + 5y = 7 - \frac{9}{2}$

$\boxed{y = \frac{1}{5}}$

$x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)$

$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

$x = \frac{4}{2}$

$\boxed{x = 2}$

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقرباً إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

30) 1

$z = 1$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)$

$Arg(z) = 0$

31) $3i$

$z = 3i$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$Arg(z) \approx 1.57$

32) $-5 - 5i$

$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right)$

$Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

$Arg(z) \approx -2.36$

33) $1 - i\sqrt{3}$

$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

$Arg(z) \approx -1.05$

34) $6\sqrt{3} + 6i$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right)$

$Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$Arg(z) \approx 0.52$

35) $3-4i$

$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$Arg(z) \approx -0.93$

36) $-12+5i$

$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

$Arg(z) \approx 2.75$

37) $-58-93i$

$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right)$

$Arg(z) \approx -2.13$

38) $2i-4$

$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right)$

$Arg(z) \approx 2.68$

اكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

39) $|z| = 2 \ , Arg\, z = \frac{\pi}{2}$

$r = |z| = 2$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

40) $|z| = 3 \quad , Arg\, z = \frac{\pi}{3}$

$r = |z| = 3$

$Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

41) $|z| = 7 \quad , Arg\, z = \frac{5\pi}{6}$

$r = |z| = 7$

$Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

42) $|z| = 1 \quad , Arg\, z = \frac{\pi}{4}$

$r = |z| = 1$

$Arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

43) $z = 6$

$$r = |z| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{36}$$

$$r = |z| = 6$$

$$Arg(z) = 0$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 6(\cos(0) + i\sin(0))$$

44) $z = 1 + i$

$$r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

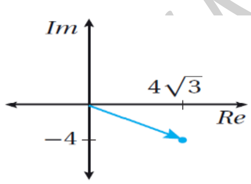
$$r = |z| = \sqrt{2}$$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$Arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$



45) يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركب z_1 في المستوى المركب ، أجد العدد المركب z_2 الذي يحقق ما يأتي :

$$|z_2| = 40 \quad and \quad Arg\, z_2 = Arg\, \overline{z_1}$$

$$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$\overline{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$Arg\, z_2 = Arg\, \overline{z_1}$$

$$Arg\,\overline{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right)$$

$$Arg\,\overline{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Arg\,\overline{z_1} = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_2 = 40(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z_2 = 40(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

$$z_2 = 20(\sqrt{3} + i)$$

$$z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$$

بافتراض أن : $z = a + bi$ ، حيث $|z| = 10\sqrt{2}$ وأن: $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

46) اكتب العدد المركب z بالصورة القياسية .

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

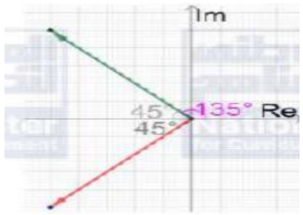
$$z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$z = 10(-1 + i)$$

$$z = -10 + 10i$$

47) أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\bar{z}$.



بما أن z في الربع الثاني ،إذن $\bar{z}$ في الربع الثالث

فيكون قياس الزاوية الصغرى بينهما هو $\frac{\pi}{2}$

إذا كان : $z = -8 + 8i$ فأجد كلا مما يأتي :

48) $|z|$

$$z = -8 + 8i$$

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2}$$

$$|z| = \sqrt{64 + 64}$$

$$|z| = 8\sqrt{2}$$

49) $Arg\,(z)$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}(1)$$

$$Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

50) $|\bar{z}|$

$$|\bar{z}| = |z| = 8\sqrt{2}$$

51) $Arg\,(\bar{z})$

$$\bar{z} = -8 - 8i$$

$$Arg(\bar{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right)$$

$$Arg(\bar{z}) = -\frac{3\pi}{4}$$

أو نكتبه مباشرة:

$$Arg(\bar{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير إذا كان : $Arg\ (5+2i)=\alpha$ ، فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α، مبررا ً إجابتي :

52) $-5-2i$

$$Arg\ (5+2i)=\alpha$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\ (-5-2i)$$

$$=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$$

$$=-(\pi-\alpha)$$

$$=-\pi+\alpha$$

53) $5-2i$

$$Arg\ (5-2i)=-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\ (5-2i)=-\alpha$$

54) $-5+2i$

$$Arg\ (-5+2i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

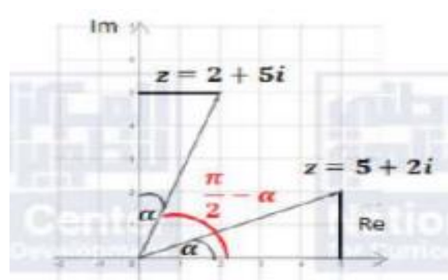
$$Arg\ (-5+2i)=\pi-\alpha$$

55) $2+5i$

$$Arg\ (2+5i)=\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$Arg\ (2+5i)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\ (2+5i)=\frac{\pi}{2}-\alpha$$



56) $-2+5i$

$$Arg\,(-2+5i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$Arg\,(-2+5i)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$Arg\,(-2+5i)=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

57) تحد : إذا كان : $z=5+im$ ، حيث : $|z|=6$ و $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ ، فأجد قيمة العدد الحقيقي m .

$$z=5+im \quad , \quad |z|=6 \quad , \quad 0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$$

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(m)^2}$$

$$|z|=\sqrt{25+m^2}$$

$$\sqrt{25+m^2}=6$$

$$25+m^2=36$$

$$m^2=11$$

$$m=\pm\sqrt{11}$$

لكن $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول ، ومنه $m=\sqrt{11}$

58) تبرير : إذا كان : $z=5+3ik$, ، حيث $|z|=13$ فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة ، مبرراً إجابتي

$$z=5+3ik \quad , \quad |z|=13$$

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(3k)^2}$$

$$|z|=\sqrt{25+9k^2}$$

$$\sqrt{25+9k^2}=13$$

$$25+9k^2=169$$

$$9k^2=144$$

$$k^2=16$$

$$k=\pm 4$$

تحد : بافتراض أن z_1 عدد مركب ، مقياسه : $4\sqrt{5}$ ، وسعته $\theta = \tan^{-1}(2)$:

59) اكتب z_1 بالصورة القياسية .

$|z_1| = 4\sqrt{5} \qquad , Arg\,(z_1) = \tan^{-1}(2) = \theta$

نستنتج أن z_1 تقع في الربع الأول ، ففي الأرباع الأخرى تكون الإشارة سالبة أو تحتوي على π .

$\tan\theta = 2$

60) إذا كان : $z_3 = -5 + i$, $z_2 = 7 - 3i$ ، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه : z_3 , z_2 , z_1 في المستوى المركب .

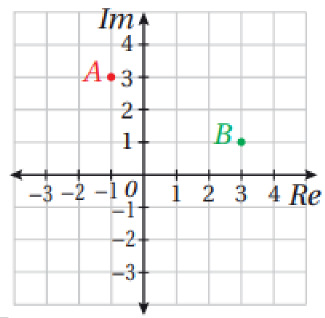
$\tan\theta = \theta$

الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

مسألة اليوم: (صفحة 151)

معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين A و B ، أجد السعة والمقياس للعدد المركب AB .



$A = -1 + 3i \quad , B = 3 + i$

$AB = (-1 + 3i)(3 + i)$

$AB = -3 - i + 9i + 3i^2$

$AB = -3 - i + 9i - 3$

$AB = -6 + 8i$

$|AB| = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$|AB| = \sqrt{36 + 64}$

$|AB| = \sqrt{100}$

$|AB| = 10$

$Arg(AB) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)$

$Arg(AB) \approx 2.21$

جمع الأعداد المركبة وطرحها

مثال 1: (صفحة 151)

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(5 + 7i) + (-9 - 4i)$

$= 5 + 7i - 9 - 4i$

$= (5 - 9) + (7 - 4)i$

$= -4 + 3i$

2) $(8-5i)-(2-11i)$

$= 8-5i-2+11i$

$= (8-2)+(-5+11)i$

$= 6+6i$

أتحقق من فهمي: (صفحة 152)

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(7+8i)+(-9+14i)$

$= 7+8i-9+14i$

$= (7-9)+(8+14)i$

$= -2+22i$

2) $(11+9i)-(4-6i)$

$= 11+9i-4+6i$

$= (11-4)+(9+6)i$

$= 7+15i$

ضرب الأعداد المركبة:

مثال 2: (صفحة 152)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $5i(3-7i)$

$= 15i-35i^2$

$= 15i+35$

$= 35+15i$

2) $(6+2i)(7-3i)$

$= 42-18i+14i-6i^2$

$= 42-18i+14i+6$

$= (42+6)+(-18+14)i$

$= 48-4i$

3) $(5+4i)(5-4i)$

$= 25-20i+20i-16i^2$

$= 25-20i+20i+16$

$= 41$

أتحقق من فهمي: (صفحة 153)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $-3i(4-5i)$

$= -12i+15i^2$

$= -12i-15$

$= -15-12i$

2) $(5+4i)(7-4i)$

$= 35-20i+28i-16i^2$

$= 51+8i$

3) $(3+6i)^2$

$= 9+36i+36i^2$

$= 9+36i-36$

$= -27+36i$

قسمة الأعداد المركبة:

مثال 3: (صفحة 153)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $\frac{8-5i}{3-2i}$

$$= \frac{8-5i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}$$

$$= \frac{24+16i-15i-10i^2}{(3)^2+(2)^2}$$

$$= \frac{24+16i-15i+10}{13}$$

$$= \frac{34+i}{13}$$

$$= \frac{34}{13} + \frac{1}{13}i$$

2) $\frac{3+5i}{2i}$

$$= \frac{3+5i}{2i} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{3i+5i^2}{2i^2}$$

$$= \frac{3i-5}{-2}$$

$$= -\frac{3}{2}i + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 154)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $\frac{-4+3i}{1+i}$

$$= \frac{-4+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$$

$$= \frac{-4+4i+3i-3i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$= \frac{-4+4i+3i+3}{2}$$

$$= \frac{-1+7i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

2) $\frac{2-6i}{-3i}$

$$= \frac{2-6i}{-3i} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{2i-6i^2}{-3i^2}$$

$$= \frac{2i+6}{3}$$

$$= \frac{2}{3}i+\frac{6}{3}$$

$$= 2+\frac{2}{3}i$$

3) $\frac{7i}{4-4i}$

$$= \frac{7i}{4-4i} \times \frac{4+4i}{4+4i}$$

$$= \frac{28i + 28i^2}{(4)^2 + (4)^2}$$

$$= \frac{28i - 28}{32}$$

$$= \frac{28}{32}i - \frac{28}{32}$$

$$= \frac{7}{8}i - \frac{7}{8}$$

$$= -\frac{7}{8} + \frac{7}{8}i$$

ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية وقسمتها

مثال 4 : (صفحة 155)

إذا كان : $z_1 = 10(\cos(-\frac{2\pi}{7}) + i\sin(-\frac{2\pi}{7}))$ ، وكان : $z_2 = 2(\cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}))$ ، فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $z_1 z_2$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 z_2 = 10 \times 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{10}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=5\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 156)

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$z_1z_2=6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_1z_2=12\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$z_1z_2=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2) $6(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))\div 2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

الجذر التربيعي للعدد المركب:

مثال 5: (صفحة 156)

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 21 - 20i$

$$\sqrt{z} = x + yi$$

$$z = (x + yi)^2$$

$$21 - 20i = (x + yi)^2$$

$$21 - 20i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

$$21 - 20i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$2xy = -20$$

$$y = \frac{-20}{2x}$$

$$y = -\frac{10}{x} \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = 21 \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{10}{x}\right)^2 = 21$$

$$x^2 - \frac{100}{x^2} = 21$$

$$\left[x^2 - \frac{100}{x^2} = 21\right] \times x^2$$

$$x^4 - 100 = 21x^2$$

$x^4 - 21x^2 - 100 = 0$

$(x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

$y = \frac{-10}{5}$

$y = -2$

$y = \frac{-10}{-5}$

$y = 2$

عندما $x = 5$ فإن $y = -2$ ، وعندما $x = -5$ فإن $y = 2$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 21 - 20i$ هما : $5 - 2i$ و $-5 + 2i$

أتحقق من فهمي: (صفحة 157)

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب لكل من الأعداد المركبة الآتية:

1) $-5 - 12i$

$\sqrt{z} = x + yi$

$z = (x + yi)^2$

$-5 - 12i = (x + yi)^2$

$-5 - 12i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$-5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$2xy = -12$

$y = \frac{-12}{2x}$

$y = -\frac{6}{x} \dots \dots \dots (1)$

$x^2 - y^2 = -5 \dots \dots \dots \dots (2)$

$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = -5$

$x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$

$\left[x^2 - \frac{36}{x^2} = -5\right] \times x^2$

$x^4 - 36 = -5x^2$

$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$y = -\frac{6}{x}$

$y = \frac{-6}{2}$

$y = -3$

$y = \frac{-6}{-2}$

$y = 3$

عندما $x = 2$ فإن $y = -3$ ، وعندما $x = -2$ فإن $y = 3$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -5 - 12i$ هما : $2 - 3i$ و $-2 + 3i$

2) $-9i$

$\sqrt{z} = x + yi$

$z = (x + yi)^2$

$-9i = (x + yi)^2$

$-9i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$-9i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$2xy = -9$

$y = -\frac{9}{2x} \dots \dots \dots (1)$

$x^2 - y^2 = 0 \dots \dots \dots \dots (2)$

$x^2 - \left(-\frac{9}{2x}\right)^2 = 0$

$x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$

$\left[x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0\right] \times 4x^2$

$4x^4 - 81 = 0$

$(2x^2 + 9)(2x^2 - 9) = 0$

$2x^2 - 9 = 0$

$2x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{2}$

$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$y = -\frac{9}{2x}$

$$y = -\frac{9}{2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$y = -\frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{9}{2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$y = \frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -5 - 12i$ هما : $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$ و $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$

3) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{z} = x + yi$$

$$z = (x + yi)^2$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = (x + yi)^2$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2xyi + y^2i^2$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$2xy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4x} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4x}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{3}{16x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{16x^2} = -\frac{1}{2}\right] \times 16x^2$$

$$16x^4 - 3 = -8x^2$$

$$16x^4 + 8x^2 - 3 = 0$$

$$(4x^2 - 1)(4x^2 + 3) = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

عندما $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وعندما $x = -\frac{1}{2}$ فإن $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود:

مثال 6: (صفحة 160)

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة : $z^3 + 4z^2 + z = 26$

$$z^3 + 4z^2 + z = 26$$

$$z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 26 ، ± 13 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة :

$$2^3 + 4(2)^2 + 2 - 26 = 0$$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = 2}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{2}$	1	4	1	-26
	0	2	12	26
	1	6	13	0

العامل الآخر هو

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 13$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z = \frac{-6 \pm 4i}{2}$$

$$z = \frac{-6}{2} \pm \frac{4i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = -3 + 2i}$$

$$\boxed{z_3 = -3 - 2i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = 2 \quad , z_2 = -3 + 2i \quad , z_3 = -3 - 2i\}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 161)

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة : $z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$

$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 15 ، ± 5 ، ± 3 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -3 يحقق هذه المعادلة :

$-3^3 - (-3)^2 - 7(-3) + 15 = 0$

$-27 - 9 + 21 + 15 = 0$

$-36 + 36 = 0$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -3}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-3}$	1	− 1	− 7	15
	0	− 3	12	− 15
	1	4	5	0

العامل الآخر هو

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 5$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$z = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$z = \frac{4}{2} \pm \frac{2i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = 2 + i}$$

$$\boxed{z_3 = 2 - i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = -3 \quad , z_2 = 2 + i \quad , z_3 = 2 - i\}$

مثال 7: (صفحة 161)

إذا كان : $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة : $x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من a و b .

بما أن $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

$$x=3\mp 9i$$

$$x-3=\mp 9i$$

$$(x-3)^2=(\mp 9i)^2$$

$$(x-3)^2=-81$$

$$x^2-6x+9=-81$$

$$x^2-6x+9+81=0$$

$$x^2-6x+90=0$$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $b=90$ ، $a=-6$

طريقة أخرى لحل السؤال:

$3+9i$ الجذر الأول

$3-9i$ الجذر الثاني

$x^2-($مجموع الجذرين$)x+($حاصل ضرب الجذرين$)=0$

مجموع الجذرين $=(3+9i)+(3-9i)$

مجموع الجذرين $=(3+3)+(9-9)i$

مجموع الجذرين $=6$

حاصل ضرب الجذرين $=(3+9i)\times(3-9i)$

حاصل ضرب الجذرين $=(3)^2+(9)^2$

حاصل ضرب الجذرين $=9+81$

حاصل ضرب الجذرين $=90$

$$x^2-(6)x+(90)=0$$

$$x^2-6x+90=0$$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $b=90$ ، $a=-6$

أتحقق من فهمي: (صفحة 161)

إذا كان : $2-i$ هو أحد جذور المعادلة : $x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من a و b .

بما أن $2-i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

$$x = 2 \mp i$$

$$x - 2 = \mp i$$

$$(x-2)^2 = (\mp i)^2$$

$$(x-2)^2 = -1$$

$$x^2 - 4x + 4 = -1$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $a=-4$ ، $b=5$

طريقة أخرى لحل السؤال:

الجذر الأول $2-i$

الجذر الثاني $2+i$

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

مجموع الجذرين $= (2-i) + (2+i)$

مجموع الجذرين $= (2+2) + (1-1)i$

مجموع الجذرين $= 4$

حاصل ضرب الجذرين $= (2-i) \times (2+i)$

حاصل ضرب الجذرين $= (2)^2 + (1)^2$

حاصل ضرب الجذرين $= 4 + 1$

حاصل ضرب الجذرين $= 5$

$$x^2 - (4)x + (5) = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $a=-4$ ، $b=5$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 161)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $(7+2i)+(3-11i)$

$=7+2i+3-11i$

$=10-9i$

2) $(5-9i)-(-4+7i)$

$=5-9i+4-7i$

$=9-16i$

3) $(4-3i)(1+3i)$

$=4+12i-3i-9i^2$

$=4+12i-3i+9$

$=13+9i$

4) $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$

$=(4-6i)(2-3i-4i-6)$

$=(4-6i)(-4-7i)$

$=-16-28i+24i-42$

$=-58-4i$

5) $(9-2i)^2$

$=81-36i+4i^2$

$=81-36i-4$

$=77-36i$

5) $\dfrac{10}{3-i}$

$= \dfrac{10}{3-i} \times \dfrac{3+i}{3+i}$

$= \dfrac{30+10i}{(3)^2+(1)^2}$

$= \dfrac{30+10i}{9+1}$

$= \dfrac{30+10i}{10}$

$= \dfrac{30}{10} + \dfrac{10}{10}i$

$= 3+i$

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

7) $6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 12\left(\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 12\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

8) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{10} + i\sin\dfrac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{2\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{4\pi}{10}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{4\pi}{10}\right)$

$= \cos\left(-\dfrac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$

9) $12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)\right)$

$=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

10) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{9\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{9\pi}{6}\right)\right)$

$=22\left(\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right)$

$=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)\right)$

$=22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل مما يأتي :

11) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

$(a+7)+(6-b)i=-2+5i$

$a+7=-2$

$a=-2-7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=-9}$

$b=6-5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b=1}$

$12)\ (11 - ia) - (b - 9i) = 7 - 6i$

$11 - b = 7$

$b = 11 - 7$

$\boxed{b = 4}$

$-a + 9 = -6$

$a = 9 + 6$

$\boxed{a = 15}$

$13)\ (a + ib)(2 - i) = 5 + 5i$

$2a - ai + 2bi - bi^2 = 5 + 5i$

$2a - ai + 2bi + b = 5 + 5i$

$2a + b = 5 \dots \dots \dots (1)$

$2b - a = 5$

$a = 2b - 5$

$2(2b - 5) + b = 5$

$4b - 10 + b = 5$

$5b - 10 = 5$

$5b = 15$

$\boxed{b = 3}$

$a = 2(3) - 5$

$a = 6 - 5$

$\boxed{a = 1}$

14) $\dfrac{a-6i}{1-2i} = b+4i$

$$\frac{a-6i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = b+4i$$

$$\frac{a+2ai-6i-12i^2}{(1)^2+(2)^2} = b+4i$$

$$\frac{a+2ai-6i+12}{1+4} = b+4i$$

$$\frac{a+12+2ai-6i}{5} = b+4i$$

$$\frac{a+12}{5} + \frac{2a-6}{5}i = b+4i$$

$$\frac{a+12}{5} = b$$

$$a+12 = 5b \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{2a-6}{5} = 4$$

$$2a-6 = 20$$

$$2a = 20+6$$

$$a = 13$$

$$a+12 = 5b$$

$$13+12 = 5b$$

$$25 = 5b \implies \boxed{b=5}$$

$$a+12 = 5b \dots\dots\dots (1)$$

$$a+12 = 5(5)$$

$$a+12 = 25$$

$$a = 25-12 \implies \boxed{a=13}$$

15) أضرب العدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مرافقه .

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - i^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$z\bar{z} = 64(1)$$

$$z\bar{z} = 64$$

أجد الجذرين التربيعين لكل من الأعداد المركبة الآتية.

16) $3 - 4i$

$$\sqrt{3-4i} = x + yi$$

$$3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$3 - 4i = x^2 + 2xyi + y^2i^2$$

$$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$3 = x^2 - y^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$-4 = 2xy$$

$$y = -\frac{4}{2x}$$

$$y = -\frac{2}{x} \dots\dots\dots (2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] \times x^2$$

$$x^4 - 4 = 3x^2$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$y = -\frac{2}{x}$$

$$y = \frac{-2}{-2}$$

$$y = 1$$

$$y = \frac{-2}{2}$$

$$y = -1$$

عندما $x = 2$ فإن $y = -1$ ، وعندما $x = -2$ فإن $y = 1$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 - 4i$ هما : $2 - i$ و $-2 + i$

17) $-15+8i$

$\sqrt{-15+8i} = x + yi$

$-15+8i = (x+yi)^2$

$-15+8i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$-15+8i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$-15 = x^2 - y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$8 = 2xy$

$y = \frac{8}{2x}$

$y = \frac{4}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -15$

$x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$

$\left[x^2 - \frac{16}{x^2} = -15\right] \times x^2$

$x^4 - 16 = -15x^2$

$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$

$(x^2+16)(x^2-1) = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$y = \frac{4}{x}$

$y = \frac{4}{1}$

$y = 4$

$y = \frac{4}{-1}$

$y = -4$

عندما $x = 1$ فإن $y = 4$ ، وعندما $x = -1$ فإن $y = -4$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -15 + 8i$ هما : $1 + 4i$ و $-1 - 4i$

18) $5 - 12i$

$\sqrt{5 - 12i} = x + yi$

$5 - 12i = (x + yi)^2$

$5 - 12i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$5 = x^2 - y^2 \dots\dots\dots (1)$

$-12 = 2xy$

$y = -\frac{12}{2x}$

$y = -\frac{6}{x} \dots\dots\dots (2)$

$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = 5$

$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$

$\left[x^2 - \frac{36}{x^2} = 5\right] \times x^2$

$x^4 - 36 = 5x^2$

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$(x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$y = -\frac{6}{x}$

$y = \frac{-6}{-3}$

$y = 2$

$y = \frac{-6}{3}$

$y = -2$

عندما $x = 3$ فإن $y = -2$ ، وعندما $x = -3$ فإن $y = 2$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 5 - 12i$ هما : $3 - 2i$ و $-3 + 2i$

19) $-7 - 24i$

$\sqrt{-7 - 24i} = x + yi$

$-7 - 24i = (x + yi)^2$

$-7 - 24i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$-7 - 24i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$-7 = x^2 - y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$-24 = 2xy$

$y = -\frac{24}{2x}$

$y = -\frac{12}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$

$x^2 - \left(-\frac{12}{x}\right)^2 = -7$

$$x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$$

$$\left[x^2 - \frac{144}{x^2} = -7\right] \times x^2$$

$$x^4 - 144 = -7x^2$$

$$x^4 + 7x^2 - 144 = 0$$

$$(x^2 + 16)(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$y = -\frac{12}{x}$$

$$y = \frac{-12}{-3}$$

$$y = 4$$

$$y = \frac{-12}{3}$$

$$y = -4$$

عندما $x = 3$ فإن $y = -4$ ، وعندما $x = -3$ فإن $y = 4$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -7 - 24i$ هما : $3 - 4i$ و $-3 + 4i$

إذا كان : $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ، فأجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية :

20) zw

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \quad , \quad w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$zw = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$zw = 4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$zw = 4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

21) $\frac{z}{w}$

$$\frac{z}{w} = 1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{z}{w} = \left(\cos\left(\frac{-3\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{12}-+\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z}{w} = \cos\frac{-7\pi}{12}+i\sin\frac{-7\pi}{12}$$

22) $\frac{w}{z}$

$$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\frac{w}{z} = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{-3\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{-3\pi}{12}\right)$$

$$\frac{w}{z} = \cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$$

23) $\frac{1}{z}$

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

24) w^2

$$w^2 = ww = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$ww = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \times i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$ww = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} \times i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

25) $5iz$

$$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة لكل من المعادلات الآتية:

26) $z^2 + 104 = 20z$

$$z^2 - 20z + 104 = 0$$

$a = 1 \qquad b = -20 \qquad c = 104$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(104)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2}$$

$$z = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z = \frac{20 \pm 4i}{2}$$

$$z = 10 \pm 2i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $10 + 2i$ ، $10 - 2i$

27) $z^2 + 18z + 202 = 0$

$a = 1 \qquad b = 18 \qquad c = 202$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{20 \pm \sqrt{(18)^2 - 4(1)(202)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2}$$

$$z = \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

$$z = \frac{-18 \pm 22i}{2}$$

$$z = -9 \pm 11i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $-9 + 11i$ ، $-9 - 11i$

28) $9z^2 + 68 = 0$

$$9z^2 = -68$$

$$z^2 = \frac{-68}{9}$$

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{\frac{-68}{9}}$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{-68}}{3}$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{68}}{3}i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $\frac{\sqrt{68}}{3}i$ ، $-\frac{\sqrt{68}}{3}i$

29) $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ±1 ، $\pm\frac{1}{3}$

بالتعويض ، نجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة :

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$3\left(-\frac{1}{27}\right) - 2\left(\frac{1}{9}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{3}{27} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = 0$$

$$-\frac{9}{9} + \frac{9}{9} = 0$$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -\frac{1}{3}}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{\frac{-1}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
	1	-1	1	0

العامل الآخر هو

$$z^2 - z + 1 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\left\{z_1 = -\frac{1}{3} \quad , \; z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad , z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right\}$

30) $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

$z^3 - 5z^2 + 4z + 10 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 10 ، ± 5 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -1 يحقق هذه المعادلة :

$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 4(-1) + 10 = 0$

$-1 - 5 - 4 + 10 = 0$

$-10 + 10 = 0$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -1}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-1}$	1	-5	4	10
	0	-1	6	-10
	1	-6	10	0

العامل الآخر هو

$z^2 - 6z + 10 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -6 \qquad c = 10$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$z = \frac{6 \pm 2i}{2}$

$z = \frac{6}{2} \pm \frac{2i}{2}$

$\boxed{z_2 = 3 + i}$

$\boxed{z_3 = 3 - i}$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = -1 \quad , z_2 = 3 + i \quad , z_3 = 3 - i\}$

$31)\ 2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 87 ، $\pm\frac{87}{2}$ ، $\pm\frac{29}{2}$ ، ± 3 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -3 يحقق هذه المعادلة :

$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$

$-54 - 72 + 39 + 87 = 0$

$-126 + 126 = 0$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -3}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-3}$	2	-8	-13	87
	0	-6	42	-87
	2	-14	29	0

العامل الآخر هو

$2z^2 - 14z + 29 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 2 \qquad b = -14 \qquad c = 29$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-(14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(2)(29)}}{2(2)}$$

$$z = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4}$$

$$z = \frac{-14 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

$$z = \frac{-14 \pm 6i}{4}$$

$$z = \frac{14}{4} \pm \frac{6i}{4}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\left\{z_1 = -3 \quad , \; z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i \quad , z_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i\right\}$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي:

32) $2 \pm 5i$

$x = 2 \pm 5i$

$x - 2 = \pm 5i$

$(x - 2)^2 = (\pm 5i)^2$

$x^2 - 4x + 4 = 25i^2$

$x^2 - 4x + 4 = -25$

$x^2 - 4x + 29 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$\boldsymbol{2+5i}$ الجذر الأول

$\boldsymbol{2-5i}$ الجذر الثاني

$\boldsymbol{x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0}$

$\text{مجموع الجذرين} = \boldsymbol{(2+5i)+(2-5i)}$

$\text{مجموع الجذرين} = \boldsymbol{(2+2)+(5-5)i}$

$\text{مجموع الجذرين} = \boldsymbol{4}$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \boldsymbol{(2+5i)\times(2-5i)}$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \boldsymbol{(2)^2+(5)^2}$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \boldsymbol{4+25}$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \boldsymbol{29}$

$\boldsymbol{x^2-(4)x+(29)=0}$

$\boldsymbol{x^2-4x+29=0}$

33) $\boldsymbol{7\pm 4i}$

$\boldsymbol{x = 7\pm 4i}$

$\boldsymbol{x-7 = \pm 4i}$

$\boldsymbol{(x-7)^2 = (\pm 4i)^2}$

$\boldsymbol{x^2-14x+49 = 16i^2}$

$\boldsymbol{x^2-14x+49 = -16}$

$\boldsymbol{x^2-14x+65 = 0}$

طريقة أخرى للحل:

$7 + 4i$ الجذر الأول

$7 - 4i$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\text{مجموع الجذرين} = (7 + 4i) + (7 - 4i)$

$\text{مجموع الجذرين} = (7 + 7) + (4 - 4)i$

$\text{مجموع الجذرين} = 14$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (7 + 4i) \times (7 - 4i)$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (7)^2 + (4)^2$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = 49 + 16$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = 65$

$x^2 - (14)x + (65) = 0$

$x^2 - 14x + 65 = 0$

34) $-8 \pm 20i$

$x = -8 \pm 20i$

$x + 8 = \pm 20i$

$(x + 8)^2 = (\pm 20i)^2$

$x^2 + 16x + 64 = 20i^2$

$x^2 + 16x + 64 = -400$

$x^2 + 16x + 464 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$-8 + 20i$ الجذر الأول

$-8 - 20i$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

مجموع الجذرين $= (-8 + 20i) + (-8 - 20i)$

مجموع الجذرين $= (-8 + -8) + (20 - 20)i$

مجموع الجذرين $= -16$

حاصل ضرب الجذرين $= (-8 + 20i) \times (-8 - 20i)$

حاصل ضرب الجذرين $= (-8)^2 + (20)^2$

حاصل ضرب الجذرين $= 64 + 400$

حاصل ضرب الجذرين $= 464$

$x^2 - (-16)x + (464) = 0$

$x^2 + 16x + 464 = 0$

35) $-3 \pm 2i$

$x + 3 = \pm 2i$

$(x + 3)^2 = (\pm 2i)^2$

$x^2 + 6x + 9 = 4i^2$

$x^2 + 6x + 9 = -4$

$x^2 + 6x + 13 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$3 + 2i$ الجذر الأول

$3 - 2i$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

مجموع الجذرين $= (3 + 2i) + (3 - 2i)$

مجموع الجذرين $= (3 + 3) + (2 - 2)i$

مجموع الجذرين $= 6$

حاصل ضرب الجذرين $= (3+2i)\times(3-2i)$

حاصل ضرب الجذرين $= (3)^2+(2)^2$

حاصل ضرب الجذرين $= 9+4$

حاصل ضرب الجذرين $= 13$

$$x^2-(6)x+(13)=0$$

$$x^2+6x+13=0$$

إذا كان : $z_3 = 2-2i$, $z_2=\sqrt{5}-i\sqrt{15}$, $z_1=\sqrt{12}-2i$ ، فأجد المقياس والسعة الرئيسية لكل مما يأتي :

$$|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+(-2)^2}$$

$$|z_1|=\sqrt{12+4}$$

$$|z_1|=\sqrt{16}$$

$$|z_1|=4$$

$$|z_2|=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{15}\right)^2}$$

$$|z_2|=\sqrt{5+15}$$

$$|z_2|=\sqrt{20}$$

$$|z_2|=2\sqrt{5}$$

$$|z_3|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$$

$$|z_3|=\sqrt{4+4}$$

$$|z_3|=\sqrt{8}$$

$$|z_3|=2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}(1)$$

$$Arg(z_3) = -\frac{\pi}{4}$$

36) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$$

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

37) $\frac{1}{z_3}$

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|}$$

$$\frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3)$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

38) $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15}$$

$$Arg(\overline{z_2}) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$Arg(\overline{z_2}) = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$Arg(\overline{z_2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right| = \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|}$$

$$\frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2})$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = -\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = -\frac{7\pi}{12}$$

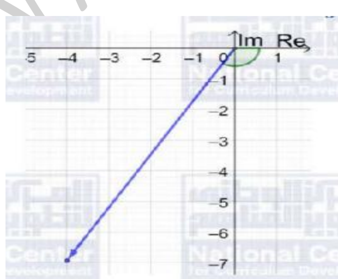
إذا كان : $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

39) أمثل العدد z بيانياً في المستوى المركب .

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$$

إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$



40) أجد الجذرين التربيعين للعدد z.

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4 - 4\sqrt{3}i} = x + yi$$

$$-4 - 4\sqrt{3}i = (x + yi)^2$$

$$-4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

$$-4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$-4 = x^2 - y^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-4\sqrt{3} = 2xy$$

$$y = -\frac{4\sqrt{3}}{2x}$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{x} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2 = -4$$

$$x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$$

$$\left[x^2 - \frac{12}{x^2} = -4\right] \times x^2$$

$$x^4 - 12 = -4x^2$$

$$x^4 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 + 6)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{x}$

$y = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}$

$y = \sqrt{2}\sqrt{3}$

$y = \sqrt{6}$

$y = \dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y = -\sqrt{2}\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{6}$

عندما $x = \sqrt{2}$ فإن $y = -\sqrt{6}$ ، وعندما $x = -\sqrt{2}$ فإن $y = \sqrt{6}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب هما : $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ و $-\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

41) إذا كان : $(a - 3i)$ ، و $(b + ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $55 - 48i$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية : a ، و b ، و c .

بما أن $a - 3i$ هو جذر للعدد المركب $55 - 48i$ ، إذن :

$(a - 3i)^2 = 55 - 48i$

$a^2 - 6ai - 9 = 55 - 48i$

$a^2 - 9 = 55$

$-6a = -48$

$a = 8$

وبما أن $b - ic$ هو جذر للعدد المركب $55 - 48i$ ، إذن :

$(b + ic)^2 = 55 - 48i$

$b^2 + 2bci - c^2 = 55 - 48i$

$$b^2 - c^2 = 55$$

$$2bc = -48$$

$$bc = -24$$

$$c = \frac{-24}{b}$$

$$b^2 - \left(\frac{-24}{b}\right)^2 = 55$$

$$b^2 - \left(\frac{576}{b^2}\right) = 55$$

$$\left[b^2 - \left(\frac{576}{b^2}\right) = 55\right] \quad \times b^2$$

$$b^4 - 576 = 55b^2$$

$$b^4 - 55b^2 - 576 = 0$$

$$(b^2 - 64)(b^2 + 9) = 0$$

$$b^2 - 64 = 0$$

$$b^2 = 64$$

$$b = \pm 8$$

$$c = \frac{-24}{b}$$

$$c = \frac{-24}{-8}$$

$$c = 3$$

$$c = \frac{-24}{8}$$

$$c = -3$$

جذرا هذا العدد هما $-8 + 3i$ و $8 - 3i$

وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i)$ ، و $(b+ic)$ نلاحظ أن :

$a=8$ و $b=-8$ و $c=3$

الحل الأسهل:

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$ ، إذن : $-a+3i$ هو أيضاً جذر له ، ومنه :

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن : $c=3$ و $b=-a$ ومنه :

$$(a-3i)^2=55-48i$$
$$a^2-6ai-9=55-48i$$
$$a^2-9=55$$
$$-6a=-48$$
$$-6a=-48$$
$$a=8$$
$$b=-8$$

أحل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي:

42) $x^3+x^2+15x=225\ ,5$

$$x^3+x^2+15x=225$$
$$x^3+x^2+15x-225=0$$
$$x^3+x^2+15x-225=0$$

بما أن العدد 5 جذر لهذه المعادلة إذن $(x-5)$: بالقسمة عليه نحصل على :

	x^3	x^2	x	الثابت
$\boxed{5}$	1	1	15	-225
	0	5	30	225
	1	6	45	0

العامل الآخر هو

$$x^2 + 6x + 45 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 45$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 180}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 12i}{2}$$

$$x = \frac{-6}{2} \pm \frac{12i}{2}$$

$$\boxed{x_2 = -3 + 6i}$$

$$\boxed{x_3 = -3 - 6i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{x_1 = 5 \quad , x_2 = -3 + 6i \quad , x_3 = -3 - 6i\}$

43) $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0 , -9$

$$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$$

بما أن العدد -9 جذر لهذه المعادلة إذن $(x + 9)$: بالقسمة عليه نحصل على :

	x^3	x^2	x	الثابت
$\boxed{-9}$	1	7	-13	45
	0	-9	18	-45

$1 \qquad -2 \qquad 5 \qquad 0$

العامل الآخر هو

$x^2 - 2x + 5 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} \pm \frac{4i}{2}$$

$\boxed{x_2 = 1 + 2i}$

$\boxed{x_3 = 1 - 2i}$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{x_1 = -9 \quad , \; x_2 = 1 + 2i \quad , x_3 = 1 - 2i\}$

44) $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37)\ , 6 - i$

$3x^3 + 135x = 38x^2 + 74$

$3x^3 - 38x^2 + 135x - 74 = 0$

بما أن العدد $6 - i$ جذر لهذه المعادلة إذن مرافقه $(6 + i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة :

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(6 - i)$ ، $(6 + i)$

$x = 6 \pm i$

$x - 6 = \pm i$

$(x-6)^2 = (\pm i)^2$

$x^2 - 12x + 36 = -1$

$x^2 - 12x + 37 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $3x^3 - 38x^2 + 135x - 74$ على $x^2 - 12x + 37$ نجد أن :

$3x^3 - 38x^2 + 135x - 74 = (x^2 - 12x + 37)(3x - 2) = 0$

$3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

إذن لهذه المعادلة ثلاثة جذور هي : $\left\{x_1 = \frac{2}{3} \quad , \; x_2 = 6 + i \quad , x_3 = 6 - i\right\}$

45) $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0 , -2 + i$

بما أن العدد $(-2 + i)$ جذر لهذه المعادلة إذن مرافقه $(-2 - i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة :

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2 + i)$ ، $(-2 - i)$

$x = -2 \pm i$

$x + 2 = \pm i$

$(x+2)^2 = (\pm i)^2$

$x^2 + 4x + 4 = -1$

$x^2 + 4x + 5 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3 + 10x^2 + 29x + 30$ على $x^2 + 4x + 5$ نجد أن :

$x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = (x^2 + 4x + 5)(x + 6) = 0$

$x + 6 = 0$

$x = -6$

إذن لهذه المعادلة ثلاثة جذور هي : $\{x_1 = -6 \quad , \; x_2 = -2 + i \quad , x_3 = -2 - i\}$

إذا كان : $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة : $z^2 - 8z + k = 0$ ، حيث k عدد حقيقي ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

46) أجد الجذر الآخر للمعادلة.

الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول أي $4 - 11i$

47) أجد قيمة الثابت k .

$k = (4 - 11i)(4 + 11i)$

$k = (4)^2 + (11)^2$

$k = 16 + 121$

$k = 137$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: أجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً، مبرراً إجابتي:

48) أجد ناتج : $(p + iq)^2$ ، حيث p و q عددان حقيقيان .

$(p + iq)^2$

$= p^2 + 2pqi + i^2q^2$

$= p^2 + 2pqi - q^2$

49) إذا كان : $(p + iq)^2 = 45 + im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، $p > q$ ، فأجد ثلاث قيم ممكنة للعدد الحقيقي m .

$(p + iq)^2 = 45 + im$

$p^2 + 2pqi + i^2q^2 = 45 + im$

$p^2 - q^2 + 2pqi = 45 + im$

$p^2 - q^2 = 45$

$(p+q)(p-q) = 45$

$m = 2pq$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان أيضاً و $(p+q) > (p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي :

الحالة الأولى : $1 \times 45 = 45$ فإن $p + q = 45$ و $p - q = 1$

ومنه $p = 23$ و $q = 22$ أي أن : $m = 2pq = 1012$

الحالة الثانية : $3 \times 15 = 45$ فإن $p + q = 15$ و $p - q = 3$

ومنه $p = 9$ و $q = 6$ أي أن : $m = 2pq = 108$

الحالة الثالثة : $5 \times 9 = 45$ فإن $p + q = 9$ و $p - q = 5$

ومنه $p = 7$ و $q = 2$ أي أن : $m = 2pq = 28$

قيم m المطلوبة هي : 1012 , 108 , 28

50) استعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $45 - 108i$

بما ان $m = 2pq = 108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة من السؤال السابق نجد أن: $q = -6$ و $p = 9$ أو $q = 6$, $p = -9$

الجذران المطلوبان هما : $-9 + 6i$ ، $9 - 6i$

51) برهان : أثبت أن : $z\bar{z} = |z|^2$ لأي عدد مركب z .

ليكن $z = x + yi$ إذن : $\bar{z} = x - yi$

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi)$

$z\bar{z} = x^2 - y^2 i^2$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$$z\bar{z} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$$

52) برهان : إذا كان z عدداً مركباً ، حيث : $|z| = 5\sqrt{5}$, $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ وكان : $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ فأثبت أن $p + q = 1$.

$|z| = 5\sqrt{5}$, $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{z}{3+4i} = p + iq$

ليكن $z = x + yi$

بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ، إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول ، ويكون $x = 2y$

$z = x + yi$

$|z| = 5\sqrt{5}$

$(2y)^2 + y^2 = 125$

$4y^2 + y^2 = 125$

$5y^2 = 125$

$y^2 = 25$

$y = 5$

$x^2 + y^2 = 125$

$x^2 + (5)^2 = 125$

$x^2 + 25 = 125$

$x^2 = 100$

$x = 10$

إذن $z = 10 + 5i$

$$p + iq = \frac{z}{3+4i}$$

$$p + iq = \frac{10 + 5i}{3 + 4i}$$

$$p + iq = \frac{10 + 5i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i}$$

$$p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9 + 16}$$

$$p + iq = \frac{50 - 25i}{25}$$

$$p + iq = \frac{50}{25} - \frac{25}{25}i$$

$$p + iq = 2 - i$$

إذن $p = 2 \ , q = -1$ ويكون : $p + q = 1$

53) تحد: العدد المركب $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة

$$z^3 + 20z^2 - 164z - 400 = 0$$

أجد بقية جذور هذه المعادلة ، ثم أحل المعادلة الآتية : $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$

$$z = (10 - i) - (2 - 7i)$$

$$z = 10 - i - 2 + 7i$$

$$z = 8 + 6i$$

بما أن $(8 + 6i)$ جذر لهذه المعادلة ، فإن مرافقه $(8 - 6i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة .

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(8 + 6i)$ ، $(8 - 6i)$

$$(8 + 6i) + (8 + 6i) = 16$$

$$(8 + 6i) \times (8 + 6i) = 64 + 36 = 100$$

$$z^2 - 16z + 100 = 0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3 + 20z^2 - 164z - 400$ على $z^2 - 16z + 100$ فنجد أن :

$$z^3 + 20z^2 - 164z - 400 = 0$$

$(z^2 - 16z + 100)(z - 4) = 0$

$z_1 = 4$

$z_2 = 8 + 6i$

$z_3 = 8 - 6i$

حلول هذه المعادلة هي : $z_1 = 4$ ، $z_2 = 8 + 6i$ ، $z_3 = 8 - 6i$

المعادلة الجديدة هي:

$x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$

$x^6 + 164x^2 = 20x^4 + 400$

$x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$

إذا عوضنا $z = x^2$ تتحول هذه المعادلة $x^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن ، حلول هذه المعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة:

$x^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن حلول هذه المعادلة هي : $z_1 = 2$ ، $z_2 = \pm\sqrt{8 + 6i}$ ، $z_3 = \pm\sqrt{8 - 6i}$

نجد الجذرين التربيعين للعدد $8 + 6i$

$\sqrt{8 + 6i} = h + ki$

$8 + 6i = h^2 - k^2 + 2hki$

$h^2 - k^2 = 8$

$2hk = 6$

$k = \frac{3}{h}$

$h - \left(\frac{3}{h}\right)^2 = 8$

$h - \frac{9}{h^2} = 8$

$\left[h^2 - \frac{9}{h^2} = 8\right] \times h^2$

$h^4 - 9 = 8h^2$

$h^4 - 8h^2 - 9 = 0$

$(h^2 + 1)(h^2 - 9) = 0$

$h^2 - 9 = 0$

$h^2 = 9$

$h = \pm 3$

$h^2 + 1 = 0$

$h = \pm 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8 + 6i$ هما : $-3 - i$ ، $3 + i$

بالمثل نجد أن الجذرين التربيعين للعدد المركب $8 - 6i$ هما : $-3 + i$ ، $3 - i$

ويكون للمعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي :

$x_1 = 2 \quad, x_2 = -2 \quad, x_3 = 3 + i \quad, x_4 = 3 - i \,, x_5 = -3 + i \quad, x_6 = -3 - i$

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

مسألة اليوم :(صفحة 164)

اكتب متباينة بدلالة z ، تحققها جميع الأعداد المركبة التي تقع في المنطقة المظللة المبينة في المستوى المركب في الشكل المجاور .

المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $(-2+3i)$ مسافة تقل عن 4 وحدات ، فتكون المتباينة المطلوبة هي:

$$|z-(-2+3i)|<4 \quad \rightarrow \quad |z+2-3i|<4$$

الدائرة

مثال 1: (صفحة 165)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z-2+8i|=3$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه .

الخطوة الأولى: أجد المحل الهندسي

عندما اكتب المعادلة في صورة $|z-(a+ib)|=r$ فإن $|z-(2-8i)|=3$ ، وهذه معادلة دائرة، مركزها $(2-8i)$ ، وطول نصف قطرها 3 وحدات .

الخطوة الثانية: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

$$|z-2+8i|=3$$

$$|x+yi-2+8i|=3$$

$$|(x-2)+(y+8)i|=3$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2}=3$$

$$(x-2)^2+(y+8)^2=9$$

ألاحظ أن المعادلة $(x-2)^2+(y+8)^2=9$ هي أيضاً معادلة دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات .

أتحقق من فهمي: (صفحة 165)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+5-4i|=7$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه .

$$|z+5-4i|=7$$

$$|z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

$$|z+5-4i|=7$$

$$|x+yi+5-4i|=7$$

$$|(x+5)+(y-4)i|=7$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7$$

$$(x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

مثال2: (صفحة 166)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z-3|=|z-2i|$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه.

الخطوة الأولى: أجد المحل الهندسي.

عندما اكتب المعادلة في صورة:

$$|z-(a-bi)|=|z-(c-di)|$$

$$|z-(3-0i)|=|z-(0-2i)|$$

وهذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين : $(3-0i)$ و $(3-0i)$ ، وهو يظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور .

الخطوة الثانية: اكتب معادلة بالصيغة الديكارتية.

لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية ، أعوض $z=x+yi$ ، ثم أجد مقياس العدد المركب ، ثم أبسط :

$$|z-3|=|z-2i|$$

$$|x+yi-3|=|x+yi-2i|$$

$$|(x-3)+yi|=|x+(y-2)i|$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$

$x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2-4y+4$

$-6x+9=-4y+4$

$6x-4y-5=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي : $6x-4y-5=0$

أتحقق من فهمي: (صفحة 167)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+1|=|z-5i|$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه.

$|x+yi+1|=|x+yi-5i|$

$|(x+1)+yi|=|x+(y-5)i|$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$

$\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-5)^2}\right)^2$

$(x+1)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-10y+25$

$2x+1=-10y+25$

$2x+10y-24=0$

$x+5y-12=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي : $x+5y-12=0$

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(0, 0)$

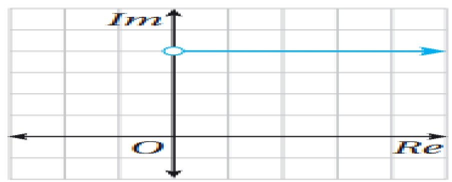
الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a, b)

مثال 3: (صفحة 168)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم ارسمه في المستوى المركب.

$1)\ Arg(z - 4i) = 0$

تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(0, 4)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي ، أي أنه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور .



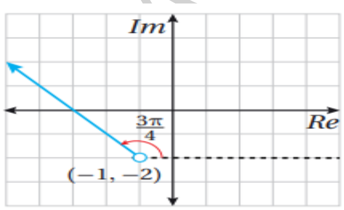
$2)\ Arg(z + 1 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$

عندما اكتب المعادلة في صورة:

$Arg(z - (a + bi) = \theta$

$Arg(z - (-1 - 2i) = \frac{3\pi}{4}$

وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1, -2)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.



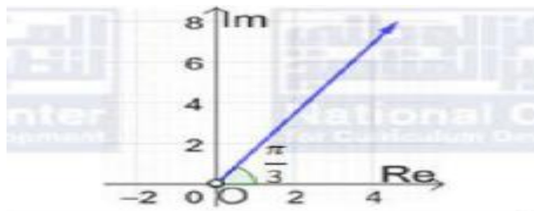
أتحقق من فهمي: (صفحة 169)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم ارسمه في المستوى المركب .

$1)\ Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$$Arg(z-(0))=\frac{\pi}{3}$$

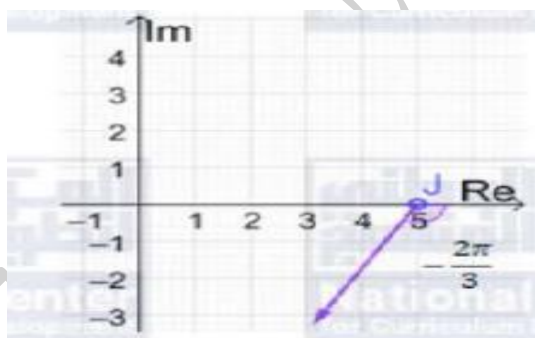
تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



2) $Arg(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

$$Arg(z-(5))=-\frac{2\pi}{3}$$

تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



تمثيل المتباينات في المستوى المركب

مثال 4: (صفحة 170)

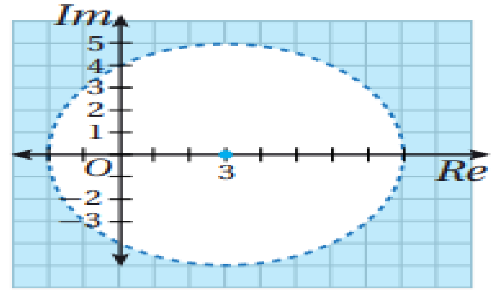
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

1) $|z-3|>5$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة $|z-3|>5$ المنحنى الحدودي للمتباينة $|z-3|>5$ ، وهو دائرة مركزها $(3,0)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فنرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



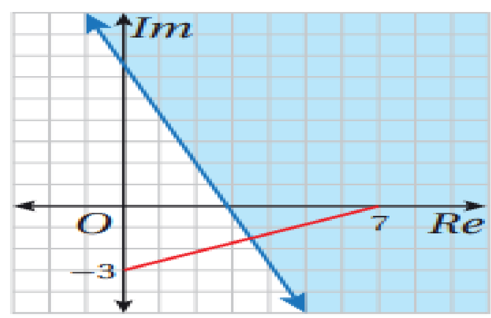
تبعد الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة $|z-3|>5$ مسافة تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة ، إذن منطقة الحلول الممكنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة ، $|z-3|=5$ كما في الشكل المجاور .

2) $|z-7| \leq |z-3i|$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة $|z-7| \leq |z-3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة $|z-7| \leq |z-3i|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(7,0)$ و $(0,-3)$ وبما أنه لا يوجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني ارسم المنحنى الحدودي متصلاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



تتحقق المتباينة : $|z-7| \leq |z-3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي ، ويمكن تحديدها باختبار عدد مركب عشوائياً في المتباينة .

اختبار العدد : $z=0+0i$ الذي تمثله نقطة الاصل :

$$|z-7| \leq |z-3i|$$

$$|0-7| \leq |0-3i|$$

$$\sqrt{49} \leq \sqrt{9}$$

$$7 \leq 3$$

بما أن العدد $z = 0 + 0i$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور .

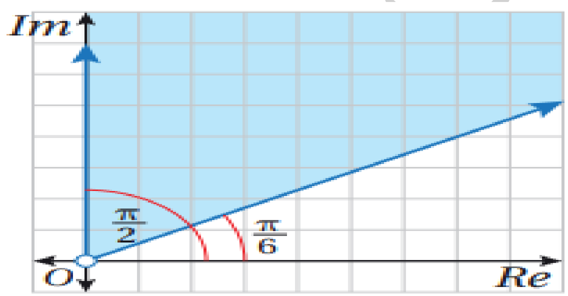
$3)\ \frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاعاً يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب ، ويمثل منحنى المعادلة : $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاعاً آخر يبدأ بنقطة الأصل ، ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

إذن يمثل الشعاعان معاً منحنى حدودياً للمتباينة : $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ وبما أنه توجد مساواة في رمزي المتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



المنطقة التي تمثلها المتباينة $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ هي جزء من المستوي المركب محدود بشعاعين كما في الشكل المجاور .

أتحقق من فهمي :(صفحة 172)

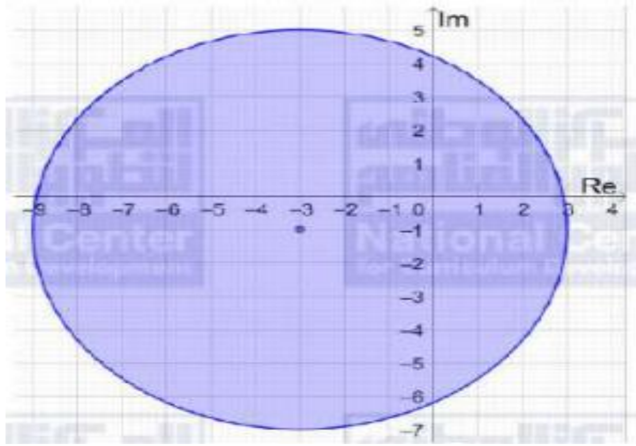
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

$1)\ |z + 3 + i| \leq 6$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z + 3 + i| \leq 6$ وهو دائرة مركزها $(-3, -1)$ وطول نصف قطرها 6 وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها ، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها .



2) $|z+3+i| < |z-4|$

المنصف الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| < |z-4|$

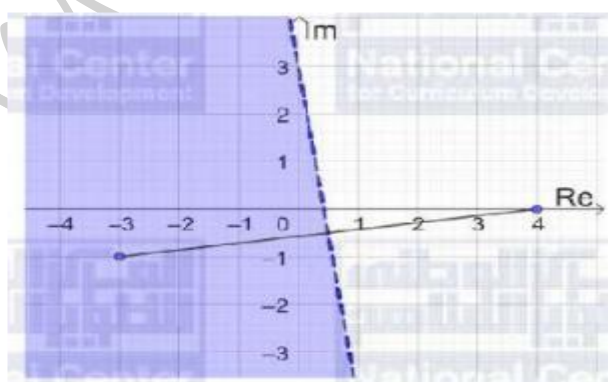
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3,-1)$ **و** $(4,0)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختبار نقطة الأصل مثلاً وتعويضها في المتباينة.

$$|0+3+i| < |0-4| \rightarrow \sqrt{10} < 4$$

بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.



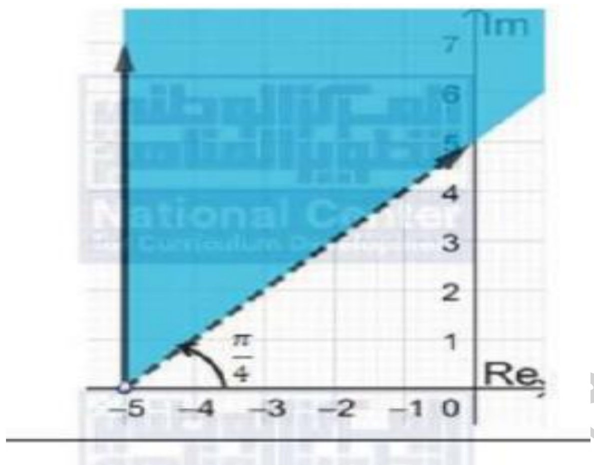
3) $\frac{\pi}{4} < Arg(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5) = \frac{\pi}{2}$ **شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة)**

يبدأ من النقطة $(-5,0)$ **ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها** $\frac{\pi}{2}$ **مع المحور الحقيقي .**

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5)=\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



مثال 5:(صفحة 172)

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z-1-2i|\le 5$ والمتباينة $\frac{\pi}{4}<Arg(z-1-2i)<\frac{2\pi}{3}$

الخطوة الأولى أحدد المنحنى الحدودي لكل متباينة.

تمثل المعادلة $|z-1-2i|\le 5$ دائرة مركزها النقطة $(1,2)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات ، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

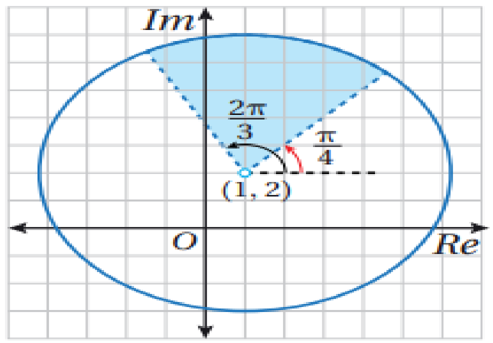
تمثل المعادلة : $Arg(z-1-2i)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم الشعاع متقطعا .

تمثل المعادلة : $Arg(z-1-2i)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم الشعاع متقطعا .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

تمثل المتباينة $|z-1-2i| \leq 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة ، وتمثل المتباينة : $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين .

إذن المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو الجزء الواقع داخل القطاع الدائري كما في الشكل المجاور.



أتحقق من فهمي: (صفحة 173)

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ والمتباينة $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2-i) < \frac{\pi}{4}$

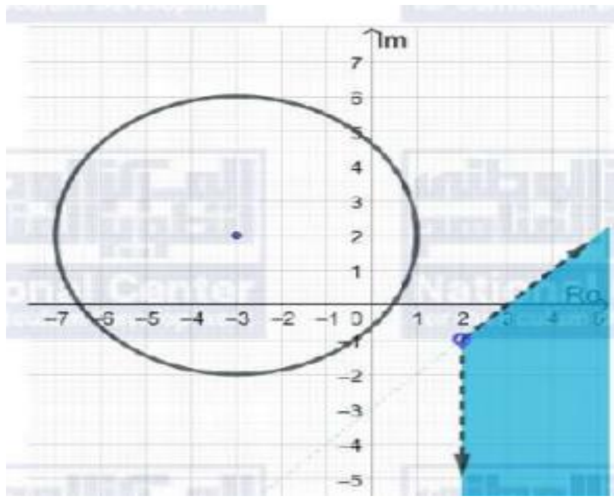
تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3, 2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات ، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

تمثل المعادلة $Arg(z-2-i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(2, -1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

تمثل المعادلة $Arg(z-2-i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(2, -1)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننا نرسم الشعاع متقطعا .

تمثل المتباينة $|z+3-2i| = 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها ،

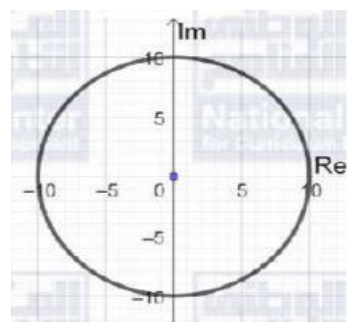
وتمثل المتباينة $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2-i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين ، المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه .



أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 178)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أمثله في المستوى المركب، ثم أجد معادلته الديكارتيه :

$1)\ |z| = 10$



$|x + yi| = 10$

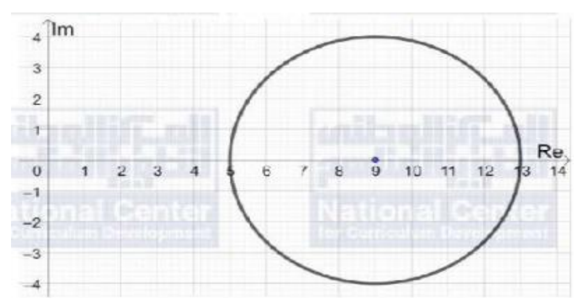
$\sqrt{x^2 + y^2} = 10$

$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 10^2$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 100$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات .

$2)\ |z - 9| = 4$



$|(x - 9) + yi| = 4$

$\sqrt{(x - 9)^2 + y^2} = 4$

$\left(\sqrt{(x - 9)^2 + y^2}\right)^2 = 4^2$

$(x - 9)^2 + y^2 = 16$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9, 0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات .

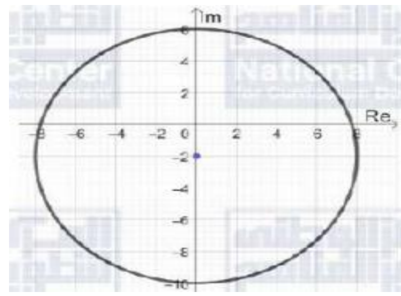
3) $|z+2i|=8$

$$|x+(y+2)i|=8$$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=8$$

$$\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2=8^2$$

$$x^2+(y+2)^2=64$$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات .

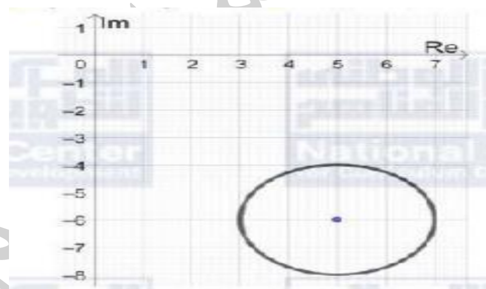
4) $|z-5+6i|=2$

$$|(x-5)+(y+6)i|=2$$

$$\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}=2$$

$$\left(\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}\right)^2=2^2$$

$$(x-5)^2+(y+6)^2=4$$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها 2 وحدة .

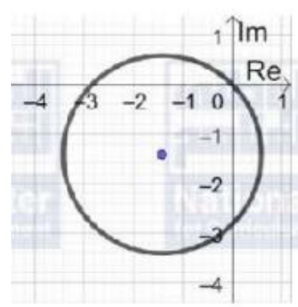
5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$

$$\left|\left(x+\sqrt{2}\right)+\left(y+\sqrt{2}\right)i\right|=2$$

$$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=2$$

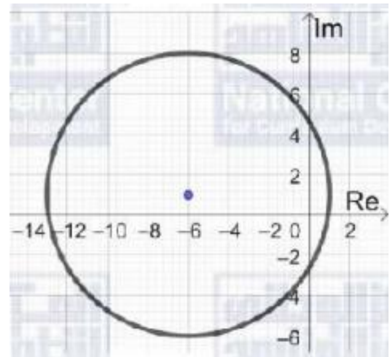
$$\left(\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right)^2=2^2$$

$$(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها 2 وحدة.

6) $|z + 6 - i| = 7$



$|(x + 6) + i(y - 1)| = 7$

$\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 1)^2} = 7$

$\left(\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 1)^2}\right)^2 = 7^2$

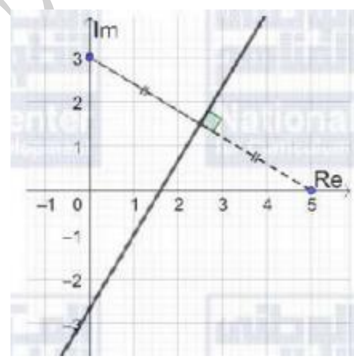
$(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6, 1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات.

7) $|z - 5| = |z - 3i|$

$|z - (5)| = |z - (3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0, 3)$ ، $(5, 0)$



$|(x - 5) + yi| = |x + (y - 3)i|$

$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$

$(x - 5)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

$10x - 6y - 16 = 0$

$5x - 3y - 8 = 0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $5x - 3y - 8 = 0$

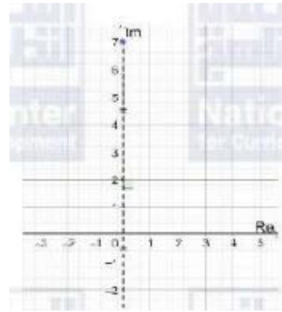
8) $|z + 3i| = |z - 7i|$

$|z - (-3i)| = |z - (7i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0, 7)$ ، $(0, -3)$

$|z - (-3i)| = |z - (7i)|$

$|x + (y + 3)i| = |x + (y - 7)i|$



$\sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$

$x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$

$x^2+y^2+6y+9 = x^2+y^2-14y+49$

$20y-40=0$

$y-2=0$

$y=2$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $y=2$

9) $|z+5+2i| = |z-7|$

$|z-(-5-2i)| = |z-(7i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,0)$ ، $(-5,-2)$

$|(x+5)+(y+2)i| = |(x-7)+yi|$

$\sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$

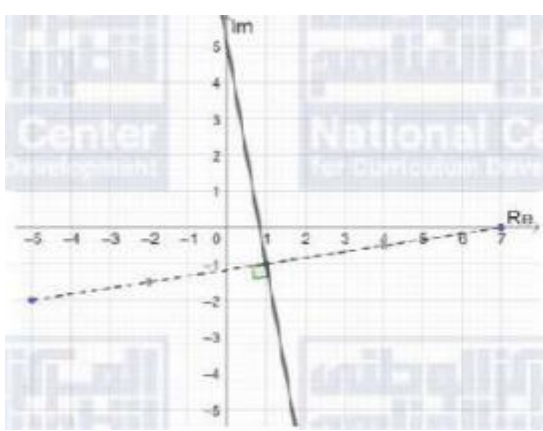
$(x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$

$x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$

$24x+4y-20=0$

$6x+y-5=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $6x+y-5=0$



$10)\ |z-3| = |z-2-i|$

$|z-(3)| = |z-(2+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,1)$ ، $(3,0)$

$|(x-3)+yi| = |(x-2)+(y-1)i|$

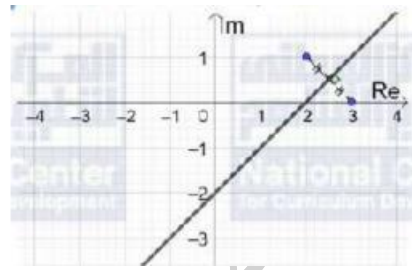
$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$(x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$2x-2y-4=0$

$x-y-2=0$



إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $x-y-2=0$

$11)\ \dfrac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$

$|z+6-i| = |z-10-5i|$

$|z-(-6+i)| = |z-(10+5i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(10,5)$ ، $(-6,1)$

$|(x+6)-(y-1)i| = |(x-10)+(y-5)i|$

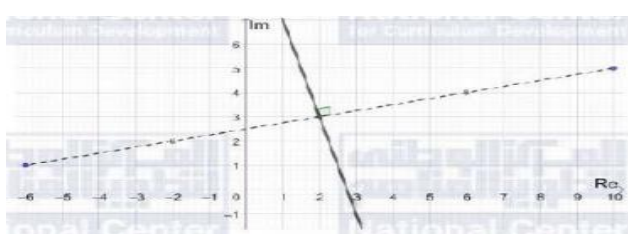
$\sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$

$(x+6)^2+(y-1)^2 = (x-10)^2+(y-5)^2$

$x^2+12x+36+y^2-2y+1 = x^2-20x+100+y^2-10y+25$

$32x+8y-88=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $4x+y-11=0$



$12)\ |z+7+2i| = |z-4-3i|$

$|z-(-7-2i)| = |z-(4+3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,3)$ ، $(-7,-2)$

$|(x+7)-(y+2)i| = |(x-4)+(y-3)i|$

$\sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$

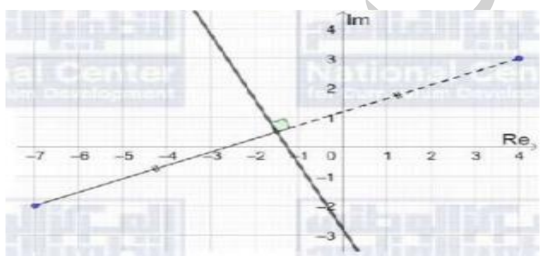
$(x+7)^2+(y+2)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2+14x+49+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2-6y+9$

$22x+10y+28=0$

$11x+5y+14=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $11x+5y+14=0$

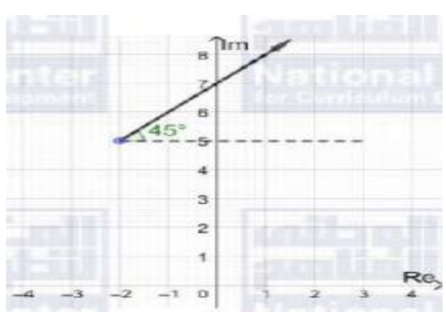


أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المركب:

$13)\ Arg(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$

$Arg\big(z-(-2+5i)\big) = \frac{\pi}{4}$

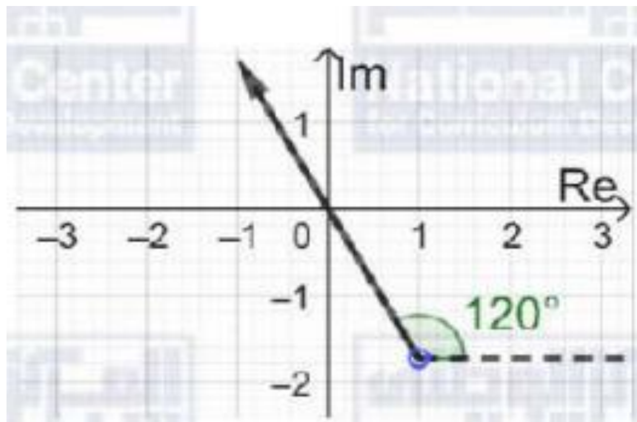
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .



14) $Arg(z-1-i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$

$$Arg\left(z-(1-i\sqrt{3})\right)=\frac{2\pi}{3}$$

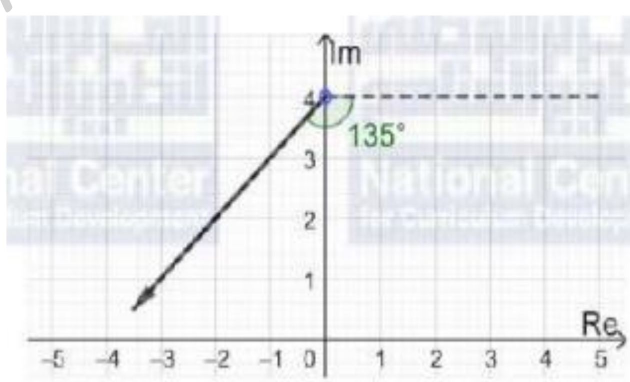
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .



15) $Arg(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}$

$$Arg\left(z-(4i)\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .



أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي:

16) $|z-2| < |z+2|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2| = |z+2|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2,0)$ و $(2,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

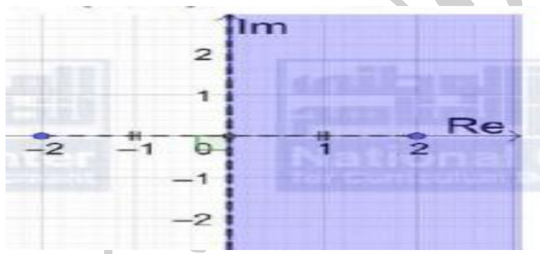
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 1+i$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$|1+i-2| < |1+i+2|$

$|-1+i| < |3+i|$

$\sqrt{2} < \sqrt{10}$

بما أن $z = -1+i$ حقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = -1+i$
(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$) .



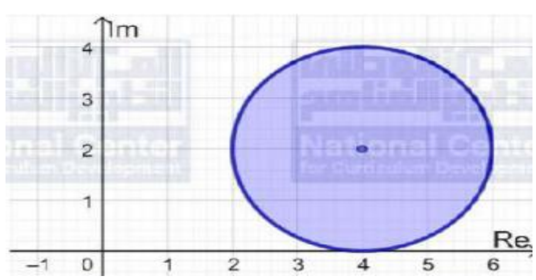
17) $|z-4-2i| \le 2$

$|z-(4+2i)| \le 2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4-2i| = 2$ وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف قطرها أو تساويها.



18) $|z-4| > |z-6|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4| = |z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$ و $(4,0)$.

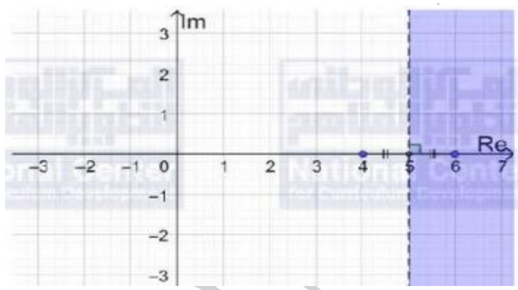
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$|0-4| > |0-6|$

$2 > \sqrt{6}$ غير صحيحة

بما أن العدد $z = 0$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$ (أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$.

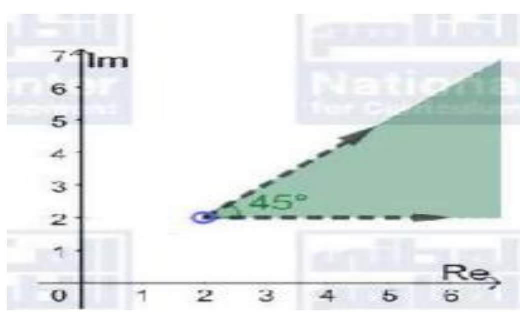


19) $0 < Arg(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2-2i) = 0$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها ، ويوازي المحور الحقيقي .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.

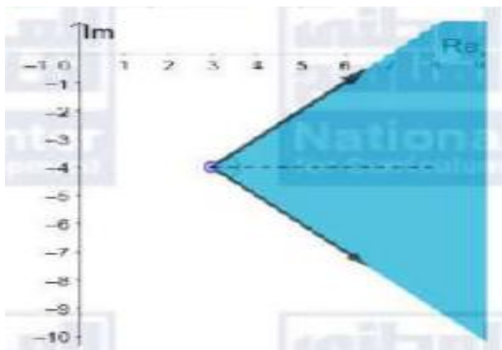


$20)\ -\frac{\pi}{4} \le Arg(z-3+4i) \le \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3+4i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3+4i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المبين في الشكل:



$21)\ 2 \le |z-3-4i| \le 4$

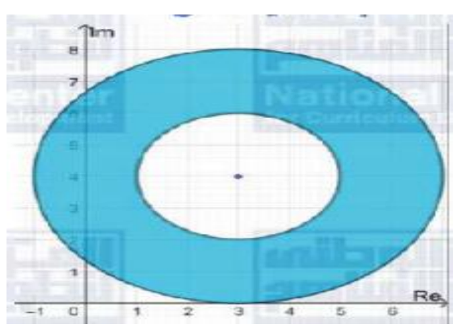
يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)| = 2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا ترسم المنحنى الحدودي متصلاً .

يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)| = 4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 .

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا ترسم المنحنى الحدودي متصلاً .

أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما.



22) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلة:

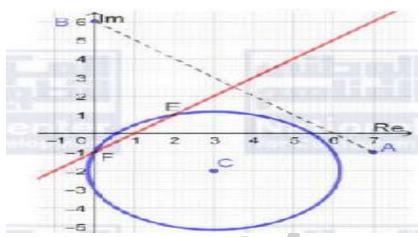
$|z-3-2i|=\sqrt{10}$ ، والمعادلة $|z-7+i|=|z-6i|$ ، ثم أجد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً .

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-3+2i|=\sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات ، ومعادلتها الديكارتيه هي : $(x-3)^2+(y+2)^2=10$.

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-7+i|=|z-6i|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ، نستطيع إيجاد معادلته الديكارتيه عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة .

ميل القطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ هو -1 ، فميل المنصف العمودي لها هو 1

$$m=1\ ,\ M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2}\Rightarrow y=x-1$$



لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً ، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$y=x-1$ و $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ بالتعويض :

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10$$
$$(x-3)^2+(x-1+2)^2=10$$
$$(x-3)^2+(x+1)^2=10$$
$$x^2-6x+9+x^2+2x+1=10$$
$$2x^2-4x+10=10$$
$$2x^2-4x=0$$
$$2x(x-2)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=0}$$
$$y=0-1\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=-1}$$
$$x-2=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=2}$$
$$y=2-1\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=1}$$

العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معاً هما : $z_1=-i\ \ ,z_2=2+i$

23) أجدد العدد المركب الذي يحقق كلاً من المحل الهندسي : $|z-3| = |z+2i|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i| = |z-1+5i|$.

$$|z-3| = |z+2i|$$
$$|(z-3)+yi| = |x+(y+2)i|$$
$$(x-3)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2++4y+4$$
$$-6x+9 = 4y+4$$
$$6x+4y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$|z+3-i| = |z-1+5i|$$
$$|(x+3)+(y-1)i| = |(x-1)+(y+5)i|$$
$$(x+3)^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+(y+5)^2$$
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2+10y+25$$
$$8x-12y = 16$$
$$2x-3y = 4$$
$$2x = 4+3y$$
$$x = 2+\frac{3}{2}y \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$6\left(2+\frac{3}{2}y\right)+4y = 5$$
$$12+9y+4y = 5$$
$$13y = -7$$
$$y = -\frac{7}{13}$$
$$x = 2+\frac{3}{2}\left(-\frac{7}{13}\right)$$
$$x = 2-\frac{21}{26}$$
$$x = \frac{31}{26}$$

ويكون العدد المركب الذي يحقق كلاً من المعادلتين هو : $z = \frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$

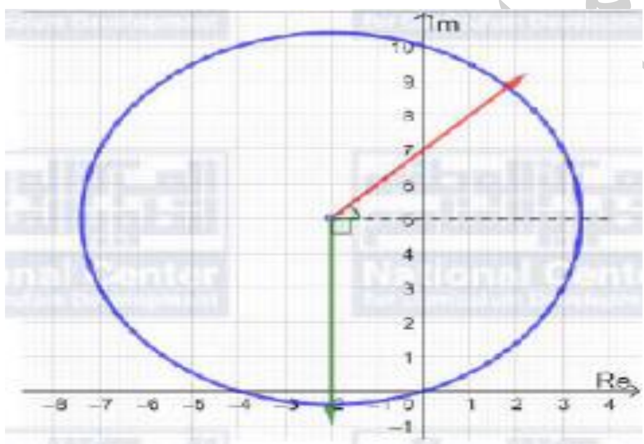
24) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية:

$$Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}\ ,\quad Arg(z+2-5i)=\frac{-\pi}{2}\ ,\quad |z+2-5i|=\sqrt{29}$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$



25) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-3|>|z+2i|$ والمتباينة : $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

1) $|z-3|>|z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3|>|z+2i|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(3,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة.

$$|0-3|>|0+2i|\ \Rightarrow\ 3>2$$

بما أنه العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل) .

$2)\ |z + 3 - i| < |z - 1 + 5i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z + 3 - i| = |z - 1 + 5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1, -5)$ و $(-3, 1)$.

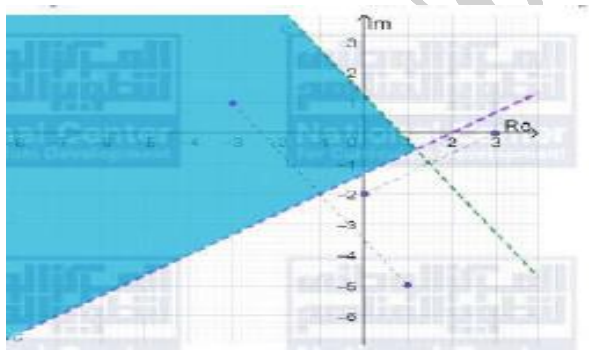
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة.

$|0 + 3 - i| < |0 - 1 + 5i| \implies \sqrt{10} < \sqrt{26}$

بما أنه العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل) .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



26) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{-\pi}{2} < Arg(z + 2 - 5i) < \frac{\pi}{4}$ ، والمتباينة : $|z + 2 - 5i| > \sqrt{29}$

$1)\ -\frac{\pi}{2} < Arg(z + 2 - 5i) < \frac{\pi}{4}$

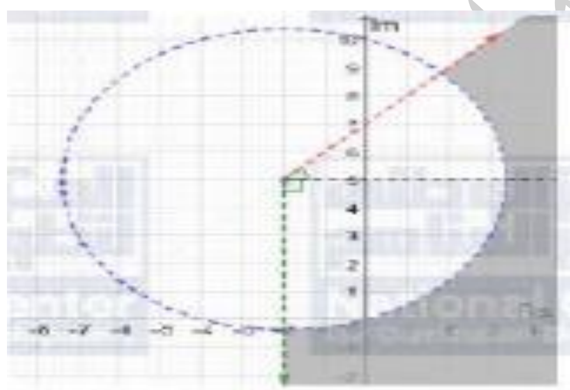
يمثل منحنى المعادلة $Arg(z + 2 - 5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي.

$2)\ \ |z+2-5i|>\sqrt{29}$

ويمثل منحنى المعادلة $|z-3+i|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{-\pi}{4}\le Arg(z-2i)\le\frac{\pi}{3}$ ، والمتباينة : $2<|z-3+i|\le 5$

$1)\ \ -\frac{\pi}{4}\le Arg(z-2i)\le\frac{\pi}{3}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

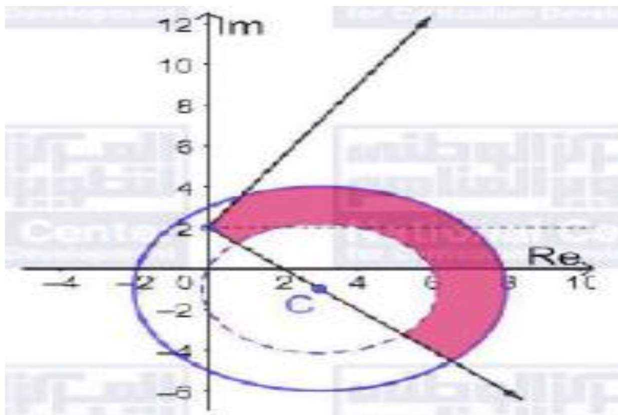
ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

$2)\ \ 2 < |z - 3 + i| \leq 5$

ويمثل منحنى المعادلة $|z - 3 + i| = 5$ دائرة مركزها $(3, -1)$ وطول نصف قطرها 5

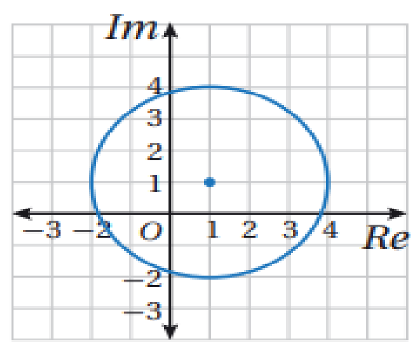
نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



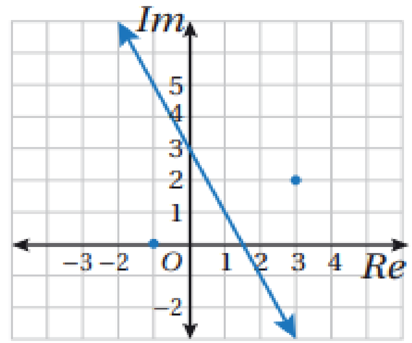
اكتب بدلالة z معادلة المحل الهندسي الممثل بيانياً في كل مما يأتي :

28



$|z - (1 + i)| = 3$

29



نبدأ بالتحقق من ان المستقيم المرسوم هو فعلاً العمود المنصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$:

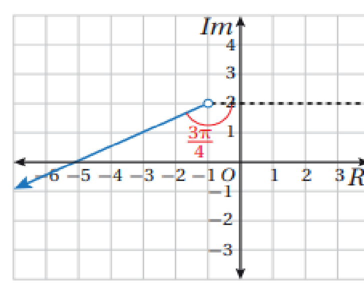
ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان .

معادلة المستقيم هي : $y = 3 - 2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المتسقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته .

إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته:

$$|z-(3+2i)| = |z-(-1)| \Rightarrow |z-3-2i| = |z+1|$$

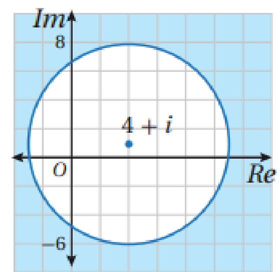
30) اكتب معادلة في صورة : $Arg(z-a) = \theta$ ، حيث a عدد مركب ، و $-\pi < \theta \leq \pi$ تمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .



$$Arg(z+1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$$

اكتب بدلالة z نظام متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

31



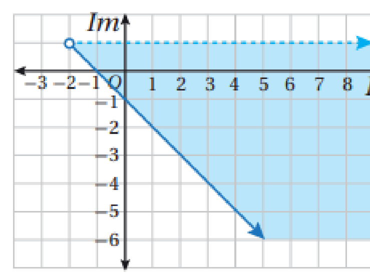
$$r = \sqrt{(4-4)^2 + (1-8)^2}$$

$$r = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

$$|z - (4+i)| \geq 7$$

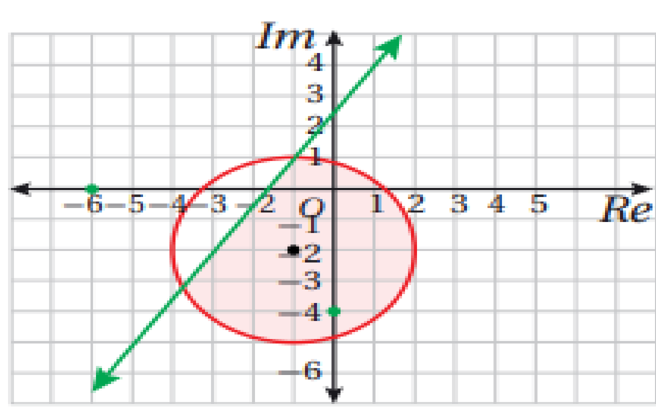
32



قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1

$$-\frac{\pi}{4} < Arg(z + 2 - i) < 0$$

33) اكتب بدلالة z نظام متباينات يمثل النحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .



الجزء المظلل يقع داخل دائرة مركزها $(-1,-2)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات وهي مرسومة متصلة فالمتباينة المرتبطة بها هي :

$$|z-(-1-2i)| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad |z=1+2i| \leq 3$$

والمستقيم المرسوم متصل نجد ان ميله يساوي $\frac{6}{4}$ ، وميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ هو $\frac{-4}{6}$ فهما متعامدان ونلاحظ ان المستقيم يمر بالنقطة $(-5,-5)$ فمعادلته هي :

$$y+5=\frac{6}{4}(x+5)$$

وإذا عوضنا إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ ، وهي $(-3,-2)$ نجد أنها تحققها ، مما يعني أن المستقيم هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ ، والمنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة الأقرب إلى النقطة $(0,-4)$ فالمتباينة المرتبطة بهذا المستقيم هي :

$$|z+6| \geq |z+4i|$$

إذن نظام المتباينات الذي يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المعطى هو:

$$|z+1+2i| \leq 3$$

$$|z+6| \geq |z+4i|$$

مهارات التفكير العليا:

34) تبرير : إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة $|z-3+4i|=2$ فأجد أكبر قيمة $|z|$ وأقل قيمة له ، مبررا ً إجابتي.

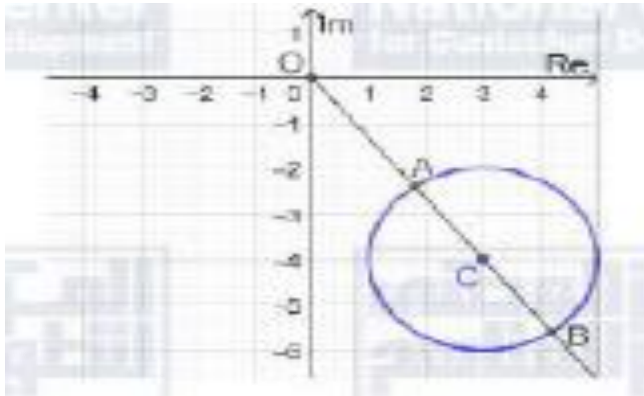
$$|z-3+4i|=2$$

$$|z-(3-4i)|=2$$

z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2 .

نفرض $z=x+yi$ فإن :

$|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي.



من الشكل أعلاه نجد ان:

$OC = \sqrt{9 + 16}$

$OC = \sqrt{25}$

$OC = 5$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة A وهي : $|z| = OC - r = 5 - 2 = 3$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة B وهي : $|z| = OC + r = 5 + 2 = 7$

35) تحد : أثبت المعادلة $|z - 6| = 2|z + 6 - 9i|$ تمثل دائرة ، ثم أجد مركزها وطول نصف قطرها .

$|z - 6| = 2|z + 6 - 9i|$

$|x - 6 + yi| = 2|(x + 6) + (y - 9)i|$

$(x - 6)^2 + (y)^2 = 4((x + 6)^2 + (y - 9)^2)$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4(x^2 + 12x + 36 + y^2 - 18y + 81)$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4x^2 + 48x + 144 + 4y^2 - 72y + 324$

$3x^2 + 3y^2 + 60x - 72y + 432 = 0$

$x^2 + y^2 + 20x - 24y + 144 = 0$

$x^2 + y^2 + 20x - 24y = -144$

$(x + 10)^2 - 100 = 0$

$$(y-12)^2-144=0$$

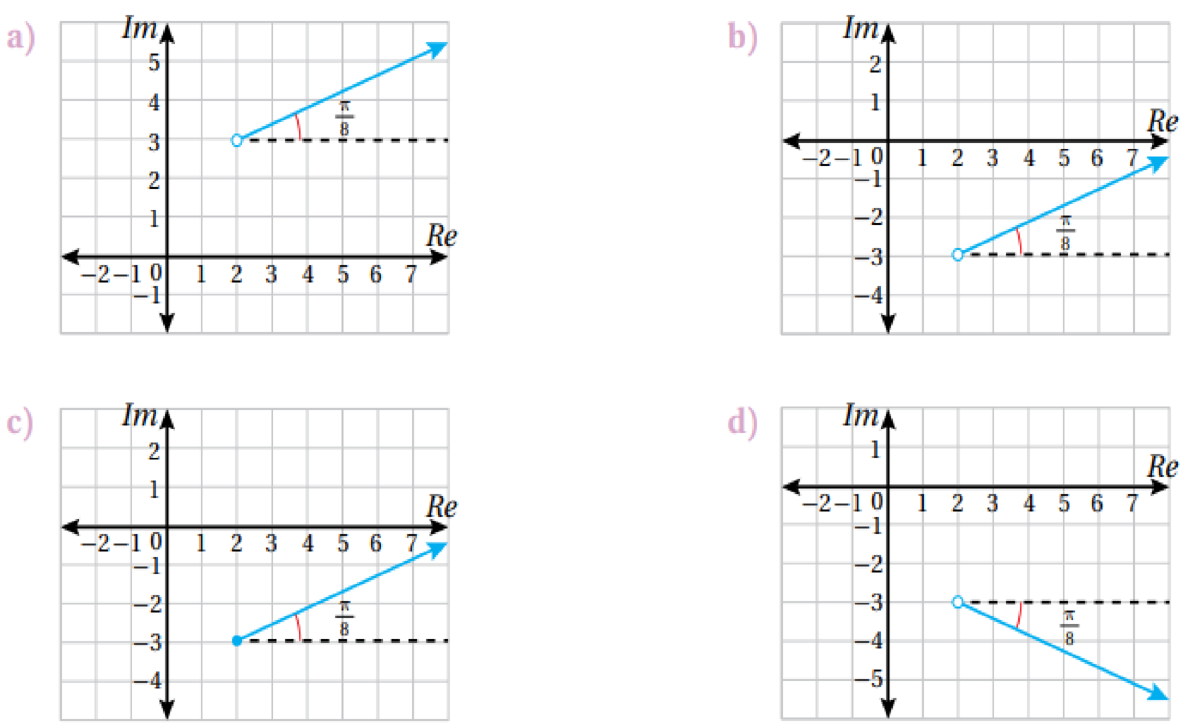
$$(x+10)^2-100+(y-12)^2-144=-144$$

$$(x+10)^2+(y-12)^2=-144+100+144$$

$$(x+10)^2+(y-12)^2=100$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات

36) تبرير : أي الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته : $Arg(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ ، مبرراً إجابتي؟



المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وهو الممثل بالشكل b .

اما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحية .

والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة ، وهو ليس صحيحاً.

والشكل d فنقطة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة .

اختبار نهاية الوحدة:

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كان : $\sqrt{-1} = i$ ، فإن i^{343} تساوي :

$a) -1$ $b)\ 1$ $\boxed{c) -i}$ $d)\ i$

$i^{343} = i^3 = -1$

2) ناتج: $(1-i)^3$ هو:

$a) -2+2i$ $\boxed{b)\ -2-2i}$ $c)\ 2-2i$ $d)\ 2+2i$

$(1-i)^3$

$= (1-i)^2(1-i)$

$= (1-2i-1)(1-i)$

$= (-2i)(1-i)$

$= -2i-2$

3) إذا كان: $2i$ ، هو أحد جذور المعادلة $az^3+5z^2+8z+20=0$ فإن قيمة a تساوي:

$a) -8$ $b) -2$ $\boxed{c)\ 2}$ $d)\ 8$

$a(2i)^3+5(2i)^2+8(2i)+20=0$

$a8i^3+5(4i^2)+16i+20=0$

$-a8i-20+16i+20=0$

$-a8i+16i=0$

$i(-a8+16)=0$

$-a8+16=0$

$a8=16$

$a=2$

4) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي :

$a)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{b)\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

$c)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $d)\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{1+3}$$

$$|z| = \sqrt{4}$$

$$|z| = 2$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$Arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

5) الصورة القياسية لناتج $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ هي:

$\boxed{a)\ 4i}$ $b)\ -4$ $c)\ -4+4i$ $d)\ 4-4i$

$$= \frac{8}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

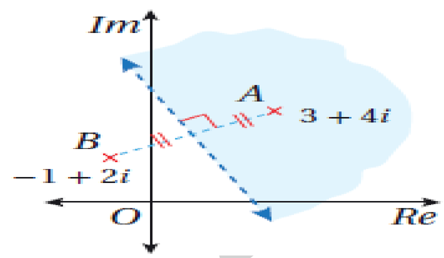
$$= 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$= 4(0 + i)$

$= 4i$

6) أحدى الآتية تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



$a)\ |z - 1 + 2i| < |z + 3 + 4i|$

$b)\ |z - 1 + 2i| > |z + 3 + 4i|$

$c)\ |z + 1 - 2i| < |z - 3 - 4i|$

$\boxed{d)\ |z + 1 - 2i| > |z - 3 - 4i|}$

$|z - (-1 + 2i)| \quad |z - (3 + 4i)|$

$|z + 1 - 2i| \qquad |z - 3 - 4i|$

لتحديد الإشارة $<$ أو $>$ لأنه لا يوجد نقطة محددة يمكن اختيارها في منطقة الحل ليتم تعويضها.

نختار النقطة $(0,0)$ وهي خارج منطقة الحل ليتم تعويضها ونتيجة التعويض تكون عبارة خاطئة.

$(0,0) \rightarrow z = 0 + 0i$

$|z + 1 - 2i| \qquad |z - 3 - 4i|$

$|0 + 0i + 1 - 2i| \qquad |0 + 0i - 3 - 4i|$

$|1 - 2i| \qquad |-3 - 4i|$

$\sqrt{(1)^2 + (2)^2} \qquad \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$\sqrt{1 + 4} \qquad \sqrt{9 + 16}$

$\sqrt{5} \quad > \quad \sqrt{25}$

إذن الإجابة الصحيحة هي d:

$|z + 1 - 2i| > |z - 3 - 4i|$

7) أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 45 - 28i$

$\sqrt{45 - 28i} = x + yi$

$\left(\sqrt{45 - 28i}\right)^2 = (x + yi)^2$

$45 - 28i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 45$

$2xy = -28$

$y = -\frac{28}{2x}$

$y = -\frac{14}{x}$

$x^2 - y^2 = 45$

$x^2 - \left(-\frac{14}{x}\right)^2 = 45$

$\left[x^2 - \frac{196}{x^2} = 45\right] \times x^2$

$x^4 - 196 = 45x^2$

$x^4 - 45x^2 - 196 = 0$

$(x^2 - 49)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 - 49 = 0$

$x^2 = 49$

$\boxed{x = \pm 7}$

$y = \frac{-14}{7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -2}$

$y = \frac{-14}{-7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2}$

$x = 7 \quad , y = -2 \quad or\ x = -7 \quad , y = 2$

الجذران التربيعيان للعدد $z = 45 - 28i$ هما : $7 - 2i$ و $-7 + 2i$

8) أجد مقياس العدد المركب : $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$ ، وسعته ، مقرباً إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين .

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$|w| = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{1}{4}}$$

$$|w| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$

$$|w| = \sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$|w| \approx 0.76$$

$$Arg(w) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right)$$

$$Arg(w) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$Arg(w) = -2.43$$

9) إذا كان : $z = -8 + 8i$ ، وكان : $w = a + 2i$ ، حيث $a < 0$ فأجد قيمة a ، علماً بأن : $|z + w| = 26$

$$z + w = (-8 + 8i) + (a + 2i)$$

$$z + w = (-8 + a) + (8 + 2)i$$

$$z + w = -8 + a + 10i$$

$$|z + w| = \sqrt{(a - 8)^2 + (10)^2} = 26$$

$\sqrt{(a-8)^2+(10)^2}=26$

$(a-8)^2+(10)^2=676$

$(a-8)^2+100=676$

$(a-8)^2=576$

$a-8=\pm 24$

$a=24+8$

$a=32$

$a=-24+8$

$a=-16$

ولأن $a<0$ ، فإن : $a=-16$

إذا كان : $w=\frac{14-31i}{3-2i}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

10) اكتب العدد w في صورة : $x+yi$.

$$w=\frac{14-31i}{3-2i}$$

$$w=\frac{14-31i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$

$$w=\frac{42+28i-93i+62}{(3)^2+(2)^2}$$

$$w=\frac{104-65i}{13}$$

$$w=\frac{104}{13}-\frac{65}{13}i$$

$$w=8-5i$$

11) إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة : $z^2 + cz + d = 0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين c و d .

$z^2 + cz + d = 0$

$(8 - 5i)^2 + c(8 - 5i) + d = 0$

$(64 - 80i - 25) + (8c - 5ci) + d = 0$

$39 - 80i + 8c - 5i + d = 0$

$39 + 8c + d - (80 + 5c)i = 0$

$80 + 5c = 0$

$5c = -80$

$c = -16$

$39 + 8c + d = 0$

$39 + 8(-16) + d = 0$

$39 - 128 + d = 0$

$-89 + d = 0$

$d = 89$

حل آخر:

$w = 8 - 5i$

$\bar{w} = 8 + 5i$

$c = -(w + \bar{w})$

$c = -\big((8 - 5i) + (8 + 5i)\big)$

$c = -(8 - 5i + 8 + 5i)$

$c = -16$

$c = (w \times \bar{w})$

$c = (8 - 5i) \times (8 + 5i)$

$c = (8)^2 + (5)^2$

$c = 64 + 25$

$c = 89$

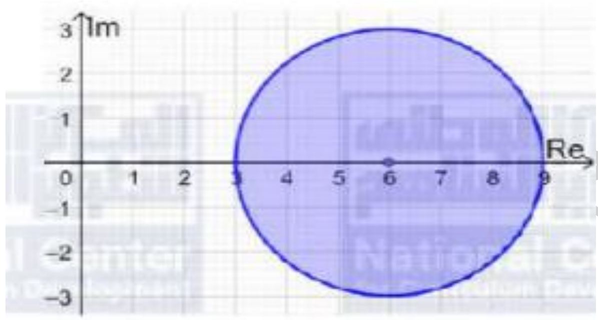
أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي:

12) $|z-6| \leq 3$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته : $|z-6| = 3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، ولأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



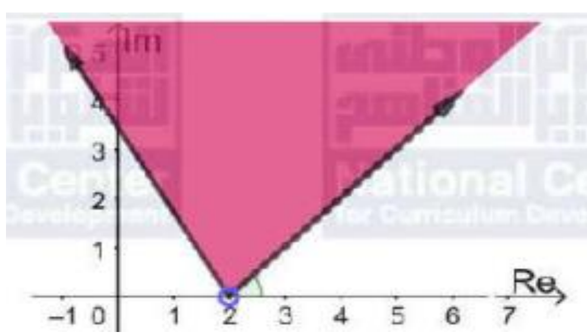
13) $\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة)

يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



$14) \ |z+1+i| > |z-3-3i|$

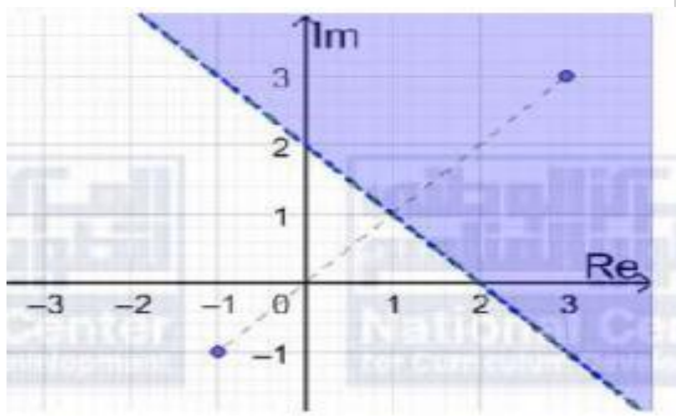
المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3-3i| = |z+1+i|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,3)$ و $(-1,-1)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$|0+1+i| > |0-3-3i| \rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18} \quad \chi$

بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$



إذا مثلت النقطة M العدد : $z_1 = 1-8i$ ، ومثلت النقطة N العدد : $z_2 = 4+7i$ وكانت O هي نقطة الأصل ، فأجب عن الاسئلة الآتية تباعاً :

15) ابين أن المثلث OMN متطابق الضلعين .

$NO = \sqrt{16+49}$

$NO = \sqrt{65}$

$MO = \sqrt{1+64}$

$MO = \sqrt{65}$

إذن المثلث OMN متطابق الضلعين .

16) أبين أن جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$

باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN :

$$(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$$

$$\cos\angle MON = -\frac{234-130}{130}$$

$$\cos\angle MON = -\frac{4}{5}$$

17) أجد مساحة المثلث OMN .

$$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON$$

$$A = \frac{1}{2}\times(65)\times\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$A = \frac{39}{2}$$

18) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-8| > |z+2i|$
والمتباينة : $-\frac{\pi}{4} < Arg(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-8| = |z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(8,0)$.

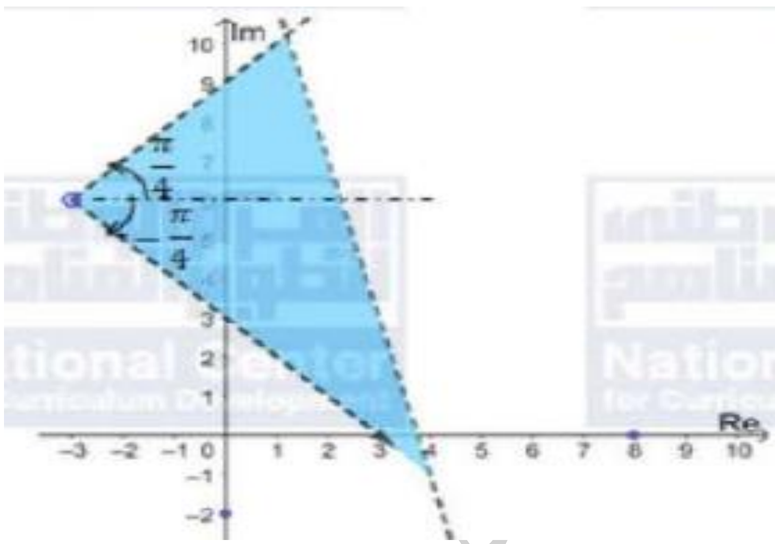
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

$$-\frac{\pi}{4} < Arg(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$$

ويمثل منحنى المعادلة $\frac{\pi}{4} = Arg(z+3-6i)$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+3-6i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



إذا كانت : $z=5+2i$ فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

19) أبين أن : $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{29}(21+20i)$

$$z=5+2i$$

$$\bar{z}=5-2i$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{5+2i}{5-2i}\times\frac{5+2i}{5+2i}$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{25+10i+10i-4}{(5)^2+(2)^2}$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{21+20i}{29}$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{29}(21+20i)$$

20) من خلال البحث في سعة كل من الأعداد المركبة : z ، $\bar{z}$ ، $\frac{z}{\bar{z}}$ ، أبين أن :

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Arg(z) - Arg(\bar{z})$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

تمثل النقاط : A و B و C و D جذور المعادلة : $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$

21) إذا كان العدد : $(-2+4i)$ هو أحد هذه الجذور ، فأجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة .

بما ان العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة ، إذن مرافقه $-2-4i$ يكون حلاً أيضاً لهذه المعادلة التربيعية التي لها هذان الجذران هي أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة المعطاة.

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2+4i)$ ، $(-2-4i)$

مجموع الجذرين $= (-2+4i) + (-2-4i)$

مجموع الجذرين $= -2+4i-2-4i$

مجموع الجذرين $= -4$

حاصل ضرب الجذرين $= (-2+4i)\times(-2-4i)$

حاصل ضرب الجذرين $= 4+8i-8i+16$

حاصل ضرب الجذرين $= 20$

$$z^2-(-4z)+20=0$$

$$z^2+4z+20=0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^4-6z^3+14z^2-64z+680$ على $z^2+4z+20$ فنجد أن :

$$z^4-6z^3+14z^2-64z+680=0$$

$$(z^2+4z+20)(z^2-10z+34)=0$$

لإيجاد جذور المعادلة $z^2-10z+34=0$ نستخدم القانون العام لحل لهذه المعادلة التربيعية :

$a=1 \qquad b=-10 \qquad c=34$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(34)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-136}}{2}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$x=\frac{10\pm 6i}{2}$$

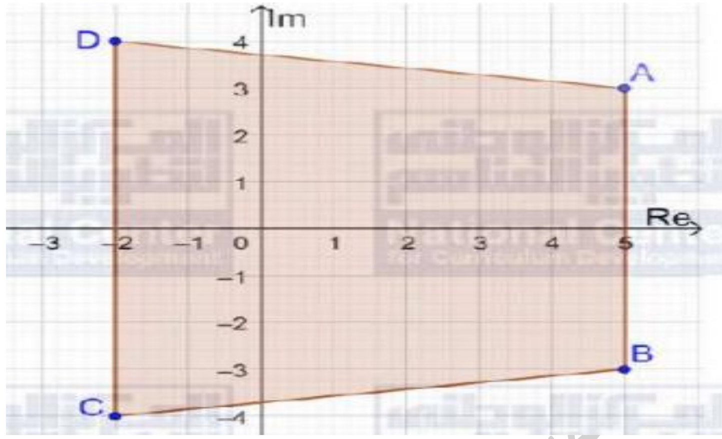
$$x=\frac{10}{2}\pm\frac{6i}{2}$$

$$\boxed{x_2=5+3i}$$

$$\boxed{x_3=5-3i}$$

فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي : $\{x_1=-2-4i \;\;,\; x_2=5+3i \;\;, x_3=5-3i\}$

22) أمثل الجذور الأربعة في المستوى المركب ، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.



الشكل الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف مساحته بالوحدات المربعة تساوي :

= نصف مجموع ضلعيه المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما

$$A = \frac{1}{2}(DC + AB)(h)$$

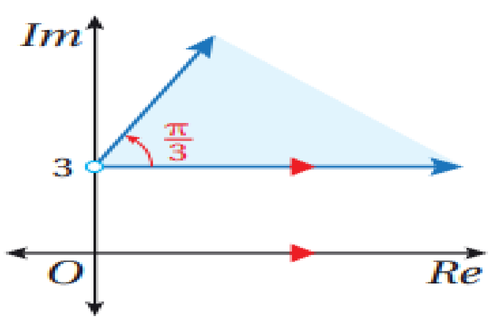
$$A = \frac{1}{2}(8 + 6)(7)$$

$$A = \frac{1}{2}(14)(7)$$

$$A = (7)(7)$$

$$A = 49$$

23) اكتب (بدلالة z) متباينة تمثل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي :



$$0 \le Arg(z - 3i) \le \frac{\pi}{3}$$

إذا كان : $z^2 + 2z + 10 = 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

24) أبين أن لجذري المعادلة المقياس نفسه.

$$z^2 + 2z + 10 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(10)$$

$$\Delta = 4 - 40$$

$$\Delta = -36$$

مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه.

25) أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-2 \pm 6i}{2}$$

$$z = \frac{-2}{2} \pm \frac{6i}{2}$$

$$\boxed{z_1 = -1 + 3i}$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right) \approx 1.89$$

$$\boxed{z_2 = -1 - 3i}$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right)\right) \approx -1.89$$

26) يحقق العددان المركبان u و v المعادلة : $u + 2v = 2i$ والمعادلة : $iu + v = 3$ ، أحل المعادلتين لإيجاد العدد u والعدد v .

$u + 2v = 2i$

$u = 2i - 2v \dots\dots.\dots\dots(1)$

$iu + v = 3 \dots\dots\dots\dots\dots(2)$

$i(2i - 2v) + v = 3$

$-2 - 2vi + v = 3$

$-2vi + v = 5$

$v(1 - 2i) = 5$

$v = \frac{5}{1 - 2i}$

$v = \frac{5}{1 - 2i} \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i}$

$v = \frac{5 + 10i}{(1)^2 - (2)^2}$

$v = \frac{5 + 10i}{5}$

$v = \frac{5}{5} + \frac{10}{5} i$

$\boxed{v = 1 + 2i}$

$u = 2i - 2v$

$u = 2i - 2(1 + 2i)$

$u = 2i - 2 - 4i$

$\boxed{u = -2 - 2i}$

27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{2\pi}{3} \geq Argz \geq \frac{\pi}{2}$ ، والمتباينة : $|z-2i| \leq 2$.

المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب ، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ ، وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة، فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور.