الطالب :

Hasanat

الرياضيات 2024 / 2023

الثاني الثانوي الأدبي

Collins

الوحدة الرابعة

التكامل

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 77 88 531 078

I ♥ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

الدرس 1 التكامل غير المحدود Indefinite Integral

الاقتران الأصلي

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران المتصل $f(x)$، فإنّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت: $f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$

1) الاقتران الأصلي للاقتران (2x) يعني : **ما هو الاقتران الذي مشتقته تساوي (2x)** ؟

والجواب (x^2) أو $(x^2 + 4)$ أو $(x^2 - 3)$ ... وباختصار نكتب مقداراً ثابتاً رمزه (C) : $(x^2 + c)$

ما هو المقدار الذي مشتقته $(3x^2)$ ؟ الجواب $\int 3x^2\,dx = ?\ x^3\ , x^3+2\ , x^3-1\ ...$
وبشكل عام: $(x^3 + C)$

أمثلة :

$$1)\ f(x) = 6x^5 \Rightarrow F(x) = x^6 + C$$
$$2)\ f(x) = -2x^{-3} \Rightarrow F(x) = x^{-2} + C$$
$$3)\ f(x) = 3 \Rightarrow F(x) = 3x + C$$

أتحقّق من فهمي 9 أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 5x^4$ b) $f(x) = -9x^{-10}$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = x^7$ 2 $f(x) = -2x^6$ 3 $f(x) = -10$ 4 $f(x) = 8x$

أتحقق من فهمي صفحة 9

b	$f(x) = -9x^{-10}$ $G(x) = x^{-9} + C$	a	$f(x) = 5x^4$ $G(x) = x^5 + C$

1	$f(x) = x^7$	$G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$	2	$f(x) = -2x^6$	$G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$
3	$f(x) = -10$	$G(x) = -10x + C$	4	$f(x) = 8x$	$G(x) = 4x^2 + C$

تمارين :

1) إذا كان $f(x) = 4x^3$ فإن أي اقتران أصلي للاقتران يُكتب على الصورة : ....

2) إذا كان $f(x) = x^2$ فإن أي اقتران أصلي للاقتران يُكتب على الصورة : ....

3) إذا كان $f(x) = -6x^{-3}$ فإن أي اقتران أصلي للاقتران يُكتب على الصورة : ....

4) إذا كان $f(x) = 2x^{-5}$ فإن أي اقتران أصلي للاقتران يُكتب على الصورة : ....

5) إذا كان $f(x) = 8$ فإن أي اقتران أصلي للاقتران يُكتب على الصورة : ....

2)التكامل غير المحدود:سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم ؛ لأنَّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان : التكامل يُلغي المشتقة الأولى والمشتقة تُلغي التكامل

$$\boxed{f(x)=5x^3 \Rightarrow f'(x)=5\times 3x^{3-1}=15x^2}$$

المُكامَل — ثابت التكامل

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

رمز التكامل — مُتغيِّر التكامل

$$\int a\,x^n\,dx=\frac{a\,x^{n+1}}{n+1}+c=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+c \ , \ n\neq 1$$

$$\boxed{\int 7x^3\,dx=7\frac{x^4}{4}+c=\frac{7}{4}x^4+c}$$

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ: ❶ $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ ❷ $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

يمكن توزيع التكامل في حالتي الجمع والطرح فقط

ولكن لا يمكن ذلك عند الضرب أو القسمة

فإذا كان هناك تكامل لحاصل ضرب اقترانين
فيجب إيجاد حاصل ضربهما أولاً
ثم توزيع التكامل على الحدود الناتجة

$$1)\ \int 3x^4\,dx=3\frac{x^5}{5}+c=\frac{3}{5}x^5+c$$

$$2)\ \int 7x^{-8}\,dx=7\frac{x^{-7}}{-7}+c=-x^{-7}+c$$

$$3)\ \int x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$$

$$:\ \frac{a}{b}+1=\frac{a+b}{b}$$

$$\frac{\text{البسط + المقام}}{\text{المقام}}$$

$$4)\ \int (3x^2+6x-4)\,dx=3\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-4x+c=x^3+3x^2-4x+c$$

$$5)\ \int 4x^6\,dx=$$

$$6)\ \int 8x^{-\frac{5}{2}}\,dx=$$

$$7)\ \int x^2(x^{\frac{2}{3}}+4x-2)dx=$$

$$8)\ \int (2x^4+5x^{-4}-4)\,dx=$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

ملاحظة : هناك حالتان لا يمكن فيهما إجراء التكامل مباشرةً (نحتاج إلى خطوة تجهيز) وهما :

1) x في المقام (دائماً نرفعها إلى البسط ونعكس إشارة قوتها بشرط قوتها ≠ 1)

2) x تحت الجذر (دائماً نحولها إلى قوة كسرية)

9) $\int \frac{3}{x^4}\,dx = \int 3x^{-4}\,dx = 3\frac{x^{-3}}{-3} + c = -x^{-3} + c$: $\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$

10) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$: $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$

11) $\int \frac{8x + 3x^4}{2x}dx = \int \frac{8x}{2x}dx + \int \frac{3x^4}{2x}dx = 4x + \frac{3}{2}\,\frac{x^4}{4} + c$

12) $\int \frac{x^2 - 16}{x+4}\,dx = \int \frac{(x-4)(x+4)}{x+4}\,dx = \int (x-4)dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x + c$

13) $\int \frac{4}{x^3}\,dx =$

14) $\int \sqrt[7]{x^2}\,dx =$

15) $\int \frac{4x + 5x^3 + \sqrt{x}}{8x}\,dx =$

16) $\int \frac{x^2 - x - 20}{2x+10}\,dx =$

17) $\int \frac{x + x^3 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$

18) $\int \frac{1}{(x^3+2)^2}\,dx =$

19) $\int x\,dx =$

20) $\int \frac{2}{5}\,dx =$

أتحقق من فهمي 11 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6\ dx$ b) $\int x^8\ dx$ c) $\int \sqrt[3]{x}\ dx$ d) $\int \frac{1}{x^5}\ dx$

أتحقّق من فهمي 12 أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \left(x^3 - 2x^{5/3}\right) dx$ b) $\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$

أتحقّق من فهمي 13 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}\ dx$ b) $\int (3x+2)(x-1)\ dx$ c) $\int x\,(x^3 - 7)\ dx$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5 $\int 6x\ dx$

6 $\int (7x - 5)\ dx$

7 $\int (3 - 4x)\ dx$

8 $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\ dx$

9 $\int 2x^{3/2}\ dx$

10 $\int (2x^4 - 5x + 10)\,dx$

11 $\int (2x^3 - 2x)\ dx$

12 $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right) dx$

13 $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

14 $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3}\ dx$

15 $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}}\ dx$

16 $\int (x-1)^2\ dx$

17 $\int \frac{x^3 + 8}{x+2}\ dx$

18 $\int \sqrt{x}\,(x-1)\ dx$

19 $\int (2x-3)(3x-1)\,dx$

مهارات التفكير العليا

20 أكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل: $\int (2x+1)(x-1)\ dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)\ dx = \int (2x+1)\ dx \times \int (x-1)\ dx = (x^2 + x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$$ ✗

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

22 $\int (x-1)(x-3)(x+5)\ dx$

21 $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$

23 تبرير: إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، مُبرِّرًا إجابتي.

أتحقق من فهمي صفحة 11

a	$\int 6dx = 6x + C$
b	$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C = \frac{1}{9}x^9 + C$
c	$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$
d	$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

أتحقق من فهمي صفحة 12

a	$\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right)dx = \int x^3 dx - 2\int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$
b	$\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right)dx = 3\int x^2 dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = 3\int x^2 dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}}dx$ $= x^3 - 6\left(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right) + C = x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$

أتحقق من فهمي صفحة 13

a	$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2}\right)dx = \int (x^2 - 8x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$
b	$\int (3x+2)(x-1)dx = \int (3x^2 - 3x + 2x - 2)dx = \int (3x^2 - x - 2)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

5	$\int 6x\,dx = 3x^2 + C$	6	$\int (7x-5)\,dx = \frac{7}{2}x^2 - 5x + C$
7	$\int (3-4x)\,dx = 3x - 2x^2 + C$	8	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}dx = 20x^{\frac{1}{2}} + C = 20\sqrt{x} + C$
9	$\int 2x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$	10	$\int (2x^4 - 5x + 10)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$

11	$\int (2x^3 - 2x)dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$
12	$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right)dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
13	$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^{-2} - x^{-3})dx = -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$
14	$\int \frac{4x^3 - 2}{x^3}dx = \int \left(\frac{4x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int (4 - 2x^{-3})dx = 4x + \frac{1}{x^2} + C$

15	$\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(2x^{\frac{1}{2}}+8x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}+16\sqrt{x}+C$
16	$\int (x-1)^2dx = \int(x^2-2x+1)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$
17	$\int\frac{x^3+8}{x+2}dx = \int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx = \int(x^2-2x+4)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$
18	$\int\sqrt{x}(x-1)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
19	$\int(2x-3)(3x-1)dx = \int(6x^2-2x-9x+3)dx = 2x^3-\frac{11}{2}x^2+3x+C$

عبدالقادر الحسنات

20	$\int(2x+1)(x-1)dx = \int(2x^2-2x+x-1)dx = \frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$
21	$\int\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2dx = \int(1+x^{-2})^2dx = \int(1+2x^{-2}+x^{-4})dx$ $= x-2x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C = x-\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

22	$\int(x-1)(x-3)(x+5)dx = \int(x^2-3x-x+3)(x+5)dx = \int(x^2-4x+3)(x+5)dx$ $= \int(x^3+5x^2-4x^2-20x+3x+15)dx = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{17}{2}x^2+15x+C$
23	$\int\left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \frac{2}{x}+10x+C \Rightarrow \int\left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \int\left(\frac{P}{2}x^{-2}+Q\right)dx$ $= -\frac{P}{2}x^{-1}+Qx+C = -\frac{P}{2x}+Qx+C \Rightarrow -\frac{P}{2}=2$ و $Q=10 \Rightarrow P=-4$ و $Q=10$

Hasanat

كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (4x+2)\,dx$
2. $\int 2x^{-4}\,dx$
3. $\int (6x^2-4x)\,dx$
4. $\int (3-x-2x^5)\,dx$
5. $\int \left(x^{-2}+x^{5/2}\right)dx$
6. $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)dx$
7. $\int (3x^{-2}+6x^{-1/2}+x-4)\,dx$
8. $\int \left(10x^4+8x^{-3}\right)dx$
9. $\int \left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx$
10. $\int \left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$
11. $\int \left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$
12. $\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

1	$2x^2+2x+C$
2	$-\frac{2}{3x^3}+C$
3	$2x^3-2x^2+C$
4	$3x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^6+C$
5	$-x^{-1}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$
6	$x^3+\frac{2}{x}+C$

7	$=-3x^{-1}+12x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^2-4x+C$
8	$=2x^5-4x^{-2}+C$
9	$=\int\left(2x^{-3}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx=-x^{-2}-2x^{\frac{3}{2}}+C$ $=-\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x^3}+C$
10	$=\int\left(8x^3+6x-4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=2x^4+3x^2-8x^{\frac{1}{2}}+C$ $=2x^4+3x^2-8\sqrt{x}+C$
11	$=\int\left(7x^{-2}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx=-7x^{-1}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$ $=-\frac{7}{x}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C$
12	$=\int\left(\frac{1}{3}x^2+3x^{-2}\right)dx=\frac{1}{9}x^3-3x^{-1}+C$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13) $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\, dx$
14) $\int \frac{4-x^2}{2+x}\, dx$
15) $\int \frac{x^2-1}{x^2}\, dx$
16) $\int x\sqrt{x}\, dx$
17) $\int \frac{x^2-1}{x-1}\, dx$
18) $\int x^2(1-x^3)\, dx$
19) $\int (x+4)^2\, dx$
20) $\int \frac{5-x}{x^5}\, dx$
21) $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\, dx$
22) $\int x(x+1)^2\, dx$
23) $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\, dx$
24) $\int (x-5)(x+5)\, dx$

13	$= \int \left(\frac{4}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right) dx = \int \left(4x^{-2}+2x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = -4x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{4}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$
14	$\int \frac{4-x^2}{2+x} dx = \int \frac{(2-x)(2+x)}{2+x} dx = \int (2-x) dx = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$
15	$\int \frac{x^2-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int (1-x^{-2}) dx = x + x^{-1} + C = x + \frac{1}{x} + C$
16	$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
17	$\int \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$
18	$\int x^2(1-x^3) dx = \int (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + C$
19	$\int (x+4)^2 dx = \int (x^2+8x+16) dx = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + C$
20	$\int \frac{5-x}{x^5} dx = \int \left(\frac{5}{x^5} - \frac{x}{x^5}\right) dx = \int (5x^{-5} - x^{-4}) dx = -\frac{5}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-3} + C$
21	$\int \frac{x^2+2x+1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$
22	$\int x(x+1)^2 dx = \int x(x^2+2x+1) dx = \int (x^3+2x^2+x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
23	$\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right) dx$ $= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} + C$
24	$\int (x-5)(x+5) dx = \int (x^2 - 25) dx = \frac{1}{3}x^3 - 25x + C$

وزارة أدبي 2023

1) إذا كان $f(x) = -7x^{-8}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتب على الصورة:

a) $G(x) = -8x^{-7} + C$ b) $G(x) = x^{-8} + C$

c) $G(x) = -8x^{-9} + C$ d) $G(x) = x^{-7} + C$

2) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$ هو:

a) $3\sqrt[3]{x^2} + C$ b) $\sqrt[3]{x^2} + C$ c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$

3) $\int \frac{x^2-4}{x-2} dx$ هو:

a) $x^2 - 2x + C$ b) $x^2 + 2x + C$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ d) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

وزارة فندقي 2023

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int \frac{6x^3 - x^2 + 2}{x} dx$ (7 علامات)

وزارة أدبي تكميلي 2023

1) إذا كان $f(x) = -3x^{-4}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يكتب على الصورة:

a) $G(x) = \frac{1}{x^3} + C$ c) $G(x) = 3x^{-3} + C$

b) $G(x) = -\frac{1}{x^3} + C$ d) $G(x) = -3x^{-3} + C$

2) $\int \frac{7x - 2x^2}{x} dx$ هو:

a) $7x - 2x^2 + C$ c) $\frac{7}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$

b) $7x - x^2 + C$ d) $\frac{7}{2}x - \frac{2}{3}x^2 + C$

3) $\int x(x^4 - 3) dx$ هو:

a) $\frac{1}{5}x^5 - 3x + C$ c) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + C$ d) $\frac{1}{6}x^6 - 3x + C$

وزارة فندقي تكميلي 2023

16- ناتج: $\int \frac{1}{x^2} dx$ هو:

a) $\frac{1}{x} + c$ c) $\frac{2}{x^3} + c$

b) $\frac{-2}{x^3} + c$ d) $-\frac{1}{x} + c$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int 4(3x + 4)(2x - 1) \, dx$

تمارين إضافية

1. $\int \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\, dx$
2. $\int x^{-2}\, dx$
3. $\int -5\, dx$
4. $\int 6x^5\, dx$
5. $\int 6x\, dx$
6. $\int (4x+2)\, dx$
7. $\int 2x^4\, dx$
8. $\int \frac{5}{x^3}\, dx$
9. $\int \sqrt{x}\, dx$
10. $\int 2x^{\frac{3}{2}}\, dx$
11. $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\, dx$
12. $\int (6x^2-4x)\, dx$
13. $\int (2x^4-5x+10)\, dx$
14. $\int x^2 (x-8)\, dx$
15. $\int \left(x^2-\frac{3}{2}\sqrt{x}+x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$

الدرس 2 الشرط الأوَّلي

Initial Condition

1) قاعدة: التكامل عملية عكسية للتفاضل ، أي أن التكامل يُلغي المشتقة الأولى و المشتقة الأولى تُلغي التكامل.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \qquad \boxed{\int f'(x)\,dx = f(x)}$$

ملاحظة: نستخدم القاعدة حسب الحاجة أو حسب المطلوب في السؤال :

فإذا كان المُعطى هو المشتقة الأولى فإنا نكامل الطرفين لإلغاء المشتقة والحصول على قاعدة الاقتران ثم نجد قيمة الثابت c عن طريق الاستفادة من الشرط الأولي: $f(x_1) = y_1$ أو يمر في (x_1 , y_1)

وإذا كان المعطى هو تكامل المشتقة الأولى أو تكامل قاعدة الاقتران فإنا نشتق الطرفين لإلغاء التكامل والحصول على ما بداخله

مثال1) إذا كانت $f'(x) = 2x + 6$ ، فجد قاعدة الاقتران f(x) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (2 , 5)

الحل :

$$1)\ f'(x) = 2x + 6 \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (2x+6)dx$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + c$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4 + 12 + c = 5 \Rightarrow c = -11$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 6x - 11$$

مثال2) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران f(x) هو $f'(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ ، فجد قاعدة الاقتران علماً بأن f(8)= 7

$$2)\ f'(x) = \sqrt[3]{x} - 1 \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - 1)dx$$

ميل المماس = المشتقة الأولى

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x + c$$

$$f(8) = 7 \Rightarrow \frac{3}{4}(\sqrt[3]{8})^4 - 8 + c = 7 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 6x - 11$$

$$f'(x) = f(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - x + 3$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

أتحقَّق من فهمي 16 أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$

أتحقَّق من فهمي 17 التكلفة الحدِّية: يُمثِّـل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشـركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2200.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = x - 3; (2, 9)$

2) $f'(x) = x^2 - 4; (0, 7)$

3) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2; (1, 9)$

4) $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2; (4, 11)$

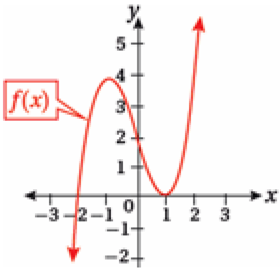
5) $f'(x) = (x + 2)^2; (1, 7)$

6) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - x; (4, 0)$

7) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 5)$.

8) إذا كان ميـل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هـو: $f'(x) = \frac{x^2 + 10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5, 2)$.

9) يُبيِّن الشـكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



بالـون: عند نفخ بالون كروي الشـكل يصبح نصـف قُطْره y سـنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t^{-\frac{2}{3}}, t > 0$، وكان نصـف قُطْـر البالون بعـد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10) قاعدة العلاقة y بدلالة t.

11) نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

12 أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيّنًا من الأشجار، تبيّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة.

إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

مهارات التفكير العليا

16 تبرير: تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

أتحقق من فهمي صفحة 16

$f(x) = 2x^3 + 5x + C$

$9 = 2(1)^3 + 5(1) + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 5x + 2$

أتحقق من فهمي صفحة 17

$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)dx \Rightarrow C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$

$2200 = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K \Rightarrow K = 2000 \Rightarrow C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$

1

$f(x) = \int (x - 3)dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

$9 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 3(2) + C \Rightarrow C = 13$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$

2

$f(x) = \int (x^2 - 4)dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$

$7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C \Rightarrow C = 7$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$

3

$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$

$= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$

$9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$

$C = 7$

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

4

$f(x) = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + C$

$11 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(4)^3 + C \Rightarrow C = 11$

$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + 11 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{12}x^3 + 11$

5

$f(x) = \int (x + 2)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4)dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$

$7 = \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{2}{3}$

6

$f(x) = \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} - x\right) dx = 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + C$

$= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$

$0 = 6\sqrt{4} - \frac{1}{2}(4)^2 + C \Rightarrow C = -4$

$f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 4$

7

$y = \int (0.4x + 3)dx = 0.2x^2 + 3x + C$

$5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + C \Rightarrow C = 5 \Rightarrow y = 0.2x^2 + 3x + 5$

8

$$f(x)=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)dx=\int(1+10x^{-2})\,dx=x-10x^{-1}+C=x-\frac{10}{x}+C$$

$$2=5-\frac{10}{5}+C \Rightarrow C=-1 \Rightarrow f(x)=x-\frac{10}{x}-1$$

9

$$f(x)=\int(3x^2-3)dx = x^3-3x+C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,2)$ إذن: $f(0)=2$

$$2=(0)^3-3(0)+C \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$$

10

$$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}dt = 12t^{\frac{1}{3}}+C=12\sqrt[3]{t}+C$$

$$30=12\sqrt[3]{8}+C \qquad C=6 \qquad y=12\sqrt[3]{t}+6$$

11

$$y=12\sqrt[3]{27}+6=42$$

إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: $42\ cm$

12

$$h(t)=\int\left(0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}\right)dt=\int\left(0.2t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=0.12t^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

ارتفاع الشجرة عند زراعتها $2\ ft$، $h(0)=2$

$$2=0.12\sqrt[3]{(0)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(0)^3}+C \Rightarrow C=2$$

$$h(t)=0.12\sqrt[3]{t^5}+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+2$$

16

$$f(x)=\int(ax+b)dx=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

ميل المماس عند النقطة $(-2,8)$ هو 7 معناها: $f(-2)=8$ وكذلك $f'(-2)=7$

منحنى الاقتران يقطع y عند النقطة $(0,18)$ معناه: $f(0)=18$

$$f'(-2)=7 \Rightarrow a(-2)+b=7$$

$$\Rightarrow -2a+b=7 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$f(-2)=8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2+b(-2)+C=8$$

$$\Rightarrow 2a-2b+C=8 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$f(0)=18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2+b(0)+C=18 \Rightarrow C=18$$

نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على: $2a-2b+18=8 \Rightarrow 2a-2b=-10$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على: $\Rightarrow a-b=-5 \ldots\ldots\ldots(4)$

$-a=2 \Rightarrow a=-2$

نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b=3$

قاعدة الاقتران هي: $\boxed{f(x)=-x^2+3x+18}$

17

$$f(x)=\int\left(4-\frac{100}{x^2}\right)dx=\int(4-100x^{-2})dx=4x+100x^{-1}+C=4x+\frac{100}{x}+C$$

للاقتران f نقطة حرجة عن $(a,10)$ إذن: $f'(a)=0$ وكذلك $f(a)=10$

$$f'(a)=0 \Rightarrow 4-\frac{100}{a^2}=0 \Rightarrow 4=\frac{100}{a^2} \Rightarrow 4a^2=100 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=\pm5$$

لكن $a>0$ إذن $a=5$، ومنه $f(5)=10$

$$10=4(5)+\frac{100}{5}+C \Rightarrow C=-30$$

وتكون قاعدة الاقتران: $f(x)=4x+\frac{100}{x}-30$

واجب

1. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x)=\sqrt{x}$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(9,25)$.
2. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران y هو $\frac{2}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران y، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(2,4)$.
3. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x)=\frac{x^2+10}{x^2}$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(5,2)$.

2) الشرط الأوّلي: الحركة في مسار مستقيم

اقتـران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السـرعة المتجهة ؛ $s'(t) = v(t)$

واقتران السرعة المتجهة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع ؛ $v'(t) = a(t)$

باختصار : تكامل (التسارع) = السرعة ... تكامل (السرعة) = الموقع (المسافة)

مثال1) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 4t + 3$ ، إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو(8 m) ، فجد موقع الجُسَيْم بعد 4 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

$$1)\ s(t) = \int v(t)dt = \int (4t+3)dt = 2t^2 + 3t + c \quad , \quad s(0) = 8 \Rightarrow c = 8$$

$$\Rightarrow s(t) = 2t^2 + 3t + 8 \Rightarrow s(4) = 32 + 12 + 8 = 52$$

مثال2) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 12t$ ، إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو (3 m) ، وكانت سرعته المتجهة هي (4 m / s) بعد ثانيتين من بَدْء حركته، فجد موقع الجُسَيْم بعد ثانية واحدة من بَدْء الحركة.

$$2)\ v(t) = \int a(t)dt = \int (12t)dt = 6t^2 + c_1$$

$$v(2) = 20 \Rightarrow 20 = 24 + c_1 \Rightarrow c_1 = -4 \quad \Rightarrow v(t) = 6t^2 - 4$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (6t^2 - 4)dt = 2t^3 - 4t + c_2$$

$$s(0) = 3 \Rightarrow c_2 = 3 \quad \Rightarrow s(t) = 2t^3 - 4t + 3 \Rightarrow s(1) = 2 - 4 + 3 = 1$$

أتحقّق من فهمي 18

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتحقّق من فهمي 20

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

13. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

14. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

15. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 2 m/s، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

أتحقق من فهمي صفحة 18

$s(t) = \int v(t)dt = \int (36t - 3t^2)dt = 18t^2 - t^3 + C$

$0 = 18(0)^2 - (0)^3 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 18t^2 - t^3 \Rightarrow s(3) = 18(3)^2 - (3)^3 = 135$

إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $135\ m$

أتحقق من فهمي صفحة 20

$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t - 4)dt = 2t^2 - 4t + C_1$

$v(0) = 5 \Rightarrow 5 = 2(0)^2 - 4(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 5 \Rightarrow v(t) = 2t^2 - 4t + 5$

$s(t) = \int v(t)dt = \int (2t^2 - 4t + 5)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$

بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$

$\Leftarrow C_2 = 0$

$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \Rightarrow s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3) = 15$

13

$s(t) = \int v(t)dt = \int (2t + 3)dt = t^2 + 3t + C$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$

$s(t) = t^2 + 3t + C$

$0 = (0)^2 + 3(0) + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 3t \Rightarrow s(3) = (3)^2 + 3(3) = 18$

14

بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$ ، فإن $v(1) = 1$

$v(t) = \int a(t)dt = \int t^2 dt = \frac{1}{2}t^3 + C_1$

$1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$

$v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$ $\quad s(t) = \int v(t)dt = \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$ ،

$s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$

$3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 3$

$s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3 \Rightarrow s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3 = 5$

15

بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $2\ m/s$ فإن $v(0) = 2$

$v(t) = \int a(t)dt = \int (9 - 2t)dt = 9t - t^2 + C_1$

$v(t) = 9t - t^2 + C_1$

$2 = 9(0) - (0)^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow v(t) = 9t - t^2 + 2$

$s(t) = \int v(t)dt = \int (9t - t^2 + 2)dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$

بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$

$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2 \qquad s(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t \Rightarrow s(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 + 2(2) = \frac{58}{3}$

واجب

1 يُمثّل الاقتران: $a(t) = 6t$ تسارع جسيم بدأ الحركة من نقطة تبعد 4 أمتار عن نقطة الأصل، حيث t الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة هي 1 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

2 بدأ جسيمٌ الحركةَ في خط مستقيم من نقطة الأصل، بسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/s، وبتسارع مقداره $(4t-4) \text{ m/s}^2$: أجد سرعة الجسيم وتسارعه عندما $t = 1$.

كتاب التمارين

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1 $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$

2 $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

3 $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

4 $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

5 $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$

6 $f'(x) = -\frac{10}{x^2}; (1, 15)$

7 إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

8 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

9 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$، ومَرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

10 **الإيراد الحدّي**: يُمثّل الاقتران: $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

إرشاد: يُمثّل الإيراد الحدّي مشتقة اقتران الإيراد.

11 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

12 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$، حيث t الزمن بالثواني، وa التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها 72 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

1 $f(x)=\int(3x-2)\,dx=\frac{3}{2}x^2-2x+C \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+C$

$f(-1)=2\Rightarrow\frac{3}{2}+2+C=2\Rightarrow C=-\frac{3}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$

2 $f(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$

$f(4)=5\Rightarrow\frac{16}{3}+4+C=5\Rightarrow C=-\frac{13}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-\frac{13}{3}$

3 $f(x)=\int -x(x+1)\,dx=\int(-x^2-x)\,dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C\Rightarrow f(-1)=5\Rightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=5\Rightarrow C=\frac{31}{6}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{31}{6}$

4 $f(x)=\int\left(x^3-\frac{2}{x^2}+2\right)dx=\int(x^3-2x^{-2}+2)\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{x}+2x+C$

$f(1)=3\Rightarrow\frac{1}{4}+2+2+C=3\Rightarrow C=-\frac{5}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{x}+2x-\frac{5}{4}$

5 $f(x)=\int(x+\sqrt{x})\,dx=\int\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

$f(1)=2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+C=2\Rightarrow C=\frac{5}{6}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{5}{6}$

6 $f(x)=\int-\frac{10}{x^2}\,dx=\int-10x^{-2}\,dx=10x^{-1}+C=\frac{10}{x}+C$

$\Rightarrow f(x)=\frac{10}{x}+C\Rightarrow f(1)=15\Rightarrow 10+C=15\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=\frac{10}{x}+5$

7 $f(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\Rightarrow f(9)=25\Rightarrow\frac{54}{3}+C=25\Rightarrow C=7\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+7$

8 $y=\int\frac{2}{x^2}\,dx=\int 2x^{-2}\,dx=-2x^{-1}+C=-\frac{2}{x}+C\Rightarrow y=-\frac{2}{x}+C$

$\Rightarrow 4=-1+C\Rightarrow C=5\quad\Rightarrow y=-\frac{2}{x}+5$

9 $y=\int(3x^2-12x+8)\,dx=x^3-6x^2+8x+C$

$0-0+0+C=0\Rightarrow C=0\Rightarrow y=x^3-6x^2+8x$

لإيجاد الإحداثيات لنقاط تقاطع المنحنى مع محور x نعوض $y=0$ في قاعدة العلاقة:

$0=x^3-6x^2+8x\Rightarrow x(x^2-6x+8)=0\Rightarrow x(x-2)(x-4)=0$

$\Rightarrow x=0\,,x=2,x=4$

10	$R(x) = \int (x^2 - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C \Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ $R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$
11	$s(t) = \int (3t^2 - 12t + 11)\,dt = t^3 - 6t^2 + 11t + C$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + C$ $s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$ $\Rightarrow s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) = 8 - 24 + 22 = 6\text{ m}$
12	$v(t) = \int (6t - 30)\,dt = 3t^2 - 30t + C \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + C$ $v(0) = 72 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 72 \Rightarrow C = 72 \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + 72$ $s(t) = \int (3t^2 - 30t + 72)\,dt = t^3 - 15t^2 + 72t + C$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + C$ $s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t$ $\Rightarrow s(3) = (3)^3 - 15(3)^2 + 72(3) = 27 - 135 + 216 = 108\text{ m}$

وزارة أدبي 2023

4) إذا كان $f'(x) = 12x^2 + 4x$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1, 9)$ هي:

a) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 + 5$ c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$

b) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 - 5$ d) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3$

a) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 6t^2 - 4$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 4m ، فجد موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة. (12 علامة)

وزارة فندقي 2023

22- إذا كان: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ، وكان منحنى الاقتران $f(x)$ يمر بالنقطة $(1, 4)$، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ هي:

a) $x^3 - 2x^2 + 5$ b) $x^3 - 2x^2 + 3$ c) $x^3 - 2x^2 - 5$ d) $x^3 + 2x^2 + 3$

وزارة أدبي 2023 تكميلي

4) إذا كان $f'(x) = 3x^2 - 4$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1,0)$ هي:

a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$ c) $f(x) = x^3 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 4x - 3$ d) $f(x) = x^3 - 4x - 1$

8) يتغير عدد السكان في إحدى القرى شهريًا بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران $P'(t) = 2t^{\frac{1}{2}}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن، $P(t)$ عدد السكان. مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الأشهر التسعة القادمة يساوي:

a) 6 b) 3 c) 36 d) 18

a) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x) = 4\sqrt[3]{x} - 2x$ ، فما قاعدة الاقتران $f(x)$ علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(1,12)$ ؟ (8 علامات)

b) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، ويُعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 2t + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 5m ، وكانت سرعته المتجهة هي 4m/s بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، فجد موقع الجُسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة. (11 علامة)

وزارة فندقي 2023 تكميلي

22- إذا كان الاقتران: $C'(x) = 6x^2 - 20x + 20$ يُمثل التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات من الألعاب الإلكترونية، حيث x عدد الألعاب الإلكترونية المُنتجة، وكانت تكلفة إنتاج اللعبة الإلكترونية الواحدة JD35 ، فإنّ اقتران التكلفة $C(x)$ لإنتاج x لعبة إلكترونية هو:

a) $C(x) = 6x^3 - 20x^2 + 20x + 23$ c) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x + 23$

b) $C(x) = 6x^3 - 20x^2 + 20x - 23$ d) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x - 23$

الدرس 3 التكامل المحدود
Definite Integral

1) إيجاد قيمة تكامل محدود :

التكامل المحدود إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلاً على الفترة $[a, b]$، وكان $F(x)$ يُمثّل أيّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنّ: $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$1)\int_{-1}^{2} 6x^2\ dx = \frac{6x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 2(2)^3 - 2(-1)^3 = 16 - -2 = 18$$

$$2)\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\ dx = \int_{-1}^{8} x^{\frac{1}{3}}\ dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3(\sqrt[3]{8})^4}{4} - \frac{3(\sqrt[3]{-1})^4}{4} = \frac{45}{4}$$

أتحقّق من فهمي 23 أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^4 (8x - \sqrt{x})\ dx$ b) $\int_{-1}^{2} (1-x)(1+3x)\ dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_{-1}^{3} 3x^2\ dx$
2. $\int_{-3}^{-2} 6\ dx$
3. $\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3)\ dx$
4. $\int_1^8 8\sqrt[3]{x}\ dx$
5. $\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$
6. $\int_{-2}^{3} (-x^2 + 4x - 5)\ dx$
7. $\int_1^3 (x-2)(x+2)\ dx$
8. $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\ dx$
9. $\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\ dx$
10. $\int_1^4 x^3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$
11. $\int_1^8 (x^{1/3} - x^{-1/5})\ dx$
12. $\int_1^9 \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 dx$

15. $\int_2^3 \frac{x^2 - 1}{x + 1}\ dx$

28. **تبرير:** أُثبت أنّ: $\int_0^1 x^n (1-x)\ dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$، حيث $n > 0$، مُبرّرًا إجابتي.

واجب

1. $\int_{-1}^{3} 3x^2\ dx$
2. $\int_1^5 10x^{-2}\ dx$
3. $\int_1^3 (x-2)(x+2)\ dx$
4. $\int_2^5 3x(x+2)\ dx$
5. $\int_1^2 (2x-4)\ dx$
6. $\int_1^9 4\ dx$

a	$\int_1^4 (8x-\sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big\vert_1^4$ $= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big\vert_1^4 = \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right) = \frac{166}{3}$	أتحقق من فهمي صفحة 23
b	$\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)dx = \int_{-1}^2 (1+3x-x-3x^2)dx = \int_{-1}^2 (1+2x-3x^2)dx$ $= (x + x^2 - x^3)\vert_{-1}^2 = (2+2^2-2^3) - (-1+(-1)^2-(-1)^3) = -3$	أتحقق من فهمي صفحة 23

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أتدرب وأحل المسائل صفحة 29

1	$\int_{-1}^3 3x^2dx = x^3\vert_{-1}^3 = (3)^3 - (-1)^3 = 28$
2	$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x\vert_{-3}^{-2} = 6(-2) - 6(-3) = 6$
3	$\int_0^2 (3x^2+4x+3)dx = (x^3+2x^2+3x)\vert_0^2 = 22$

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx = 6x^{\frac{4}{3}}\Big\vert_1^8 = 6\sqrt[3]{x^4}\Big\vert_1^8 = 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{0^4} = 96$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_1^9 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right) = \frac{4}{3}$

6	$\int_{-2}^3 (-x^2+4x-5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\vert_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right) = -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2-4)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\vert_1^3 = \frac{2}{3}$
8	$\int_{-3}^3 (9-x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^3 = \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right) = 36$

9

$$\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = \frac{5}{2}$$

10

$$\int_1^4 x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^4 x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx = \left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right) = \frac{1211}{9}$$

11

$$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{5}}\right)dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right)\Big|_1^8 = \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\right)\Big|_1^8$$

$$= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}\right)-\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4}\right) = 10+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}$$

12

$$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2\,dx = \int_1^9 (4+4\sqrt{x}+x)\,dx = \int_1^9 \left(4+4x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx$$

$$= \left(4x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^9 = \left(4(9)+\frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(9)^2\right)-\left(4(1)+\frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1)^2\right) = \frac{424}{3}$$

15

$$\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx = \int_2^3 (x-1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_2^3 = \frac{3}{2}$$

28

$$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^n-x^{n+1})\,dx = \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1}-\frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1}-\frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-(0) = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

2) إيجاد قيمة مجهولة في تكامل محدود :

$1)\int_{1}^{k} 3x^2\ dx = 7 \Rightarrow k = ?$

$\left.\frac{3x^3}{3}\right|_1^k = 7 \Rightarrow k^3 - 1 = 7 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

$2)\int_{1}^{3} k\ x\ dx = 4 \Rightarrow k = ?$

$\left.k\,\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = 4 \Rightarrow 9k - k = 8 \Rightarrow 8k = 8 \Rightarrow k = 1$

$3)\int_{k}^{2} dx = 6 \Rightarrow k = ? \Rightarrow \quad x\Big|_k^2 = 6 \Rightarrow 2 - k = 6 \Rightarrow -k = 4 \Rightarrow k = -4$

أتحقق من فهمي **24** إذا كان: $\int_0^k 6x^2\ dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

أتدرّب وأحُلّ المسائل **24** إذا كان: $\int_1^m (6x - 10)\ dx = 4$، فأجد قيمة الثابت m.

29 تحدٍّ: إذا كان: $\int_1^5 (2ax + 7)\ dx = 4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

واجب

$1)\int_{-1}^{3} k\ x\ dx = 2 \Rightarrow k = ?$ ...$k = 2$ ::::::::: $2)\int_{-1}^{2} k\ x^2\ dx = 6 \Rightarrow k = ?$ ...$k = 2$

$3)\int_{k}^{-2} 4\ dx = 8 \Rightarrow k = ?$ ...$k = -4$ ::::::::: $4)\int_{0}^{k} 6x\ dx = 12 \Rightarrow k = ?$ ...$k = \pm 2$

$5)\int_{1}^{k} (2x - 3)\ dx = 6k + 12 \Rightarrow k = ?$ ...$k = -5\ ,\ 2$

أتحقق من فهمي صفحة 24

$\int_0^k 6x^2 dx = 2 \Rightarrow 2x^3\Big|_0^k = 2 \Rightarrow 2k^3 - 2(0)^3 = 2 \Rightarrow 2k^3 = 2 \Rightarrow k = 1$

24

$\int_1^m (6x - 10)dx = 4 \Rightarrow (3x^2 - 10x)\Big|_1^m = 4$

$(3m^2 - 10m) - \left(3(1)^2 - 10(1)\right) = 4 \Rightarrow 3m^2 - 10m + 7 = 4$

$3m^2 - 10m + 3 = 0 \Rightarrow (3m - 1)(m - 3) = 0$

$3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \quad , \quad m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

29

$\int_1^5 (2ax + 7)\ dx = 4a^2 \Rightarrow (ax^2 + 7x)\Big|_1^5 = 4a^2$

$\left(a(5)^2 + 7(5)\right) - \left(a(1)^2 + 7(1)\right) = 4a^2 \Rightarrow 25a + 35 - a - 7 = 4a^2$

$24a + 28 = 4a^2 \Rightarrow 4a^2 - 24a - 28 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = (a - 7)(a + 1) = 0$

$a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7 \quad , a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

3) خصائص التكامل المحدود :

خصائص التكامل المحدود: $f(x)$ و $g(x)$ متصلان على $[a, b]$، k ثابت

تكامل الاقتران المضروب في ثابت	1) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
تكامل المجموع أو الفرق	2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
التكامل عند نقطة	3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
التبديل بين حدّي التكامل	4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
تجزئة التكامل	5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$$1)\int_1^3 f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_3^1 f(x)dx = -4$$

$$2)\int_3^5 2f(x)dx = 12 \Rightarrow \int_5^3 f(x)dx = \frac{-12}{2} = -6$$

$$3)\int_4^7 \frac{2}{3}f(x)dx = 5 \Rightarrow \int_4^7 f(x)dx = \frac{3}{2}\times 5 = \frac{15}{2}$$

$$4)\int_2^a f(x)dx = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$5)\int_1^5 f(x)dx = 7, \int_3^5 f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = ?$$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \int_1 + \int^3 = \int_1^5 + \int_5^3 = 7 + -4 = 3$$

أتحقّق من فهمي 26

إذا كان: $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 5, \int_{4}^{1} f(x)\ dx = 2, \int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 7$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\ dx$ b) $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$ c) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\ dx$

إذا كان: $\int_1^2 f(x)\ dx = -4, \int_1^5 f(x)\ dx = 6, \int_1^5 g(x)\ dx = 8$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

18) $\int_2^2 g(x)\,dx$

19) $\int_5^1 (g(x) - 2)\,dx$

20) $\int_1^2 (3f(x) + x)\,dx$

21) $\int_2^5 f(x)\,dx$

22) $\int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

23) $\int_1^5 \big(4f(x) + g(x)\big)\,dx$

واجب

إذا كان: $\int_1^2 f(x)\, dx = -4$ ، و $\int_1^5 f(x)\, dx = 6$ ، و $\int_1^5 g(x)\, dx = 8$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $\int_2^2 g(x)\, dx$ 2) $\int_5^1 g(x)\, dx$ 3) $\int_1^2 3f(x)\, dx$

4) $\int_2^5 f(x)\, dx$ 5) $\int_1^5 (f(x)-g(x))\, dx$ 6) $\int_1^5 (4f(x)+g(x))\, dx$

أتحقق من فهمي صفحة 26

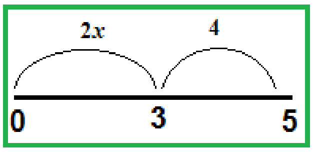
a	$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} 3h(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx = 5+3(7) = 26$
b	$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{4}^{1} f(x)dx = 5-2 = 3$
c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx = -4\int_{-1}^{1} h(x)dx = -4(7) = -28$

18	$\int_2^2 g(x)dx = 0$
19	$\int_5^1 (g(x)-2)dx = \int_5^1 g(x)dx - \int_5^1 2dx = (-8) - ((2x)\|_5^1)$ $= (-8) - ((2(1)) - (2(5))) = 0$
20	$\int_1^2 (3f(x)+x)dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 xdx = 3\int_1^2 f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^2$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) = -\frac{21}{2}$
21	$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -(-4)+6 = 10$
22	$\int_1^5 (f(x)-g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx = 6-8 = -2$
23	$\int_1^5 (4f(x)+g(x))dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx = 4(6)+8 = 32$

4) تكاملات الاقترانات المُتشعّبة

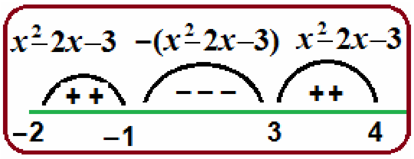
عند إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعّبة إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ نُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم نجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

1) $\int_0^5 f(x)dx$ فجد , $f(x)=\begin{cases} 4 , x \geq 3 \\ 2x , x \leq 3 \end{cases}$ إذا كان



$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 2x\,dx + \int_3^5 4\,dx = x^2\Big]_0^3 + 4x\Big]_3^5 = 9 - 0 + 20 - 12 = 17$$

2) $\int_{-2}^4 f(x)dx$ فجد , $f(x)=\left|x^2 - 2x - 3\right|$ إذا كان



$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \;,\; x = -1$$

$$\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,dx + \int_{-1}^{3} (3 + 2x - x^2)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 2x - 3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big]_{-2}^{-1} + \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big]_{3}^{4} = \frac{46}{3}$$

أتحقّق من فهمي 27

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1 + x & , x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |x - 3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

13) $\int_{-1}^{4} |3x - 6|\,dx$

14) $\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$

16) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x \leq 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$.

17) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & , x < 0 \\ x + 5 & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

واجب

1) $\int_{-1}^3 f(x)dx$ فجد , $f(x)=\begin{cases} 4x \;, x \geq 2 \\ 2x+1, x \leq 2 \end{cases}$ إذا كان

(12+10=28 : الجواب)

2) $\int_0^4 |2x - 3|\,dx = \ldots \frac{17}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة 27

a بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(1+x)dx + \int_{1}^{2} 2x\,dx$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1} + x^2\Big|_{1}^{2} = \left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right) + \left(2^2-1^2\right) = \frac{9}{2}$$

b أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(3-x)dx + \int_{3}^{4}(x-3)dx = \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{3}^{4}$$

$$= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right) = \frac{17}{2}$$

13 $\int_{-1}^{4} |3x-6|dx$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|3x-6| = \begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x \ge 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2 فإنني أجزئ التكامل عنده

$$\int_{-1}^{4} |3x-6|dx = \int_{-1}^{2}(6-3x)dx + \int_{2}^{4}(3x-6)dx = \left(6x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \left(6(2)-\frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(6(-1)-\frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{3}{2}(4)^2-6(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(2)^2-6(2)\right) = \frac{39}{2}$$

14 $\int_{0}^{3} |x-2|dx$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x \ge 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{0}^{3} |x-2|dx = \int_{0}^{2}(2-x)dx + \int_{2}^{3}(x-2)dx = \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left(2(2)-\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(2(0)-\frac{1}{2}(0)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(3)^2-2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2-2(2)\right) = \frac{5}{2}$$

16

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = \int_{0}^{3}(2x+1)dx + \int_{3}^{4}(10-x)dx$$

$$= \left(x^2+x\right)\Big|_{0}^{3} + \left(10x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{3}^{4} = \frac{37}{2}$$

17

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(-x^2+5)dx + \int_{0}^{2}(x+5)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{50}{3}$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

مدرسة البقعة الثانوية للبنين

5) التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمّية بالنسبة إلى كمّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة.

مُعدَّل تغيُّر $f(x)$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x هو $f'(x)$.

ولكنْ، يكون مُعدَّل التغيُّر $f'(x)$ معلومًا في بعض الأحيان، ويتعيَّن معرفة مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ ، الذي يُعبَّر عنه بالمقدار: $f(b) - f(a)$ ،

عندئذٍ يُمكِن استعمال التكامل المحدود لإيجاد مقدار التغيُّر على النحو الآتي:

مقدار التغيُّر إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$

مثال: يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدّي الشهري(بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًا، و$P(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًا بالدينار.

1) جد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

2) جد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز.

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\, dx$$

$$P(1100) - P(1000) = \int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)\, dx = (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2) - (165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

$$= 6000$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(1500) - f(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx = (165x - 0.05x^2)\Big|_{1400}^{1500}$$

$$= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2) = 2000$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

25 تغيُّر التكلفة: يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشـركات، حيـث x عدد القطع المُنتَجة، و$C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشـركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشـهر منذ الآن، و$N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كـم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

25

$$C'(x) = 6x + 1$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(20) - f(10) = \int_{10}^{20} (6x+1)dx = (3x^2 + x)\Big|_{10}^{20}$$

$$= (3(20)^2 + 20) - (3(10)^2 + 10) = 910$$

26

$$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$$

$$N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx = 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4$$

$$= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5} = 3584$$

كتاب التمارين

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^5 10x^{-2}\,dx$

2) $\int_0^2 (2x^3 - 4x + 5)\,dx$

3) $\int_1^4 \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

4) $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

5) $\int_0^5 (|x+3| - 5)\,dx$

6) $\int_0^6 x(6-x)\,dx$

7) $\int_1^2 (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\,dx$

8) $\int_0^7 |2x-1|\,dx$

9) $\int_{-3}^4 |6-2x|\,dx$

10) $\int_1^2 \frac{x^2 + x^3}{x}\,dx$

11) $\int_3^4 (6x^2 - 4x)\,dx$

12) $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\,dx$

إذا كان: $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5,\ \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4,\ \int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13) $\int_2^2 f(x)\,dx$

14) $\int_1^2 (f(x) - 5)\,dx$

15) $\int_{-3}^2 \left(-2f(x) + 5g(x)\right)dx$

16) $\int_2^{-3} \left(g(x) + 2x\right)dx$

17) $\int_2^{-3} \left(f(x) + g(x)\right)dx$

18) $\int_{-3}^2 \left(4f(x) - 3g(x)\right)dx$

19) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^6 f(x)\,dx$.

19) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^6 f(x)\,dx$.

20) **سكّان:** أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

21) إذا كان: $\int_2^3 (x^2 - a)\,dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

1	$\int_1^5 10x^{-2}dx = -10x^{-1}\Big\|_1^5 = -\frac{10}{x}\Big\|_1^5 = (-2)-(-10) = 8$
2	$\int_0^2 (2x^3-4x+5)dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 5x\right)\Big\|_0^2 = (8-8+10)-0 = 10$
3	$\int_1^4 \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{2x^2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big\|_1^4 = \left(\frac{256}{7}+\frac{128}{5}\right) - \left(\frac{2}{7}+\frac{4}{5}\right) = \frac{254}{7} + \frac{124}{5} = \frac{2138}{35}$
4	$\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int_3^6 \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right)dx = \int_3^6 (x^2-6+9x^{-2})dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - 9x^{-1}\right)\Big\|_3^6 = \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - \frac{9}{x}\right)\Big\|_3^6 = \left(72-36-\frac{3}{2}\right) - (9-18-3) = \frac{93}{2}$

5	$\|x+3\| = \begin{cases} -x-3, & x < -3 \\ x+3, & x \geq -3 \end{cases}$ لا أجزىء التكامل لأن 3- لا تقع بين حدي التكامل $0, 5$ ويكون $\|x+3\| = x+3$ وفق القاعدة الثانية $\int_0^5 (\|x+3\|-5)dx = \int_0^5 (x+3-5)dx = \int_0^5 (x-2)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\|_0^5 = \frac{5}{2}$
6	$\int_0^6 x(6-x)dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^6 = 108-72 = 36$
7	$\int_1^2 \left(6x - \frac{12}{x^4} + 3\right)dx = \int_1^2 (6x - 12x^{-4} + 3)dx = (3x^2 + 4x^{-3} + 3x)\Big\|_1^2 = \frac{17}{2}$
8	$\|2x-1\| = \begin{cases} -2x+1, & x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^7 (2x-1)dx$ $= (-x^2+x)\Big\|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2-x)\Big\|_{\frac{1}{2}}^7 = \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0) + (49-7) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{85}{2}$

9	$\lvert 6-2x\rvert = \begin{cases} 6-2x, & x<3 \\ 2x-6, & x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \quad = \int_{-3}^{3}(6-2x)dx + \int_{3}^{4}(2x-6)dx$ $= (6x-x^2)\Big\|_{-3}^{3} + (x^2-6x)\Big\|_{3}^{4} = (18-9)-(-18-9)+(16-24)-(9-18)=37$
10	$\int_{1}^{2}\frac{x^2+x^3}{x}dx = \int_{1}^{2}\left(\frac{x^2}{x}+\frac{x^3}{x}\right)dx$ $= \int_{1}^{2}(x+x^2)dx = \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{1}^{2} = \left(2+\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}+\frac{7}{3} = \frac{23}{6}$
11	$\int_{3}^{4}(6x^2-4x)dx = (2x^3-2x^2)\Big\|_{3}^{4} = (128-32)-(54-18) = 60$
12	$\int_{10}^{10}\frac{x+1}{x^2}dx = 0$
13	$\int_{2}^{2}f(x)dx = 0$
14	$\int_{1}^{2}(f(x)-5)dx = \int_{1}^{2}f(x)dx - \int_{1}^{2}5dx = \int_{1}^{-3}f(x)dx + \int_{-3}^{2}f(x)dx + \int_{1}^{2}-5dx$ $= -4+5+(-5x)\|_{1}^{2} = 1+(-10)-(-5) = -4$
15	$\int_{-3}^{2}(-2f(x)+5g(x))dx = -2\int_{-3}^{2}f(x)dx + 5\int_{-3}^{2}g(x)dx = -2(5)+5(-2) = -20$
16	$\int_{2}^{-3}(g(x)+2x)dx = \int_{2}^{-3}g(x)dx + \int_{2}^{-3}2xdx = -(-2)+(x^2)\Big\|_{2}^{-3} = 2+9-4 = 7$

17	$\int_{2}^{-3}(f(x)+g(x))dx = \int_{2}^{-3}f(x)dx + \int_{2}^{-3}g(x)dx = -5+2 = -3$
18	$\int_{-3}^{2}(4f(x)-3g(x))dx = 4\int_{-3}^{2}f(x)dx - 3\int_{-3}^{2}g(x)dx = 4(5)-3(-2) = 26$
19	$\int_{-3}^{6}f(x)dx = \int_{-3}^{2}f(x)dx + \int_{2}^{6}f(x)dx = \int_{-3}^{2}x^2dx + \int_{2}^{6}(8-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^{2} + \left(8x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{2}^{6} = \left(\frac{8}{3}\right)-(-9)+(48-18)-(16-2) = \frac{83}{3}$
20	$P(t) = \int_{0}^{8}\left(5+3t^{\frac{2}{3}}\right)dt = \left(5t+\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)\Big\|_{0}^{8} = \left(40+\frac{288}{5}\right)-(0) = \frac{488}{5}$
21	$\int_{2}^{3}(x^2-a)dx = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3-ax\right)\Big\|_{2}^{3} = 5 \Rightarrow (9-3a)-\left(\frac{8}{3}-2a\right) = 5 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

وزارة أدبي 2023

* إذا كان $\int_{-3}^{2} g(x)dx = 2$ ، $\int_{-3}^{2} f(x)dx = -5$ ، فأجب عن الفقرتين 5 وَ6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-3}^{2}(f(x) - 2g(x))\,dx$ تساوي: d) 9 c) -9 b) 1 a) -1

6) قيمة $\int_{2}^{-3}(f(x) + 4)dx$ تساوي: d) -15 c) 15 b) 25 a) -25

7) إذا كان $\int_{0}^{k} 6x^2dx = 16$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي: d) 4 c) -4 b) 2 a) -2

13) قيمة $\int_{0}^{1} 12(x-1)^5dx$ هي: d) -4 c) 4 b) -2 a) 2

b) إذا كان $f(x) = |x-5|$ ، فجد $\int_{0}^{6} f(x)dx$ (9 علامات)

b) يُمثل الاقتران $R'(x) = 200 - 0.2x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) لكل قطعة من منتج تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج شهريًا، و$R(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًّا من المنتج بالدينار. جد مقدار التغير في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 120 قطعة، علمًا بأن عدد القطع المبيعة الآن هو 100 قطعة. (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

* إذا كان $\int_{-1}^{2} f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = -1$, $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 5$ ، فأجب عن الفقرتين 5 و 6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-1}^{3}(2f(x) - g(x))dx$ تساوي: d) 4 c) 3 b) -6 a) -7

6) قيمة $\int_{2}^{3}(f(x) + 3)dx$ تساوي: d) 4 c) 3 b) 2 a) 0

7) إذا كان $\int_{k}^{2k-1} 2\,dx = 18$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي: b) -10 a) 10 d) -8 c) 8

b) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 10 & , \quad x < 3 \\ 2x + 11 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$ ، أوجد $\int_{0}^{4} f(x)dx$ (9 علامات)

وزارة فندقي 2023

16- قيمة: $\int_0^1 6\sqrt{x}\,dx$ هي:
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 4 d) 9

17- قيمة: $\int_0^1 (3x^2-2x)\,dx$ هي:
a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) 0

18- إذا كان: $\int_1^k 3\,dx = 24$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:
a) 8 b) 9 c) 6 d) 7

19- إذا كان: $\int_3^4 g(x)\,dx = -2$ ، فإنّ قيمة $\int_4^3 6\,g(x)\,dx$ هي:
a) -6 b) 2 c) -12 d) 12

23- إذا كان: $\int_{-1}^2 f'(x)\,dx = -6$ ، وكان $f(-1) = 3$ ، فإنّ قيمة $f(2)$ هي:
a) 3 b) -6
c) -3 d) 6

24- إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 5x^4 & , x < 1 \\ 5 & , x \geq 1 \end{cases}$ ، فإنّ قيمة $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ هي:
a) 0 c) 10
b) 2 d) 28

c) إذا كان: $\int_0^3 f(x)\,dx = -2$, $\int_0^7 f(x)\,dx = 6$, $\int_0^7 g(x)\,dx = 5$ فجد قيمة كل ممّا يأتي:(11علامة)

1) $\int_0^7 (f(x) - g(x))\,dx$ 2) $\int_0^3 (2f(x)+4)\,dx$ 3) $\int_3^7 f(x)\,dx$

وزارة فندقي 2023 تكميلي

17- قيمة: $\int_1^3 (8x+3)\,dx$ هي:
a) 11 b) 20 c) 23 d) 38

18- إذا كان: $\int_{-1}^5 k\,dx = -36$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:
a) 9 b) -9 c) -6 d) 6

19- إذا كان: $\int_b^a g(x)\,dx = -15$ ، فإنّ قيمة $\int_a^b \frac{g(x)}{3}\,dx$ هي:
a) -5 b) 5 c) 45 d) -45

23- إذا كان: $\int_{-2}^2 f'(x)\,dx = 7$ ، وكان $f(2) = -7$ ، فإنّ قيمة $f(-2)$ هي:
a) -14 b) 14
c) -7 d) 7

c) إذا كان: $\int_2^8 g(x)\,dx = 12$, $\int_2^8 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx = -4$ فجد قيمة كل ممّا يأتي:
(11 علامة)

1) $\int_2^8 (2f(x) - \frac{1}{4}g(x))\,dx$ 2) $\int_5^2 (2-f(x))\,dx$ 3) $\int_5^8 f(x)\,dx$

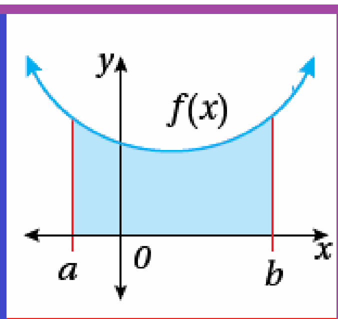
الدرس 4 المساحة Area

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f والمحور(x) والمستقيمين x= a ,x= b تساوي $\int_a^b f(x)\,dx$

وإذا كانت المنطقة تحت المحور(x) : تكون المساحة معكوس ناتج التكامل (نأخذ القيمة المطلقة للناتج)

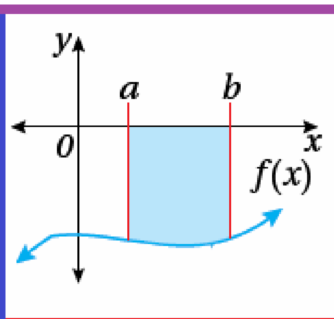
وإذا كان هناك جزء من المنطقة فوق المحور(x) وجزء تحته : نجزئ التكامل ونجد كل منطقة على حدة

حالات المساحة



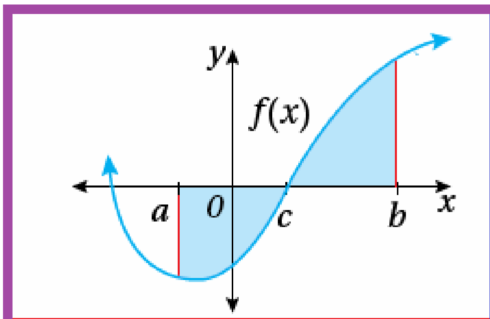
$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

المنطقة المطلوبة فوق (x)



$$A=-\int_a^b f(x)\,dx$$

المنطقة المطلوبة تحت (x)

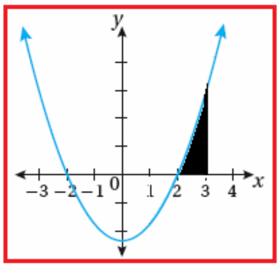


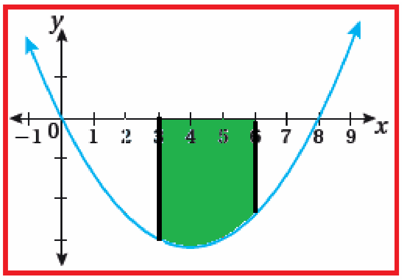
$$A=-\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

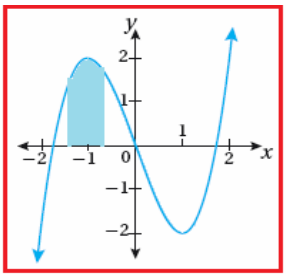
جزء من المنطقة فوق وآخر تحت (x)

الخطوة الأولى عند إيجاد المساحة هي : إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت أو أعطيت فترة) ،
وذلك بمُساواة قاعدة الاقتران بالصفر، ثم حَلُّ المعادلة الناتجة ، وهناك احتمالان :

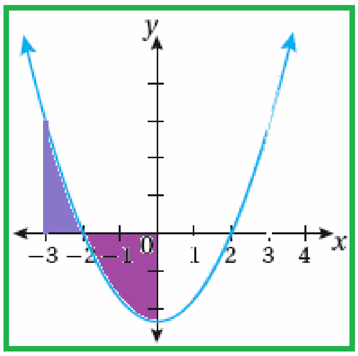
1) صفر (أو أصفار) الاقتران لا تنتمي إلى الفترة المطلوبة : في هذه الحالة لا نجزئ التكامل

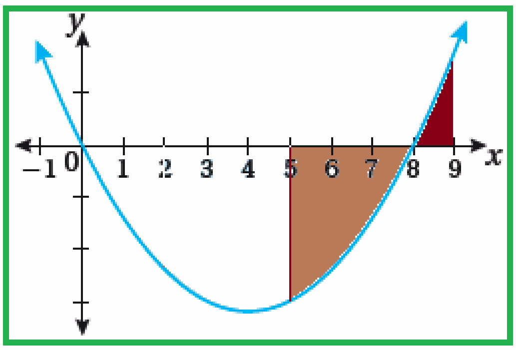


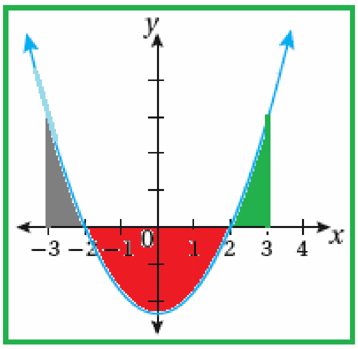




2) صفر أو أحد أصفار الاقتران ينتمي إلى الفترة المطلوبة : في هذه الحالة نجزئ التكامل ونجد كل تكامل على حدة







حالات المساحة / التكامل :

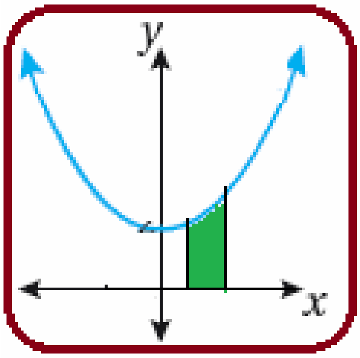
1) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= 3x^2 + 4$ ، والمحور(x) والمستقيمين : x = 1 , x = 2

$$1)\ f(x)=3x^2+4\neq 0$$

$$\Rightarrow A=\int_1^2 (3x^2+4)\,dx=(x^3+4x)\Big|_1^2$$

$$=(8+8)-(1+4)=11$$

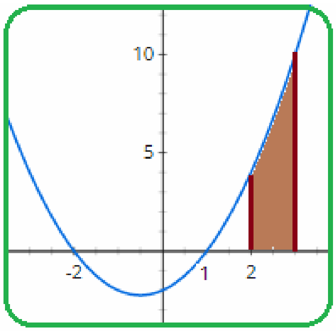


2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= x^2 + x - 2$ ، والمحور(x) والمستقيمين : x = 4 , x = 2

$$2)\ f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0\Rightarrow x=-2, x=1$$

$$\Rightarrow A=\int_2^4 (x^2+x-2)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_2^4$$

$$=\left(\frac{64}{3}+\frac{16}{2}-8\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)=\frac{62}{3}$$

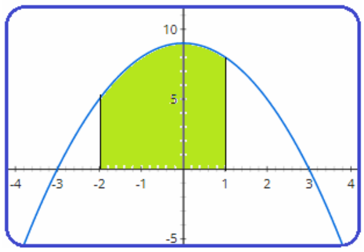


3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= 9 - x^2$ ، والمحور(x) والمستقيمين : x = 0 , x = – 2

$$3)\ f(x)=9-x^2=(x-3)(x+3)=0\Rightarrow x=-3, x=3$$

$$\Rightarrow A=\int_{-2}^{1} (9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\left(9-\frac{1}{3}\right)-\left(-18-\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{26}{3}\right)-\left(-\frac{62}{3}\right)=\frac{88}{3}$$



أتحقّق من فهمي 33 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x+3$، والمحور x، والمستقيمين: $x=-1$، و $x=3$.

أتحقق من فهمي صفحة 33

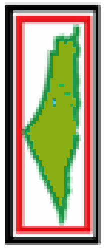
أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x)=x+3=0$

$\Rightarrow x=-3$ بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1,3]$، إذن نهملها.

نختار عدداً ضمن الفترة $[-1,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0)=0+3=3>0$

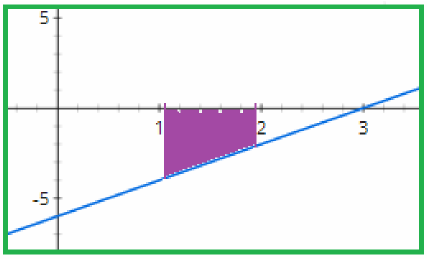
بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A=\int_{-1}^{3}(x+1)\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{-1}^{3}=\left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}(-1)^2-1\right)=8$$



2) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى f(x)= 2x – 6 ، والمحور(x) والمستقيمين : x = 1 , x = 2



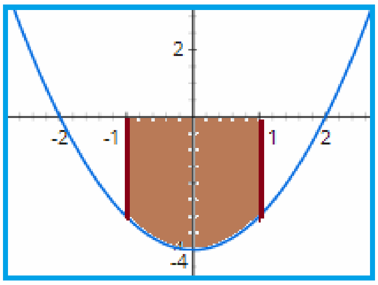
$$1)\ f(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow A = -\int_1^2 (2x-6)\,dx = -(x^2 - 6x)\Big|_1^2$$

$$= -((4-12)-(1-6)) = -(-3) = 3$$

2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى f(x)=)= x^2 – 4 ، والمحور(x) والمستقيمين: x = 1 , x = –1

$$2)\ f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

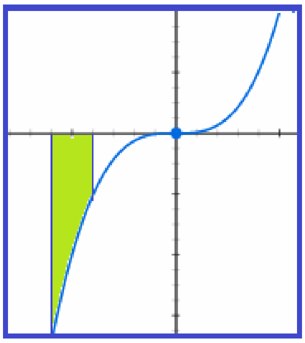


$$\Rightarrow A = -\int_{-1}^{1} (x^2-4)\,dx = -(\frac{1}{3}x^3 - 4x)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -((\frac{1}{3}-4)-(-\frac{1}{3}+4)) = -(\frac{-22}{3}) = \frac{22}{3}$$

3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى f(x)=)= $4x^3$ ، والمحور(x) والمستقيمين: x = –2 , x = –1

$$3)\ f(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$\Rightarrow A = -\int_{-2}^{-1} (4x^3)\,dx = -(x^4)\Big|_{-2}^{-1} = -(1-16) = 15$$

أتحقّق من فهمي 34 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

أتحقق من فهمي صفحة 34

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^2 - 4 = 0$

بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملهما $\Rightarrow x = 2\ ,\ x = -2$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x

$$A = -\int_{-1}^{1}(x^2-4)\,dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right) = \frac{22}{3}$$

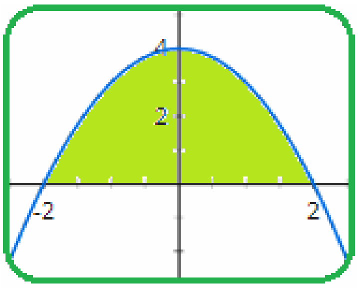
3) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= 4 - x^2$ والمحور(x)

$$1)\ f(x)=4-x^2=(2-x)(2+x)=0 \Rightarrow x=-2, x=2$$

$$\Rightarrow A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2}$$

$$=(8-\frac{8}{3})-(-8-\frac{-8}{3})=(\frac{16}{3})-(-\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

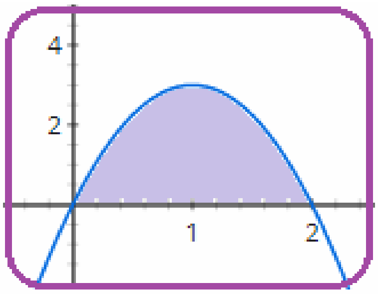


2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= 6x - 3x^2$ والمحور(x)

$$2)\ f(x)=6x-3x^2=3x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2$$

$$\Rightarrow A=\int_{0}^{2}(6x-3x^2)\,dx=(3x^2-x^3)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(12-8)-(0)=4$$

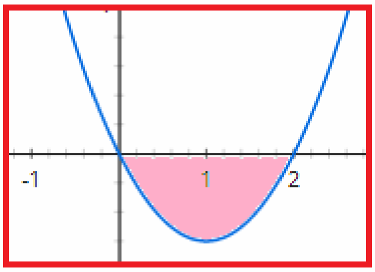


3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= x^2 - 2x$ والمحور(x)

$$3)\ f(x)=x^2-2x=x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$$

$$\Rightarrow A=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx=-(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_{0}^{2}$$

$$=-(\frac{8}{3}-4)-(0)=-(-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}$$



أتحقق من فهمي 38

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

أتحقق من فهمي صفحة 38 a

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x+4)(x+1)=0 \Rightarrow x=-4, x=-1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-4,-1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$ إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور

$$A = -\int_{-4}^{-1}(x^2+5x+4)\,dx = -\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_{-4}^{-1} = \frac{9}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 38 b

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^3 - 9x = 0$

$\Rightarrow x(x^2-9) = 0 \Rightarrow x(x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=-3, x=3$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

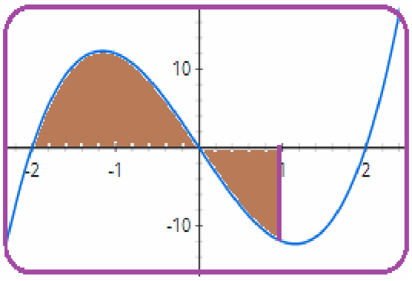
نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-1)= 8>0$ ⟸ فوق

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1)=-8<0$ ⟸ تحت

$$A=\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx-\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3}=\frac{81}{2}$$

4) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x ، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=4x^3-16x$ والمحور(x) والمستقيمين: $x=-2$, $x=1$



$$1)\ f(x)=4x^3-16x=4x(x^2-16)=4x(x+2)(x-2)=0$$

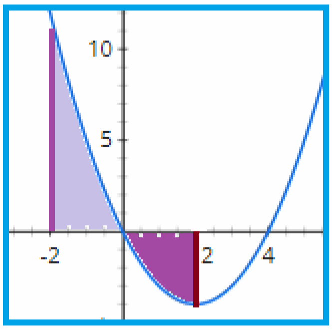
$$\Rightarrow x=0 \quad , \quad x=-2 \quad , \quad x=2$$

$$\Rightarrow A=\int_{-2}^{0}(4x^3-16x)\,dx+\left(-\int_{0}^{1}(4x^3-16x)\,dx\right)$$

$$=(x^4-8x^2)\Big|_{-2}^{0}-(x^4-8x^2)\Big|_{0}^{1}$$

$$=(0)-(16-32)-((1-8)-(0))=16+7=23$$

2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=x^2-4x$ والمحور(x) والمستقيمين: $x=2$, $x=-2$



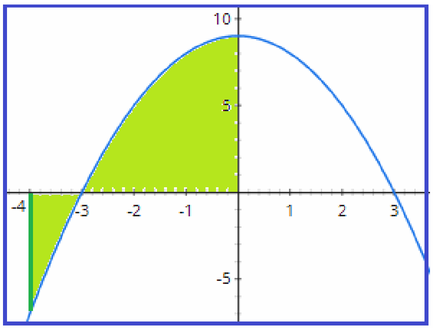
$$2)\ f(x)=x^2-4x=x(x-4)=0\Rightarrow x=0 \quad , \quad x=2$$

$$\Rightarrow A=\int_{-2}^{0}(x^2-4x)\,dx+\left(-\int_{0}^{2}(x^2-4x)\,dx\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(0)-\left(\frac{-8}{3}-8\right)-\left(\left(\frac{8}{3}-8\right)-(0)\right)=\frac{32}{3}+\frac{16}{3}=\frac{48}{3}=16$$

3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=9-x^2$ والمحور(x) والمستقيمين: $x=0$, $x=-4$



$$3)\ f(x)=9-x^2=(x+3)(x-4)=0\Rightarrow x=3 \quad , \quad x=-3$$

$$\Rightarrow A=-\int_{-4}^{-3}(9-x^2)\,dx+\int_{-3}^{0}(9-x^2)\,dx$$

$$=-\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-4}^{-3}+\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{0}$$

$$=-\left((-27+9)-\left(-36-\frac{-64}{3}\right)\right)+(0)-(-27+9)$$

$$=-\left(\left(18-\frac{64}{3}\right)\right)+18=\frac{10}{3}+18=\frac{64}{3}$$

أتحقّق من فهمي 36

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x^2+2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x=-1$، و $x=-3$.

أتحقق من فهمي صفحة 36

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x)=x^2+2x=0$

$$\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x=0\ ,x=-2$$

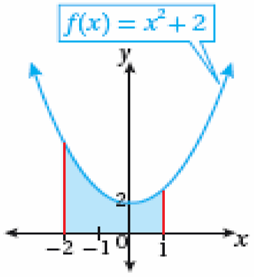
بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3,-1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين: $[-3,-2]$ و $[-2,-1]$

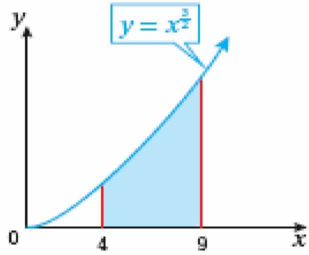
$f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}>0$ ⟹ فوق $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0$ ⟹ تحت

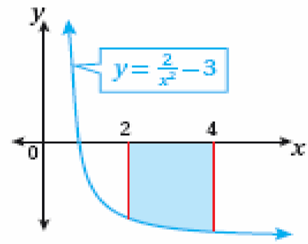
$$A=\int_{-3}^{-2}(x^2+2x)dx-\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{-3}^{-2}-\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{-2}^{-1}=2$$

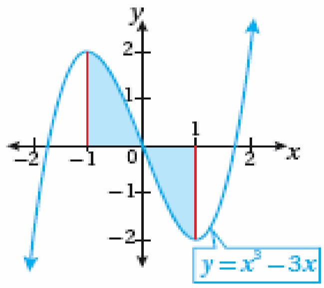
أتدرّب وأحُلّ المسائل

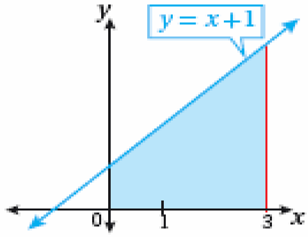
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

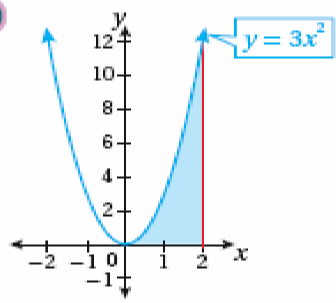
1


2


3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

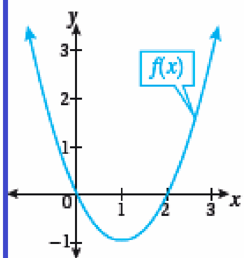
9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$.

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و $x = 5$.

12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = (x+1)(x-4)$، والمحور x.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$:

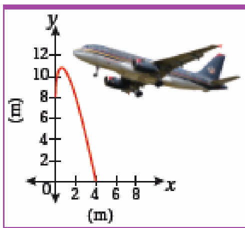


13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

14 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$.

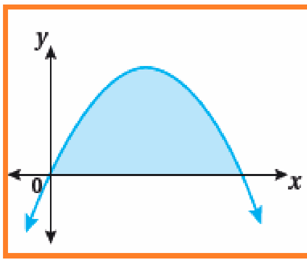
15 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.

16 يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \le x \le 4$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

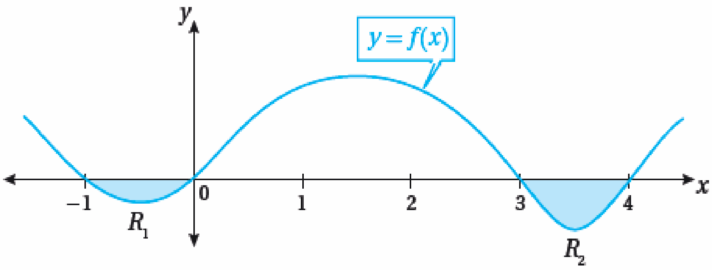


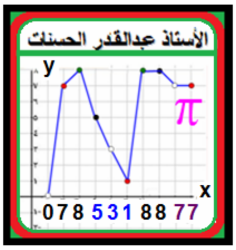
مهارات التفكير العليا

17 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.



18 تبرير: يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.

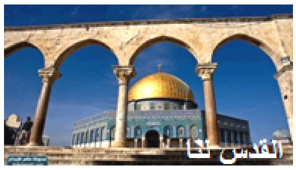




تمارين إضافية

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى f(x) والمحور(x) والمستقيمين المعطيين (إن وجدا):

1) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5,:::, x = 1, x = 2 :::$ (الجواب=١١)



2) $f(x) = x^2 - 4,:::, x = 1, x = -2 :::$ (الجواب=9)

3) $f(x) = 4x - 8,:::, x = 1, x = 3 :::$ (الجواب=10)

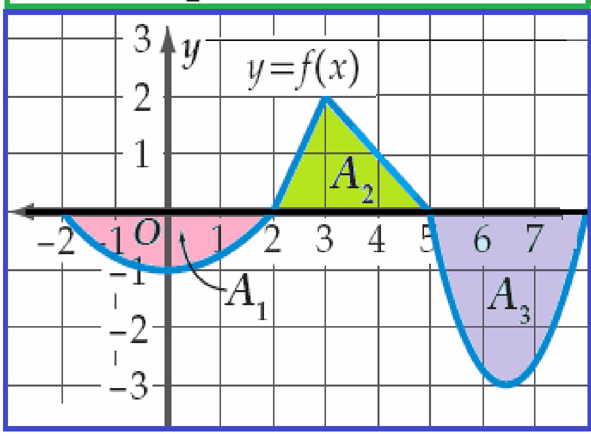
4) $f(x) = -2x,:::, x = 2, x = -2 :::$ (الجواب=8)

5) $f(x) = x^4 - x^2,:::$ (الجواب=$\frac{4}{15}$)

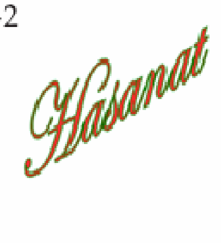
6) $f(x) = \frac{1}{x^2},:::, x = 1, x = 2 :::$ (الجواب=$\frac{1}{2}$)

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

$A_1 = A_2 = 3$ ، $A_3 = 5$



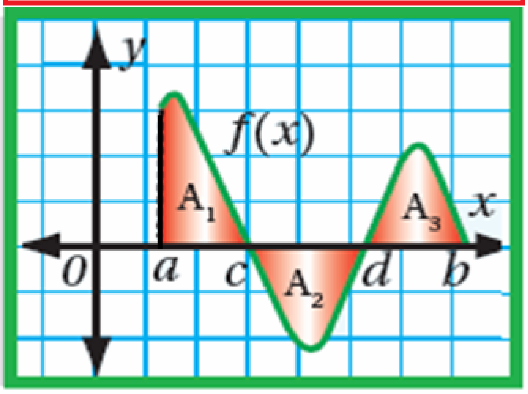
$$\int_{-2}^{8} f(x)dx = ?$$



الجواب:5

$$A_1 = 5, A_2 = 3, A_3 = 4 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = ?$$

6



1 $A=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right)-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)=9$

2 $A=\int_{4}^{9}x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{4}^{9}=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big|_{4}^{9}=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right)-\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)=\frac{422}{5}$

3 $A=-\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx=-\int_{2}^{4}(2x^{-2}-3)dx=\int_{2}^{4}(-2x^{-2}+3)dx$

$=(2x^{-1}+3x)\Big|_{2}^{4}=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big|_{2}^{4}=\left(\frac{2}{4}+3(4)\right)-\left(\frac{2}{2}+3(2)\right)=\frac{11}{2}$

4 $A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)dx$

$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}=(0)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(-\frac{1}{4}(1)^4+\frac{3}{2}(1)^2\right)-(0)=\frac{5}{2}$

5 $A=\int_{0}^{3}(x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{0}^{3}=\left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2+0\right)=\frac{15}{2}$

6 $A=\int_{0}^{2}3x^2dx=x^3\Big|_{0}^{3}-(3^3)=(0^3)=27$

7 $f(x)=3x^2-2x+2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x+2=0$

نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(3)(2)=-20$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1)=3(1)^2-2(1)=1>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$

$A=\int_{0}^{2}(3x^2-2x+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right)\Big|_{0}^{2}$

$=\left(\frac{1}{3}(2)^3-(2)^2+2(2)\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3-(0)^2+2(0)\right)=\frac{8}{3}$

8 $f(x)=9-x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

حدود التكامل $f(x)=0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow (3+x)(3-x)=0 \Rightarrow x=-3\,,x=3$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0)=9-(0)^2=9>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,3]$

$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3}=\left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)=36$

9 $f(x)=x^3+4x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0 \Rightarrow x^3+4x=0 \Rightarrow x(x^2+4)=0 \Rightarrow x=0$

مميز العبارة التربيعية (x^2+4) سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{17}{2}<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,0]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1)=(1)^3+4(1)=5>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$

$$A=-\int_{-1}^{0}(x^3+4x)dx+\int_{0}^{2}(x^3+4x)dx=\int_{-1}^{0}(-x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(x^3+4x)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{4}x^4+2x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{25}{4}$$

10 $f(x)=-7+2x-x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0 \Rightarrow -7+2x-x^2=0$ نحسب المميز: $\Delta=(2)^2-4(-1)(-7)=-24$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4

نختار عددًا ضمن الفترة $[1,4]$، وليكن 2 ونعوضه $f(1)=-7+2(1)-(1)^2=-6<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1,4]$

$$A=-\int_{1}^{4}(-7+2x-x^2)dx=\int_{1}^{4}(7-2x+x^2)dx=\left(7x-x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{1}^{4}=27$$

11 $f(x)=5-x=0 \Rightarrow x=5$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

نختار عددًا ضمن الفترة $[3,5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4)=5-(4)=1>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3,5]$

$$A=\int_{3}^{5}(5-x)dx=\left(5x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{3}^{5}=\left(\left(5(5)-\frac{1}{2}(5)^2\right)-\left(5(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)\right)=2$$

12 $f(x)=(x+1)(x-4)$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0 \Rightarrow (x+1)(x-4)=0 \Rightarrow x=-1, x=4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,4]$، وليكن 0 ونعوضه $f(0)=(0+1)(0-4)=-4<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,4]$

$$A=-\int_{-1}^{4}(x+1)(x-4)dx=-\int_{-1}^{4}(x^2+x-4x-4)dx$$

$$=-\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)dx=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$$

13 $f(x) = x^2 - 2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,2]$

$$A = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

14

$$A = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_2^3 = \left((9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right) = \frac{4}{3}$$

15

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-1}^0 = (0) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

16

$$A = \int_0^4 (8 + 8\sqrt{x} - 6x)dx = \int_0^4 \left(8 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x\right)dx = \left(8x + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x^2\right)\Big|_0^4$$

$$= \left(8x + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} - 3x^2\right)\Big|_0^4 = \left(8(4) + \frac{16}{3}\sqrt{4^3} - 3(4)^2\right) - (0) = \frac{80}{3}$$

17 $y = kx(4 - x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$y = 0 \Rightarrow kx(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ or \ x = 4$

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$

$$A = \int_0^4 (kx(4 - x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx = \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big|_0^4$$

$$= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right) = \frac{32}{3}k \Rightarrow \frac{32}{3}k = 32 \Rightarrow k = 3$$

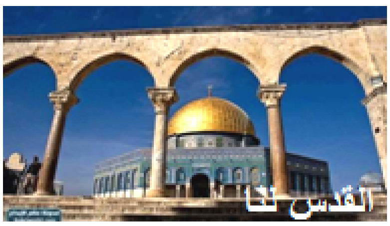
18

$$R_1 = 2 \Rightarrow -\int_{-1}^0 f(x)dx = 2 \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = -2$$

$$R_2 = 3 \Rightarrow -\int_3^4 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_3^4 f(x)dx = -3$$

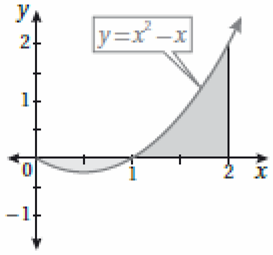
$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3) \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$$

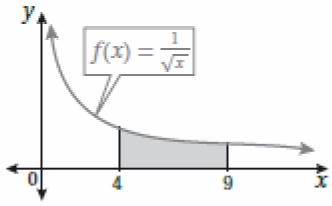
$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx = -2 + 13 = 11$$

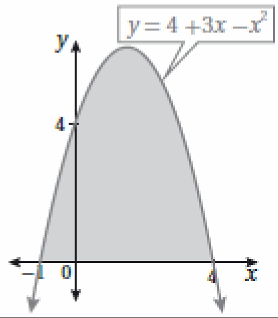


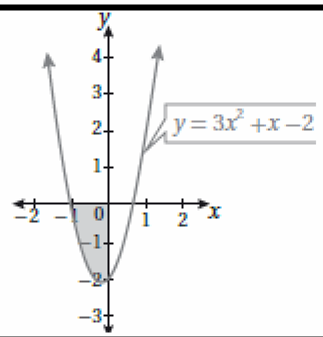
كتاب التمارين

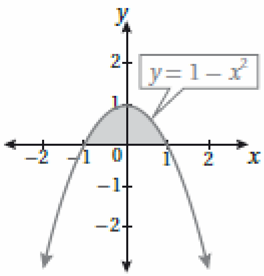
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

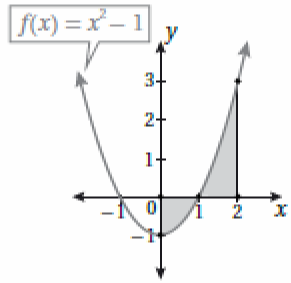
1


2


3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2(2 - x)$، والمحور x.

1
$$A = -\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$
$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

2
$$A = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = 6 - 4 = 2$$

3
$$A = \int_{-1}^4 (4 + 3x - x^2)dx = \left(4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^4 = \frac{125}{6}$$

4
$$A = -\int_{-1}^0 (3x^2 + x - 2)dx = -\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-1}^0 = -\left((0) - \left(-1 + \frac{1}{2} + 2\right)\right) = \frac{3}{2}$$

5
$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2)dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

6
$$A = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2$$
$$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 2$$

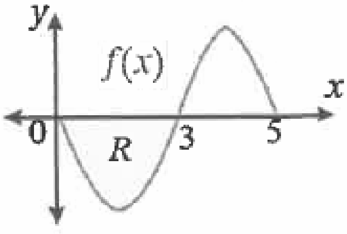
7	$3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \quad \Rightarrow x=-1, x=1$ بتعويض $x=0$ نجد أن: $f(0)=0-3=-3<0$ أي أن المنحنى يقع تحت المحور x في الفترة [1 ,1-]، ولذا نجد المساحة كالآتي: $A=-\int_{-1}^{1}(3x^2-3)dx=\int_{-1}^{1}(3-3x^2)dx$ $=(3x-x^3)\Big\|_{-1}^{1}$ $=(3-1)-(-3+1)=4$

8	$x^3-5x^2-6x=0 \Rightarrow x(x^2-5x-6)=0$ $\Rightarrow x(x-6)(x+1)=0$ $\Rightarrow x=0, x=6, x=-1$ بتعويض $x=1$ نجد أن: $f(1)=1-5-6=-10<0$ أي أن المنحنى يقع تحت المحور x في الفترة [6 ,0]، وبتعويض $x=-0.1$ نجد أن: $f(-0.1)=(-0.1)^3-3(-0.1)^2-6(-0.1)=-0.001-0.03+0.6=0.569>0$ أي أن المنحنى يقع فوق المحور x في الفترة [0 ,1-]، ولذا فإننا نجد المساحة على النحو الآتي: $A=\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx+(-\int_{0}^{6}(x^3-5x^2-6x)dx)$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3-3x^2\right)\Big\|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+3x^2\right)\Big\|_{0}^{6}$ $=(0)-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}-3\right)+(-324+360+108)-(0)=\frac{1741}{12}$

9	$x^2(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2$ بتعويض $x=1$ نجد أن: $f(1)=1(2-1)=1>0$ أي أن المنحنى يقع فوق المحور x في الفترة [2 ,0]، ولذا نجد المساحة كالآتي: $A=\int_{0}^{2}x^2(2-x)dx \quad =\int_{0}^{2}(2x^2-x^3)dx$ $=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{2} \quad =\left(\frac{16}{3}-4\right)-(0)=\frac{4}{3}$

وزارة أدبي 2023

8) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ ، إذا كانت مساحة المنطقة R تساوي 5 وحدات مربعة، وكان $\int_0^5 f(x)dx = -3$ ، فإن قيمة $\int_3^5 f(x)dx$ تساوي:



a) -8 c) -2

b) 8 d) 2

9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 9x - x^2$ والمحور x هو:

a) $\int_0^9 (9x - x^2)dx$ b) $\int_9^0 (9x - x^2)dx$ c) $\int_0^3 (9x - x^2)dx$ d) $\int_3^0 (9x - x^2)dx$

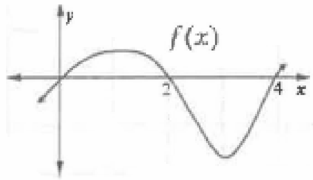
c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 16x$ ، والمحور x . (11 علامة)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-2)$ والمحور x هو:

a) $-\int_{-1}^2 f(x)dx$ b) $\int_{-1}^2 f(x)dx$ c) $\int_{-2}^1 f(x)dx$ d) $-\int_{-2}^1 f(x)dx$

10) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ ، وكانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x تساوي 12 وحدة مساحة ، فإن قيمة $\int_2^4 f(x)dx$ تساوي:



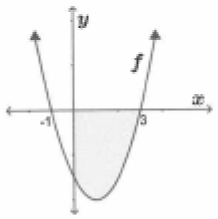
a) 7 b) -17 c) 17 d) -7

c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 2x - x^2$ ،

والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$. (11 علامة)

وزارة فندقي 2023

25- التكامل الذي يعبّر عن مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي هو:



a) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ c) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

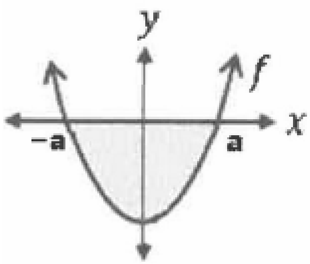
b) $-\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ d) $-\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

b) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 6x - 3x^2$ والمحور x . (9 علامات)

وزارة فندقي تكميلي 2023

25- إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه تساوي (6) وحدات مربعة،

فإنّ قيمة $\int_{-a}^{a} 3f(x)dx$ هي:



a) -9 c) 18

b) 9 d) -18

b) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 8 - 2x^2$ والمحور x . (9 علامات)

الدرس 5
تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

تكامل اقترانات أساسية

1) $\int e^x\, dx = e^x + C$
2) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
3) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
e: العدد النيبيري

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$$

1) $\int (6e^x + 1)\, dx = 6e^x + x + c$

2) $\int (\sin x + 3\cos x)\, dx = -\cos x + 3\sin x + c$

3) $\int (4\cos x - 2e^x + 3x^2)dx = 4\sin x - 2e^x + x^3 + c$

4) $\int \frac{5}{x}\, dx = 5\ln|x| + c$

5) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 8}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{8}{x^3}\right) dx$

$= \int \left(2 + \frac{3}{x} - 8x^{-3}\right) dx = 2x + 3\ln|x| + 4x^{-2} + c$

Hasanat

أتحقّق من فهمي 43 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$ b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$ c) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

أتحقّق من فهمي 45 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx$ b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}\, dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) dx$ 2) $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right) dx$ 3) $\int (e^x + 1)^2\, dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x + 2)\, dx$ 5) $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{5}{x}\right) dx$ 11) $\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$

$1)\int (3\,e^{x} + \cos x - 2\sin x)\,dx =$ $\qquad$ $2)\int (\sqrt{x} + \frac{10}{x} + \sin x)\,dx =$

$3)\int \frac{x^{2}\cos x - x^{5} + x}{x^{2}}\,dx =$ $\qquad$ $4)\int (\frac{1}{x} - 2)(x+3)\,dx =$

واجب

أتحقق من فهمي صفحة 43

a	$\int (5x^2 + 7e^x)dx = \frac{5}{3}x^3 + 7e^x + C$
b	$\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right)dx = \int (9\cos x + 4x^{-3})dt = 9\sin x - 2x^{-2} + C = 9\sin x - \frac{2}{x^2} + C$
c	$\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin x\right)dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 45

a	$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right)dx = \ln\lvert x\rvert + 8e^x + C$
b	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right)dx = -\cos x - 5\ln\lvert x\rvert + C$
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right)dx$ $= x - 7\ln\lvert x\rvert - x^{-1} + C = x - 7\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{x} + C$

1	$\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right)dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2 + C$
2	$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + x^{-2}\right)dx = x + 2\ln\lvert x\rvert - x^{-1} + C$
3	$\int (e^x + 1)^2dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$
4	$\int \frac{1}{x}(x+2)dx = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = x + 2\ln\lvert x\rvert + C$
5	$\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{5}{x}\right)dx = \int \left(4x^{-3} + \frac{5}{x}\right)dx = -2x^{-2} + 5\ln\lvert x\rvert + C$

11	$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}dx = \int \left(\frac{\sin x}{4} + \frac{3\cos x}{4}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{4}\sin x + \frac{3}{4}\cos x\right)dx = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\sin x + C$

2) تكامل اقترانات في صورة: f(ax+b)

تكامل اقترانات في صورة: $f(ax+b)$

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، وe هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

3) $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

4) $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

5) $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,\ x \neq -\frac{b}{a}$

Hasanat

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
مدرسة
البقعة
الثانوية للبنين

1) $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

2) $\int 6\, e^{4-5x} dx = 6\, \frac{e^{4-5x}}{-5} + c$

3) $\int 8\cos 2x \; dx = 4\sin 2x + c$

4) $\int 10\sin(5x-1) \; dx = -2\cos(5x-1) + c$

5) $\int (3x-4)^6 \; dx = \frac{1}{7\times 3}(3x-4)^7 + c$

6) $\int \frac{3}{4x-5} \; dx = \frac{3}{4}\ln(4x-5) + c$

أتحقَّق من فهمي 47 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6 \; dx$

b) $\int \sqrt{2x+1} \; dx$

c) $\int 4\cos(3x-7) \; dx$

d) $\int (\sin 5x + e^{2x}) \; dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) \; dx$

f) $\int \frac{5}{3x+2} \; dx$

واجب

1) $\int 3e^{5x+4} dx =$

2) $\int 8\, e^{7-2x} dx =$

3) $\int (3x+5)^6 \; dx =$

4) $\int \sqrt[3]{2x-5} \; dx =$

5) $\int \frac{1}{3-4x} \; dx =$

6) $\int \frac{5}{\sqrt{2x+7}} \; dx =$

7) $\int \sin(3x-8) \; dx =$

8) $\int 4\cos(3-8x) \; dx =$

9) $\int 8(4x+1)^{-3} \; dx =$

10) $\int (e^{3x-1})^2 \; dx =$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

أتدرّب وأحلُّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

6) $\int \left(\sqrt{x} + 3e^{6x} - \frac{7}{x}\right)\, dx$

7) $\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right)\, dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx$

9) $\int \left(\sin(2x-3) + e^{6x-4}\right)\, dx$

10) $\int 4\cos(6x+1)\, dx$

12) $\int \left(e^{6x} + (1-2x)^6\right)\, dx$

16) $\int \frac{e^x+7}{e^x}\, dx$

17) $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\, dx$

18) $\int \left(4x^3 + 2 + 3\sin(5-3x)\right)\, dx$

20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\, dx$

21) $\int \frac{1+xe^x}{x}\, dx$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

37) $\int (x^2+2x+1)^5\, dx$

35) $\int \sqrt{e^x}\, dx$

أتحقق من فهمي صفحة 47

a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C = \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\, dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C = \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$
d	$\int (\sin 5x + e^{2x}) dx = \frac{1}{5} \times -\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
e	$\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) dx = 2x^3 - \frac{3}{7}e^{7x+1} + C$
f	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$

6	$\int \left(\sqrt{x} + 3e^{6x} - \frac{7}{x}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 3e^{6x} - \frac{7}{x}\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e^{6x} - 7\ln\lvert x\rvert + C$
7	$\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right) dx = 3\ln\lvert x+1\rvert + \frac{5}{2}e^{-2x} + C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = (2x-3)^{\frac{1}{2}} + C$
9	$\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4}) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + \frac{1}{6}e^{6x-4} + C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\, dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1) + C$

12	$\int (e^{6x-4} + (1-2x)^6)dx = \frac{1}{6}e^{6x-4} - \frac{1}{14}(1-2x)^7 + C$
13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

16	$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{7}{e^x}\right)dx = \int (1+7e^{-x})dx = x - 7e^{-x} + C$
17	$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = \int \frac{-4\left(-\frac{1}{4}\right)}{5-\frac{1}{4}x}dx = -4\ln\left\lvert 5-\frac{1}{4}x\right\rvert + C$
18	$\int (4x^3 + 2 + 3\sin(5-3x))dx = x^4 + 2x + \cos(5-3x) + C$
19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx = \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C = \frac{3}{4(1-4x)} + C$
21	$\int \frac{1+xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{xe^x}{x}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \ln\lvert x\rvert + e^x + C$
35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx = \int e^{\frac{1}{2}x}dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C$
37	$\int (x^2+2x+1)^5dx = \int ((x+1)^2)^5dx = \int (x+1)^{10}dx = \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$

3) قاعدة: التكامل يُلغي المشتقة الأولى

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

عندما يكون المُعطى هو المشتقة الأولى فإنا نكامل الطرفين لإلغاء المشتقة والحصول على قاعدة الاقتران ثم نجد قِيمة الثابت c عن طريق الاستفادة من الشرط الأولي ، ويُمكِن بها أيضًا تحديد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة، علمًا بأنَّ الشرط الأوَّلي يُستعمَل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

مسألة اليوم

يتغيَّر عدد الطلبة الذين يلتحقون بإحدى الجامعات الجديدة سنويًّا بمُعدَّل: $P'(t) = \dfrac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$،

حيث $P(t)$ عدد الطلبة المُلتحِقين بالجامعة، و t الزمن بالسنوات منذ تأسيس الجامعة.

أجد عدد الطلبة الذين درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها،

علمًا بأنَّ عددهم عند تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t) = \int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}\,dt = \int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$= \int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}}\,dt = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد طلاب الجامعة عند التأسيس 2000 طالب، إذن $P(0) = 2000$

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C \Rightarrow P(0) = -10000(0+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$2000 = -10000 + C \Rightarrow C = 12000$$

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000$$

ثالثًا، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس:

$$P(3) = -10000(3+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000 \approx 7000$$

أتحقَّق من فهمي 49

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان.

أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنَّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أتحقق من فهمي صفحة 49

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t) = \int 105e^{0.03t}\,dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t} + C$$

$$= 3500e^{0.03t} + C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0) = 3500$

$$P(t) = 3500e^{0.03t} + C \Rightarrow P(0) = 3500e^{0} + C \Rightarrow 3500 = 3500 + C \Rightarrow C = 0$$

$$P(t) = 3500e^{0.03t}$$

ثالثًا، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات):

$$P(10) = 3500e^{0.03(10)} \approx 4725$$

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

31 أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

طب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm^2.

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

25 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

28 $f'(x) = e^{-x} + x^2;\ (0, 4)$

27 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2};\ (1, -1)$

26 $f'(x) = 5e^x;\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$

30	$P(t) = \int 0.51e^{-0.03t}dt = -\frac{0.51}{0.03}e^{-0.03t} + C = -17e^{-0.03t} + C$ بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن $P(0) = 1000$ ومنه: $P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C \Rightarrow 1000 = -17 + C \Rightarrow C = 1017$ $P(t) = -17e^{-0.03t} + 1017$
31	$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$

32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t}dt = \frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t} + C = 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$ إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C \Rightarrow 9 = 9 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5\ cm^2$

25 $v(t) = e^{-2t}$

$$s(t) = \int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \qquad s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ إذن $s(0) = 2$:

$$s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$$

$$2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$$

26 $f(x) = \int 5e^{x}dx = 5e^{x} + C$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$f(x) = 5e^{x} + C \Rightarrow f(0) = 5e^{0} + C \Rightarrow \frac{1}{2} = 5 + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{9}{2} \Rightarrow f(x) = 5e^{x} - \frac{9}{2}$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

27 $f(x) = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{2}{x} - x^{-2}\right)dx = 2\ln|x| + x^{-1} + C = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1, -1)$:

$$f(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C \Rightarrow f(1) = 2\ln 1 + 1 + C$$

$$\Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2 \Rightarrow f(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2$$

28 $f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, 4)$:

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow f(0) = -e^{0} + \frac{1}{3}(0)^3 + C$$

$$\Rightarrow 4 = -1 + C \Rightarrow C = 5 \qquad f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

تكامل اقترانات في صورة: $k\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}}dx = \ln|\text{المقام}| + c$$

إذا كان المُكامَل كسرًا بسطه هو مشتقة مقامه، فإنَّ التكامل هو لوغاريتم القيمة المُطلَقة للمقام.

$$1)\int \frac{2e^x}{4+e^x}dx = 2\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = 2\ln|e^x+4|+c$$

$$2)\int \frac{5}{2x-3}dx = \frac{2}{2}\int \frac{5}{2x-3}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-3}dx = \frac{5}{2}\ln|2x-3|+c$$

$$3)\int \frac{4x+10}{x^2+5x-1}dx = \int \frac{2(2x+5)}{x^2+5x-1}dx = 2\int \frac{2x+5}{x^2+5x-1}dx = 2\ln|x^2+5x-1|+c$$

$$4)\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \frac{-1}{-1}\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \frac{1}{-1}\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx = -\ln|1+\cos x|+c$$

$$5)\int \frac{7\cos x}{5+2\sin x}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2\cos x}{5+2\sin x}dx = \frac{7}{2}\ln|5+2\sin x|+c$$

$$6)\int \frac{x^3}{x^4-9}dx = \frac{4}{4}\int \frac{x^3}{x^4-9}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-9}dx = \frac{1}{4}\ln|x^4-9|+c$$

أتحقّق من فهمي 50 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{9x^2}{x^3+8}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$

13) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ 14) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-3}dx$ 15) $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx$ 19) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$

29) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e, e^2).

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

36) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx$

واجب

$$1)\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \qquad 2)\int \frac{3\cos x}{5\sin x}\,dx =$$

$$3)\int \frac{2e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx \qquad 4)\int \frac{3x+6}{x^2+4x-1}\,dx =$$

أتحقق من فهمي صفحة 50

a	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \ln\lvert x^2+3x\rvert + C$
b	$\int \frac{9x^2}{x^3+8}dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8}dx = 3\int \frac{3x^2}{x^3+8}dx = 3\ln\lvert x^3+8\rvert + C$
c	$\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}dx = \frac{1}{8}\ln\lvert 4x^2+8x\rvert + C$
d	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert e^{3x}+5\rvert + C$

13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx = \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$

19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$

29	$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right)dx = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\lvert e+e\rvert + C = e^2$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e \Rightarrow f(x) = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert - 3\ln 2e$

36	$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2\cos x)}{3+2\sin x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3+2\sin x}dx = -\frac{1}{2}\ln\lvert 3+2\sin x\rvert + C$

أتذكَّر $e^0 = 1$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

أتذكَّر $\ln 1 = 0$

$$1)\int_0^1 6\,e^{2x}\,dx = 3\,e^{2x}\Big]_0^1 = 3\,e^2 - 3\,e^0 = 3\,e^2 - 3$$

$$2)\int_{-1}^2 (2x-1)^2\,dx = \frac{(2x-1)^3}{3\times 2}\Bigg|_{-1}^2 = \frac{(4-1)^3}{6} - \frac{(-2-1)^3}{6} = 9$$

$$3)\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left|e^x+1\right|\Big]_0^1 = \ln\left|e^1+1\right| - \ln\left|e^0+1\right| = \ln(e+1) - \ln 2$$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي **51** أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^2 (4e^{2x}+7)\,dx$ b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx$ c) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22 $\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)\,dx$ **23** $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\,dx$ **24** $\int_3^4 (2x-6)^4\,dx$

38 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int (x-1)^3\,dx$ $\int \frac{1}{x+1}\,dx$ $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

واجب

$$1)\int_0^2 (2x - 6\,e^{3x})\,dx = \ldots\ 4 - 2\,e^6$$

$$2)\int_{-1}^1 (3x+2)^2\,dx = \ldots\ 14$$

$$3)\int_0^1 \frac{6e^x}{2e^x-1}\,dx = \ldots\ 3\ln\left|2e-1\right|$$

$$4)\int_1^{-1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ldots -\ln 3$$

أتحقق من فهمي 51 صفحة

a	$\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big\|_0^2 = \left(2e^{2(2)}+7(2)\right) - \left(2e^{2(0)}+7(0)\right) = 2e^4+12$
b	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\|_0^4 = \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big\|_0^4 = \frac{4}{3}$
c	$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx = 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}dx = 4\ln\left\|x^2+1\right\|\Big\|_0^4 = 4\ln 17$

22	$\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = (x^2+3e^x-4\ln\lvert x\rvert)\Big\vert_1^2$ $= ((2)^2+3e^2-4\ln\lvert 2\rvert)-((1)^2+3e^1-4\ln\lvert 1\rvert) = 3+3e^2-4\ln 2-3e$
23	$\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}dx = \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+10\rvert\Big\vert_1^2$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert(2)^2+10\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert(1)^2+10\rvert = \frac{1}{2}\ln 14-\frac{1}{2}\ln 11$
24	$\int_3^4 (2x-6)^4dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5\Big\vert_3^4 = \frac{1}{10}(2(4)-6)^5-\frac{1}{10}(2(3)-6)^5 = \frac{32}{10}$

38	$\int \frac{1}{x+1}dx$ هذا التكامل هو المختلف $\int \frac{1}{x+1}dx$ كونه الوحيد الذي يُحل باللوغاريتم الطبيعي.

كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$
2. $\int (5e^x+4)\,dx$
3. $\int \left(1-e^{2x-3}\right)dx$
4. $\int (\sin 2x-\cos 2x)\,dx$
5. $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$
6. $\int \left(5-\sin(5-5x)\right)dx$
7. $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}\,dx$
8. $\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx$
9. $\int \left(3\cos x+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$
10. $\int (3x+2)^5\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$
12. $\int \left(e^{2x}-\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$
13. $\int \left(\sin(2x+3)+\cos(3x+2)\right)dx$
14. $\int \left(\frac{1}{8}x^{3/2}-\frac{4}{x}\right)dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16. $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx$
17. $\int_0^1 e^x(4-e^x)\,dx$
18. $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

19. إذا كان ميـل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=6e^{2x}+2e^{-x}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتـقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

20. $f'(x)=e^{-x}$; $(0,3)$
21. $f'(x)=\frac{3}{x}-4$; $(1,0)$
22. $f'(x)=4e^x-2$; $(0,1)$

23. تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باسـتعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عـدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيـرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t)=-\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لـكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

24. أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل: $\int (3\sin(3x+1))\,dx$ ، $\int (3\sin 3x+1)\,dx$

1	$\int \frac{1-x^2}{5x}dx = \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{x^2}{5x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{1}{5}x\right)dx = \frac{1}{5}\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{10}x^2 + C$
2	$\int (5e^x+4)dx = 5e^x + 4x + C$
3	$\int (1-e^{2x-3})dx = x - \frac{1}{2}e^{2x-3} + C$
4	$\int (\sin 2x - \cos 2x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$
5	$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert + C$
6	$\int (5-\sin(5-5x))dx = 5x - \frac{1}{5}\cos(5-5x) + C$

7	$\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}dx = 3\ln\left\lvert\frac{1}{3}x-2\right\rvert + C$
8	$\int\left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx = x^2 - x + \frac{8}{5}\ln\lvert 5x+4\rvert + C$
9	$\int\left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = 3\sin x + 5\ln\lvert x\rvert - \frac{4}{x} + C$
10	$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C$
11	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+2x+5\rvert + C$
12	$\int\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}\cos(2x-1) + C$

13	$\int (\sin(2x+3)+\cos(3x+2))dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$
14	$\int\left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - 4\ln\lvert x\rvert + C$
15	$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x-1} + C$

16	$\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx = \int_0^1 (1+7x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{21}(1+7x)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1$ $= \frac{2}{21}(1+7(1))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}(1+7(0))^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{21}\sqrt{512} - \frac{2}{21}$
17	$\int_0^1 e^x(4-e^x)\,dx = \int_0^1 (4e^x - e^{2x})\,dx = \left(4e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big\vert_0^1 = 4e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}$
18	$\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx = (x + \ln\vert x\vert)\vert_1^3 = 3 + \ln 3 - (1 + \ln 1) = 2 + \ln 3$

19	$y = \int (6e^{2x} + 2e^{-x})dx = 3e^{2x} - 2e^{-x} + C \Rightarrow y = 3e^{2x} - 2e^{-x} + C$ $(0, 2) \Rightarrow 2 = 3 - 2 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = 3e^{2x} - 2e^{-x} + 1$

20	$f(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$ $f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = -e^{-x} + 4$
21	$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx = 3\ln\vert x\vert - 4x + C$ $f(1) = 0 \Rightarrow 3\ln 1 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = 3\ln\vert x\vert - 4x + 4$
22	$f(x) = \int (4e^x - 2)dx = 4e^x - 2x + C$ $f(0) = 1 \Rightarrow 4 + C = 1 \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = 4e^x - 2x - 3$

23	$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}dt = \int -\frac{1000(2t)}{1+t^2}dt = -1000\ln\vert 1+t^2\vert + C$ $N(0) = 5000 \Rightarrow -1000\ln\vert 1+0\vert + C = 5000 \Rightarrow C = 5000$ $\Rightarrow N(t) = -1000\ln\vert 1+t^2\vert + 5000$
24	الأيسر هو مجموع تكاملين لاقترانين، أحدهما مثلثي هو $f(x)=3\sin 3x$ والآخر ثابت هو $g(x)=1$ بينما الأيمن هو لاقتران مثلثي واحد فقط هو $h(x) = 3\sin(3x+1)$

وزارة أدبي 2023

10) $\int 24\sin(2x+6)dx$ هو:

a) $-24\cos(2x+6)+C$ c) $-12\cos(2x+6)+C$

b) $24\cos(2x+6)+C$ d) $12\cos(2x+6)+C$

11) $\int e^{-x}(4+2e^{x})dx$ هو:

a) $-4e^{-x}+C$ c) $4e^{-x}+2x+C$

b) $4e^{-x}+C$ d) $-4e^{-x}+2x+C$

12) $\int \frac{8x}{4-x^2}dx$ هو:

a) $4\ln|4-x^2|+C$ c) $8\ln|4-x^2|+C$

b) $-4\ln|4-x^2|+C$ d) $-8\ln|4-x^2|+C$

13) قيمة $\int_0^1 12(x-1)^5dx$ هي:

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int\left(8\cos x+\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (10 علامات)

وزارة فندقي 2023

20- قيمة: $\int_0^1(1-x)^4\,dx$ هي:

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 0 d) -1

21- قيمة: $\int_e^1 \frac{3}{x}\,dx$ هي:

a) 3 b) -3 c) 1 d) $3e$

وزارة أدبي تكميلي 2023

11) $\int 3\sin(2-3x)dx$ هو:

a) $3\cos(2-3x)+C$
b) $-3\cos(2-3x)+C$
c) $\cos(2-3x)+C$
d) $-\cos(2-3x)+C$

12) $\int (9e^{-3x}+4e^2)dx$ هو:

a) $-3e^{-3x}+2e^2+C$
b) $-3e^{-3x}+4e^2x+C$
c) $-18e^{-3x}+8e^2+C$
d) $-18e^{-3x}+4e^2x+C$

13) $\int \frac{4}{(3-2x)^3}dx$ هو:

a) $\frac{-12}{(3-2x)^4}+C$ b) $\frac{24}{(3-2x)^4}+C$ c) $\frac{-2}{(3-2x)^2}+C$ d) $\frac{1}{(3-2x)^2}+C$

14) قيمة $\int_3^4 \frac{1}{9-2x}dx$ هي:

a) $-\frac{1}{2}\ln 3$ b) $\frac{1}{2}\ln 3$ c) $-2\ln 3$ d) $2\ln 3$

a) جد كل من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(5\cos(x+1)+\frac{2x+3}{x^2+3x}\right)dx$

وزارة فندق تكميلي 2023

20- قيمة: $\int_0^1 (2x-2)^3 dx$ هي:

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

21- ناتج: $\int \frac{2x^2}{x^3-4}dx$ هو:

a) $2\ln|x^3-4|+c$
b) $\frac{2}{3}\ln|x^3-4|+c$
c) $\frac{1}{2}\ln|x^3-4|+c$
d) $\frac{3}{2}\ln|x^3-4|+c$

24- ناتج $\int \left(3e^{3x}+\frac{x^2-1}{x}\right)dx$ هو:

a) $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$
b) $e^{3x}+x^2-\ln|x|+c$
c) $e^{3x}+\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$
d) $\frac{1}{3}e^{3x}+x^2-\ln|x|+c$

الدرس 6 التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

هناك عدة طرق للتكامل، منها:1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامَل.

2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

3) طريقة التكامل بالتعويض

تقوم طريقة التكامل بالتعويض على أساس تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل (غالبا ما نختار u) عندها يجب أنْ يكون التكامل الجديد كله بدلالة المُتغيِّر الجديد (حتى dx) .

وهناك خطوات أساسية لهذه العملية وهي:

1) نحدد (u) : وهي غالباً ما تكون المقدار داخل الجذر ، أو الزاوية في الاقتران المثلثي أو القوة في الأسي

2) نشتق (u) ، ثم نجد (dx) بدلالة (u) و (du)

3) نكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة بعد حذف المقادير المحتوية على (x)

4) نجد التكامل الجديد بدلالة (u)

5) نعيد قيمة (u) التي فرضناها ليصبح المقدار بدلالة (x)

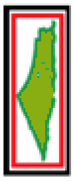
Hasanat

والسؤال الأهم : متى نستخدم طريقة التعويض ؟ وكيف نختارها دون غيرها ؟

الجواب :هناك قواعد (شبه) ثابتة ، يمكن اعتمادها ، مثلاً

عند وجود مقدار ومشتقته في المسألة نستخدم التعويض ($\int e^{\sin x} \cos x \, dx$)

عند وجود اقتران مثلثي زاويته غير خطية ، نبدأ بالتعويض بفرض الزاوية (u)



على الأغلب : عند وجود مقدار ومشتقته ، نفرض المقدار الذي قوته أكبر (u)

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I، وكان f اقترانًا متصلًا على I،

فإنَّ: $\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)\, du$

$$1)\int 6x(x^2+5)^7dx ::: u = x^2+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int 6x(\mathrm{u})^7\frac{du}{2x} = 3\int u^7du = 3\frac{u^8}{8}+c = \frac{3}{8}(x^2+5)^8+C$$

$$2)\int \sin x \ \cos x\, dx ::: u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{u}\ \cos x \ \frac{du}{\cos x} = \int u\, du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$3)\int \cos 3x\ e^{\sin 3x}dx \ ::: u=\sin 3x \Rightarrow \frac{du}{dx}=3\cos 3x \Rightarrow dx=\frac{du}{3\cos 3x}$$

$$\Rightarrow \int \cos 3x\ e^{u}\frac{du}{3\cos 3x}=\frac{1}{3}\int e^{u}du=\frac{1}{3}e^{u}+C=\frac{1}{3}e^{\sin 3x}+C$$

$$4)\int \frac{\ln 5x}{2x}\,dx \ ::: u=\ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{5}{5x}\Rightarrow dx=x\ du$$

$$\Rightarrow \int \frac{u}{2x}x\ du=\frac{1}{2}\int u\ du=\frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{4}(\ln 5x)^2+C$$

$$5)\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}\,dx \ ::: u=\frac{3}{x}\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{-3}{x^2}\Rightarrow dx=\frac{x^2\ du}{-3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^u}{x^2}\frac{x^2\ du}{-3}=\frac{-1}{3}\int e^u du=\frac{-1}{3}e^u+C=\frac{-1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$$

$$6)\int 3x\ \sqrt[5]{3x^2-1}\,dx \ ::: u=3x^2-1\Rightarrow \frac{du}{dx}=6x\Rightarrow dx=\frac{du}{6x}$$

$$\Rightarrow \int 3x\ \sqrt[5]{u}\ \frac{du}{6x}=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{5}}\ du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C\ \frac{1}{2}\times\frac{5}{6}(3x^2-1)^{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{12}\sqrt[5]{(3x^2-1)^6}+C$$

$$7)\int 8x^3(x^4+2)^5\,dx \ ::: u=x^4+2\Rightarrow \frac{du}{dx}=4x^3\Rightarrow dx=\frac{du}{4x^3}$$

$$\Rightarrow \int 8x^3(u)^5\ \frac{du}{4x^3}=\int 2u^5\ du=2\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{3}(x^4+2)^6+C$$

$$8)\int \frac{\sqrt{x}-x+2}{\sqrt{x}+x}\,dx \ ::: u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\Rightarrow 2u\ du=dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{u-u^2+2}{u+u^2}\ (2u)du=\int \frac{u-u^2+2}{u(1+u)}\ (2u)du=-2\int \frac{u^2-u-2}{(1+u)}\ du$$

$$=-2\int \frac{(u-2)(u+1)}{(1+u)}\ du=-2\int (u-2)\ du=-2\left(\frac{u^2}{2}-2u\right)+C$$

$$=-u^2+4u+C=4\sqrt{x}-x+C$$

أتحقّق من فهمي 58 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$ b) $\int x\,e^{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\,dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ e) $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx$ f) $\int \cos^4 x\sin x\,dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ 2) $\int x^2(2x^3+5)^4\,dx$ 3) $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

4) $\int x^6 e^{1-x^7}\,dx$ 5) $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$ 6) $\int (3x^2-1)\,e^{x^3-x}\,dx$

7) $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$ 8) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ 9) $\int \sin x(1+\cos x)^4\,dx$

10) $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$ 11) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$ 12) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

13) $\int e^x(2+e^x)^5\,dx$ 14) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ 15) $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4\,dx$

مهارات التفكير العليا

29 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx$ | $\int 3x^2 e^{1+x^3}\,dx$ | $\int x\cos x^2\,dx$ | $\int x(x^3+1)\,dx$

واجب

$$1)\int \frac{6x^2}{(x^3+5)^4}\,dx = \ldots\frac{-2}{3(x^3+5)^3}+C$$

$$2)\int 30x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \ldots 6\sqrt{(x^2+1)^5}-30\sqrt{(x^2+1)^3}+C$$

Abdulkadir Hasanat

Abdulkadir Hasanat

078 531 88

$$3)\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\,dx\ldots = (\sqrt{x}-2)^2+8(\sqrt{x}-2)+8\ln\left|\sqrt{x}-2\right|+C$$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx \;: u=2x^3-3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{6x^2}$

$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx=\int 6x^2u^4\times\frac{du}{6x^2}=\int u^4du=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(2x^3-3)^5+C$

b $\int xe^{x^2+1}dx \;: u=x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$\int xe^{x^2+1}dx=\int xe^u\times\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2}e^udu=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$

c $\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx \;: u=2x^2+8x \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x+8 \Rightarrow dx=\frac{du}{4x+8}$

$=\int\frac{4x+8}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{4x+8}=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{2x^2+8x}+C$

d $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx \quad u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$

$\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int\frac{u^2}{x}\times xdu=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$

e $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx \;: u=x^4-5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x^3 \Rightarrow dx=\frac{du}{4x^3}$

$=\int x^3\cos u\times\frac{du}{4x^3}=\int\frac{1}{4}\cos u\,du=\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{4}\sin(x^4-5)+C$

f $\int\cos^4x\sin x\,dx \;: u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$

$=\int u^4\sin x\times\frac{du}{-\sin x}=\int -u^4du=-\frac{1}{5}u^5+C=-\frac{1}{5}\cos^5x+C$

1 $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx \quad u=x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$=\int\frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\int\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+4}+C$

2 $\int x^2(2x^3+5)^4dx \quad u=2x^3+5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{6x^2}$

$=\int x^2u^4\times\frac{du}{6x^2}=\int\frac{1}{6}u^4du=\frac{1}{30}u^5+C=\frac{1}{30}(2x^3+5)^5$

3 $\int 3x\sqrt{x^2+7}dx \quad u=x^2+7 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$=\int 3x\sqrt{u}\times\frac{du}{2x}=\int\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du=u^{\frac{3}{2}}+C=\sqrt{(x^2+7)^3}+C$

4 $\int x^6e^{1-x^7}dx \quad u=1-x^7 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-7x^6 \Rightarrow dx=\frac{du}{-7x^6}$

$\int x^6e^{1-x^7}dx=\int x^6e^u\times\frac{du}{-7x^6}=\int-\frac{1}{7}e^udu=-\frac{1}{7}e^u+C=-\frac{1}{7}e^{1-x^7}+C$

5 $\int\frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx \quad u=x^5+9 \Rightarrow \frac{du}{dx}=5x^4 \Rightarrow dx=\frac{du}{5x^4}$

$=\int\frac{x^4}{u^3}\times\frac{du}{5x^4}=\int\frac{1}{5}u^{-3}du=-\frac{1}{10}u^{-2}+C=-\frac{1}{10(x^5+9)^2}+C$

6 $\int(3x^2-1)e^{x^3-x}dx \quad u=x^3-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2-1 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2-1}$

$=\int(3x^2-1)e^u\frac{du}{3x^2-1}=\int e^udu=e^u+C=e^{x^3-x}+C$

7 $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx \qquad u = x^2-2x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x-2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x-2}$

$= \int \frac{3x-3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x-2} = \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \frac{du}{2(x-1)} = \int \frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = 3u^{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-2x+4} + C$

8 $\int \frac{1}{x\ln x}dx \qquad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{xu} \times x\,du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$

9 $\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx \qquad u = 1+\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$= \int \sin x\, u^4 \times \frac{du}{-\sin x} = \int -u^4 du = -\frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$

10 $\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx \qquad u = \sin 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\cos 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$= \int u^5 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x} = \int \frac{1}{2}u^5 du = \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{1}{12}(\sin 2x)^6 + C$

11 $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx \qquad u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2 du$

$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du = \int -\sin u\, du = \cos u + C = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$

12 $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx \qquad u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{e^u} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{e^u}du = \int e^{-u}du = -e^{-u} + C = -e^{-\sin x} + C = -\frac{1}{e^{\sin x}} + C$

13 $\int e^x(2+e^x)^5 dx \qquad u = 2+e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$\int e^x(2+e^x)^5 dx = \int e^x u^5 \times \frac{du}{e^x} = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(2+e^x)^6 + C$

14 $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \qquad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{\cos(u)}{x} \times x\,du = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$

15 $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx \qquad u = x^3-x^2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2-2x-1$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-2x-1}$

$= \int (3x^2-2x-1)u^4 \times \frac{du}{3x^2-2x-1} = \int u^4 du$

$= \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^3-x^2-x)^5 + C$

29 المختلف هو $\int x(x^3+1)dx$ لأنه الوحيد الذي يمكن إيجاده من دون استعمال طريقة التكامل بالتعويض، بينما التكاملات الباقية يلزم لإيجادها استعمال طريقة التكامل بالتعويض.

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة : هناك طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما:

1) إيجاد التكامل أوّلًا بدلالة المُتغيِّر الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل

2) تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل .

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$1)\int_1^2 2x\ e^{x^2-1}dx\ :::u = x^2-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$:::\ x=1 \Rightarrow u=0 \quad , \quad x=2 \Rightarrow u=3$$

$$\int_0^3 2x\ e^u\ \frac{du}{2x} = \int_0^3 e^u\ du = e^u\Big]_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

أو

$$1^+)\int_1^2 2x\ e^{x^2-1}dx\ :::u = x^2-1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2x\ e^u\ \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

$$\Rightarrow e^{x^2-1}\Big]_1^2 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

أتحقّق من فهمي 62 أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^1 x^2 (x^3-1)^4\ dx$ b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2-x^4)^7}\ dx$ c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^2 (2x-1)\, e^{x^2-x}\ dx$ 17) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\ dx$ 18) $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\ dx$

19) $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\ dx$ 20) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$ 21) $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\ dx$

30) أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\ dx$،

وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\ dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_0^1 4u^3\, du = u^4\Big|_0^1 = 1 \quad ✗$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه

31) تحدٍّ: إذا كان: $\int_0^k kx^2\, e^{x^3}\ dx = \frac{2}{3}(e^8-1)$، فأجد قيمة الثابت k.

$$1)\int_0^2 9x^2\sqrt{x^3+1}\ dx = \ ...25$$

واجب

$$2)\int_{-1}^2 (x+1)(2x+x^2)^4\ dx = \ ...\frac{33}{10}$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

أتحقق من فهمي صفحة 62

a $\int_0^1 x^2(x^3-1)^4dx \quad u=x^3-1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$

$x=0 \Rightarrow u=(0)^3-1=-1$	$x=1 \Rightarrow u=(1)^3-1=0$

$$=\int_{-1}^0 x^2u^4\frac{du}{3x^2}=\int_{-1}^0\frac{1}{3}u^4du=\frac{1}{15}u^5\Big|_{-1}^0=\left(\frac{1}{15}(0)^5\right)-\left(\frac{1}{15}(-1)^5\right)=\frac{1}{15}$$

b $\int_{-1}^0\frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx \quad u=2-x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-4x^3 \Rightarrow dx=\frac{du}{-4x^3}$

$x=0 \Rightarrow u=2-(0)^4=2$
$x=-1 \Rightarrow u=2-(-1)^4=1$

$$=\int_1^2\frac{x^3}{u^7}\times\frac{du}{-4x^3}=\int_1^2-\frac{1}{4}u^{-7}du=\frac{1}{24}u^{-6}\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{24u^6}\Big|_1^2=\left(\frac{1}{24(2)^6}\right)-\left(\frac{1}{24(1)^6}\right)=-\frac{21}{512}$$

c $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx \quad u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$

$x=e \Rightarrow u=\ln e=1$
$x=1 \Rightarrow u=\ln 1=0$

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1\frac{u}{x}xdu=\int_0^1 u\,du=\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2\right)=\frac{1}{2}$$

16 $\int_0^2(2x-1)e^{x^2-x}dx \quad u=x^2-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x-1 \Rightarrow dx=\frac{du}{2x-1}$

$x=2 \Rightarrow u=(2)^2-2=2$	$x=0 \Rightarrow u=(0)^2-0=0$

$$\int_0^2(2x-1)e^{x^2-x}dx=\int_0^2(2x-1)e^u\frac{du}{2x-1}=\int_0^2 e^udu=e^u|_0^2=e^2-e^0=e^2-1$$

17 $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \quad u=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx=-x^2du$

$x=2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$
$x=1 \Rightarrow u=1$

$$\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{e^u}{x^2}\times-x^2du=\int_1^{\frac{1}{2}}-e^udu=-e^u|_1^{\frac{1}{2}}=-e^{\frac{1}{2}}+e=-\sqrt{e}+e$$

18 $\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx \quad u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$

$x=e^3 \Rightarrow u=\ln e^3=3$
$x=e \Rightarrow u=\ln e=1$

$$=\int_1^3\frac{\sqrt{u}}{x}xdu=\int_1^3 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_1^3=\frac{2}{3}\sqrt{3^3}-\frac{2}{3}\sqrt{1^3}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\approx 2.8$$

19 $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$ $\quad u=x^4+2x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x^3+4x \Rightarrow dx=\frac{du}{4x^3+4x}$

$= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4x^3+4x}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=(1)^4+2(1)^2+1=4 \\ x=0 \Rightarrow u=(0)^4+2(0)^2+1=1 \end{array}}$

$= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4(x^3+x)} = \int_1^4 \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{6}\sqrt{4^3}-\frac{1}{6}\sqrt{1^3}=\frac{7}{6}$

20 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\quad u=x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow u=10 \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{array}}$

$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{10}\frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x} = \int_1^{10}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{10} = \sqrt{u}\Big|_1^{10} = \sqrt{10}-1 \approx 2.2$

21 $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}dx$ $\quad u=x^2+x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x+1 \Rightarrow dx=\frac{du}{2x+1}$

$= \int_6^{10}\frac{2x+1}{u^3}\,\frac{du}{2x+1} = \int_6^{10}u^{-3}du = -\frac{1}{2}u^{-2}\Big|_6^{10}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow u=(2)^2+2+4=10 \\ x=1 \Rightarrow u=(1)^2+1+4=6 \end{array}}$

$= -\frac{1}{2(10)^2}+\frac{1}{2(6)^2}=\frac{2}{225}$

الخطأ الذي وقعت فيه سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل. ويكون الحل الصحيح كما يأتي:

30 $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx$ $\quad u=x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2x \Rightarrow dt=\frac{du}{2x}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=1^2+1=2 \\ x=0 \Rightarrow u=0^2+1=1 \end{array}}$

$\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx = \int_1^2 8x\,u^3\frac{du}{2x}$

$= \int_1^2 4u^3du = u^4\Big|_1^2 = (2)^4-(1)^4 = 15$

31 $\int_0^k kx^2e^{x^3}dx$ $\quad u=x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} x=k \Rightarrow u=k^3 \\ x=0 \Rightarrow u=0^3=0 \end{array}}$

$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \int_0^{k^3}kx^2e^u\frac{du}{3x^2} = \int_0^{k^3}\frac{k}{3}e^u du = \frac{k}{3}e^u\Big|_0^{k^3} = \frac{k}{3}e^{k^3}-\frac{k}{3}e^0 = \frac{k}{3}e^{k^3}-\frac{k}{3}$

$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \frac{2}{3}(e^8-1) \Rightarrow \frac{k}{3}e^{k^3}-\frac{k}{3}=\frac{2}{3}(e^8-1)$

$\Rightarrow \frac{k}{3}(e^{k^3}-1)=\frac{2}{3}(e^8-1) \Rightarrow \frac{k}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow k=2\,,k^3=8 \Rightarrow k=2$

متفرقات : **ملاحظة** :مسائل المساحة أو المسائل المتعلقة بحركة جسيم في خط مستقيم أو الشرط الأولي ، ...
لا جديد فيها سوى أنه يتم إيجاد التكامل بطريقة التعويض

مسألة اليوم 54

يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب $(mg/\ cm^3)$. إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t)=\dfrac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

مسألة اليوم صفحة 54

$C(t)=\int\dfrac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt \Rightarrow u=t^2+16 \Rightarrow \dfrac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\dfrac{du}{2t}$

$C(t)=\int\dfrac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt=\int\dfrac{0.3t}{\sqrt{u}}\times\dfrac{du}{2t}=0.15\int u^{-\frac{1}{2}}du=0.3u^{\frac{1}{2}}+K=0.3\sqrt{u}+K$

$=0.3\sqrt{t^2+16}+K$ بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:

$C(t)=0.3\sqrt{t^2+16}+K \Rightarrow C(0)=0.3\sqrt{0^2+16}+K \Rightarrow 0=1.2+K \Rightarrow K=-1.2$

$C(t)=0.3\sqrt{t^2+16}-1.2 \Rightarrow C(3)=0.3\sqrt{(3)^2+16}-1.2=0.3$

أتحقَّق من فهمي 60

تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة (بالمئات) من المُنتَج. إذا كان: $p'(x)=\dfrac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

أتحقق من فهمي صفحة 60

أولًا نجد تكامل الاقتران:

$P(x)=\int\dfrac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}dx \qquad u=36+x^2 \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2x}$

$P(x)=\int\dfrac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}dx=\int\dfrac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}}\times\dfrac{du}{2x}$

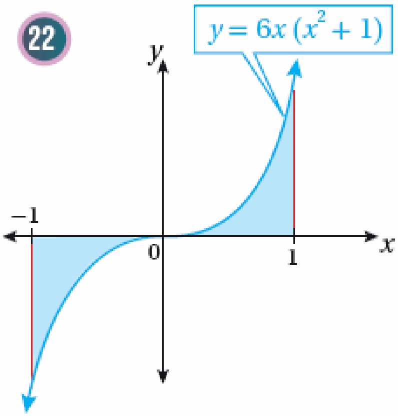
$=-150\int u^{-\frac{3}{2}}du=300u^{-\frac{1}{2}}+C=\dfrac{300}{\sqrt{u}}+C=\dfrac{300}{\sqrt{36+x^2}}+C$

$P(8)=75 \Rightarrow P(8)=\dfrac{300}{\sqrt{36+4^2}}+C=75$

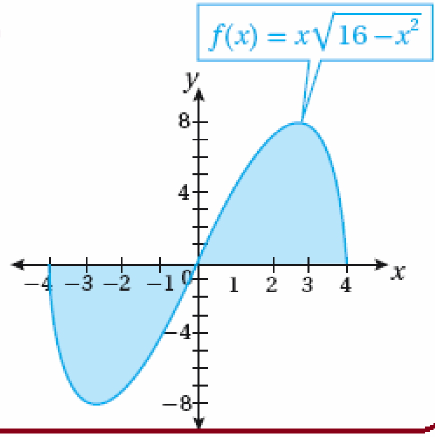
$C=75-\dfrac{300}{\sqrt{52}} \Rightarrow P(x)=\dfrac{300}{\sqrt{36+x^2}}+75-\dfrac{300}{\sqrt{52}}$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22



23



في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$.

أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

24 $f'(x) = xe^{4-x^2};\ (-2, 1)$

25 $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2};\ (0, -1)$

26 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \dfrac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v ســرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

27 زراعــة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ ســعر دونم أرض زراعية فــي الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t ســنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \dfrac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعره الآن JD 5000.

28 ســكّان: أشــارت دراســة إلى أنَّ عدد الســكّان في إحدى المدن يتغيَّر ســنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = \dfrac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$، حيث t عدد الســنوات منذ عام 2015م، و $P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

22

هناك طريقتان للحل:

إما بالتكامل بالتعويض،

أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس.

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$$

طريقة التكامل بالتعويض:

$$u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = -1 \Rightarrow u = 2$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$$

$$= -\int_{2}^{1} 6xu \times \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu \times \frac{du}{2x} = -\int_{2}^{1} 3u\,du + \int_{1}^{2} 3u\,du$$

$$= -\frac{3}{2}u^2\Big|_{2}^{1} + \frac{3}{2}u^2\Big|_{1}^{2} = -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2 = 9$$

23

$$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$$

$x = 0 \rightarrow u = 16$

$x = -4 \Rightarrow u = 0$

$x = 4 \Rightarrow u = 0$

$$u = 16 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$$

$$= -\int_{0}^{16} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x} + \int_{16}^{0} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x} = \int_{0}^{16} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du + \int_{16}^{0} -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{16} + -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{16}^{0} = \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} + \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3} = \frac{128}{3}$$

24

$$f(x) = \int xe^{4-x^2}dx \quad u = 4 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$f(x) = \int xe^{4-x^2}dx = \int xe^{u}\frac{du}{-2x} = \int -\frac{1}{2}e^{u}du = -\frac{1}{2}e^{u} + C = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2, 1)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C \Rightarrow f(-2) = -\frac{1}{2}e^{4-(-2)^2} + C \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + \frac{3}{2}$$

25

$$f(x)=\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx \qquad u=1-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2x \Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$$

$$f(x)=\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx=\int \frac{2x}{u^2}\times\frac{du}{-2x}=\int -u^{-2}du=u^{-1}+C=\frac{1}{1-x^2}+C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,-1)$:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}+C \Rightarrow f(0)=\frac{1}{1-0^2}+C$$

$$\Rightarrow -1=1+C \Rightarrow C=-2 \Longrightarrow f(x)=\frac{1}{1-x^2}-2$$

26

$$s(t)=\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt \qquad u=1+t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$$\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt=\int \frac{-2t}{\sqrt{u^3}}\times\frac{du}{2t}=\int -u^{-\frac{3}{2}}du=2u^{-\frac{1}{2}}+C=2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $4\ m$ ، إذن، $s(0)=4$:

$$s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+C \Rightarrow f(0)=\frac{2}{\sqrt{1+0^2}}+C \Rightarrow C=2 \Rightarrow s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+2$$

27

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dt \qquad u=0.2t^4+8000 \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3 \Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dx=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}}\times\frac{du}{0.8t^3}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$$

$$V(0)=5000 \Rightarrow V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C=5000 \Rightarrow C=\frac{14600}{3}$$

$$V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$$

28

$$\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt \qquad u=4+e^{0.2t} \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.2e^{0.2t} \Rightarrow dt=\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$t=10 \Rightarrow u=4+e^{0.2(10)}=4+e^2$$

$$t=0 \Rightarrow u=4+e^{0.2(0)}=5$$

$$\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt=\int_5^{4+e^2} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$=\int_5^{4+e^2} 20u^{-\frac{1}{2}}du=40u^{\frac{1}{2}}\Big|_5^{4+e^2}=40\sqrt{u}\Big|_5^{4+e^2}=40\sqrt{4+e^2}-40\sqrt{5}\approx 46$$

كتاب التمارين

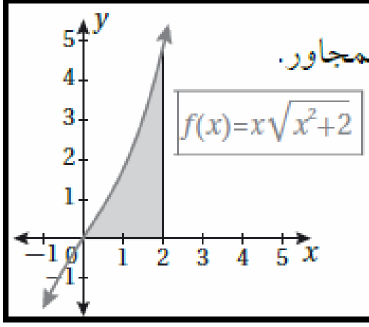
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$
2. $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$
3. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$
6. $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7. $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$
8. $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\,dx$
9. $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
10. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$

11. أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



12. **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتـران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدِّي (بالدينـار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشـركات، حيث x عدد القطع المَبيعـة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتـران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

13. $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2\,;\,(2, 10)$
14. $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}\,,\,(0, \frac{3}{2})$

15. يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

1	$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ $\quad u = x^2+3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int xu^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} + C$
2	$\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$ $\quad u = x^5+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$ $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx = \int x^4 e^u \frac{du}{5x^4} = \int \frac{1}{5}e^u\,du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{x^5+2} + C$

3 $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\, dx$

$u = x^2+2x+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$

$= \int (x+1)u^4 \frac{du}{2x+2} = \int \frac{1}{2}u^4\, du = \frac{1}{10}u^5 + C = \frac{1}{10}(x^2+2x+5)^5 + C$

4 $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$ $\quad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\, du$

$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \int \frac{u^3}{x}\, x\, du = \int u^3\, du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

5 $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$ $\quad u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{u^4}\frac{du}{\cos x} = \int u^{-4}\, du = -\frac{1}{3}u^{-3} + C = -\frac{1}{3}(\sin x)^{-3} + C$

6 $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\, dx$ $\quad u = 1+3\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-3\sin x}$

$\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\, dx = \int \sin x\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{-3\sin x} = \int -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos x)^3} + C$

7 $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\, dx$ $\quad u = x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$\boxed{x = 2 \Rightarrow u = 9 \qquad x = 1 \Rightarrow u = 2}$

$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\, dx = \int_2^9 \frac{x^2}{u^2}\frac{du}{3x^2} = \int_2^9 \frac{1}{3}u^{-2}\, du = -\frac{1}{3u}\Big|_2^9 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$

8 $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\, dx$ $\quad u = 3x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow dx = \frac{du}{6x}$

$\boxed{x = 1 \Rightarrow u = 5 \qquad x = 0 \Rightarrow u = 2}$

$\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\, dx = \int_2^5 x u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{6x} = \int_2^5 \frac{1}{6}u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{1}{9}\sqrt{125} - \frac{1}{9}\sqrt{8}$

9 $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$ $\quad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\, du$ $\quad \boxed{x = e \Rightarrow u = 1 \quad x = e^2 \Rightarrow u = 2}$

$\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \int_1^2 \frac{u^2}{x}\, x\, du = \int_1^2 u^2\, du = \frac{1}{3}u^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

10 $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\, dx$ $\quad u = x^2+2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2} = \frac{du}{2(x+1)}$

$\boxed{x = 1 \Rightarrow u = 3 \qquad x = 0 \Rightarrow u = 0}$

$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\, dx = \int_0^3 (x+1)u^5 \frac{du}{2(x+1)} = \int_0^3 \frac{1}{2}u^5\, du$

$= \frac{1}{12}u^6\Big|_0^3 = \frac{729}{12} = \frac{243}{4} = 60.75$

11 $A=\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\,dx \qquad u=x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow u=6 \\ x=0 \Rightarrow u=2 \end{array}}$

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_2^6 x u^{\frac12}\frac{du}{2x}=\int_2^6 \frac12 u^{\frac12}du=\frac13 u^{\frac32}\Big|_2^6=\frac13\sqrt{216}-\frac13\sqrt8$$

12 $R(x)=\int(50+3.5xe^{-0.1x^2})dx=\int 50dx+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx$

$=50x+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx \qquad u=-0.1x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.2x \Rightarrow dx=\frac{du}{-0.2x}$

$=50x+\int 3.5xe^{u}\frac{du}{-0.2x}=50x+\int -17.5e^{u}\,du=50x-17.5e^{-0.1x^2}+C$

$\Rightarrow R(x)=50x-17.5e^{-0.1x^2}+C$

$R(0)=0 \Rightarrow 0-17.5+C=0 \Rightarrow C=17.5 \Rightarrow R(x)=50x-17.5e^{-0.1x^2}+17.5$

13 $f(x)=\int 2x(4x^2-10)^2dx \qquad u=4x^2-10 \Rightarrow \frac{du}{dx}=8x \Rightarrow dx=\frac{du}{8x}$

$=\int 2xu^2\frac{du}{8x}=\int\frac14 u^2du=\frac{1}{12}u^3+C=\frac{1}{12}(4x^2-10)^3+C$

$f(2)=10 \Rightarrow 18+C=10 \Rightarrow C=-8 \qquad \Rightarrow f(x)=\frac{1}{12}(4x^2-10)^3-8$

14 $f(x)=\int x^2e^{-0.2x^3}dx \qquad u=-0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{-0.6x^2}$

$\int x^2e^{-0.2x^3}dx=\int x^2e^{u}\frac{du}{-0.6x^2}=\int e^{u}\frac{du}{-0.6}=\int-\frac53 e^{u}du=-\frac53 e^{-0.2x^3}+C$

$\Rightarrow f(x)=-\frac53 e^{-0.2x^3}+C \qquad f(0)=\frac32 \Rightarrow -\frac53+C=\frac32 \Rightarrow C=\frac{19}{6}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac53 e^{-0.2x^3}+\frac{19}{6}$

15 $s(t)=\int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt \qquad u=t^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$

$\int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int tu^{-\frac12}\frac{du}{2t}=\int\frac12 u^{-\frac12}du=u^{\frac12}+C=\sqrt{t^2+1}+C$

$s(t)=\sqrt{t^2+1}+C \Rightarrow s(0)=0 \Rightarrow 1+C=0 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow s(t)=\sqrt{t^2+1}-1$

وزارة أدبي 2023

12) $\int \frac{8x}{4-x^2}\,dx$ هو:

a) $4\ln|4-x^2|+C$ c) $8\ln|4-x^2|+C$

b) $-4\ln|4-x^2|+C$ d) $-8\ln|4-x^2|+C$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int_0^1 (x^3+1)\sqrt{x^4+4x+4}\,dx$ (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

15) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$ هو:

a) $-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$ c) $-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

b) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$ d) $\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

a) جد كل من التكاملات الآتية: 2) $\int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$ (7 علامات)

وزارة فندقي 2023

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int_0^1 8x(x^2-1)^7\,dx$ (7 علامات)

وزارة فندقي 2023 تكميلي

21– ناتج: $\int \frac{2x^2}{x^3-4}\,dx$ هو:

a) $2\ln|x^3-4|+c$ c) $\frac{1}{2}\ln|x^3-4|+c$

b) $\frac{2}{3}\ln|x^3-4|+c$ d) $\frac{3}{2}\ln|x^3-4|+c$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int x^2(4x^3-1)^9\,dx$ (7 علامات)

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2; (0, 6)$

41 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{20}}{x^2}; (1, 400)$

42 $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}; (1, 1)$

43 $f'(x) = 5e^x - 4; (0, -1)$

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}; (2, 10)$

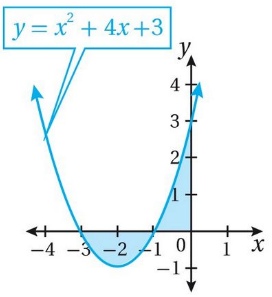
45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{(t^2 + 36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

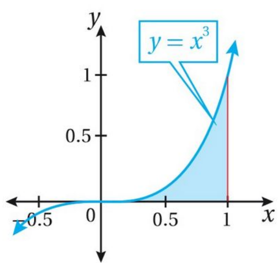
47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

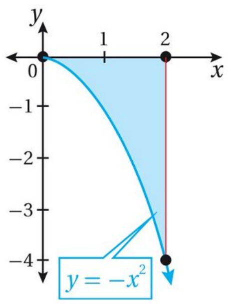
48



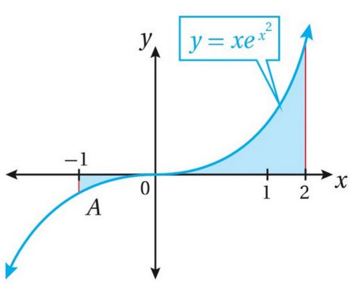
49



50



51



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$
b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$
c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$
d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

2 إذا كان: $\int_0^2 kx\ dx = 6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

3 قيمة: $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$
b) $21\frac{1}{4}$
c) $4\frac{1}{2}$
d) $22\frac{1}{2}$

4 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\ dx$ هي:

a) $e^4 - 1$
b) $e^4 - 2$
c) $2e^4 - 2$
d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

5 قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ هي:

a) -2
b) $-\frac{7}{16}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 2

6 التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x - x^2)\ dx$
b) $\int_0^4 (4x - x^2)\ dx$
c) $\int_1^0 (4x - x^2)\ dx$
d) $\int_0^1 (4x - x^2)\ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7 $\int 3x^{-1/2}\ dx$

8 $\int (8x - 10x^2)\ dx$

9 $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

10 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

11 $\int (5x^2 - 2e^{7x})\ dx$

12 $\int (2x + 3e^{4x+5})\ dx$

13 $\int \frac{x^2-6}{2x}\ dx$

14 $\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$

15 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\ dx$

16 $\int 2x\, e^{x^2-1}\ dx$

17 $\int 4e^{x}(3+e^{2x})\ dx$

18 $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\ dx$

19 $\int x \sin(3+x^2)\ dx$

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\ dx$

21 $\int \left(x - \sin(7x+2)\right)\ dx$

22 $\int (e^{3x} - e^{-3x})\ dx$

23 $\int \frac{2}{1-5x}\ dx$

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

25 **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(20) = 30000$.

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\ dx = 4, \int_{-5}^{5} f(x)\ dx = 10, \int_{-5}^{-1} g(x)\ dx = 11$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx$

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\ dx$

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\ dx$

31 $\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x}\ dx$

32 $\int_{1}^{5} |3 - x|\ dx$

33 $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\ dx$

34 $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\ dx$

35 $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}\ dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\ dx$

37 $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\ dx$

38 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$.

اختبار نهاية الوحدة صفحة 65

1 $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int (x-x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \quad \dots (b)$

2 $\int_0^2 kx\,dx = 6 \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big|_0^2 = 6 \Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3 \dots (c)$

3 $\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3 = \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right) = \frac{9}{2} \dots (c)$

4 $\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)} = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \dots\dots\dots\dots (d)$

5 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \dots\dots (d)$

6 $f(x) = 4x - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0$

$\Rightarrow x(4-x) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

7 $\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$

8 $\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$

9 $\int \frac{5}{x^3}dx = \int 5x^{-3}dx = -\frac{5}{2}x^{-2} + C = -\frac{5}{2x^2} + C$

10 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

11 $\int (5x^2 - 2e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$

12 $\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$

13	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int\left(\frac{x^2}{2x}-\frac{6}{2x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{x}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\lvert x\rvert + C$
14	$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2}+C = -\frac{1}{2(x-1)^2}+C$
15	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\lvert e^x+4\rvert+C$
16	$\int 2xe^{x^2-1}dx \qquad u = x^2-1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^u \times \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2-1}+C$
17	$\int 4e^x(3+e^{2x})dx = \int(12e^x+4e^{3x})dx = 12e^x + \frac{4}{3}e^{3x}+C$
18	$\int\frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx \qquad u=4+2x+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2+2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2+2x}$ $\int\frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx = \int\frac{1+x}{u^8}\times\frac{du}{2+2x} = \int\frac{1+x}{u^8}\times\frac{du}{2(1+x)} = \int\frac{1}{2}u^{-8}du$ $= -\frac{1}{14}u^{-7}+C = -\frac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7}+C = -\frac{1}{14(4+2x+x^2)^7}+C$
19	$\int x\sin(3+x^2)\,dx \qquad u=3+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\int x\sin(3+x^2)\,dx = \int x\sin u\times\frac{du}{2x} = \int\frac{1}{2}\sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(3+x^2)+C$
20	$\int(3\sin 3x - 4\cos x)dx = -\cos 3x - 4\sin x + C$
21	$\int(x-\sin(7x+2))dx = \int x\,dx - \int\sin(7x+2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}\cos(7x+2)+C$
22	$\int(e^{3x}-e^{-3x})dx = \frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$
23	$\int\frac{2}{1-5x}dx = \int\frac{\frac{2}{-5}(-5)}{1-5x}dx = -\frac{2}{5}\int\frac{-5}{1-5x}dx = -\frac{2}{5}\ln\lvert 1-5x\rvert+C$

24

$y = \int (4x-2)dx = 2x^2 - 2x + C$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,3)$ إذن:

$3 = 2(0)^2 - 2(0) + C \Rightarrow C = 3$

$y = 2x^2 - 2x + 3$

25

بما أن $R(20) = 30000$ إذن:

$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx = 2x^2 - 0.4x^3 + C$

$30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C \Rightarrow C = 54000 \Rightarrow R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$

26

$v(t) = \int \cos(3t - \pi)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$

27

$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx = -4 + 10 = 6$

28

$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx = 7 \times 4 = 28$

29

$\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx = 3(-4) - (-11) = -1$

30

$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big|_{-2}^{3}$

$= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2) = 30$

31

$\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x}dx = \int_{1}^{3}\left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x}\right)dx = \int_{1}^{3}(x^2 + 2x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{1}^{3} = \frac{50}{3}$

32

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$

$\int_{1}^{5} |3 - x|dx = \int_{1}^{3}(3 - x)dx + \int_{3}^{5}(x - 3)dx$

$= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_{3}^{5}$

$= \left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right) = 4$

33

$\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_{1}^{4} 20x^{-\frac{1}{2}}dx = 40x^{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{4} = 40\sqrt{x}\Big|_{1}^{4} = 40\sqrt{4} - 40\sqrt{1} = 40$

34

$\int_{2}^{5} 3x(x+2)dx = \int_{2}^{5}(3x^2 + 6x)dx = (x^3 + 3x^2)\Big|_{2}^{5} = 180$

35

$$\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}dx = \int_{-4}^{-9} 2xe^{u} \times \frac{du}{-2x}$$

$$u = -x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$x = 3 \Rightarrow u = -9$

$x = 2 \Rightarrow u = -4$

$$= \int_{-4}^{-9} -e^{u}du = -e^{u}|_{-4}^{-9} = -e^{-9} + e^{-4} = -\frac{1}{e^9} + \frac{1}{e^4}$$

36

$$\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx$$

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \qquad x = 2 \Rightarrow u = 9 \qquad x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx = \int_{1}^{9} \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2} = \int_{1}^{9} u^{-5}du = -\frac{1}{4}u^{-4}\Big|_{1}^{9} = -\frac{1}{4(9)^4} + \frac{1}{4(1)^4} = \frac{1640}{6561}$$

37

$$\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}dx = \int_{0}^{1} \frac{3(2x)}{x^2+1}dx = 3\int_{0}^{1} \frac{2x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_{0}^{1} = 3\ln|2| - 3\ln|1| = 3\ln 2$$

38

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(x^2+4)dx + \int_{0}^{1}(4-x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right) + \left(4(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) - (0) = \frac{85}{6}$$

39

$$v(t) = 5 + e^{t-2}$$

$$s(t) = \int (5 + e^{t-2})dt = 5t + e^{t-2} + C$$

$$s(t) = 5t + e^{t-2} + C$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$:

$$s(0) = 5(0) + e^{0-2} + C \;\Rightarrow\; 0 = e^{-2} + C \;\Rightarrow\; C = -e^{-2} \;\Rightarrow\; C = -\frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow s(t) = 5t + e^{t-2} - \frac{1}{e^2}$$

موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من الحركة هو: $s(3) = 5(3) + e^{3-2} - \frac{1}{e^2} = 15 + e - \frac{1}{e^2}\ m$

40

$$f(x) = \int (3x^2 + 6x - 2)dx = x^3 + 3x^2 - 2x + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,6)$ إذن: $6 = (0)^3 + 3(0)^2 - 2(0) + C \Rightarrow C = 6$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

41

$$f(x) = \int \frac{\sqrt{20}}{x^2}dx = \int \sqrt{20}x^{-2}dx = -\sqrt{20}x^{-1} + C = -\frac{\sqrt{20}}{x} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,400)$ إذن:

$$400 = -\frac{\sqrt{20}}{1} + C$$

$$C = 400 + \sqrt{20} \Rightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{20}}{x} + 400 + \sqrt{20}$$

42
$$f(x)=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx=2\ln|x|-x^{-1}+C=2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$
$$(1,1)\Rightarrow 1=2\ln|1|-\frac{1}{1}+C\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=2\ln|x|-\frac{1}{x}+2$$

43
$$f(x)=\int(5e^x-4)dx=5e^x-4x+C$$
$$(0,-1)\Rightarrow -1=5e^0-4(0)+C\Rightarrow C=-6\Rightarrow f(x)=5e^x-4x-6$$

44
$$f(x)=\int x\sqrt{x^2+5}\,dx \qquad u=x^2+5\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$
$$\int x\sqrt{x^2+5}\,dx=\int xu^{\frac{1}{2}}\times\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$$
$$(2,10)\Rightarrow 10=\frac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3}+C\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+1$$

45
أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x)=x^2-x-2=0$
$$\Rightarrow(x+1)(x-2)=0\ \Rightarrow x=-1\,,x=2$$
نختار عددًا ضمن الفترة $[-2,-1]$، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0)=1.75>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2,-1]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0)=-2<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,1]$

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله
$$A=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx-\int_{-1}^{1}(x^2-x-2)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{31}{6}$$

46
$$C(t)=\int\frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt \qquad u=t^2+36\ \Rightarrow\frac{du}{dt}=2t\ \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$$
$$C(t)=\int\frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt=\int\frac{3t}{\sqrt{u^3}}\times\frac{du}{2t}=\int\frac{3}{2}u^{-\frac{3}{2}}du=-3u^{-\frac{1}{2}}+K=-\frac{3}{\sqrt{u}}+K$$
$$=-\frac{3}{\sqrt{t^2+36}}+K$$
بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:
$$C(0)=-\frac{3}{\sqrt{0+36}}+K\Rightarrow 0=\frac{1}{2}+K\Rightarrow K=-\frac{1}{2}$$
$$C(t)=-\frac{3}{\sqrt{t^2+36}}-\frac{1}{2}\Rightarrow C(8)=-\frac{3}{\sqrt{64+36}}-\frac{1}{2}=-\frac{8}{10}=-0.8\ mg/cm^2$$

47

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. $\Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = 1$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 1]$، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 1]$

$$A = -\int_0^1 (3x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x)dx = \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

48

$$A = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - (9 - 18 + 9) + (0) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{8}{3}$$

49

$$A = \int_0^1 x^3\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4}(1)^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right) = \frac{1}{4}$$

50

$$A = -\int_0^2 -x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{8}{3}$$

51

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx + \int_0^2 xe^{x^2}dx = \int_{-1}^{0} -xe^{x^2}dx + \int_0^2 xe^{x^2}dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x \Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = -1 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 4$

$$A = \int_1^0 -xe^u \times \frac{du}{2x} + \int_0^4 xe^u \times \frac{du}{2x} = \int_1^0 -\frac{1}{2}e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^u\right)\Big|_1^0 + \left(\frac{1}{2}e^u\right)\Big|_0^4 = \left(-\frac{1}{2}e^0\right) - \left(-\frac{1}{2}e^1\right) + \left(\frac{1}{2}e^4\right) - \left(\frac{1}{2}e^0\right) = -1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

Y Q 5 S

٢

✱

١

إدارة الامتحانات والاختبارات

قســم الامتحانات العامّة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٣

(وثيقة محمية/محدود)

المبحـث : الرياضيات/ الورقة الثانية/ف٢   رقم المبحث: 132   مدّة الامتحـان: س ٢ : د ٣٠

الفـــرع: (أدبي، شرعي، فندقي جامعات)   رقم النموذج: (١)   اليوم والتاريخ: الخميس ٢٠٢٣/٧/١٣

اسم الطالب: رقـم الجلوس:

ملحوظة مهمّة: أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (5) بحيث تكون إجابتك عن السؤال الأول على نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي)، وتكون إجابتك عن باقي الأسئلة على دفتر الإجابة، علمًا أن عدد صفحات الامتحان (7).

الســــــؤال الأول: (100 علامة)

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل فقرة ممّا يأتي، ثمّ ظلّل بشكل غامق الدائرة التي تشير إلى رمز الإجابة في نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي) فهو النموذج المعتمد (فقط) لاحتساب علامتك في هذا السؤال، علمًا بأن عدد فقراته (٢٥)، وانتبه عند تظليل إجابتك أن رمز الإجابة (a) على ورقة الأسئلة يقابله (أ) على ورقة القارئ الضوئي و(b) يقابله (ب)، و(c) يقابله (ج)، و(d) يقابله (د).

1) إذا كان $f(x) = -7x^{-8}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتب على الصورة:

a) $G(x) = -8x^{-7} + C$

b) $G(x) = x^{-8} + C$

c) $G(x) = -8x^{-9} + C$

d) $G(x) = x^{-7} + C$

2) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$ هو:

a) $3\sqrt[3]{x^2} + C$

b) $\sqrt[3]{x^2} + C$

c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$

d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$

3) $\int \frac{x^2-4}{x-2}\,dx$ هو:

a) $x^2 - 2x + C$

b) $x^2 + 2x + C$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

d) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

يتبع الصفحة الثانية ....

4) إذا كان $f'(x) = 12x^2 + 4x$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1, 9)$ هي:

a) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 + 5$

b) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 - 5$

c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$

d) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3$

* إذا كان $\int_{-3}^{2} g(x)dx = 2$ ، $\int_{-3}^{2} f(x)dx = -5$ ، فأجب عن الفقرتين 5 و6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-3}^{2}\big(f(x) - 2g(x)\big)\,dx$ تساوي:

a) -1

b) 1

c) -9

d) 9

6) قيمة $\int_{2}^{-3}(f(x) + 4)dx$ تساوي:

a) -25

b) 25

c) 15

d) -15

7) إذا كان $\int_{0}^{k} 6x^2dx = 16$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي:

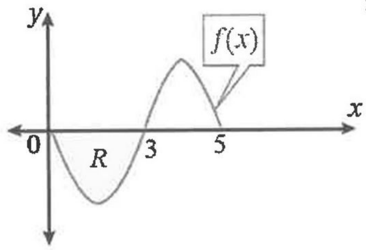
a) -2

b) 2

c) -4

d) 4

8) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ ، إذا كانت مساحة المنطقة R تساوي 5 وحدات مربعة، وكان $\int_{0}^{5} f(x)dx = -3$ ، فإن قيمة $\int_{3}^{5} f(x)dx$ تساوي:



a) -8

b) 8

c) -2

d) 2

يتبع الصفحة الثالثة ....

9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 9x - x^2$ والمحور x هو:

a) $\int_0^9 (9x - x^2)dx$

b) $\int_9^0 (9x - x^2)dx$

c) $\int_0^3 (9x - x^2)dx$

d) $\int_3^0 (9x - x^2)dx$

10) $\int 24\sin(2x + 6)dx$ هو:

a) $-24\cos(2x + 6) + C$

b) $24\cos(2x + 6) + C$

c) $-12\cos(2x + 6) + C$

d) $12\cos(2x + 6) + C$

11) $\int e^{-x}(4 + 2e^{x})dx$ هو:

a) $-4e^{-x} + C$

b) $4e^{-x} + C$

c) $4e^{-x} + 2x + C$

d) $-4e^{-x} + 2x + C$

12) $\int \frac{8x}{4 - x^2}dx$ هو:

a) $4\ln|4 - x^2| + C$

b) $-4\ln|4 - x^2| + C$

c) $8\ln|4 - x^2| + C$

d) $-8\ln|4 - x^2| + C$

13) قيمة $\int_0^1 12(x - 1)^5 dx$ هي:

a) 2

b) −2

c) 4

d) −4

يتبع الصفحة الرابعة ....

السـؤال الثاني: (32 علامة)

a) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 6t^2 - 4$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 4m ، فجد موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة. (12 علامة)

b) إذا كان $f(x) = |x - 5|$ ، فجد $\int_0^6 f(x)dx$ (9 علامات)

c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 16x$ ، والمحور x . (11 علامة)

السـؤال الثالث: (30 علامة)

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: (20 علامة)

1) $\int \left(8\cos x + \frac{3}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

2) $\int_0^1 (x^3 + 1)\sqrt{x^4 + 4x + 4}\ dx$

b) يُمثل الاقتران $R'(x) = 200 - 0.2x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) لكل قطعة من منتج تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج شهريًا، و$R(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًا من المنتج بالدينار. جد مقدار التغير في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 120 قطعة، علمًا بأن عدد القطع المبيعة الآن هو 100 قطعة. (10 علامات)

5 | 4 | ت | خ

٢ ١

إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامّة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٣/التكميلي

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات (الورقة الثانية، ف٢) رقم المبحث: 102 مدّة الامتحان: د ٣٠ : س ٢

الفرع: (أدبي، شرعي، فندقي جامعات) رقم النموذج: (١) اليوم والتاريخ: الثلاثاء ٢٠٢٤/١/٢م

اسم الطالب: رقم الجلوس:

ملحوظة مهمة: أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (5) بحيث تكون إجابتك عن السؤال الأول على نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي)، وتكون إجابتك عن باقي الأسئلة على دفتر الإجابة، علمًا أنّ عدد صفحات الامتحان (6).

السؤال الأول: (100 علامة)

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل فقرة ممّا يأتي، ثمّ ظلّل بشكل غامق الدائرة التي تشير إلى رمز الإجابة في نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي) فهو النموذج المعتمد (فقط) لاحتساب علامتك في هذا السؤال، علمًا بأنّ عدد فقراته (25)، وانتبه عند تظليل إجابتك أنّ رمز الإجابة (a) على ورقة الأسئلة يقابله (أ) على ورقة القارئ الضوئي و(b) يقابله (ب)، و(c) يقابله (ج)، و(d) يقابله (د).

1) إذا كان $f(x) = -3x^{-4}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يكتب على الصورة:

a) $G(x) = \frac{1}{x^3} + C$
b) $G(x) = -\frac{1}{x^3} + C$
c) $G(x) = 3x^{-3} + C$
d) $G(x) = -3x^{-3} + C$

2) $\int \frac{7x-2x^2}{x}\, dx$ هو:

a) $7x - 2x^2 + C$
b) $7x - x^2 + C$
c) $\frac{7}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$
d) $\frac{7}{2}x - \frac{2}{3}x^2 + C$

3) $\int x(x^4 - 3)\, dx$ هو:

a) $\frac{1}{5}x^5 - 3x + C$
b) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + C$
c) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + C$
d) $\frac{1}{6}x^6 - 3x + C$

يتبع الصفحة الثانية ....

الصفحة الثانية/ نموذج (١)

4) إذا كان $f'(x) = 3x^2 - 4$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1,0)$ هي:

a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$
b) $f(x) = x^3 - 4x - 3$
c) $f(x) = x^3 - 4x + 1$
d) $f(x) = x^3 - 4x - 1$

* إذا كان $\int_{-1}^{2} f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = -1$, $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 5$ ،

فأجب عن الفقرتين 5 و 6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-1}^{3}(2f(x) - g(x))dx$ تساوي:

a) -7
b) -6
c) 3
d) 4

6) قيمة $\int_{2}^{3}(f(x) + 3)dx$ تساوي:

a) 0
b) 2
c) 3
d) 4

7) إذا كان $\int_{k}^{2k-1} 2\, dx = 18$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي:

a) 10
b) -10
c) 8
d) -8

8) يتغير عدد السكان في إحدى القرى شهريًا بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران $P'(t) = 2t^{\frac{1}{2}}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن، $P(t)$ عدد السكان. مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الأشهر التسعة القادمة يساوي:

a) 6
b) 3
c) 36
d) 18

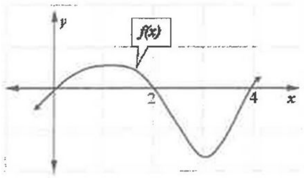
9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-2)$ والمحور x هو:

a) $-\int_{-1}^{2} f(x)dx$
b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$
c) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$
d) $-\int_{-2}^{1} f(x)dx$

يتبع الصفحة الثالثة ....

10) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ ، وكانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x تساوي 12 وحدة مساحة ، فإن قيمة $\int_2^4 f(x)dx$ تساوي:

a) 7
b) -17
c) 17
d) -7



11) $\int 3\sin(2-3x)dx$ هو:

a) $3\cos(2-3x)+C$
b) $-3\cos(2-3x)+C$
c) $\cos(2-3x)+C$
d) $-\cos(2-3x)+C$

12) $\int(9e^{-3x}+4e^2)dx$ هو:

a) $-3e^{-3x}+2e^2+C$
b) $-3e^{-3x}+4e^2x+C$
c) $-18e^{-3x}+8e^2+C$
d) $-18e^{-3x}+4e^2x+C$

13) $\int \frac{4}{(3-2x)^3}dx$ هو:

a) $\frac{-12}{(3-2x)^4}+C$
b) $\frac{24}{(3-2x)^4}+C$
c) $\frac{-2}{(3-2x)^2}+C$
d) $\frac{1}{(3-2x)^2}+C$

14) قيمة $\int_3^4 \frac{1}{9-2x}dx$ هي:

a) $-\frac{1}{2}\ln 3$
b) $\frac{1}{2}\ln 3$
c) $-2\ln 3$
d) $2\ln 3$

15) $\int \cos^5 x \sin x\, dx$ هو:

a) $-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$
b) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$
c) $-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$
d) $\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

السـؤال الثاني: (28 علامة)

a) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x) = 4\sqrt[3]{x} - 2x$ ، فما قاعدة الاقتران $f(x)$ علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(1,12)$ ؟ (8 علامات)

b) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 10 & , \quad x < 3 \\ 2x + 11 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$ ، أوجد $\int_0^4 f(x)dx$ (9 علامات)

c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 2x - x^2$ ، والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$. (11 علامة)

السـؤال الثالث: (24 علامة)

a) جد كل من التكاملات الآتية: (13 علامة)

1) $\int \left(5\cos(x + 1) + \frac{2x+3}{x^2+3x}\right) dx$

2) $\int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx$

b) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، ويُعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 2t + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 5m ، وكانت سرعته المتجهة هي 4m/s بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، فجد موقع الجُسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة. (11 علامة)