سلسلة
النصيحة في الرياضيات

تطبيقات التفاضل 3

القيم القصوى والتقعر

الأستاذ
ثامر قدورة
0787488070

أمثلة

أوراق عمل

امتحانات

مراجعات

2022

للمشاركة في الدورة الأونلاين

موقع النصيحة التعليمي

https://NaseehaMath.com/courses/tawjihi-f1

رقم التواصل على الواتس للمشتركين في الدورة

0787488070

أو على الفيس :

صفحة دورات الأستاذ ثامر قدورة

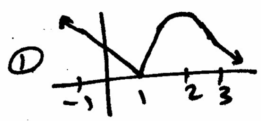
ملاحظة : بسبب ضيق الوقت اعتذر عن استقبال اسئلة غير المشتركين في الدورة ... لكن بامكانكم الاستفادة من الدوسية للدراسة الذاتية

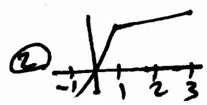
القيم القصوى والتقعر 1

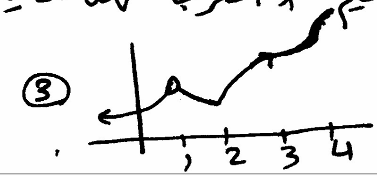
القيم الحرجة

هي قيم x التي يوجد عندها $f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غير موجودة   داخلية ضمن المجال

س ما قيم x الحرجة لكل مما يلي

① 

② 

③ 

الحل

① $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=1$

② $f'(x)=0 \Rightarrow x=\{\}$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=1$

③ $f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=2,4$

$f'(x)=0 \Rightarrow \{\}$

س جد القيم الحرجة للاقتران $f(x) = x^2-6x$

الحل $f'(x)=2x-6 \longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=\{\}$

س جد القيم الحرجة للاقتران $f(x)=x^3-3x^2+1$ حيث $x\in[1,3]$

الحل $f'(x)=3x^2-6x \Longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$

$\Rightarrow x=0,2$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=\{\}$

$\Longrightarrow \boxed{x=2}$

س جد القيم الحرجة للاقتران $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}$ في الفترة $[0,3]$

الحل $f'(x)=\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)}} \longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow \sqrt[3]{x^2-2x}=0 \Rightarrow x=0,2$

$x=\{1,2\}$

تمارين

① إذا كان $f(x)=x^3-6x^2+9x$ ، حيث $x\in[-1,2]$ ، فإن القيم الحرجة هي

a) $\{-1,1,2\}$ b) $\{1\}$ c) $\{-1,1,2,3\}$ d) none

② إذا كان $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x$ حيث $x\in[0,9]$ ، فإن مجموعة قيم x الحرجة هي

a) $\{2,3\}$ b) $\{0,2,3,9\}$ c) $\{0,9\}$ d) none

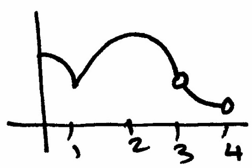
③ إذا كان $f(x)=x^2-10x$ ، فإن القيمة الحرجة هي

a) $x=5$ b) $x=0$ c) $y=5$ d) $y=0$

④ إذا كان $f(x)=x^{2/3}$ ، حيث $x\in(-1,1]$ ، فإن الاقتران قيمة حرجة عند

a) 1 b) 0 c) -1 d) none

⑤ قيم x الحرجة للاقتران المبين في الشكل هي



a) $\{0,1,2\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3\}$ d) none

① حل $f'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$
$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1,3$
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=\{\ \}$ $[-1,\ 1,\ 2],\ 3$ $\Rightarrow \boxed{x=\{1\}}$ $\boxed{b}$

② حل $f'(x)=x^2-5x+6 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$ $x=\{2,3\}$
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=\{\ \}$ $[0,\ 2,\ 3,\ 9]$ $\Rightarrow \{2,3\}$ $\boxed{a}$

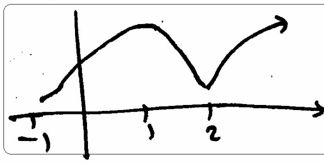
③ حل $f'(x)=2x-10 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-10=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow x=5$ $\boxed{a}$
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=\{\ \}$

④ حل $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2=0$
$\Rightarrow x=\{\ \}$
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=\{0\}$
إذن $x=\{0\}$

⑤ حل $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=1$ $\Rightarrow \{1,2\}$ $\boxed{b}$

التزايد و التناقص

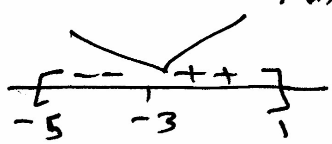
س: حدد فترات التزايد و التناقص للاقتران



الحل متزايد $(-1,1)$ و $(2,\infty)$
متناقص $(1,2)$

س: حدد فترات التزايد و التناقص للاقتران $f(x)=x^2+6x-7$
حيث $x\in[-5,1]$

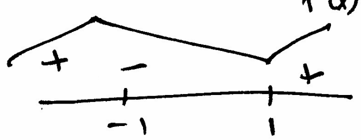
الحل $f'(x)=2x+6 \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow 2x+6=0 \Longrightarrow x=-3$
$f'(x)$ غ.م $\Longrightarrow x=$ ؟؟



$\Longrightarrow$ تناقص $(-5,-3)$
تزايد $(-3,1)$

س: حدد فترات التزايد و التناقص للاقتران $f(x)=x^3-3x+1$
حيث $x\in\mathbb{R}$

الحل $f'(x)=3x^2-3 \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow 3x^2-3=0 \Longrightarrow x=\pm1$
$f'(x)$ غ.م $\Longrightarrow x=$ ؟؟

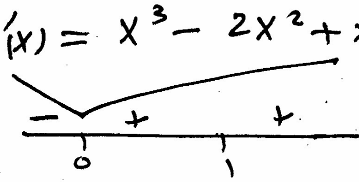


$\Longrightarrow$ تزايد $(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$
تناقص $(-1,1)$

مهم

س: حدد فترات التزايد و التناقص $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$

الحل $f'(x)=x^3-2x^2+x \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow x=0,1$



$\Longrightarrow$ تزايد $(0,\infty)$
تناقص $(-\infty,0)$

سلعم اكسترا

س) حدد فترات التزايد و التناقص $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

الحل $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{2/3}} + \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2+2x^{1/3}}{3x^{2/3}}$

$f'(x) = \frac{2+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f'(x)=0 \Rightarrow 2+2\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Rightarrow x=-1$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow x=0$

$(-1,\infty)$ تزايد $\Leftarrow$ $\quad - \;\; \underset{-1}{|} \;\; + \;\; \underset{0}{|} \;\; +$

$(-\infty,-1)$ تناقص

تمارين

① فترات التزايد للاقتران $f(x)=x^3-12x$ ، حيث $x\in[0,\infty)$ هي

a) $(2,\infty)$ b) $(0,\infty)$ c) $(-2,2)$ d) $(0,2)$

② الاقتران $f(x)=(x-1)^3$ متزايد على الفترة

a) $(1,\infty)$ b) $(-\infty,1)$ c) $\mathbb{R}$ d) none

③ حدد فترات التزايد و التناقص للاقتران $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ حيث $x\in[-2,2]$

①حل $f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f'(x)=$ غ.م $\Rightarrow x=$؟؟ $\quad \underset{0}{[} \;\; - \;\; \underset{2}{|} \;\; + \quad \Rightarrow (2,\infty) \Rightarrow \boxed{a}$

②حل $f'(x)=3(x-1)^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \;\; + \;\; \underset{1}{|} \;\; + \quad \boxed{c}\ \mathbb{R}$

$f(x)$ غ.م $\Rightarrow x=$؟؟

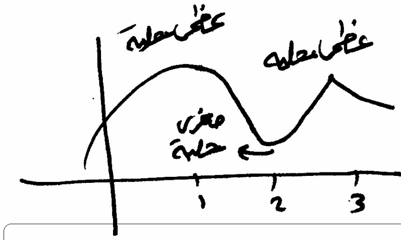
③حل $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=$؟؟

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow 3\sqrt[3]{x-1}=0 \Rightarrow x=1$

$\underset{-2}{[} \;\; - \;\; \underset{1}{|} \;\; + \;\; \underset{2}{]} \Rightarrow$ متناقص $(-2,1)$

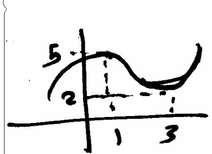
متزايد $(1,2)$

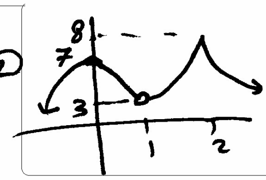
القيم القصوى المحلية



قصوى → عظمى ، صغرى

س) جد القيم القصوى المحلية

① 

② 

الحل (①)

عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=5$

صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)=2$

الحل (②)

محلية

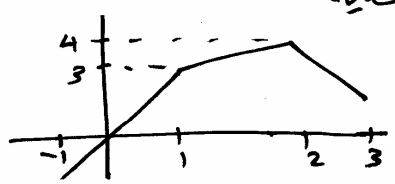
عظمى عند $x=0$ وهي $f(0)=7$

صغرى : لا يوجد

عظمى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=8$

س) نابغ

جد القيم القصوى المحلية



الحل عند $x=1$ (لا يوجد قصوى)

عند $x=2$ عظمى محلية وهي $f(2)=4$

سؤال في المثال السابق : جد القيم الحرجة

الجواب $f'(x)=0 \Longrightarrow x=$ ؟

$f'(x)$ غ م $\Longrightarrow \underline{\underline{x=1,2}}$

س) جد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ حيث $x \in [-2, 5]$

الحل: $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = \{\}$

قيمة عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0) = 1$

قيمة صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2) = -3$

س) جد القيم القصوى المحلية للاقتران (وبين نوعها) $f(x) = 6x - x^2$

الحل: $f'(x) = 6 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = \{\}$

عظمى ~~عند~~ محلية عند $x=3$ وهي $f(3) = 9$

س) ① للاقتران $f(x) = x^4 - 4x^3$ حيث $x \in [-1, 4]$ قيمة قصوى محلية عند x تساوي

a) 0 b) 3 c) $\{0, 3\}$ d) -27

② للاقتران $f(x) = x^4 - 4x^3$ حيث $x \in [-1, 4]$ قيمة قصوى محلية تساوي

a) 0 b) 3 c) $\{0, 3\}$ d) -27

الحل: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$

$\Rightarrow$ قيمة صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3) = -27$

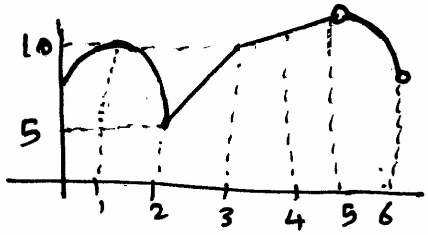
$\Rightarrow$ ① b ② d

التمارين

① جد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)=12x-x^3$ حيث $x\in[-3,3]$

② مهم وزاري جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران $f(x)=(x^2-4)^{2/3}$

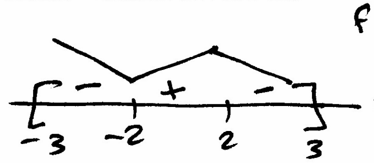
③ الشكل المجاور يبين منحنى $f(x)$ بالاعتماد عليه جد
① القيم الحرجة
② القيم القصوى المحلية
③ فترات التزايد والتناقص



حل ① $\boxed{f'(x)=12-3x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12-3x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow \{\}$

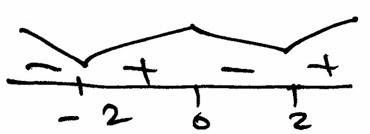


$\Rightarrow$ صغرى محلية عند $x=-2$ وهي $f(-2)=-16$

عظمى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=16$

حل ② $f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$ $\xrightarrow{f'=0}$ $x=0$

f' غ م $\sqrt[3]{x^2-4}=0 \Rightarrow x=\pm 2$



$\Rightarrow$ صغرى محلية عند $x=-2$ وهي $f(-2)=0$

عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=\sqrt[3]{16}$

صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=0$

حل ③ ① $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow x=\{2,3\}$ $\Rightarrow$ الحرجة $x=\{1,2,3\}$

② عظمى عند $x=1$ وهي $f(1)=10$

صغرى عند $x=2$ وهي $f(2)=5$

③ تزايد: $(0,1)$, $(2,5)$

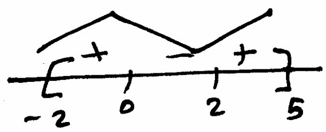
تناقص: $(1,2)$, $(5,6)$

الأستاذ ثامر قدورة
0787488070

القيم القصوى المطلقة

س) جد القيم القصوى المطلقة للاقتران $f(x)=x^3-3x^2+1$ حيث $x\in[-2,5]$

الحل $f'(x)=3x^2-6x \longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$
$\Rightarrow x=0,2$



$f(-2)=$

ط $f(-2)=-16$
عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$
صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=-3$
ط $f(5)=51$

عظمى مطلقة عند $x=5$ وهي $f(5)=51$
صغرى مطلقة عند $x=-2$ وهي $f(-2)=-16$

س) (مثال كتاب) جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للاقتران
$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ ، $[-2,2]$

الحل $f'(x)=3x^2-6x-9 \longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=\{-1,$

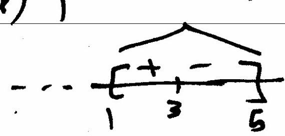
ط $f(-2)=0$
عظمى محلية عند $x=-1$ وهي $f(-1)=7$
ط $f(2)=-20$

عظمى مطلقة عند $x=-1$ وهي $f(-1)=7$
صغرى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=-20$

س) القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f(x)=6x-x^2$ حيث $x\in[1,5]$ هي:

a) 1 b) 5 c) 9 d) none

الحل ...



ط $f(1)=5$
عظمى
ص $f(5)=5$

صغرى مطلقة
$f(1)=5$ $\boxed{b}$

التمارين

① إذا كان $f(x)=12x-x^3$ حيث $x\in[-3,3]$ ، فاحسب القيم القصوى المطلقة

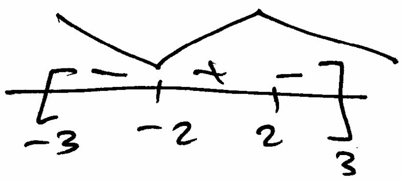
② (من الكتاب) جد القيمة الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة للاقتران $f(x)=x^{2/3}$ ، $[-1,2]$

الحل ①

$\boxed{f'(x)=12-3x^2}$

$f'=0 \Rightarrow 12-3x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f' \nexists \Rightarrow x=$ ؟؟



ع $f(-3)=-9$

صغرى محلية عند $x=-2$ وهي $f(-2)=-16$

عظمى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=16$

ص $f(3)=9$

⇐ عظمى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=16$

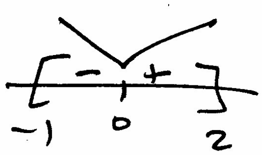
صغرى مطلقة عند $x=-2$ وهي $f(-2)=-16$

الحل ②

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'=0 \Rightarrow x=$ ؟؟

$f' \nexists \Rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$



ع $f(-1)=1$

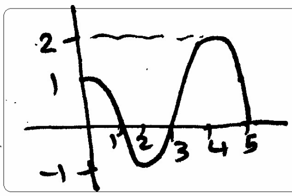
صغرى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

ع $f(2)=\sqrt[3]{4}$

عظمى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=\sqrt[3]{4}$

صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$.

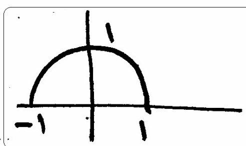
القيم القصوى من الرسم



س) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=-1$ ⟵ صغرى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=-1$

عظمى محلية عند $x=4$ وهي $f(4)=2$ ⟵ عظمى مطلقة عند $x=4$ وهي $f(4)=2$

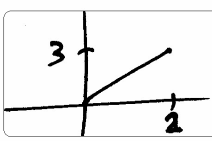


س) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

عظمى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

صغرى مطلقة عند $x=-1$، $x=1$ وهي $f(-1)=0$، $f(1)=0$

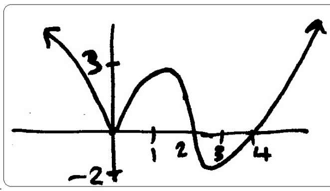


س) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

لا يوجد قصوى محلية

صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

عظمى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=3$



س) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

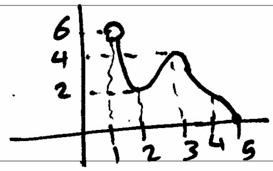
صغرى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=3$

صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)=-2$ ⟵ صغرى مطلقة

لا يوجد عظمى مطلقة

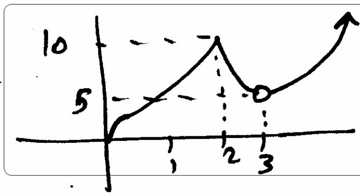
س: جد القيم القصوى المحلية والمطلقة



صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=2$
عظمى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)=4$

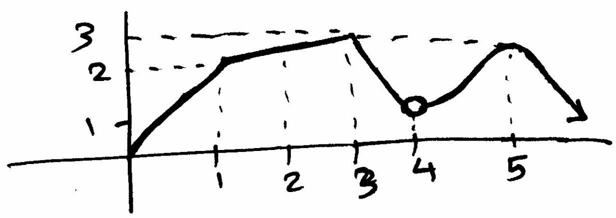
لا يوجد عظمى مطلقة
صغرى مطلقة عند $x=5$ وهي $f(5)=0$

س: جد القيم القصوى المحلية والمطلقة



عظمى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=10$
صغرى محلية: لا يوجد
صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$
عظمى مطلقة لا يوجد

تمرين: جد القيم الحرجة و القيم القصوى المحلية و القيم القصوى المطلقة



f' غ.م $\quad f'=0$

الحرجة: $x = 1, 3, 5$

القصوى المحلية:
عظمى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)=3$
عظمى محلية عند $x=5$ وهي $f(5)=3$
صغرى محلية: لا يوجد

القصوى المطلقة:
عظمى مطلقة عند $x=3$ و $x=5$ وهي $f(3)=f(5)=3$
صغرى مطلقة: لا يوجد

تحلّة ... كثير حدود

س إذا كان $f(x) = (1-x^2)^3$ حيث $x \in [-1,2]$ ، جد
1. القيم الحرجة
2. فترات التزايد والتناقص
3. القيم القصوى

الحل
$f'(x) = 3(1-x^2)^2(-2x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(1-x^2)^2(-2x) = 0$ → $(1-x^2)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
→ $-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f'(x) \nexists \Rightarrow x = \{\}$

$[\ +\ |\ -\ |\ -\ ]$ عند $-1, 0, 1, 2$ $\Rightarrow$ حرجة $x = \{0, 1\}$

تزايد $(-1, 0)$
تناقص $(0, 2)$

القصوى
ص $f(-1) = 0$
عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$
ص $f(2) = -27$

عظمى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=1$
صغرى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=-27$

تمرين

إذا كان $f(x)=(2-x)^4$ ، حيث $x\in[0,3]$

نجد ① القيم الحرجة

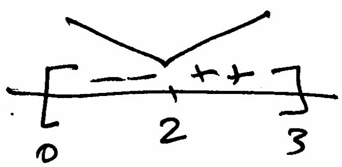
② فترات التزايد والتناقص

③ القيم القصوى (مبيناً نوعها)

حل

$$f'(x)=4(2-x)^3(-1)=-4(2-x)^3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -4(2-x)^3=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$$



حرجة $x=\{2\}$

تزايد $(2,3)$

تناقص $(0,2)$

القصوى

ع : $f(0)=16$

صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=0$

ع $f(3)=1$

∴ صغرى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=0$

عظمى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=16$

امتحانات

سنوات 2005

إذا كان $f(x) = x(2-x)^3$ حيث $x \in [-1,4]$ ، جد:

a) الفترة (الفترات) التي يكون فيها $f(x)$ متزايداً

b) القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة للاقتران

ثامر ← c) القيم الحرجة

الحل

$$f'(x) = x \cdot 3(2-x)^2(-1) + (2-x)^3$$

$$= -3x(2-x)^2 + (2-x)^3$$

$(2-x)^2$ عامل مشترك

$$= (2-x)^2\left(-3x + (2-x)\right)$$

$$\boxed{f'(x) = (2-x)^2(-4x+2)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2-x)^2(-4x+2) = 0$$

$$(2-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$-4x+2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$[-1$		$\frac{1}{2}$		2		$4]$
	$+$		$-$		$-$	

a) متزايد $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

b)

ص: $f(-1) = -27$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$ وهي عظمى محلية عند $x = \frac{1}{2}$

ص $f(4) = -32$

صغرى مطلقة عند $x = 4$ وهي $f(4) = -32$

عظمى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ وهي $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

c) الحرجة $x = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

القيم القصوى والتقعر 2

تحدي التحليل

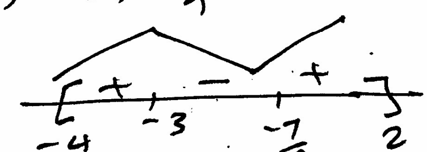
س: إذا كان $f(x)=(x-2)^5(x+3)^4$ ، فجد ① القيم الحرجة
② فترات التزايد والتناقص
③ القيم القصوى المحلية

الحل $f'(x)=(x-2)^5\cdot 4(x+3)^3+(x+3)^4\cdot 5(x-2)^4$

$$=(x-2)^4(x+3)^3\left(4(x-2)+5(x+3)\right)$$

$$=(x-2)^4(x+3)^4(9x+7)$$

$f'=0 \Rightarrow x=2\ ,\ -3\ ,\ \frac{-7}{9}$



الحرجة $x=\{-3, \frac{-7}{9}\}$

تزايد $(-4,-3)\ (\frac{-7}{9},2)$

تناقص $(-3,\frac{-7}{9})$

عظمى محلية عند $x=-3$ وهي $f(-3)=$

صغرى محلية عند $x=\frac{-7}{9}$ وهي $f(\frac{-7}{9})=$

تحدي الترتيب

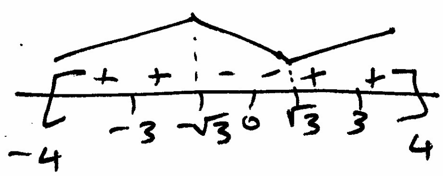
إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x^3-9x}$ ، حيث $x\in[-4,4]$

جد ① فترات التزايد ② القيم الحرجة ③ القصوى المحلية

الحل $f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-9x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-9) = \frac{3x^2-9}{3(x^3-9x)^{\frac{2}{3}}}$

$f'=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

f' غ م $\Rightarrow x=0, \pm 3$



تزايد $[-4,-\sqrt{3}]$ $(\sqrt{3},4)$

تناقص $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

حرجة $x=-3, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 3$

قصوى $f(-\sqrt{3})=$ وهي عظمى محلية عند $x=-\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3})=$ وهي صغرى محلية عند $x=\sqrt{3}$

الجذر التربيعي

س مفاجأة: قيم x الحرجة للاقتران $f(x)=x\sqrt{x-1}$ هي:

a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $1, \frac{2}{3}$ d) $\{\}$

الحل: المجال $\sqrt{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow [1,\infty)$

$$f'(x) = x\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}\cdot 1 = \frac{x}{2\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{1}\cdot\frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x+2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} \xrightarrow{f'=0} x=\frac{2}{3}$$

$$2\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{غ.م}} x=1$$

$\Rightarrow x=\{\}$ $\boxed{d}$

س جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x)=x-\sqrt{x}$

الحل: $\sqrt{x} \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow [0,\infty)$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{f'=0} \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{f'\ \text{غ.م}} \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$$

$\Longrightarrow$ تناقص $(0, \frac{1}{4})$

تزايد $(\frac{1}{4}, \infty)$

س للاقتران $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ قيمة صغرى مطلقة عند $x=$ ....

الحل: مجال $\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x=\{\} \Rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow x=0$$

$$2\sqrt{x^2+1} \longrightarrow x=\{\}$$

$\Longrightarrow$ صغرى مطلقة عند: $x=0$

تمارين

① إذا كان $f(x)=\sqrt{x}\,(x-1)$ ، جد القيم القصوى المحلية مبيناً نوعها

② إذا كان $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، جد القيم القصوى مبيناً نوعها

الحل ①

مجال $\sqrt{x} \Rightarrow x=0$ ، $\xrightarrow[0]{\;+\;}$ $\Rightarrow [0,\infty)$

$$f(x)=x^{3/2}-x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\boxed{\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$f'(x)$ غ م $\Rightarrow 2\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

0		$\frac{1}{3}$	
	$-$		$+$

$\boxed{\text{صغرى محلية عند } x=\frac{1}{3} \text{ وهي } f(\frac{1}{3})=\frac{-2}{3\sqrt{3}}}$

لبس

عظمى محلية : لا يوجد

الحل ②

مجال $\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$ ، $-$ | -2 | $+$ | 2 | $-$

$\Rightarrow [-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$f'=0 \rightarrow x=0$

f' غ م $\rightarrow x=\pm 2$

-2		0		2
	$+$		$-$	

صغرى $f(-2)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{عظمى محلية عند } x=0 \text{ وهي } f(0)=2}$

صغرى $f(2)=0$

$\therefore$ $\boxed{\text{عظمى مطلقة عند } x=0 \text{ وهي } f(0)=2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{صغرى مطلقة عند } x=\pm 2 \text{ وهي } f(\pm 2)=0}$

النسبي ← مجاله $\mathbb{R}-\{$أصفار المقام$\}$

س) إذا كان $f(x)=\frac{x}{1-x}$ ، جد

① القيم الحرجة ② فترات التزايد و التناقص ③ القيم القصوى

الحل المجال $1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(1-x)(1)-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$f'=0 \Rightarrow x=\{\}$

f' غ.م $\Rightarrow x=1$ ⟶ $+++ \;\; 1 \;\; +++$

① الحرجة $x=\{\}$

② التزايد $(-\infty,1)$ و $(1,\infty)$

التناقص : لا يوجد

③ القصوى : لا يوجد

س) إذا كان $f(x)=\frac{x}{1-x}$ ، حيث $x\in[2,4]$ ، جد

① القيم الحرجة ② فترات التزايد والتناقص ③ القيم القصوى

الحل $x\in[2,4]$ (لا نحسب مجال لأنه أعطانا فترة) و $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow$ $[\,2 \;\; ++++ \;\; 4\,]$

$\boxed{\text{حرجة } x=\{\}}$ و $\boxed{\text{تزايد } (2,4)}$ و تناقص لا يوجد

ص $f(2)=-2 \Longrightarrow f(2)=-2$ وهي صغرى مطلقة عند $x=2$

ع $f(4)=-\frac{4}{3} \Longrightarrow f(4)=-\frac{4}{3}$ وهي عظمى مطلقة عند $x=4$

التمارين

① إذا كان $f(x) = x + \frac{9}{x}$ ، جد

① القيم الحرجة ② فترات التزايد والتناقص ③ القيم القصوى المحلية

② إذا كان $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، جد:

① القيم الحرجة ② فترات التزايد والتناقص ③ القيم القصوى المحلية

③ (استفيد من السؤال السابق عادي)

إذا كان $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، حيث $x \in [-2,2]$ ، جد

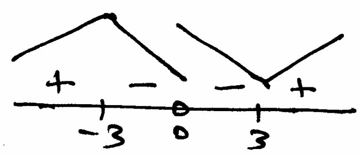
القيم القصوى المطلقة للاقتران

الحل المجال $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}$$

$\xrightarrow{f'=0}$ $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm 3$

$\xrightarrow{f'\ \text{غ م}}$ $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$



$\Rightarrow$ حرجة $x = \{-3, 3\}$

تزايد $(-\infty, -3)(3, \infty)$

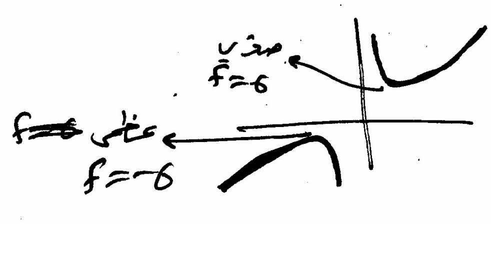
تناقص $(-3, 0)(0, 3)$

عظمى محلية عند $x = -3$ وهي $f(-3) = -6$

صغرى محلية عند $x = 3$ وهي $f(3) = 6$

إذا سألت حالك: كيف العظمى ($f=-6$) أصغر من الصغرى ($f=6$) ؟ !

الجواب: عادي



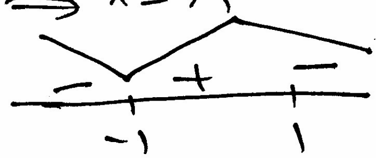
الحل

المجال $x^2+1=0 \Rightarrow x=\{\} \Longrightarrow \mathbb{R}$ المجال

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}} \xrightarrow{f'=0} 1-x^2=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$\xrightarrow{f' \text{ غ م}} x^2+1=0 \Longrightarrow x=\{\}$$



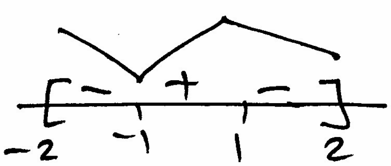
حرجة $x=\{-1,1\}$

تزايد $(-1,1)$

تناقص $(-\infty,-1)(1,\infty)$

قصوى
صغرى محلية عند $x=-1$ وهي $f(-1)=\frac{-1}{2}$
عظمى محلية عند $x=+1$ وهي $f(+1)=\frac{+1}{2}$

الحل
③



ع $f(-2)=\frac{-2}{5}$
صغرى محلية عند $x=-1$ وهي $f(-1)=\frac{-1}{2}$
عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=\frac{1}{2}$
ص $f(2)=\frac{2}{5}$

عظمى مطلقة (ومحلية) عند $x=+1$ وهي $f(1)=\frac{1}{2}$
صغرى مطلقة (ومحلية) عند $x=-1$ وهي $f(-1)=\frac{-1}{2}$

اللوغاريتمي

من كتاب التمارين

إذا كان $f(x)=\ln(x^2-3x+4)$ ، جد القيم القصوى المحلية

الحل

المجال $x^2-3x+4=0 \Rightarrow x=\{\} \Longrightarrow$ ++++ $\Longrightarrow$ المجال $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+4} \xrightarrow{f'=0} x=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{f' \text{ غ.م}} x=\{\}$$

--- $\frac{3}{2}$ +++

صغرى محلية عند $x=\frac{3}{2}$ وهي $f(\frac{3}{2})=\dots$

س جد فترات التزايد و التناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى المحلية

$f(x)=x\ln x$

الحل مجال $\ln x \Rightarrow x>0 \Rightarrow$ $(0,\infty)$

$f'(x)=\frac{x}{x}+\ln x\cdot 1=1+\ln x \longrightarrow =0 \Rightarrow \ln x=-1$

$x=e^{-1}$

$\Rightarrow$ حرجة $\Rightarrow x=e^{-1}$

(e^{-1},∞) تزايد $(0,e^{-1})$ تناقص

صغرى محلية عند $x=e^{-1}$ وهي $f(e^{-1})=-e^{-1}$

س جد القيم القصوى المطلقة للاقتران $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ حيث $x\in[1,3]$

الحل $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} \longrightarrow =0 \Rightarrow x=e$

$\longrightarrow x=0$

ص $f(1)=0$

عظمى مطلقة عند $x=e$ وهي $f(e)=\frac{1}{e}$ $\Longleftarrow$

ص $f(3)=\frac{\ln 3}{3}$

صغرى مطلقة عند $x=1$ وهي $f(1)=0$

عظمى مطلقة عند $x=e$ وهي $f(e)=\frac{1}{e}$

تمارين

① جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x)=\ln(2-x)$

المجال: $2-x>0 \Rightarrow x=2$ $\underset{2}{++\,|\,--}$ $\Rightarrow (-\infty,2)$

$f'(x)=\dfrac{-1}{2-x}$ $\xrightarrow{f'=0} x=\varnothing$ $\xrightarrow{f'\text{ غ.م}} x=2$

$---)$ at 2 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{تناقص } (-\infty,2)}$

② جد القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f(x)=\ln(x^2+1)$

المجال: $x^2+1>0 \Rightarrow x=\varnothing$ $++++++$ $\Rightarrow \mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\xrightarrow{f'=0} x=0$ $\xrightarrow{f'\text{ غ.م}} x=\varnothing$

$--\,|\,++$ at 0

صغرى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

⇐ صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

③ جد القيم الحرجة للاقتران $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$ حيث $x\in[1,4]$

$$f'(x)=\frac{x^3\frac{1}{x}-\ln x\cdot 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2(1-3\ln x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$; $1-3\ln x=0 \Rightarrow \ln x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=e^{\frac{1}{3}}$

f' غ.م $\Rightarrow x^6=0 \Rightarrow x=0$

$[\,1 \quad e^{1/3} \quad 4\,] \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{e}}$ حرجة

④ إذا كان $f(x)=x^3\ln x$ ، جد
① القيم الحرجة
② القيم القصوى المحلية
③ فترات التزايد والتناقص

الحل

المجال $x>0 \Rightarrow (0,\infty)$

$$f'(x) = x^3\frac{1}{x} + \ln x \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2\ln x$$

$$\boxed{f'(x) = x^2(1+3\ln x)} = 0 \qquad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1+3\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{x = e^{-\frac{1}{3}}}$$

$\Rightarrow$ $- - -$ | $+ + + +$

0 $\quad e^{-\frac{1}{3}}$

عوّض e^{-1} $\quad$ عوّض e^{5}

الحرجة $x = e^{-\frac{1}{3}}$

القصوى

$f(e^{-\frac{1}{3}}) = \frac{-1}{3e}$ وهي صغرى محلية عند $x = e^{-\frac{1}{3}}$

تناقص $(0, e^{-\frac{1}{3}})$

تزايد $(e^{-\frac{1}{3}}, \infty)$

امتحان

① صيفي 2012

إذا كان $f(x) = x + \frac{9}{x+2}$ حيث $x \in [-1, 4]$

جد كلاً مما يأتي:

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران f

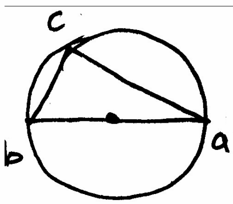
2) القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران f

② صيفي 2018

إذا كان $f(x) = \sqrt{x^2 - 16x}$ ، فإن مجموعة قيم x التي يكون عندها للاقتران $f(x)$ قيم حرجة:

a) ϕ b) $\{8\}$ c) $\{0, 16\}$ d) $\{0, 8, 16\}$

③ صيفي 2006



في الشكل المجاور $\overline{ab}$ قطر في الدائرة طوله $(20\ cm)$. تتحرك النقطة c على القوس $\widehat{ab}$ بحيث يزيد قياس الزاوية cba بمعدل $\frac{\pi}{60}\ rad/min$. احسب معدل التغير في مساحة المثلث abc عندما يكون قياس الزاوية cba يساوي $\frac{\pi}{3}$

④ 1997

جد معادلة المماس لمنحنى $y = \frac{1}{x}$ حيث $x > 0$ ، والذي يمر بالنقطة $(0, 1)$

حل ②

$$f(x) = 1 - \frac{9}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-9}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+4-9}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}}$$

$\xrightarrow{f'=0} (x+5)(x-1)=0 \Rightarrow x=-5,1$

$\xrightarrow{f' \text{ غ م}} (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$ [− − − − | + + +]

$-1 \qquad 1 \qquad 4$

تناقص $(-1,1)$

تزايد $(1,4)$

$f(-1)=8$ ع

$f(1)=4$ صغرى محلية عند $x=1$ وهي

$f(4)=\frac{11}{2}$ ع

عظمى مطلقة عند $x=-1$ وهي $f(-1)=8$

صغرى مطلقة عند $x=1$ وهي $f(1)=4$

حل ② المجال $x^2-16x \geq 0 \Rightarrow x(x-16) \geq 0 \Rightarrow x=0,16$

$+ \quad - \quad +$ ($0 \quad 16$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{المجال } (-\infty,0] \cup [16,\infty)}$

$$f'(x) = \frac{2x-16}{2\sqrt{x^2-16x}}$$

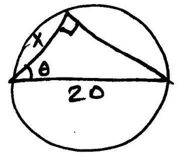
$\xrightarrow{f'=0} x=8$

$\xrightarrow{f' \text{ غ م}} x=0,16$

$\longleftarrow]\,xxx\,[\longrightarrow$ ($0 \quad 16$)

$\Rightarrow$ الحرجة $x = ؟؟$ $\boxed{9}$

حل ③



$A = \frac{1}{2}(x)(20)\sin\theta$ | $\frac{x}{20} = \cos\theta$

$x = 20\cos\theta$

$A = \frac{1}{2}(20\cos\theta)(20\sin\theta)$

$\boxed{A = 200\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{60}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = ?$

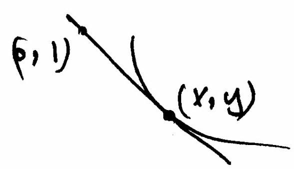
$\frac{dA}{dt} = 200\sin\theta\left(-\sin\theta\frac{dA}{dt}\right) + \cos\theta\left(200\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 200\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{60}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(200)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{60}$

$= -\frac{3\cdot200}{2\cdot2\cdot60}\pi + \frac{200\pi}{2\cdot2\cdot60}$

$\boxed{= -\frac{5\pi}{3}}$

حل ④



$m = y' = \frac{-1}{x^2}$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-1}{x-0} = \frac{\frac{1}{x}-1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow \frac{-1}{\cancel{x^2}} = \frac{1-x}{\cancel{x^2}}$

(السؤال $x \neq 0$ ⟸ اختصر عادي)

$\Longrightarrow \boxed{x=2}$

$\boxed{y} = f(2) = \frac{1}{2}$

$m = f'(2) = \frac{-1}{(2)^2} = -\frac{1}{4}$

$\Longrightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow \boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)}$

مكثف قابلية الاشتقاق

اكتشعب

س) ضع دائرة) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 , & x\geq 2\\ 12x+1 , & x<2\end{cases}$ ، فإن $f'(2)$ تساوي

a) 2   b) 12   c) غير موجودة   d) none

الحل
$f(2)=3(2)^2=12$

$\lim_{x\to 2^+} 3x^2 = 12$

$\lim_{x\to 2^-} 12x+1 = 25$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2}$ غ م $\Rightarrow$ غير متصل $\Rightarrow$ غير قابل للاشتقاق

$\Rightarrow f'(2)$ غ م $\boxed{C}$

س) حل) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 , & x\geq 2\\ 12x+1 , & x<2\end{cases}$ ، فابحث في قابلية $f(x)$ للاشتقاق عند $x=2$

الحل ($f(2)=12$, $\lim\limits_{+}=12$; $\lim\limits_{-}=25$)

التنبيه: في أسئلة الحل
أي سؤال "ابحث في قابلية الاشتقاق"
أو أي سؤال "المشتقة متشعب"
أو أي سؤال "مشتقة اطلق"
$\Leftarrow$ تعريف المشتقة

الحل
$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(2+h)^2-3(2)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(4+4h+h^2)-12}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{12}+12h+3h^2-\cancel{12}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(12+3h)}{\cancel{h}}=12$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{12(2+h)+1-3(2)^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{12h+13}{h}$$
$$=\frac{13}{0^-}=-\infty$$
$\Rightarrow$ غير قابل للاشتقاق (لأنه غير متصل)

س) (ضع دائرة) إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x\neq 3 \\ 2x & , x=3 \end{cases}$ ، فإن $f'(3)$ تساوي

a) 27 b) 6 c) 2 d) غير موجودة

الحل $f(3)=6$ $\Rightarrow f(3)\neq \lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow$ غير متصل $\Rightarrow$ غير قابل

$\lim_{x\to 3} x^3 = 27$ $\Rightarrow f'(3)$ غير موجودة $\Rightarrow \boxed{d}$

س) (حل) إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x\neq 3 \\ 2x & , x=3 \end{cases}$ ، جد $f'(3)$

الحل $\left(f(3)=6 \quad , \quad \lim_{x\to 3} x^3 = 27\right)$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^3-2(3)}{h}$$

$\to \lim_{h\to 0^+} = \frac{27-6}{0^+} = +\infty$

$\to \lim_{h\to 0^-} \frac{27-6}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow$ غير قابل للاشتقاق $\Rightarrow f'(3)$ غ م
(لأنه غير متصل)

الجذر الفردي

س ابحث في قابلية $f(x)=(x-4)^{\frac{1}{5}}$ للاشتقاق عند $x=4$

الحل $f'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^{\frac{1}{5}}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\frac{4}{5}}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h^{\frac{4}{5}}}=\infty$

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{h^{\frac{4}{5}}}=\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\frac{4}{5}}}=\infty \Rightarrow f'(4)$ غ.م

(مماس رأسي)

الحطلق

س ابحث في قابلية $f(x)=|x-3|$ للاشتقاق عند $x=3$

الحل $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$

$f'_+(3)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{+h}{h}=1$

$f'_-(3)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1$

$\Longrightarrow f'_+(3)\neq f'_-(3)$

$\Rightarrow f'(3)$ غ.م $\Rightarrow$ غير قابل

(رأس حاد)

س إذا كان $f(x)=x|x|$ ، جد $f'(0)$ (الكتاب: أثبت أن $f'(0)$ موجودة)

الحل $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}|h|=0$

$\Longrightarrow f'(0)=0$

تمارين

① إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2+2x &, x\geq 1 \\ 4x-1 &, x<1 \end{cases}$ ، فجد $f'(1)$

② إذا كان $f(x)=|x^2-3x|$ ، ابحث في قابلية للاشتقاق عند $x=3$

③ أثبت أن للاقتران $f(x)=\sqrt[3]{x-a}$ مماس رأسي عند $x=a$
باستخدام تعريف المشتقة

④ ابحث في قابلية $f(x)=\frac{3}{x}$ للاشتقاق عند $x=-2$
باستخدام تعريف المشتقة

حل ①

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2+2(1+h)-(1^2+2(1))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2+2+2h-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4(1+h)-(1^2+2(1))}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4h}{h}=4$$

$$\Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)=4 \Longrightarrow f'(1)=4$$

② حل $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(3+h)^2-3(3+h)| - |3^2-3(3)|}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{|9+6h+h^2-9-3h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^2+3h|}{h}$

$f'_+(3) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h||h+3|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{+h|h+3|}{h} = |0+3| = 3$

$f'_-(3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h||h+3|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h|h+3|}{h} = -|0+3| = -3$

$\Rightarrow f'_+(3) \neq f'_-(3) \Longrightarrow f'(3)$ غ م $\Longrightarrow$ غير قابل

② حل $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{a+h-a} - \sqrt[3]{a-a}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$

$\Longrightarrow$ مماس رأسي

$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$

الحل ④ $f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{-2+h} - \frac{3}{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{h-2}+\frac{3}{2}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{6+3(h-2)}{2(h-2)h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{2(h-2)\cancel{h}} = \frac{3}{2(-2)} = \frac{-3}{4}$

قابل للاشتقاق عند $x=-2$

نقاط عدم القابلية

س) قيم x التي يكون عندها $f(x)=\frac{x-3}{x^2-5x+6}$ غير قابل للاشتقاق هي: ـــــ

غير متصل عند اصفار المقام f الحل $\Rightarrow x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\Rightarrow \boxed{x=2,3}$

س) قيم x التي يكون عندها الاقتران $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x}$ غير قابل للاشتقاق هي: ـــــ

الحل $f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-3x)^{-\frac{2}{3}}(2x-3)=\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}$

غير قابل عند اصفار مقام $f'(x)$ $\Rightarrow \sqrt[3]{x^2-3x}=0 \Rightarrow x(x-3)=0$

$\Rightarrow \boxed{x=0,3}$

س) جد قيم x التي تكون $f(x) = |x^2 - 4|$ غير قابل للاشتقاق عندها

نقاط التشعب $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$\boxed{x=2}$ $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(2+h)^2 - 4| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^2+4h|}{h}$

$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|\,|h+4|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{+h}{h}|h+4| = |4| = 4$

$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\,|h+4|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h}|h+4| = -|4| = -4$

$f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow f'(2)$ غير موجود $\Rightarrow$ غير قابل عند $x=2$

$\boxed{x=-2}$ $f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^2 - 4h|}{h}$

$f'_+(-2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|\,|h-4|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{+h\,|h-4|}{h} = +|-4| = 4$

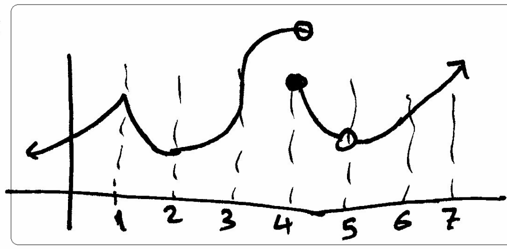
$f'_-(-2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\,|h-4|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\,|h-4|}{h} = -|-4| = -4$

$f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2)$ غير موجود $\Rightarrow$ غير قابل عند $x=-2$

$\Rightarrow$ غير قابل للاشتقاق عند $x = -2, 2$

حذار

س جد النقاط التي يكون عندها



غير قابل عند $x=1$ لانه رأس حاد $(f'_+ \neq f'_-)$

غير قابل عند $x=3$ لانه مماس رأسي

غير قابل عند $x=4$ لانه غير متصل

غير قابل عند $x=5$ لانه غير متصل

تمارين

① الاقتران $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ غير قابل للاشتقاق عند x تساوي

a) 1   b) ± 1 c) 0   d) none

② الاقتران $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$ غير قابل للاشتقاق عند x تساوي

a) 1   b) ± 1 c) 0   d) none

③ الاقتران $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}+\frac{5}{x+1}$ غير قابل للاشتقاق عند

a) 1   b) ± 1 c) -1 d) none

④ جد قيم x التي يكون $f(x)=|x^3-8|$ غير قابل للاشتقاق عندها

① حل $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \xrightarrow{f' \text{ غ.م}} 3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ $\boxed{b}$

② حل $f(x)=\frac{2}{x^2+1} \xrightarrow[\text{غير متصل}]{f' \text{ غ.م}} x^2+1=0 \Rightarrow x=\{\} \Rightarrow \boxed{d}$

③ حل $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}+\frac{5}{x+1} \xrightarrow[\text{غ.م} \Leftarrow]{\text{غير متصل}} x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x-1}+\frac{5}{(x+1)^2} \xrightarrow{\text{ليس فيها مقام}} \Rightarrow x=\{\}$ $\boxed{c}$

حل

نقاط التشعب $\Rightarrow x^3-8=0 \Rightarrow x=2$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|(2+h)^3-8|-|8-8|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|((2+h)-2)((2+h)^2+2(2+h)+4)|}{h}$$

فرق مكعبين

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot|(2+h)^2+2(2+h)+4|}{h}$$

$$\Rightarrow f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{+\cancel{h}\,|(2+h)^2+2(2+h)+4|}{\cancel{h}}=+\,4+4+4=12$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\cancel{h}\,|(2+h)^2+2(2+h)+4|}{\cancel{h}}=-(4+4+4)=-12$$

$\Rightarrow f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow f'(2)$ غ م $\Rightarrow$ غير قابل

$\boxed{\text{عند } x=2}$

تحاصيل

س) إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2+2x , & x \geq 1 \\ ax+b , & x<1 \end{cases}$ ، فجد قيم a و b اللتان تجعلان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x=1$

الحل

قابل $\Leftarrow$ متصل $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} x^2+2x = \lim\limits_{x\to 1^-} ax+b$

$$\Rightarrow \boxed{a+b=3}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \ldots\ldots = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a(1+h)+b-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{a+ah+b-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\overset{3}{(a+b)}+ah-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{ah}{h} = a$$

قابل $\Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 4=a \Rightarrow \boxed{a=4}$

$$\Rightarrow 4+b=3 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

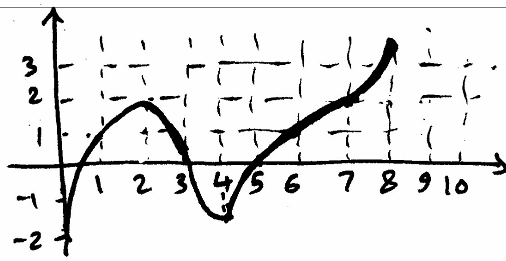
القيم القصوى والتقعر 3

التقعر والانعطاف

نقطة انعطاف

مقعر للأسفل   مقعر للأعلى

س/ في الشكل المجاور حدد
① فترات التقعر للأعلى والأسفل
② نقاط الانعطاف



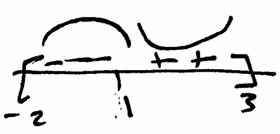
الحل/ مقعر للأعلى $(3,4)$ $(7,8)$
مقعر للأسفل $(0,3)$ $(4,7)$
نقاط انعطاف $\{(3,0) , (7,2)\}$

مقعر للأعلى $++++$ ← f'' موجب
مقعر للأسفل $----$ ← f'' سالب
انعطاف $++\ ---\ ++$ عندما يغير f'' اشارته

الرأس الحاد ليس انعطاف

س/ إذا كان $f(x)=x^3-3x^2+4$ حيث $x\in[-2,3]$ ، فجد
① فترات التقعر للأعلى والأسفل
② نقاط الانعطاف

الحل/ $f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow \boxed{f''(x)=6x-6} \rightarrow f''=0 \Rightarrow x=1$
$f''\nexists \Rightarrow x=\nexists$



مقعر للأسفل $(-2,1)$
مقعر للأعلى $(1,3)$
انعطاف : $(1,f(1))=(1,2)$

س: إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ، جد
① فترات التقعر للأعلى والأسفل ② نقاط الانعطاف

الحل: $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}}$

$\cancel{f''(x)=0} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}}$

$f''=0 \Rightarrow x=؟؟$

f'' غ م $\Rightarrow 9\sqrt[3]{(x-1)^5}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$+ + + + \quad | \quad - - - -$ ، 1

$\Rightarrow$ تقعر للأعلى $(-\infty, 1)$

تقعر للأسفل $(1, \infty)$

انعطاف $(1, f(1))=(1, 0)$

س: إذا كان $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$ ، جد
① فترات التقعر للأعلى والأسفل ② نقاط الانعطاف

الحل: $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-2}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}}}$

$f''=0 \Rightarrow ؟؟$

f'' غ م $\Rightarrow 9(x-1)^{\frac{4}{3}}=0 \Rightarrow x=1$

$- - - - \quad | \quad - - - -$ ، 1

$\Rightarrow$ تقعر للأسفل $(-\infty, \infty)$

لا يوجد : تقعر للأعلى

لا يوجد : انعطاف

س: إذا كان $f'(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ ، فإن قيم x التي يوجد عندها انعطاف هي

a) 0 b) ± 1 c) $0, \pm 1$ d) ؟؟

الحل: $f''(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ $\xrightarrow{f''=0} x=0$ ، $\xrightarrow{f''\text{ غ م}} x=\pm 1$

$\Rightarrow$ $- \ | \ - \ | \ + \ | \ +$ عند -1 ، 0 ، 1

$\rightarrow x=0$ ، $\boxed{a}$

تمارين

① إذا كان $f(x)=x^3-6x^2$ ، جد
① فترات التقعر للاعلى والاسفل ② نقطة الانعطاف

② إذا كان $f(x)=(x-3)^4$ ، جد ① فترات التقعر للاعلى والاسفل
② نقطة الانعطاف

③ تحدي إذا كان $f(x)=x^{2/3}-x^{1/3}+2$ ، فجد
① فترات التقعر للاعلى والاسفل ② نقاط الانعطاف

حل ①

$f'(x)=3x^2-12x \Rightarrow \boxed{f''(x)=6x-12}$ ، $f''=0 \Rightarrow x=2$ ، f'' غ م $\Rightarrow x=\{\}$

$- - - \;|\; + + +$ (عند 2)

$\Rightarrow$ مقعر للاعلى $(2,\infty)$
مقعر للاسفل $(-\infty,2)$
انعطاف $(2,f(2))=(2,-16)$

حل ②

$f'(x)=4(x-3)^3 \Rightarrow \boxed{f''(x)=12(x-3)^2}$ ، $f''=0 \Rightarrow x=3$ ، f'' غ م $\Rightarrow \{\}$

$\Rightarrow + + \;|\; + +$ (عند 3)

تقعر للاعلى: $(-\infty,\infty)$
لا يوجد: تقعر للاسفل
لا يوجد: انعطاف

حل ③

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-4/3}+\frac{2}{9}x^{-5/3}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9x^{4/3}}\cdot\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}}+\frac{2}{9x^{5/3}}=\boxed{\frac{-2x^{1/3}+2}{9x^{5/3}}}$

$f''=0 \Rightarrow -2x^{1/3}+2=0 \Rightarrow x^{1/3}=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

f'' غ م $\Rightarrow 9x^{5/3}=0 \Rightarrow x=0$

$- - \;|\; + + + \;|\; - -$ (عند 0 و 1)

مقعر للاسفل $(-\infty,0)(1,\infty)$
مقعر للاعلى $(0,1)$

انعطاف: $\{(0,f(0)),(1,f(1))\}$
$\Rightarrow \{(0,2),(1,2)\}$

الفرق بين النسبي و الجذر الفردي

س) لماذا كان $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ، فجد نقاط الانعطاف و فترات التقعر

الحل $f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2} \Longrightarrow f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$

$f''=0 \Rightarrow \{\}$

f'' غ.م $\Rightarrow x=2$

المجال $\mathbb{R}-\{2\}$

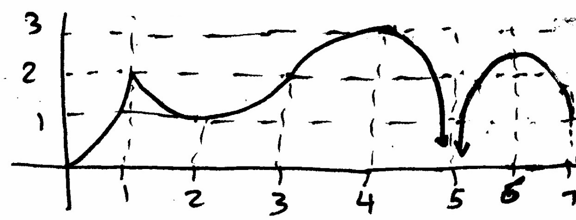
$- - - \quad 2 \quad + + +$

مقعر للأعلى : $(2,\infty)$

مقعر للأسفل : $(-\infty,2)$

انعطاف : لا يوجد

س) الشكل المجاور يمثل منحنى f بالاعتماد عليه ، جد
① فترات التقعر للأعلى والأسفل
② نقاط الانعطاف



الحل مقعر للأعلى (0و3) / مقعر للأسفل (3و5) / انعطاف (3و2)

س) جد فترات التقعر للاقتران

① $f(x)=\frac{1}{x^2}$

المجال $\mathbb{R}-\{0\}$

الحل $f'(x)=-2x^{-3}$

$\boxed{f''(x)=\frac{6}{x^4}}$ $\rightarrow \{\}$ ، $\rightarrow x=0$

$+ + \quad 0 \quad + +$

للأعلى $(-\infty,0)\ (0,\infty)$

للأسفل لا يوجد

② $f(x)=x^{2/3}$

الحل $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}$

$\boxed{f''(x)=\frac{-2}{9x^{4/3}}}$ $\rightarrow \{\}$ ، $\rightarrow x=0$

$- - \quad 0 \quad - -$

للأسفل $(-\infty,\infty)$

التمارين

① إذا كان $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، جد ① فترات التقعر للأعلى والأسفل
② نقاط الانعطاف

② تحدي: إذا علمت أن $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

① أثبت أن $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

② فترات التقعر للأعلى والأسفل ③ نقاط الانعطاف

الحل ① المجال $R - \{0\}$

$f' = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2} \Longrightarrow f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$\xrightarrow{f''=0}$ ∅

$\xrightarrow{f''\ \text{غ م}} x = 0$

--- 0 +++

$\Rightarrow$ للأسفل $(-\infty, 0)$
للأعلى $(0, \infty)$
لا يوجد : انعطاف

2 الحل

المجال $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\varnothing \Longrightarrow \boxed{\text{المجال}: \mathbb{R}}$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(-2x)-(1-x^2)\,2(x^2+1)\cdot 2x}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

عامل مشترك

$$=\frac{-2x\left((x^2+1)^2+2(1-x^2)(x^2+1)\right)}{(x^2+1)^4}$$

عامل مشترك

$$=\frac{(-2x)(x^2+1)\left((x^2+1)+2(1-x^2)\right)}{(x^2+1)^4}$$

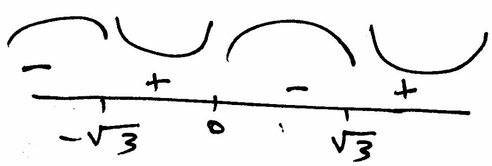
$$=\frac{(-2x)(x^2+1)(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{(-2x)(x^2+1)(3-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}}$$

$f''=0$ $\longrightarrow$ $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$

f'' غ م $\longrightarrow$ $x=\varnothing$



مقعر للأعلى $(-\sqrt{3},0)\ (\sqrt{3},\infty)$

مقعر للأسفل $(-\infty,-\sqrt{3})\ (0,\sqrt{3})$

انعطاف $\left\{\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right), \left(0, f(0)\right), \left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)\right\}$

$=\left\{\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right), (0,0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$

الدقة و القوة

س: إذا كان $f(x)=x\ln x$ ، فإن الاقتران مقعر للأعلى في الفترة

a) $(0,\infty)$ b) $(1,\infty)$ c) (e,∞) d) $\mathbb{R}$

الحل: المجال $x>0 \Rightarrow \underset{0}{\overset{-\,-\quad +\,+}{\overline{\qquad\qquad}}} \Rightarrow (0,\infty)$

$f'(x) = x\,\frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 = 1+\ln x$ مقعر للأعلى $(0,\infty)$

$\boxed{f''(x) = \frac{1}{x}}$ $f''=0 \rightarrow x=\emptyset$ ، f'' غير معرفة $\rightarrow x=0$

$\underset{0}{\overset{+\,+\;\;+\,+\,+}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}} \Longrightarrow \boxed{a}$

س: إذا كان $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ فجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف

الحل: المجال $9-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow \underset{-3\qquad 3}{\overset{-\quad +\quad -}{\overline{\qquad\qquad}}} \Rightarrow [-3,3]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}(-1) + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{(9-x^2)}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{9-x^2}\,\sqrt{9-x^2} - x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{-(9-x^2)-x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f''(x) = \frac{-9}{(9-x^2)^{3/2}}}$$

$f''=0 \rightarrow x=\emptyset$ ، f'' غير معرفة $\rightarrow x=\pm 3$

$\underset{-3\qquad\qquad 3}{\overset{-\,-\,-\,-}{\overline{[\qquad\qquad]}}}$

لا يوجد انعطاف   لا يوجد مقعر للأعلى $(-3,3)$ مقعر للأسفل

تمارين

① لماذا كان $f(x)=\ln(x-1)$ ، فإن الاقتران مقعر للأسفل في الفترة

a) $(1,\infty)$ b) $(0,\infty)$ c) $(0,1)$ d)none

الحل المجال $x-1=0 \Rightarrow x=1$ $\Rightarrow (1,\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{x-1} \Longrightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}}$ → $x=??$ → $x=1$

$\Rightarrow (1,\infty) \Rightarrow a$

② لماذا كان $f(x)=3\sqrt[3]{x^2-1}$ ، جد نقاط الانعطاف

الحل (المجال R) (جذر فردي)

$f'(x)=\frac{3}{3}(x^2-1)^{-2/3}\cdot 2x$

$f''(x)=2x\cdot\frac{-2}{3}(x^2-1)^{-5/3}(2x)+(x^2-1)^{-2/3}\cdot 2$

$=\frac{-4x\cdot 2x}{3(x^2-1)^{5/3}}+\frac{2}{(x^2-1)^{2/3}}$ → $3(x^2-1)^{3/3}$ → $(x^2-1)^{3/3}$ توحيد مقامات

$=\frac{-8x^2+2(3)(x^2-1)^{3/3}}{3(x^2-1)^{5/3}}=\frac{-8x^2+6x^2-6}{3(x^2-1)^{5/3}}$

$\boxed{f''(x)=\frac{-2x^2-6}{3(x^2-1)^{5/3}}}$

$f''=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x=??$

f'' غير موجودة $x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

$- \quad -1 \quad + \quad 1 \quad -$ $\Rightarrow$ الانعطاف $\{(-1,f(-1)),(1,f(1))\}$

$=\{(-1,0),(1,0)\}$

سؤالين سنوات

سنوات 2009

إذا كان $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ حيث $x \in [0,4]$

جد كلاً مما يلي:

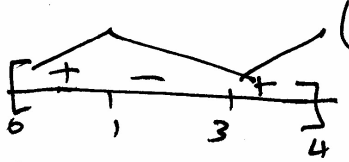
① الفترة (الفترات) التي يكون فيها f متزايد

② القيم القصوى المطلقة للاقتران f وبين نوعها

③ نقطة الانعطاف لمنحنى f (إن وجدت)

الحل $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$ $\quad f' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$



تزايد $(0,1)$ $(3,4)$

$f(0) = 2$ ص

عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1) = 6$

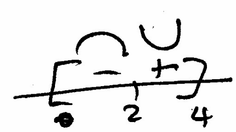
صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3) = 2$

$f(4) = 6$ ع

عظمى مطلقة عند $x=1$, $x=4$ وهي $f(1) = f(4) = 6$

صغرى مطلقة عند $x=0$, $x=3$ وهي $f(0) = f(3) = 2$

$\boxed{f''(x) = 6x - 12} \xrightarrow{f''=0} 6x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$



نقطة انعطاف $(2, f(2))$

$= (2, 4)$

تمرين

سنوات 2005

إذا كان $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}-x$ ، جد

① الفترة (الفترات) التي يكون فيها $f(x)$ متزايد

② القيمة العظمى المحلية للاقتران $f(x)$

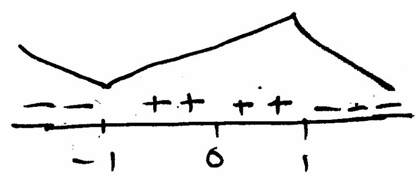
③ الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران $f(x)$ مقعراً للأعلى

الحل $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^{2/3}}-1=\boxed{\frac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}}}$

$f'=0 \Rightarrow 1-x^{2/3}=0 \Rightarrow x^{2/3}=1$

$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$

f' غ م $\Rightarrow x^{2/3}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$



① تزايد $(-1,1)$

② عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=2$

$f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}-1 \Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=\boxed{\frac{-2}{3x^{5/3}}}$

$f''=0 \longrightarrow$ ؟؟

f'' غ م $\Rightarrow 3x^{5/3}=0 \Rightarrow x=0$

③ مقعر للأعلى $(-\infty,0)$

الاقتران الأسي

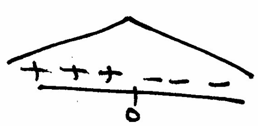
س إذا كان $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، جد

1. القيم الحرجة
2. فترات التزايد والتناقص
3. القيم القصوى المطلقة
4. فترات التقعر للأعلى وللأسفل
5. نقاط الانعطاف

الحل

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{-2x}{2}\right)=-x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f'=0 \Rightarrow (-x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} -x=0 \Rightarrow x=0 \\ e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \Rightarrow x=\emptyset \end{cases}$$



حرجة $x=\{0\}$

تزايد $(-\infty,0)$

تناقص $(0,\infty)$

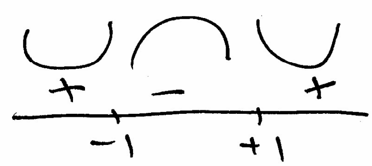
~~عظمى~~ عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$ (ومطلقة)

$$f''(x)=-x e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{-2x}{2}\right)+e^{-\frac{x^2}{2}}(-1)=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right)}$$

$$f''=0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \Rightarrow x=\emptyset$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$



مقعر للأعلى $(-\infty,-1)\,(1,\infty)$

مقعر للأسفل $(-1,1)$

انعطاف : $\left\{\left(1, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(-1, e^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$

س) إذا كان $f(x) = 2^{x^2-2x}$ ، فإن الاقتران $f(x)$ متناقص على الفترة

a) $(-\infty, 1)$ b) $(1, \infty)$ c) $(-\infty, \infty)$ d) none

الحل

$$\boxed{f'(x) = 2^{x^2-2x}(2x-2)\ln 2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2^{x^2-2x} = 0 \Rightarrow x = \{\}$

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \{1\}}$

$\ln 2 = 0 \Rightarrow \{\}$

$- - - \quad | \quad + + +$

1

س) إذا كان $f(x) = e^x - x^2$ حيث $x \in [-1, 5]$
جد فترات التقعر للأعلى وللأسفل

الحل

$f'(x) = e^x - 2x$

$\boxed{f''(x) = e^x - 2} = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$\Rightarrow \quad [\; - - - \quad | \quad + + + + \;]$

$-1 \qquad \ln 2 \qquad 5$

$\rightarrow$ مقعر للأسفل $(-1, \ln 2)$

مقعر للأعلى $(\ln 2, 5)$

تمرين

① جد نقطة الانعطاف للاقتران $f(x) = xe^{-x}$

الحل $f'(x) = xe^{-x}\cdot -1 + e^{-x}\cdot 1 = -xe^{-x} + e^{-x}$

$f''(x) = -xe^{-x}\cdot -1 + e^{-x}\cdot -1 + e^{-x}\cdot -1$

$\boxed{f''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}} \xrightarrow{f''=0} e^{-x}(x-2) = 0$

$e^{-x} = 0 \Rightarrow$ لا حل

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$-$ | $+$ عند 2 $\rightarrow$ انعطاف

$(2, f(2)) = (2, 2e^{-2})$

② جد فترة التزايد للاقتران $f(x) = x\,2^{-x}$ حيث $x \in [0, 3]$

الحل $f'(x) = x\,2^{-x}\cdot -1\cdot \ln 2 + 2^{-x}\cdot 1$

$\boxed{f'(x) = 2^{-x}(1 - x\ln 2)}$

$2^{-x} = 0 \Rightarrow x =$ لا حل

$1 - x\ln 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$

0 $+ + +$ $\frac{1}{\ln 2}$ $- - - -$ 3

تزايد $(0, \frac{1}{\ln 2})$

تناقص $(\frac{1}{\ln 2}, 3)$

امتحان عنيف

مدة الامتحان ساعة ونصف

1 (سنوات 1999)
إذا كان $f(x)=\frac{1}{x-3}$ ، فإن $f'(3.5)$ تساوي
a) 1 b) 0 c) −4 d) غير موجود

2 (سنوات 1999)
إذا كان $f(x)=\begin{cases} ax+2 & , x<3 \\ x^2+b & , x\geq 3 \end{cases}$
جد قيم a و b التي تجعل $f'(3)$ موجودة

3 (سنوات 2000)
إذا كان $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=2x$ ، فإن $(g\circ f)'(\frac{\pi}{6})$ تساوي:
a) 1 b) $\frac{a}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}$

4 (سنوات 2001)
جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=2$ ، حيث $2y=f(2x^2-x)$ ، $f'(6)=4$

5 (سنوات 2004)
أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $r=9$ ، إذا كان
$y=(r^2-10r+1)^{2/3}$ و $r=x^3+1$

6 (سنوات 2001)
جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x+\tan(xy)=0$

7 (سنوات 2003)
يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة s متر في زمن قدره t ثانية حيث $s=t^3-7t^2+9t+1$ ، أوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة 1 m/s

8 سنوات 2000

إذا كان $f(x)$ اقتراناً متصلاً على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. وكانت المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ هي $f'(x)=6x-3x^2$ ، فجد ما يلي

أ) القيم الحرجة للاقتران f

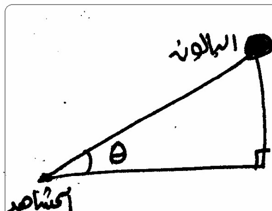
ب) مجالات التناقص للاقتران f

جـ) مجالات التقعر للأعلى للاقتران f

9 (1999)

ما مساحة المثلث المحصور بين محوري الاحداثيات و مماس المنحنى $y=\frac{1}{x}$ ، حيث $x>0$ ، عند النقطة $(2,\frac{1}{2})$

10 سنوات 2007



يرتفع بالون رأسياً إلى الأعلى بسرعة ثابتة ويتم رصده من مشاهد على الأرض، يبعد 160m عن المسقط الرأسي للبالون على الأرض. إذا كانت θ زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون، وكان معدل تغير θ يساوي $\frac{1}{10}$ راديان/دقيقة في اللحظة التي كان فيها ارتفاع البالون عن سطح الأرض 200m فجد سرعة البالون

11 سنوات 2010

إذا كان $f(x)=e^{\frac{1}{x}}+a\ln\sqrt{x}$ ، وكان $f'(1)=e$ فجد قيمة الثابت a

12

إذا كان $x=a\sin t$ ، $y=3\cos t$

وكان ميل المماس عند $t=\frac{\pi}{4}$ يساوي $-\frac{3}{2}$ ، فإن a تساوي

a) $\frac{9}{2}$ b) $-\frac{9}{2}$ c) 2 d) -2

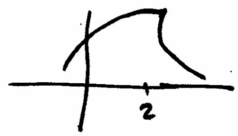
13

إذا كان $y=t^{\frac{1}{t}}$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ تساوي

a) $\frac{1}{t^2}$ b) $\frac{1}{t}\ln t$ c) $t^{\frac{1}{t}-2}(1-\ln t)$ d) $t^{\frac{1}{t}}(1-\ln t)$

القيم القصوى والتقعر 4

من أسئلتكم

① هل هذه نقطة انعطاف  ؟

الجواب: لا ؛ لأنها رأس حاد

تعريف نقطة الانعطاف ← متصلة
← تغير التقعر
← يمكن رسم مماس عندها (ليست رأس حاد)

نقاط انعطاف :

② إذا كان $f''(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-3}}$ ، فما نقاط الانعطاف ؟

الحل $f''=0 \Rightarrow x=1$

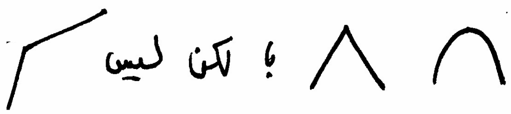
f'' غ.م $\Rightarrow x=3$

$\Leftarrow \{(1, f(1)), (3, f(3))\}$

قصدي : خذ أصفار المقام عادي (f'' غ.م)

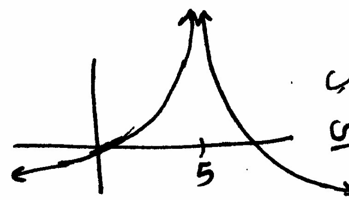
أما حالة  ما راح تشوفها غير بالمتشعب (مش مطلوب)

ليست انعطاف

③ القيم العظمى المحلية  ! لكن ليس

(كلهن حرجة)

④ التقارب الرأسي

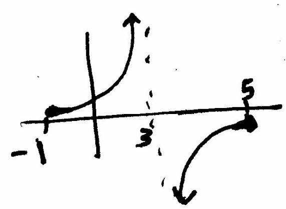


5 : تسمى تقارب رأسي
(الـ y تساوي $+\infty$ (∞- ، ∞-))
وليس الـ X

تزايد : (∞- و 5)   تناقص (5 و ∞)

الـ 5 ليست عظمى محلية (ليست رقم)

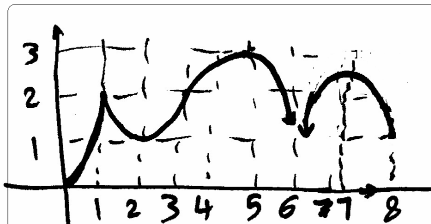
تقعر للأعلى (∞- و 5) ، (5 و ∞)



تقعر للأعلى (1- و 3)   تقعر للأسفل (3 و 5)

الـ 3 ليست انعطاف (ليست رقم)

س ⑤ للشكل المجاور جد
① فترات التقعر للأعلى وللأسفل
② نقاط الانعطاف
③ فترات التزايد والتناقص
④ القيم الحرجة
⑤ القيم القصوى



الحل: التقعر للأعلى (0 و 3)   التقعر للأسفل (3 و 6)(6 و 8)

الانعطاف (2 و 3)

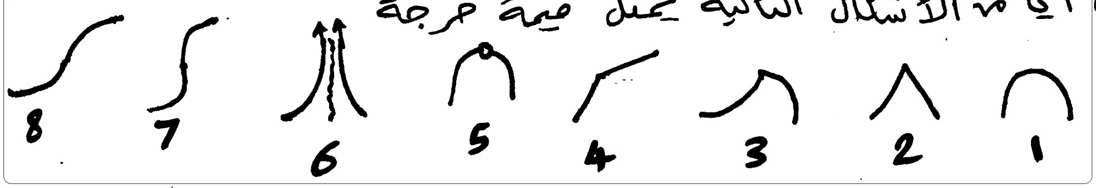
التزايد (0 و 1)(2 و 5)(6 و 7)   التناقص (1 و 2)(5 و 6)(7 و 8)

الحرجة X = {1 و 2 و 5 و 6 و 7}

عظمى محلية ← x=1 ، x=5 ، x=7   صغرى محلية ← x=2   صغرى مطلقة لا يوجد   عظمى مطلقة ← x=5

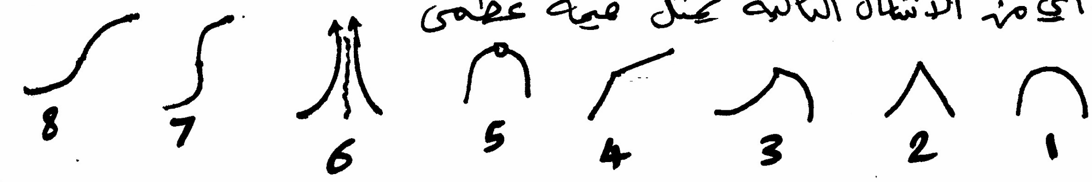
تمارين

① أي من الأشكال التالية يمثل قيمة حرجة



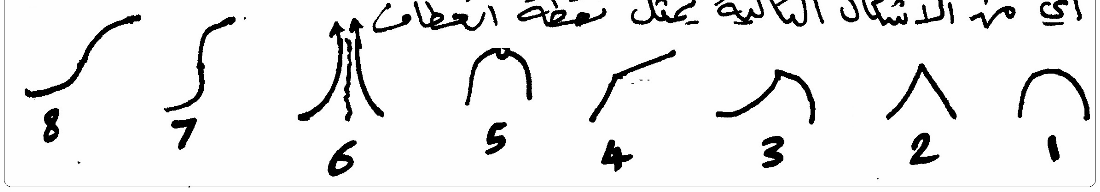
الجواب 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 7 ← مماس رأسي

② أي من الأشكال التالية يمثل قيمة عظمى



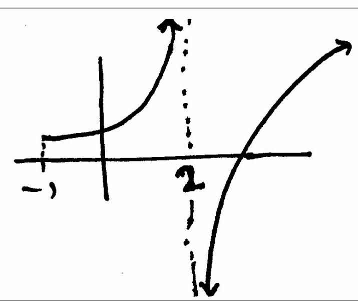
الجواب 1 ، 2 ، 3 ،

③ أي من الأشكال التالية يمثل نقطة انعطاف



الجواب 7 ، 8

④ جد ① فترات التزايد والتناقص
② فترات التقعر للأعلى وللأسفل
③ نقطة الانعطاف (إن وجدت)



الجواب ① تزايد $(-1, 2)$ ، $(2, \infty)$
تناقص : لا يوجد

② تقعر للأعلى $(-1, 2)$ ،
تقعر للأسفل $(2, \infty)$

③ انعطاف : لا يوجد

اكلاشي - ١

س إذا كان $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$ ، جد

① قيم x الحرجة
② فترات التزايد والتناقص
③ القيم القصوى

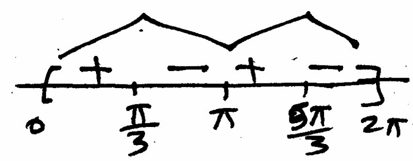
الحل $\boxed{f'(x) = -\sin x + \sin 2x}$

$f' = 0 \Rightarrow -\sin x + 2\sin x \cos x = 0$

$\sin x(-1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \longrightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$\cos x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$



حرجة $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

تزايد $(0, \frac{\pi}{3}), (\pi, \frac{5\pi}{3})$

تناقص $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$

طرفية $f(0) = \frac{1}{2}$

عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{3}$ وهي $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}$

صغرى محلية عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = \frac{-3}{2}$

عظمى محلية عند $x = \frac{5\pi}{3}$ وهي $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{3}{4}$

صغرى طرفية $f(2\pi) = \frac{1}{2}$

عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ وهي $f(\cdot\cdot) = \frac{3}{4}$

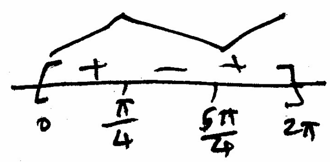
صغرى مطلقة عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = -\frac{3}{2}$

تحدي إذا كان $f(x)=\sin x+\cos x$ ، $x\in[0,2\pi]$
فجد فترات التناقص

الحل $\boxed{f'(x)=\cos x-\sin x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x-\sin x=0 \Rightarrow \tan x-1=0 \Rightarrow \tan x=1$

$x=\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$



$\rightarrow$ تناقص $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

تحدي إذا كان $f(x)=x-\tan x$ ، حيث $x\in[0,\frac{\pi}{2})$
فجد فترات التقعر ونقط الانعطاف (إن وجدت)

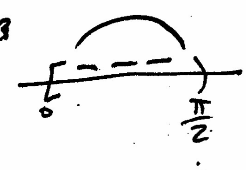
الحل $f'(x)=1-\sec^2 x$

$f''(x)=-2\sec x \cdot \sec x \tan x$

$\boxed{f''(x)=-2\sec^2 x \tan x}$

$f''=0 \longrightarrow \sec^2=0 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2}=0 \Rightarrow ؟؟$

$\tan x=0 \Rightarrow x=\{0\}$



مقعر للأسفل $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

للأعلى : —

انعطاف : —

تمارين

① إذا كان $f(x)=\cos x$ ، حيث $x\in[0,2\pi]$ ، فجد القيم القصوى المطلقة

② إذا كان $f(x)=\sin^2 x$ حيث $x\in[0,2\pi]$ ، فجد القيم الحرجة

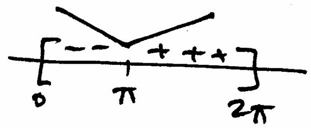
③ جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x)=\sin x-\sin^2 x$ حيث $x\in[0,\pi]$

④ جد فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x$ حيث $x\in[0,2\pi]$

⑤ جد نقطة الانعطاف للاقتران $f(x)=x^2+4\cos x$ حيث $x\in[0,\pi]$

⑥ إذا كان $f(x)=x^2+\ln(\cos x)$ ، حيث $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ، فجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل

حل: $\boxed{f'(x) = -\sin x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$\Rightarrow$ 

$f(0) = 1$ ع

صغرى محلية عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = -1$

$f(2\pi) = 1$ ع

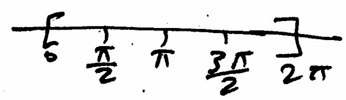
$\Leftarrow$ عظمى مطلقة عند $x = 0, 2\pi$ وهي $f(0) = f(2\pi) = 1$

صغرى مطلقة عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = -1$

حل: $\boxed{f'(x) = 2\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

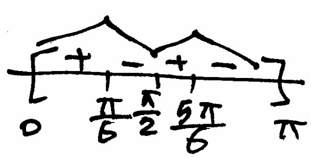
حرجة $x = \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$



حل: $\boxed{f'(x) = \cos x - 2\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

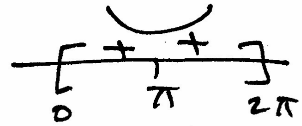


تزايد $(0, \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$

تناقص $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})(\frac{5\pi}{6}, \pi)$

④حل $f'(x) = x + \sin x \Rightarrow \boxed{f''(x) = 1 + \cos x} = 0$

$\Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$



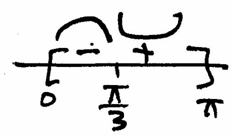
مقعر للاعلى $(0, 2\pi)$

مقعر للاسفل : لا يوجد

⑤حل $f'(x) = 2x - 4\sin x \Rightarrow \boxed{f''(x) = 2 - 4\cos x} = 0$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9} + 2\right)$ انعطاف



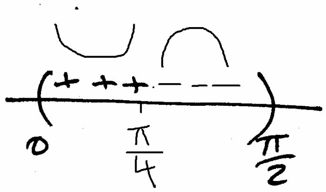
⑥حل ملاحظة : لا تحسب مجال ln لانه أعطانا الفترة

$f'(x) = 2x + \frac{-\sin x}{\cos x} = 2x - \tan x$

$\boxed{f''(x) = 2 - \sec^2 x} = 0 \Rightarrow \sec^2 x = 2$

$\sec x = \pm\sqrt{2}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$



مقعر للاعلى $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

مقعر للاسفل : $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

اعثاش ـ 28

س: إذا كان $f(x)=\sin^3 x-3\sin x$ ، حيث $x\in[-\pi,\pi]$ ، فجد
① مجموعة قيم x الحرجة ② القيم القصوى المحلية ③ فترات التزايد والتناقص

$$\boxed{f'(x)=3\sin^2 x\cos x-3\cos x}$$

$=0 \Rightarrow 3\cos x(\sin^2 x-1)=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$

$\sin^2 x-1=0 \Rightarrow \sin x=\pm 1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ [+ | − | +] على $-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

① الحرجة $x=\pm\frac{\pi}{2}$

② $f(-\frac{\pi}{2})=2$ وهي عظمى محلية عند $x=-\frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{2})=-2$ وهي صغرى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$

③ تزايد $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2},\pi)$

تناقص $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

س: إذا كان $f(x)=x^2+\sin(2x)$ ، حيث $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ، جد
① فترات التقعر ② قيم x التي يوجد عندها نقاط انعطاف

الحل: $f'(x)=2x+2\cos 2x$

$$\boxed{f''(x)=2-4\sin 2x}=0 \Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$2x\in[-\pi,\pi]$

$2x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$

[+ | − | +] على $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12},\ \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ للأعلى $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{12})$ $(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2})$

للأسفل $(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12})$

(ارجع للفترة الأصلية)

سؤال السطاشر علامة

سنوات 2018

إذا كان $f(x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}\cos 2x$ ، حيث $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ ،
فجد كلاً مما يأتي:
① مجالات التزايد والتناقص للاقتران $f(x)$
② القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$ إن وجدت
③ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى

الحل

$f(x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2$ ①

$f'(x)=\sin 2x+\sin 2x \Rightarrow \boxed{f'(x)=2\sin 2x}$ ①

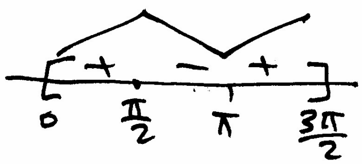
①

$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sin 2x=0$

$\sin 2x=0$

$2x=0,\pi,2\pi,3\pi$

$x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ ①+①



①

تزايد $(0,\frac{\pi}{2})(\pi,\frac{3\pi}{2})$ ①

تناقص $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ①

عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{2}$ ①

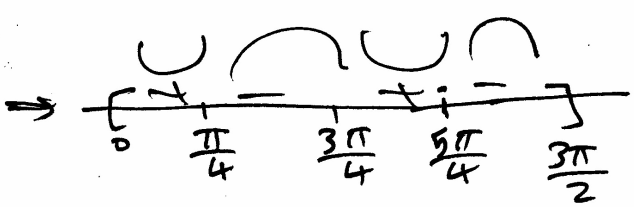
صغرى محلية عند $x=\pi$ وهي $f(\pi)=-\frac{1}{2}$ ①

①

$\boxed{f''(x)=4\cos 2x}$

$\Rightarrow 4\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$ ①

$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ ①+①



①

للأعلى $(0,\frac{\pi}{4}),(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$ ①

طريقة 2

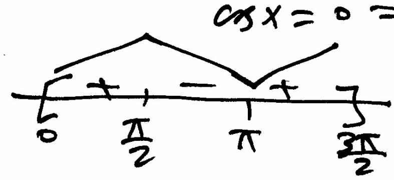
$f'(x) = 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 2$ 1

$f'(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin x\cos x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 4\sin x\cos x}$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4\sin x\cos x = 0$ 1

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$ 1

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 1



1

تزايد $(0, \frac{\pi}{2})(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 1

تناقص $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 1

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$ عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي 1

$f(\pi) = \frac{-1}{2}$ صغرى محلية عند $x = \pi$ وهي 1

1

1

$f''(x) = 4\sin x(-\sin x) + \cos x \cdot 4\sin x \Rightarrow \boxed{f''(x) = 4(\cos^2 x - \sin^2 x)}$

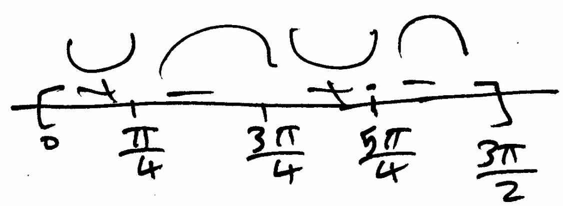
$f'' = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0$ 1

$1 - \tan^2 x = 0$

$\tan x = \pm 1 \Rightarrow \cancel{x = \frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 1+1

$\Rightarrow$



1

للاعلى $(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 1

اختبار المشتقة الثانية

نظرية

- إذا كان $f'(x_1)=0$ و $f''(x_1)<0$ ، فإن لدينا قيمة عظمى محلية
- إذا كان $f'(x_1)=0$ و $f''(x_1)>0$ ، فإن لدينا قيمة صغرى محلية

إذا كان أي شي ثاني ⟵ تفشل النظرية (ونرجع لطريقة خط الأعداد)
(مثلاً $f''=0$ ، f'' غ.م ، f' غ.م) تفشل

س إذا كان $f(x)=x^2-x^3+1$ ، جد القيم العظمى والصغرى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية

الحل $\boxed{f'(x)=2x-3x^2}=0 \Rightarrow x=0, \frac{2}{3}$

$f''(x)=2-6x$

$f''(0)=2>0 \Longrightarrow$ صغرى محلية $\Longrightarrow$

صغرى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

$f''(\frac{2}{3})=-2<0 \Longrightarrow$ عظمى محلية

عظمى محلية عند $x=\frac{2}{3}$ وهي $f(\frac{2}{3})=..$

س جد باستخدام اختبار المشتقة الثانية القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)=xe^x$

الحل $f'(x)=xe^x+e^x.1 \Rightarrow f'=0 \Rightarrow e^x(x+1)=0$
$\Rightarrow x=-1$

$f''(x)=xe^x+e^x+e^x$

$\Longrightarrow \boxed{f''(x)=xe^x+2e^x}$

$f''(-1)=-e^{-1}+2e^{-1}=e^{-1}>0 \Longrightarrow$ صغرى محلية

⟸ صغرى محلية عند $x=-1$ وهي $f(-1)=-e$

س: جد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)=(x-1)^4$

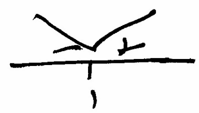
الحل: $f'(x)=4(x-1)^3\cdot 1 \Longrightarrow f'=0 \Longrightarrow x=1$

$f''(x)=12(x-1)^2$

$f''(1)=0 \Longrightarrow$ تفشل

⇐ نرجع للطريقة العادية

$\boxed{f'(x)=4(x-1)^3} > 0 \Rightarrow$



⇐ صغرى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=0$

تمارين

جد باستخدام اختبار المشتقة الثانية القيم القصوى المحلية للاقتران
$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1 \ , \ x\in[0,2\pi]$

الحل: $\boxed{f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x}=0 \Rightarrow \cos x+\sqrt{3}\sin x=0$

$\Rightarrow 1+\sqrt{3}\tan x=0$

$\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$

$f''(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$f''(\frac{5\pi}{6})=-2<0 \Longrightarrow$ عظمى (عظمى محلية عند $x=\frac{5\pi}{6}$ وهي $f(\frac{5\pi}{6})=3$)

$f''(\frac{11\pi}{6})=+2>0 \Longrightarrow$ (صغرى) (صغرى محلية عند $x=\frac{11\pi}{6}$ وهي $f(\frac{11\pi}{6})=-1$)

فائدة اختبار المشتقة الثانية

س) إذا كانت
$f'(1)=0$ و $f''(1)=3$
$f'(2)=0$ و $f''(2)=-4$
$f'(3)=5$ ، $f''(3)=-2$

فإن للاقتران f قيمة عظمى محلية عند x تساوي

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\{2,3\}$

الحل

$f'(2)=0$
$f''(2)=-4<0$ $\Rightarrow$ عظمى محلية $x=2$ $\Rightarrow$ $\boxed{b}$

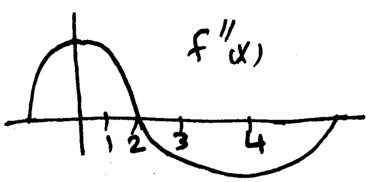
س) إذا كان للاقتران $f(x)$ قيم حرجة عند $x=\{1,3,4\}$
وكان $f''(x)=x-2$ ، فإن للاقتران $f(x)$ قيم صغرى محلية عند

a) 1 b) 3 c) 4 d) $\{3,4\}$

الحل

حرجة $\Rightarrow$ $f'(1)=0$ ، $f'(3)=0$ ، $f'(4)=0$

و $f''(1)=-1 \Rightarrow$ عظمى محلية
$f''(3)=+1 \Rightarrow$ صغرى محلية
$f''(4)=+2 \Rightarrow$ صغرى محلية
$\Rightarrow x=\{3,4\}$ $\boxed{d}$



س) إذا علمت أن للاقتران $f(x)$ قيم حرجة عند $x=\{1,3\}$ ، وأن منحنى المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ مبين في الشكل المجاور ، فإن للاقتران f قيمة عظمى محلية عند x تساوي

a) $\{0\}$ b) $\{3,4\}$ c) $\{3\}$ d) $\{1\}$

الحل

$f'(1)=0$ و $f''(1)=$ موجب $>0 \Rightarrow$ صغرى محلية
$f'(3)=0$ و $f''(3)=$ سالب $<0 \Rightarrow$ عظمى محلية
$\Rightarrow x=3$ $\boxed{c}$

تمارين

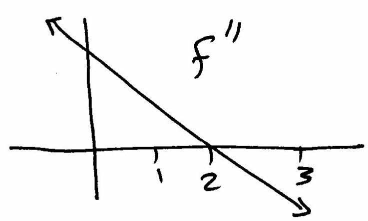
① إذا كان للاقتران $f(x)$ مماس أفقي عند $x=\frac{1}{2}$ ، وكان $f''(x)=\ln x$ ، فإن للاقتران $f(x)$ عند $x=\frac{1}{2}$:

a) قيمة عظمى محلية   b) قيمة صغرى محلية

c) نقطة انعطاف   d) قيمة صغرى مطلقة

الحل $f'(\frac{1}{2})=0$ ، $f''(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}=$ سالب $<0 \Rightarrow$ عظمى محلية عند $x=\frac{1}{2}$ $\boxed{a}$

② إذا كان للاقتران $f(x)$ مماس أفقي عند $x=1,3$ وكان منحنى $f''(x)$ مبين في الشكل ، فإن للاقتران $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند :



a) $x=0$ b) $x=\{0,1\}$ c) $x=3$ d) $x=1$

الحل $f'(1)=0$ ، $f''(1)=+ve>0 \Rightarrow$ صغرى محلية $\Rightarrow \boxed{d}$

$f'(3)=0$ ، $f''(3)=-ve<0 \Rightarrow$ عظمى محلية

امتحان

① (دوري) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+9}$ ، $x\neq 3$ ، فإن $f''(x)$ تساوي:

a) $-f^2(x)$ b) $6f(x)$ c) $6f^2(x)$ d) $f^2(x)$

② (دوري) إذا كان المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$ عند $x=2$ يمر بالنقطة $(a,0)$ ، فاحسب قيمة a

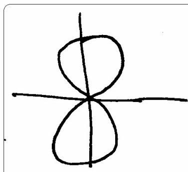
③ إذا كان $f(x)=x^3-3x^2+4$ ، جد معادلة المماس عند نقطة الانعطاف

④ (من كتاب التمارين) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمتر. أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن بدلالة t

⑤ (من كتاب التمارين) يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة

$x=2\sin 2t$

$y=3\cos t$ $\quad 0\le t\le 2\pi$



جد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل

⑥ (سنوات 2016) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة

$$s(t)=2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}t \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

حيث s: البعد بالأمتار، t: الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة $\sqrt{3}$ m/s

⑦ (الكتاب) حدد قيم x التي لا يكون عندها $f(x)$ قابلاً للاشتقاق

① $f(x)=\frac{x-8}{x^2-4x-5}$ ② $f(x)=\sqrt[3]{3x-6}+5$

الحل 1

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} = (x-3)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(x-3)^{-3} \Rightarrow f''(x) = 6(x-3)^{-4} = \frac{6}{(x-3)^4} = 6\,\frac{1}{((x-3)^2)^2}$$

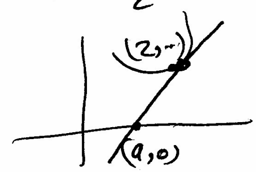
$$= 6\left(\frac{1}{(x-3)^2}\right)^2 = 6\,f^2(x) \Longrightarrow \boxed{C}$$

الحل 2

$$f'(x) = 3\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \Rightarrow m = f'(2) = 3\left(2+\frac{2}{2}\right)^2\left(1-\frac{2}{2^2}\right)$$

$$\Rightarrow m = 3(9)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

$$y = f(2) = \left(2+\frac{2}{2}\right)^3 = 27$$



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ معادلة المماس

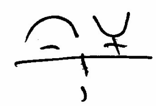
$$y - 27 = \frac{27}{2}(x-2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{27}{2}x}$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{27}{2}x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}$$

حل 3.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow \boxed{f''(x) = 6x - 6} = 0 \Rightarrow x = 1$$



انعطاف $\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(1) = 2 \\ m = f'(1) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\boxed{y - 2 = -3(x-1)}$$

حل 4

$$A = \text{الطول} \cdot \text{العرض} = (6t+5)\sqrt{t} = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 6\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}}}$$

حل 5

$x=0 \Rightarrow 2\sin 2t=0 \Rightarrow 2t=0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$

$t=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

$y=0 \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}}$ المشتركة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t}{2\cos 2t\cdot 2}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{-3\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos(2\frac{\pi}{2})}=\frac{-3}{4(-1)}=\frac{3}{4}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{-3\sin\frac{3\pi}{2}}{4\cos(2\frac{3\pi}{2})}=\frac{3}{4(-1)}=\frac{-3}{4}$$

الحل 6

$v(t)=\cancel{2}\cdot 2\sin(\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{v(t)=\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3} \Rightarrow \sin t=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$

$a(t)=\cos t \Rightarrow a(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$

الحل 7

① أصفار f $\Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow \boxed{x=-1,5}$

② $f'(x)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x-6)^2}} \xrightarrow{\text{أصفار المقام}} \sqrt[3]{(3x-6)^2}=0$

$\boxed{x=2}$

مكثف التطبيقات الحياتية

بالنسبة إلى الزمن

س) يعطى عدد السكان في مدينة بالاقتران $P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t الزمن بالسنوات، P العدد بالآلاف

جد: (1) معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة للزمن

(2) = = = = = عندما $t=12$ مفسراً معنى الناتج

الحل

$$\frac{dp}{dt}=\frac{(2t+9)(1000t)-500t^2(2)}{(2t+9)^2}=\frac{1000t^2+9000t}{(2t+9)^2}$$

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{p=12}=\frac{1000(12)^2+9000(12)}{(2(12)+9)^2}=..$$

عدد السكان يزداد بمعدل ... لكل سنة، في السنة الـ 12

س) يمكن نمذجة كمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوم باستعمال القانون $A(t)=20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

جد معدل تحلل كتلة عنصر البلوتونيوم عندما $t=2$

الحل

$$\frac{dA}{dt}=20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\cdot\frac{1}{140}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=2}=20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\cdot\frac{1}{40}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=..$$

بالنسبة إلى أي شيء

س) تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات بالدينار باستعمال الاقتران

$u(x) = 80\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج،

① جد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة

② جد $u'(20)$ مفسراً الناتج

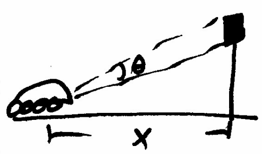
الحل

$$\frac{du}{dx} = 80\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}\right)$$

$u'(20) = \dots = \frac{50}{64\sqrt{41}}$ ← يزداد بدل الخدمة بمعدل عندما يكون عدد القطع المبيعة 20

س) يقود سائق سيارته باتجاه لافتة على طريق سريع كما في الشكل. إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتة، و x المسافة بينه وبين اللافتة. وكانت العلاقة التي تربط x بـ θ هي $\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$

فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟



الحل

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4)-4x(2x)}{(x^2+252)^2}$$

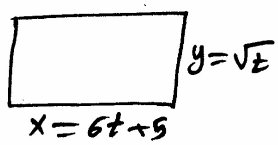
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-4x^2+1008}{(x^2+252)^2}\cdot\frac{1}{\sec^2\theta} \qquad (\sec^2 = 1+\tan^2\theta)$$

$$= \frac{-4x^2+1008}{(x^2+252)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{4x}{x^2+252}\right)^2}$$

أوجد القانون

س (كتاب التمارين) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث t الزمن بالثواني. والأبعاد بالسنتيمتر. جد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن

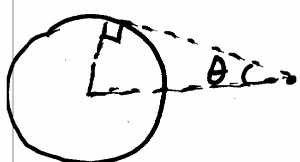
الحل

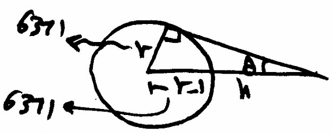


$$A = x\cdot y = (6t+5)\sqrt{t} = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}}$$

س (من الكتاب) عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض، ويحتوي الأقمار الصناعية فيها لقياس زاوية θ (بالراديان)، إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، r يمثل نصف قطر الأرض، فجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta=\frac{\pi}{6}$ (افترض $r=6371$ km)





$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = ?$$

$$\sin\theta = \frac{6371}{6371+h}$$

$$\cos\theta = \frac{-6371\frac{dh}{d\theta}}{(6371+h)^2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-6371\frac{dh}{d\theta}}{(6371+6371)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{d\theta} = -2\sqrt{3}\ 6371$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{2} = \frac{6371}{6371+h}$$

$$\Rightarrow h = 6371$$

المزيد

س: أثبت أن معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى نصف قطرها يساوي مساحة سطحها

$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Longrightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = A$

س: (سنوات 2008) جد معدل تغير مساحة المربع بالنسبة إلى محيطه عندما يكون محيطه 24cm

a) 3 cm^2/cm b) 4 cm^2/cm c) 6 cm^2/cm d) 12 cm^2/cm

الحل: $A = x^2$ $l = 4x \Longrightarrow x = \frac{l}{4} \Longrightarrow A = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \Longrightarrow A = \frac{1}{16} l^2$

$\frac{dA}{dl} = \frac{2}{16} l \Longrightarrow \frac{dA}{dl} = \frac{1}{8}(24) = 3 \Longrightarrow \boxed{a}$

س: (مشانك) جد معدل تغير مساحة المربع بالنسبة إلى الزمن عندما يكون محيطه 24cm ، علماً أن معدل تغير محيطه بالنسبة إلى الزمن هو 2 cm/s

a) 3 cm^2/s b) 4 cm^2/s c) 6 cm^2/s d) 12 cm^2/s

الحل:

$A = x^2$ $l = 4x$, $x = \frac{l}{4} \Longrightarrow A = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \Longrightarrow A = \frac{1}{16} l^2$

$\frac{dA}{dt} = ?$ $l = 24$
$\frac{dl}{dt} = 2$

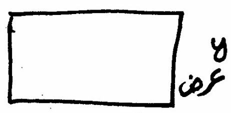
$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{16} l \frac{dl}{dt} \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{8}(24) \cdot 2 = 6 \Longrightarrow \boxed{c}$

امتحانات

① سنوات 2002
صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة أمثال عرضها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها 15 cm

② سنوات 2019
يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل 125 cm^3/s . جد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطر البالون 10 cm

حل 1



$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=15}$

$x = 3y$

$A = x\ y \qquad \therefore\ y = \frac{x}{3}$

$A = x \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{3}$

$\frac{dA}{dx} = \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{2}{3}(15) = 10$

حل 2

$\frac{dV}{dt} = 125$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=5} = ?$

$V = \frac{4\pi}{3} r3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$125 = 4\pi(5)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{125}{100\pi}$

$A = 4\pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 8\pi(5)\frac{125}{100\pi}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{5000}{100} = 50$

القيم القصوى والتقعر 5

مفاهيم اساسية

مفهوم أساسي — **القِيَم القصوى المُطلَقة**

إذا كان f اقترانًا مجاله D، وكان c عددًا ينتمي إلى مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) \geq f(x)$ لجميع قِيَم x في D.
- قيمة صغرى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) \leq f(x)$ لجميع قِيَم x في D.

س) إذا كان $f(x)=x^2-6x$ ، حيث $x\in[0,5]$ ، جد c حيث $c\in[0,5]$ بحيث تكون $f(c)\leq f(x)$ لجميع قيم $x\in[0,5]$

الحل $f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$-$, $+$: 0 , 3 , 5

صغرى مطلقة عند $x=3$ $\Rightarrow \boxed{c=3}$

س) إذا كان $f(x)=6x-x^2$ ، جد قيمة $f(c)$ حيث $f(c)\geq f(x)$ لجميع قيم x الحقيقية

الحل $f'(x)=6-2x=0 \Rightarrow x=3$

$+$, $-$: 3

$\Rightarrow$ عظمى مطلقة عند $x=3$ وهي $\boxed{f(3)=+9}$

مفهوم أساسي — **القِيَم القصوى المحلية**

إذا كان c نقطة داخلية في مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

- قيمة عظمى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) > f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c، وتقع كلها داخل المجال.
- قيمة صغرى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) < f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c، وتقع كلها داخل المجال.

س) إذا كان $f(x)=\sin x$ ، جد جميع قيم c التي تنتمي للفترة المفتوحة $(0,2\pi)$ التي تجعل $f(c)<f(x)$

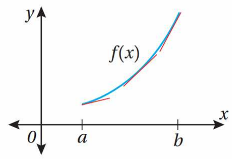
الحل $f'(x)=\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$

$+$, $-$, $+$: 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π

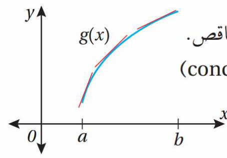
$\Rightarrow$ صغرى محلية عند $x=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{c=\frac{3\pi}{2}}$

أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقع فوق مماساته، وأنَّ ميل مماساته يزداد. وفي هذه الحالة، يُمكِن القول إنَّ f **مُقعَّر للأعلى** (concave up) على الفترة (a, b).



أمّا منحنى الاقتران $g(x)$ فيقع أسفل مماساته، وميل مماساته يتناقص. وفي هذه الحالة، يُمكِن القول إنَّ g **مُقعَّر للأسفل** (concave down) على الفترة (a, b).



مفهوم أساسي — التقعُّر

إذا كان f اقترانًا قابلًا للاشتقاق على الفترة المفتوحة I، فإنَّ:

- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى على الفترة I إذا كان f' مُتزايِدًا عليها.
- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل على الفترة I إذا كان f' مُتناقِصًا عليها.

س/ جد الفترة التي يقع فيها منحنى $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ تحت جميع مماساته

الحل/ $f(x)=(x-1)^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-2}{9(x-1)^{5/3}}}$

$f''\neq 0 \to x=\varnothing$

f'' غ.م $x=1$

$+ \quad | \quad -$ (عند 1) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{مقعر للأسفل } (1,\infty)}$

س/ إذا كان $f(x)=x^3-6x^2$ ، جد الفترة التي يكون فيها f' متناقص

الحل/ $f'(x)=3x^2-12x \rightarrow \boxed{f''(x)=6x-12}=0$

$x=2$

$- \quad | \quad +$ (عند 2)

f مقعر للأسفل $(-\infty,2)$ $\Leftarrow$ $\boxed{f' \text{ متناقص } (-\infty,2)}$

التمارين

① إذا كان $f(x)=e^{-x}\sin x$ ، حيث $x\in[0,\pi]$ ، جد قيمة c التي تنتمي لمجال f ، بحيث يكون $f(c)\leq f(x)$ ، لجميع قيم x ضمن المجال

الحل $f'(x)=e^{-x}\cos x+\sin x\cdot e^{-x}\cdot -1 \Rightarrow \boxed{f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)}$

$f'=0 \Rightarrow e^{-x}=0 \Rightarrow x=\{\}$

$\cos x-\sin x=0 \Rightarrow 1-\tan x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $[0 \quad + \quad \frac{\pi}{4} \quad - \quad \pi]$

$f(0)=0$ صغرى

$f(\pi)=0$ صغرى

$x=0,\pi$ صغرى مطلقة عند $\Leftarrow$

$\Rightarrow c=\{0,\pi\}$

② إذا كان $f(x)=\sqrt{\sin x}$ حيث $x\in[0,\pi]$ ، جد الفترة التي يقع فيها منحنى f تحت جميع مماساته

الحل $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \Rightarrow f''(x)=\frac{2\sqrt{\sin x}(-\sin x)-\cos x \cdot 2\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{(2\sqrt{\sin x})^2}$

$=\left(-2\sqrt{\sin x}\sin x-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}\right)/4\sin x$

$=\frac{-2\sqrt{\sin x}\sin x\sqrt{\sin x}-\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}/4\sin x$

$\boxed{f''(x)=\frac{-2\sin^2 x-\cos^2 x}{4(\sin x)^{3/2}}}$

$\rightarrow =0 \Rightarrow -2\tan^2 x-1=0$

$\tan^2 x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\{\}$

$\xrightarrow{=0}$ $x=0,\pi$

$[0 \quad - \; - \; - \; - \quad \pi] \Rightarrow \boxed{(0,\pi) \Leftarrow \text{مقعر للأسفل تحت مماساته}}$

③ إذا كان $f(x) = xe^x$ ، فجد
① فترة تزايد f ② فترة تزايد f'

الحل $f'(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = e^x(x+1) = 0 \longrightarrow e^x = 0 \Rightarrow x = ??$

$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$- - - \quad | \quad + + +$

-1

$\Longrightarrow$ f تزايد $(-1, \infty)$

$f'' = e^x(1) + (x+1)e^x \Rightarrow \boxed{f''(x) = e^x(x+2)} = 0$

$x = -2$

$- - - \quad | \quad + + +$

-2

$\longrightarrow$ f' تزايد $\equiv$ f تقعر للأعلى $\Rightarrow (-2, \infty)$

المجاهيل

س) إذا كان للاقتران $f(x)=ax^2+6x$ قيمة حرجة عند $x=1$ فإن a تساوي

a) 3 b) -3 c) 4 d) 2

الحل $f'(x)=2ax+6 \xrightarrow[x=1]{\text{حرجة عند}} f'(1)=0 \Rightarrow 2a+6=0 \Rightarrow a=-3$

س) إذا كان للاقتران $f(x)=\sqrt[3]{2x-a}$ قيمة حرجة عند $x=3$ فجد a

الحل $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2}} \xrightarrow[\text{غ م}]{f'(3)} 3\sqrt[3]{2(3)-a}=0 \Rightarrow \boxed{a=6}$

س) إذا كان للاقتران $f(x)=ax^2+6x$ قيمة عظمى محلية عند $x=1$ جد a

الحل $f'(x)=2ax+6 \xrightarrow{f'(1)=0} 2a(1)+6=0 \Rightarrow a=-3$

س) إذا كان للاقتران $f(x)=x^3+ax^2$ نقطة انعطاف عند $x=2$ فجد a

الحل $f'(x)=3x^2+2ax \longrightarrow f''(x)=6x+2a \xrightarrow{f''(2)=0} 6(2)+2a=0$

$\boxed{a=-6}$

س) إذا كان للاقتران $f(x)=ax^2-bx+10$ قيمة صغرى محلية عند النقطة $(3,1)$، فجد قيمة a و b

الحل $f'(x)=2ax-b$

$f'(3)=0 \Rightarrow 2a(3)-b=0 \longrightarrow \boxed{6a-b=0}$ ①

$f(3)=1 \longrightarrow a(3)^2-b(3)+10=1 \longrightarrow 9a-3b=-9 \longrightarrow \boxed{3a-b=-3}$ ②

$6a-b=0$

$-3a+b=+3$

$3a=-3 \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow 6(-1)-b=0 \Rightarrow \boxed{b=-6}$

تمارين

① جد قيمة a و b التي تجعل للاقتران $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نقطتين حرجتين عند $x=\{0, 1\}$

الحل $f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow 0+0+b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$f'(1)=0 \Rightarrow 3(1)^2+2a(1)+0=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-3}{2}}$

② إذا كان $f(x)=a\sin 2x+\cos x+b$ ، له نقطة الانعطاف $(\frac{\pi}{4}, 3)$ فجد a و b

الحل $f'(x)=2a\cos 2x-\sin x \Longrightarrow f''(x)=-4a\sin 2x-\cos x$

$f''(\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow -4a\sin(\frac{2\pi}{4})-\cos\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow -4a-\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{4\sqrt{2}}}$

$f(\frac{\pi}{4})=3 \Longrightarrow a\sin(\frac{2\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}+b=3$

$\frac{-1}{4\sqrt{2}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+b=3 \Rightarrow \frac{3}{4\sqrt{2}}+b=3$

$\Longrightarrow \boxed{b=3-\frac{3}{4\sqrt{2}}}$

③ إذا كان للاقتران $f(x)=\sqrt[3]{ax-4}$ ، نقطة انعطاف عند $x=1$ فجد قيمة a ، علماً بأن $a\neq 0$

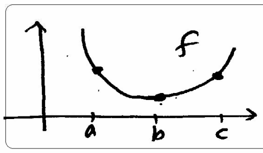
$f'(x)=\frac{1}{3}(ax-4)^{-\frac{2}{3}}\cdot a=\frac{a}{3}(ax-4)^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x)=\frac{a}{3}\cdot\frac{-2}{3}(ax-4)^{-\frac{5}{3}}\cdot a=\frac{-2a^2}{9}(ax-4)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-2a^2}{9(ax-4)^{\frac{5}{3}}}}$

$f''(1)=0 \Rightarrow a=0$ مرفوض

$f''(1)$ غ.م $\Rightarrow 9(a(1)-4)^{\frac{5}{3}}=0 \Rightarrow a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=4}$

منحنى f والاشارات



س ① ما اشارة $f'(a)$ ، $f'(b)$ ، $f'(c)$

② ما اشارة $f''(a)$ ، $f''(b)$ ، $f''(c)$

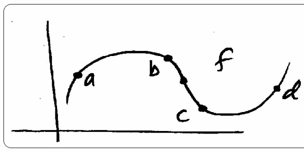
الحل

$f'(a)$ سالبة (تناقص)

$f'(b)$ صفر (مماس افقي)

$f'(c)$ موجبة (تزايد)

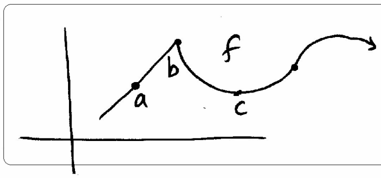
$f''(a)$ ، $f''(b)$ ، $f''(c)$ موجبات (تقعر للأعلى)



س جد النقطة التي يكون عندها $f'(x)>0$ & $f''(x)<0$

الجواب تزايد & تقعر للاسفل

$\Longrightarrow \boxed{a}$

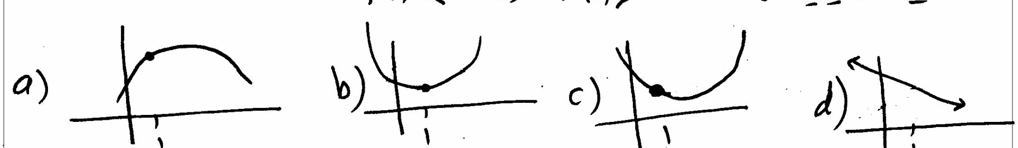


س جد النقط التي يكون عندها $f''(x)=0$

الحل a (لا تقعر)

تمرين

أي مما يلي له $f'(1)<0$ & $f''(1)>0$



الحل

a) $f'(1)>0$ ، $f''(1)<0$

b) $f'(1)=0$ ، $f''(1)>0$

c) $f'(1)<0$ ، $f''(1)>0$

d) $f'(1)<0$ ، $f''(1)=0$

اتجاه السرعة و تزايد السرعة

س) إذا كان $s(t)=9t^2-2t^3$ ، جد:

① احسب الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم باتجاه اليمين و (الفترة لليسار)

② ما الفترة التي تزداد فيها السرعة المتجهة وما الفترة التي تتناقص فيها

الحل ① $v(t)=18t-6t^2=0$

$t=0,3$

$(0,3)$ لليمين

$(3,\infty)$ لليسار

② $\boxed{v'(t)=18-12t}=0 \Rightarrow t=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

$(0,\frac{3}{2})$ تزداد السرعة المتجهة

$(\frac{3}{2},\infty)$ تتناقص السرعة المتجهة

تمارين

① إذا كان $s(t)=4te^{-\frac{t}{2}}$ ، جد

① الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم باتجاه اليمين واليسار

② الفترة الزمنية التي تزداد فيها السرعة وتتناقص

الحل $v(t)=4te^{-\frac{t}{2}}\cdot -\frac{1}{2}+e^{-\frac{t}{2}}\cdot 4=e^{-t/2}(-2t+4)$

$=0 \Rightarrow t=2$

$(0,2)$ لليمين

$(2,\infty)$ لليسار

$v'(t)=e^{-t/2}(-2)+(-2t+4)e^{-t/2}\cdot -\frac{1}{2}=e^{-t/2}(t-4)$

$(0,4)$ تتناقص

$(4,\infty)$ تزداد

② إذا كان $s(t)=\frac{t}{t^2+4}$ ، فإن الجسم يتحرك نحو اليسار عندما يكون الزمن t:

a) $t>0$ b) $0<t<2$ c) $t>2$ d) none

$v(t)=s'(t)=\frac{(t^2+4)(1)-t(2t)}{(t^2+4)^2}=\frac{4-t^2}{(4+t^2)^2}$ $\rightarrow =\pm 2 \rightarrow t=2$ ، $\rightarrow t=$ ؟؟

$+$ على $(0,2)$ ، $-$ بعد 2

③ إذا كان $s(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+t$ ، فمتى يتوقف الجسم

a) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) ؟؟

الحل: $v(t)=t^2-3t+1=0 \Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(1)}}{2}$

$t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \boxed{b}$

④ إذا كان $s(t)=3t\sqrt{t}$ حيث $t\geq 0$ ، فجد الفترة التي تزداد فيها السرعة المتجهة للجسم

$s(t)=3t\cdot t^{\frac{1}{2}}=3t^{\frac{3}{2}}$

$v(t)=s'(t)=\frac{9}{2}t^{\frac{1}{2}}$

$v'(t)=\frac{9}{4}t^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow v'(t)=\frac{9}{4\sqrt{t}}$ $\rightarrow =0$ ؟؟ ، $\rightarrow t=0$

$+ + + +$ بعد 0

$\Rightarrow (0,\infty)$ تزداد السرعة المتجهة

المدى

مدى الاقتران المتصل] القيمة العظمى المطلقة ، القيمة الصغرى المطلقة [$y \in$

س جد مدى الاقتران $f(x) = 6x - x^2$ ، في الفترة $x \in [1, 4]$

الحل $f'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

$f(1) = 5$ ص

$f(3) = 9$ وهي عظمى محلية عند $x=3$

$f(4) = 8$ ص

صغرى مطلقة $f(1) = 5$ ⇐

عظمى مطلقة $f(3) = 9$

المدى ⇐ $y \in [5, 9]$

س جد مدى الاقتران $f(x) = \sin(2x)$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل $f'(x) = 2\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $f(0) = 0$ ، $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\longrightarrow$ صغرى مطلقة $= 0$ | $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ عظمى مطلقة $\Longrightarrow$ المدى $[0, 1]$

س (الكتاب) إذا كانت الفترة $[1, 25]$ هي مجال الاقتران المتصل f الذي مداه $[3, 30]$ ، وكان $f'(x) < 0$ لجميع قيم x بين 1 و 25 ، فإن $f(25)$ تساوي

a) 1 b) 3 c) 25 d) 30

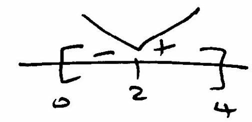
$f(25)$ صغرى مطلقة $\Longrightarrow$ $\boxed{f(25) = 3}$ $\boxed{b}$

تمارين

① مدى الاقتران $f(x)=\frac{x^4}{4}-8x$ حيث $x\in[0,4]$ هو

a) $[0,32]$ b) $[-16,0]$ c) $[-12,32]$ d) $[0,3]$

$\boxed{f'(x)=x^3-8}=0 \Rightarrow x=2$



ع $f(0)=0$

صغرى محلية $x=2$ وهي $f(2)=-12$

ع $f(4)=32$

صغرى مطلقة $f(2)=-12$

عظمى مطلقة $f(4)=32$

المدى

$[-12,32]$

$\boxed{c}$

تحدي من الكتاب

مهارات تفكير عليا

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأوجد القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)=x^a(1-x)^b$ في الفترة $[0,1]$

الحل

$$f'(x)=x^a\cdot b(1-x)^{b-1}\cdot -1+(1-x)^b\cdot a\,x^{a-1}$$

$$=x^a(1-x)^b\left(-b(1-x)^{-1}+a\,x^{-1}\right)$$

$$=x^a(1-x)^b\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{1-x}\right)$$

$$=x^a(1-x)^b\,\frac{a-ax-bx}{x(1-x)}$$

$$\boxed{f'(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a-ax-bx)}$$

$x=0$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $a-ax-bx=0$

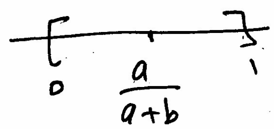
$ax+bx=a$

$x(a+b)=a \Longrightarrow \boxed{x=\dfrac{a}{a+b}}$

$f(0)=0$

$f(1)=0$

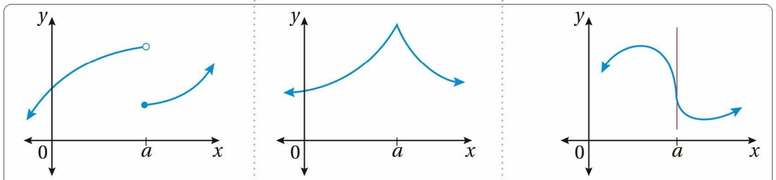
$f\left(\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(\frac{b}{a+b}\right)^b \longrightarrow$ عظمى مطلقة



القيم القصوى والتقعر 6

منحنى f

عدم القابلية للاشتقاق



مماس رأسي عندما $x = a$.

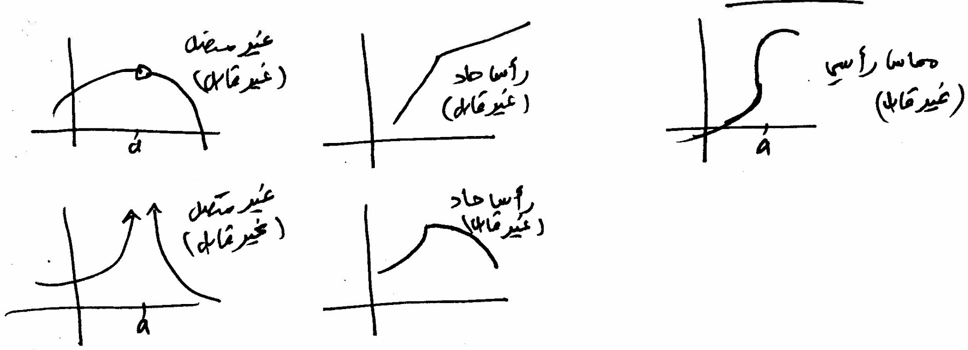
رأس حاد، أو زاوية عندما $x = a$.

عدم اتصال عندما $x = a$.

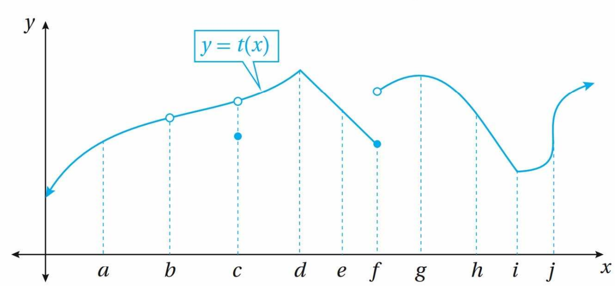
ملاحظات

ملاحظات

ملاحظات



س) يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



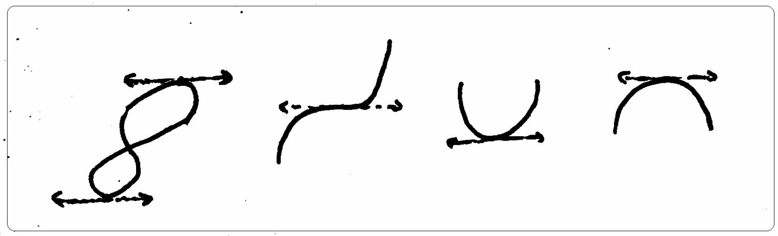
ح) غير قابل عند $x = b$ لانه غير متصل

غير قابل عند $x = c$ لانه غير متصل

غير قابل عند $x = d$ لانه رأس حاد $(f'_+ \neq f'_-)$

غير قابل عند $x = i$ لانه رأس حاد $(f'_+ \neq f'_-)$

غير قابل عند $x = j$ لانه مماس رأسي



المماس الافقي

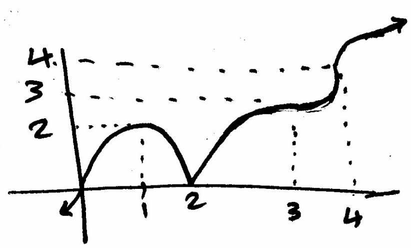
$f' = 0$

ملاحظات

ليس مماس
أفقي

ملاحظة المماس الافقي $f' = 0$
لكن f'' ليس شرط أنه تكون صفر

س



للشكل المجاور ، جد

① $f'(1)$ ، $f'(2)$ ، $f'(3)$ ، $f'(4)$

② $\frac{d}{dx}\left(x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ عند $x = 2$

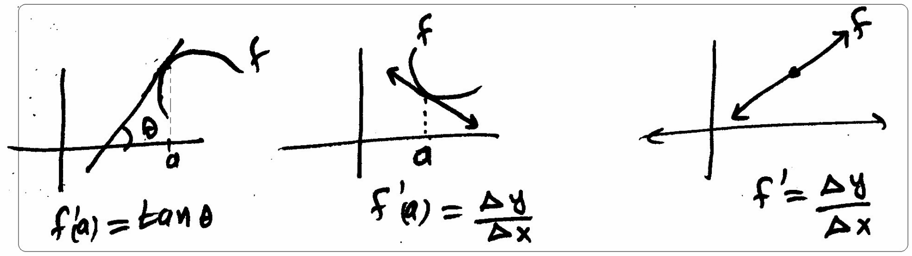
الحل. ① $f'(1) = 0$ ، $f'(2)$ غ م ، $f'(3) = 0$ ، $f'(4)$ غ م

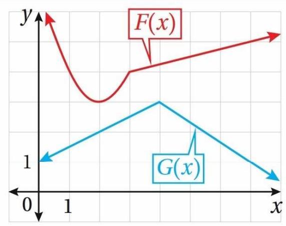
② $\frac{d}{dx}\left(x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x^2 f'\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2x$

$x = 2 \Longrightarrow (2)^2 f'(1) \cdot \frac{1}{2} + f(1) \cdot 2(2)$

$= 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

قيمة f'





س) الشكل المجاور يبين منحني $F(x)$ و $G(x)$
إذا كان $P(x) = F(x)\,G(x)$ ، جد $P'(2)$

حل

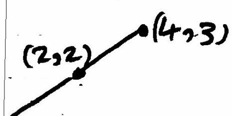
$$P'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$

$$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (0) = \frac{3}{2}$$

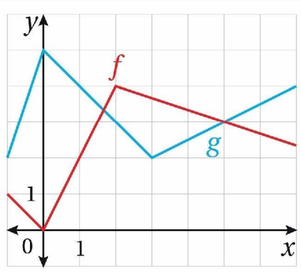
$F(2) = 3$

$F'(2) = 0$



$G(2) = 2$

$G'(2) = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$



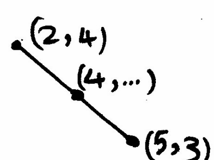
س) الشكل المجاور يبين منحنيي $f(x), g(x)$
إذا كان $h(x) = f(g(x))$ ، جد $h'(1)$

حل

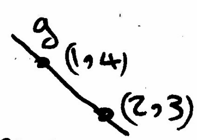
$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$h'(1) = f'(4) \cdot (-2)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot -1 = \frac{1}{3}$$



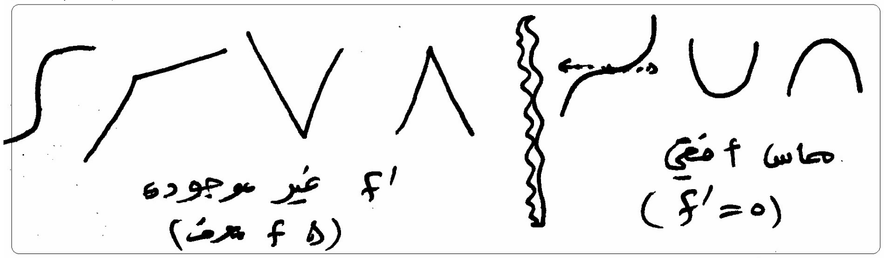
$f'(4) = \frac{4-3}{2-5}$
$= \frac{-1}{3}$

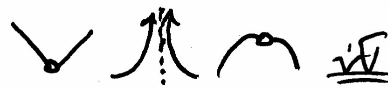


$g(1) = 4$

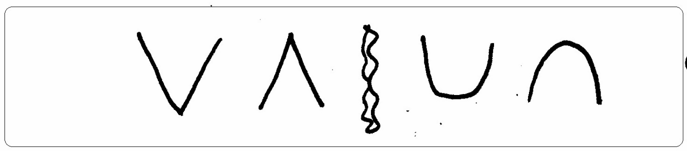
$g'(1) = \frac{4-3}{1-2} = -1$

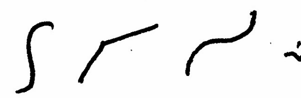
القيم الحرجة



(لكن  ليست حرجة لأنه f غير معرف)

القصوى المحلية

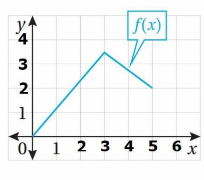


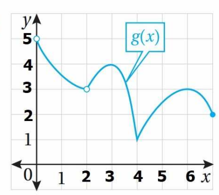
(لكن  ليست قصوى محلية)

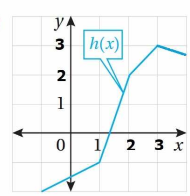
(وطبعاً  ليست قصوى محلية)

س: جد القيم الحرجة، والقيم القصوى المحلية للاقترانات

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًا في كلٍّ ممّا يأتي:

1


2


3


الحل

① حرجة عند $x=3$

~~قصوى~~ عظمى محلية عند $x=3$
وهي $f(3)=3.5$

② حرجة عند ~~$x=3$~~
$x=3, 4, 5$

عظمى محلية عند $x=3$
صغرى محلية عند $x=4$
عظمى محلية عند $x=6$

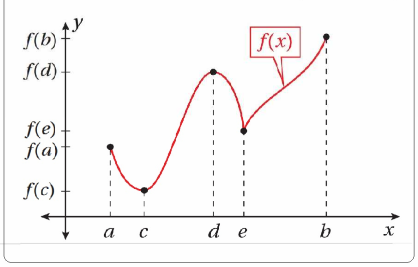
③ حرجة عند
$x=1, 2, 3$

عظمى
صغرى محلية : عند
$x=3$

القصوى المطلقة

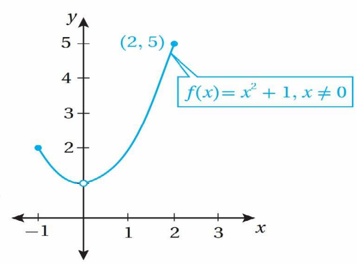
العظمى المطلقة : أعلى قيمة للاقتران (بشرط أن تكون محددة)
الصغرى المطلقة : أقل قيمة للاقتران (= = = =)

س جد القيم القصوى المطلقة



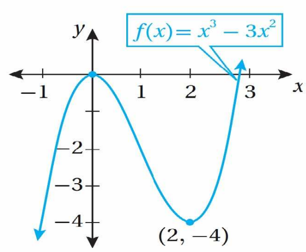
الحل : صغرى مطلقة عند $x=c$ وهي $f(c)$
عظمى مطلقة عند $x=b$ وهي $f(b)$

س جد القيم القصوى المطلقة



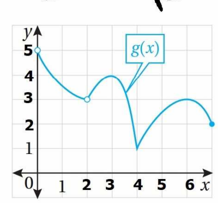
الحل : عظمى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=5$
لا يوجد صغرى مطلقة

س جد القيم القصوى المطلقة



الحل : لا يوجد عظمى مطلقة
= = صغرى مطلقة

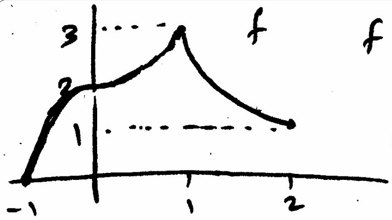
س جد القيم القصوى المطلقة



الحل : لا يوجد عظمى مطلقة
صغرى مطلقة عند $x=4$ وهي $f(4)=1$

فترات التزايد والتناقص

س: الشكل المجاور يمثل منحنى f بالاعتماد عليه جد



① فترات التزايد والتناقص

② القيم الحرجة

③ القيم القصوى

④ اشارة $f'(\frac{1}{2})$

① متزايد $(-1, 1)$
متناقص $(1, 2)$

② حرجة $x = \{0, 1\}$

③ عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=3$

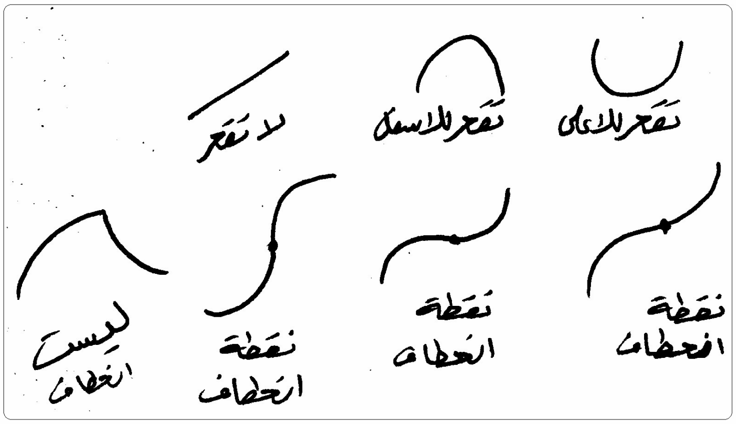
عظمى مطلقة عند $x=1$ وهي $f(1)=3$
صغرى مطلقة عند $x=-1$ وهي $f(-1)=0$

④ $f'(\frac{1}{2}) = +ve$ (لأنه متزايد)

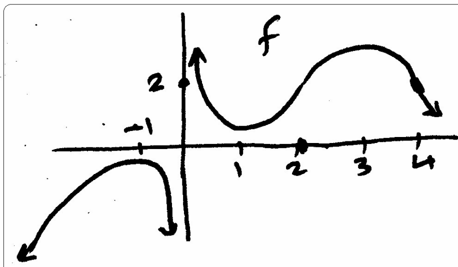
س: من السؤال السابق، جد الفترة التي يكون فيها $f'(x)>0$

الجواب $f'>0 \Rightarrow$ تزايد $\Rightarrow (-1, 1)$

التقعر والانعطاف



س) بالاعتماد على الشكل المجاور، جد
1) فترات التقعر للاعلى وللاسفل
2) نقاط الانعطاف
3) اشارة $f''(1)$
4) الفترة التي يكون فيها $f''(x) > 0$



الحل
1) تقعر للاسفل $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$
تقعر للاعلى $(0, 2)$

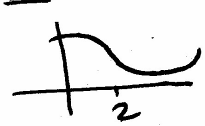
2) نقطة انعطاف $(2, 2)$

3) $f''(1) = +ve$ (مقعر للاعلى)

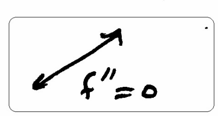
4) $f'' > 0 \Rightarrow$ مقعر للاعلى $\Rightarrow (0, 2)$

ملاحظة: $f''(c)$ قد تكون صفر أو غ.م (نقطة انعطاف)

مثال:
$$f(x) = (x-2)^{\frac{9}{5}} - \frac{9}{5}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{5}(x-2)^{\frac{4}{5}} - \frac{9}{5}$$
$$f''(x) = \frac{36}{25}(x-2)^{-\frac{1}{5}}$$

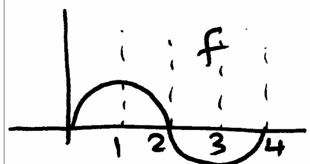


ملاحظة:



تزايد f'

الشكل المجاور يمثل منحنى f بالاعتماد عليه جد فترات التزايد والتناقص لـ f'



الحل f' تزايد $\Leftarrow$ تقعر للاعلى $\Leftarrow$ $(2 ، 4)$

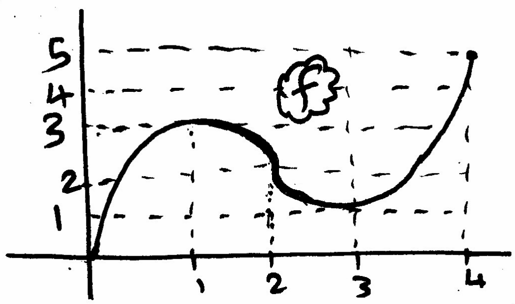
f' تناقص $\Leftarrow$ تقعر للاسفل $\Leftarrow$ $(0 ، 2)$

سؤال: في الشكل السابق، جد الفترة التي تكون فيها مماسات f تحته

الحل $\Leftarrow$ تقعر للاعلى $\Leftarrow$ $(2 ، 4)$

تمرين

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران f جد:



① القيم الحرجة للاقتران f
② فترات التزايد والتناقص للاقتران f
③ القيم القصوى وبين نوعها (للاقتران f)
④ فترات التقعر للاعلى والاسفل للاقتران f
⑤ نقاط الانعطاف للاقتران f
⑥ فترات التزايد والتناقص لـ f'
⑦ قيمة $f'(1)$ ، اشارة $f''(1)$
⑧ الفترة التي يكون فيها $f'(x)<0$
⑨ الفترة التي يكون فيها $f''(x)<0$
⑩ $f(3)$

أكمل ① الحرجة $x = \{1, 2, 3\}$

② تزايد $(0, 1)$ $(3, 4)$
تناقص $(1, 3)$

③ عظمى محلية عند $x = 1$ وهي $f(1) = 3$
صغرى محلية عند $x = 3$ وهي $f(3) = 1$

صغرى مطلقة عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$
عظمى مطلقة عند $x = 4$ وهي $f(4) = 5$

④ تقعر للاسفل $(0, 2)$
تقعر للاعلى $(2, 4)$

⑤ نقطة الانعطاف $(2, 2)$

⑥ f' تزايد $\Longrightarrow$ للاعلى f تقعر $\Longrightarrow (2, 4)$
f' تناقص $\Longrightarrow$ للاسفل f تقعر $\Longrightarrow (0, 2)$

⑦ $f'(1) = 0$ ، $f''(1)$ سالب

⑧ $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ تناقص $\Longrightarrow (1, 3)$

⑨ $f''(x) < 0 \Longrightarrow$ تقعر للاسفل $\Longrightarrow (0, 2)$

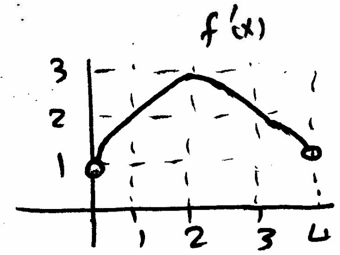
⑩ $f(3) = 1$

منحنى f'

القيم

س بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل $f'(x)$ ، جد

① $f'(1)$ ، $f'(2)$



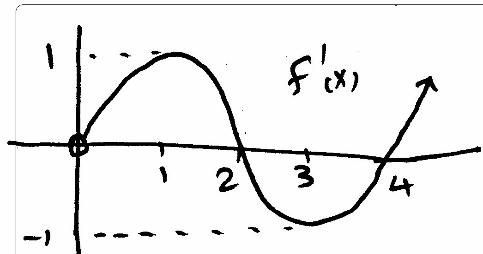
الحل ① $f'(1) = 2$; $f'(2) = 3$

س بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، جد

① $f'(1)$ ، $f'(2)$ ، $f'(3)$

② إذا كانت $f'(x) = -1$ ، فجد قيمة x

③ للاقتران $f(x)$ مماس أفقي عند x تساوي: ..



الحل

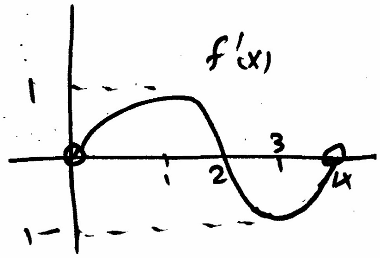
① $f'(1) = 1$, $f'(2) = 0$, $f'(3) = -1$

② $f'(x) = -1 \Rightarrow x = 3$

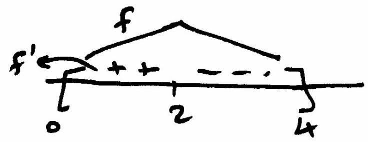
③ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \{2, 4\}$

تزايد وتناقص وحرجة وقصوى f

س) الشكل المجاور يبين منحنى $f'(x)$ ، جد
① فترات التزايد والتناقص لـ f
② القيم الحرجة لـ f
③ القيم القصوى المحلية لـ f



الحل ①

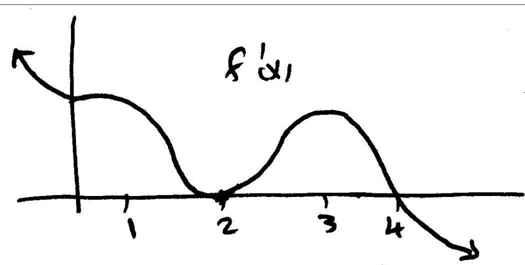


$\Rightarrow$ تزايد $(0,2)$ تناقص $(2,4)$

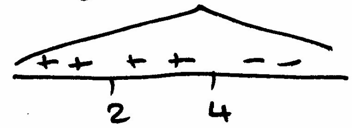
② $f'=0 \Rightarrow x=2 \Longrightarrow x=2$
f' غ م $\Rightarrow \{\}$

③ $f(2)$ وهي $x=2$ صغرى محلية عند

س) الشكل المجاور يمثل منحنى مشتقة الاقتران f ، بالاعتماد عليه جد:
① فترات التزايد والتناقص لـ f
② القيم الحرجة لـ f
③ قيم x التي يوجد عندها قيم قصوى محلية لـ f



①

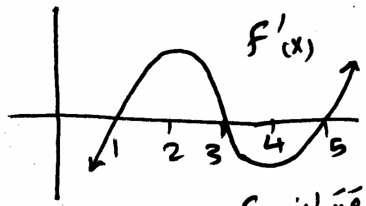


تزايد $(-\infty,4)$ تناقص $(4,\infty)$

② $f'=0 \Rightarrow x=\{2,4\}$
f' غ م $\Rightarrow \{\}$

③ عظمى محلية عند $x=4$

تقعر وانعطاف f



س الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$، بالاعتماد عليه جد:

① فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران f

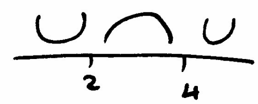
② نقاط الانعطاف للاقتران f

الحل ① f' تزايد $\Longrightarrow$ f تقعر للأعلى $\rightarrow (-\infty, 2)\ (4, \infty)$

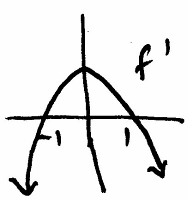
f' تناقص $\Longrightarrow$ f تقعر للأسفل $\rightarrow (2, 4)$

② انعطاف $\longrightarrow x = \{2, 4\}$

$\Longrightarrow \{(2, f(2)), (4, f(4))\}$



س بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f'(x)$ جد:



① فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران f

② الفترة التي يكون فيها $f''(x) < 0$

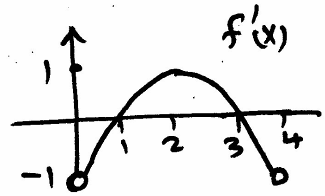
الحل ① f' تزايد $\Longrightarrow$ f تقعر للأعلى $\longrightarrow (-\infty, 0)$

f' تناقص $\Longrightarrow$ f تقعر للأسفل $\Longrightarrow (0, \infty)$

② $f'' < 0 \Longrightarrow$ f تقعر للأسفل $\Longrightarrow (0, \infty)$

تمارين

1) الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، بالاعتماد عليه جد



① قيم x الحرجة للاقتران f

② فترات التزايد والتناقص للاقتران f

③ قيم x التي يوجد عندها قيم قصوى محلية للاقتران f

④ فترات التقعر للأعلى والأسفل للاقتران f

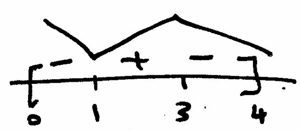
⑤ نقط الانعطاف للاقتران f

⑥ قيم x التي يوجد عندها مماس أفقي للاقتران f

الحل

$f' = 0 \Longrightarrow x = \{1, 3\}$

f' غ.م $\Longrightarrow x = \{\}$



① حرجة $x = \{1, 3\}$

② تناقص $(0, 1)$ $(3, 4)$

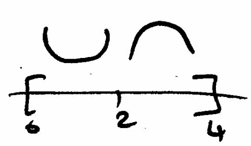
تزايد $(1, 3)$

③ صغرى محلية عند $x = 1$

عظمى محلية عند $x = 3$

④ f مقعر للأعلى $\Longrightarrow$ f' تزايد $\Longrightarrow (0, 2)$

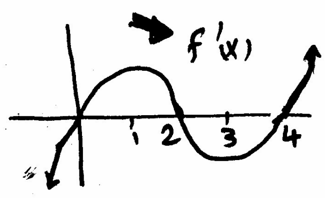
f مقعر للأسفل $\Longrightarrow$ f' تناقص $\Longrightarrow (2, 4)$



⑤ انعطاف $x = 2$

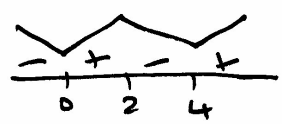
⑥ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \{1, 3\}$

② الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$
بالاعتماد عليه جد
① فترات التزايد والتناقص لـ f
② فترات التقعر لـ f



الحل

① $f' = 0 \Rightarrow x = \{0, 2, 4\}$



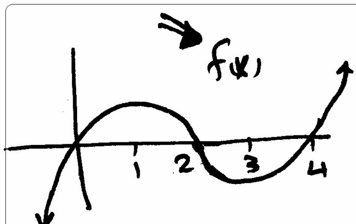
تزايد $(0, 2)(4, \infty)$

تناقص $(-\infty, 0)(2, 4)$

② تقعر f للأعلى ⇐ تزايد f' ⇐ $(-\infty, 1)\ (3, \infty)$

تقعر f للأسفل ⇐ تناقص f' ⇐ $(1, 3)$

③ الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$
بالاعتماد عليه جد
① فترات التزايد والتناقص لـ f
② فترات التقعر لـ f



الحل ① تزايد $(-\infty, 1)\ (3, \infty)$

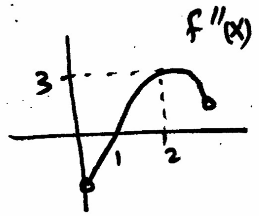
تناقص $(1, 3)$

② تقعر للأسفل $(-\infty, 2)$

تقعر للأعلى $(2, \infty)$

منحنى f''

القيم



س الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$ ، بالاعتماد عليه

جد ① $f''(1)$

② $f''(2)$

③ قيم x حيث $f''(x)=0$

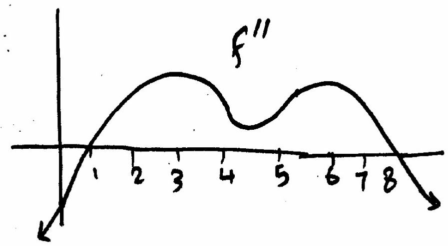
الحل

① $f''(1)=0$

② $f''(2)=3$

③ $x=1$

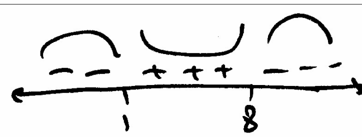
التقعر والانعطاف



س) الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$ ، بالاعتماد عليه جد
① فترات التقعر للاعلى والاسفل للاقتران f
② نقاط الانعطاف للاقتران f

الحل $f''=0 \Rightarrow x = 1 , 8$

f'' غير موجودة $\Rightarrow \{\}$



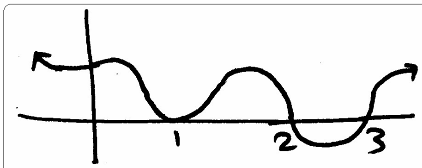
تقعر للاعلى $(1,8)$

تقعر للاسفل $(-\infty,1)\ (8,\infty)$

انعطاف $\{(1,f(1)) , (8,f(8))\}$

س) في الشكل السابق ، متى يكون f' متزايد

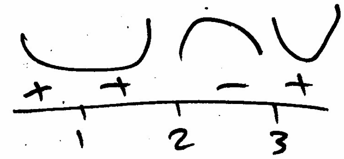
الجواب f' متزايد $\Rightarrow f$ مقعر للاعلى $\rightarrow (1,8)$



س) الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$
جد نقاط انعطاف للاقتران f
قيم x التي يوجد عندها

الحل $f''=0 \Rightarrow x=\{1,2,3\}$

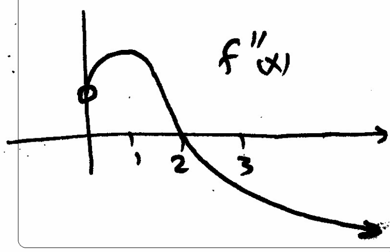
f'' غير موجودة $\Rightarrow \{\}$



الانعطاف عند $x = \{2,3\}$

القصوى المحلية

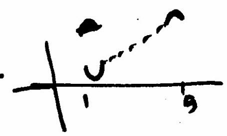
س: إذا كان للاقتران $f(x)$ قيم حرجة $x = \{1, 5\}$ وكان منحنى $f''(x)$ مبين في الشكل، جد القيم القصوى المحلية للاقتران f



الحل: $f'(1) = 0$ و $f''(1) = +ve > 0 \Longrightarrow$ صغرى محلية $(x = 1)$

$f'(5) = 0$ و $f''(5) < 0 \Longrightarrow$ عظمى محلية $(x = 5)$

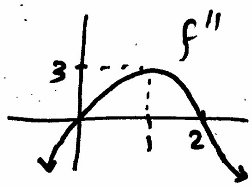
فلسفة: صغرى $x = 1$، عظمى $x = 5$ $\Longleftarrow$



$\Longleftarrow$ تزايد $(1, 5)$

تمارين

① الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$ ، بالاعتماد عليه جد



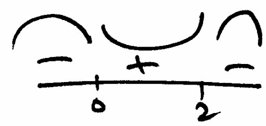
① $f''(1)$
② قيم x حيث $f''(x)=3$
③ فترات التقعر للاعلى والاسفل للاقتران f
④ قيم x التي يوجد عندها نقاط انعطاف للاقتران f

الحل

① $f''(1)=3$

② $f''(x)=3 \Longrightarrow x=1$

③ $f''=0 \Rightarrow x=\{0,2\} \longrightarrow$

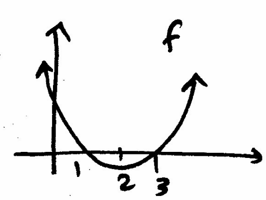


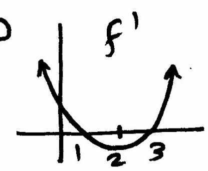
f'' غ.م $\Rightarrow x=\{\}$

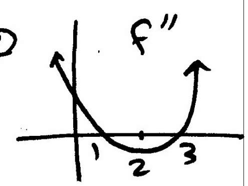
تقعر للاعلى $(0,2)$
تقعر للاسفل $(-\infty,0)(2,\infty)$

④ انعطاف عند $x=\{0,2\}$

② لكل مما يلي متى يكون f مقعر للاعلى

① 

② 

③ 

الحل ① $(-\infty,\infty)$

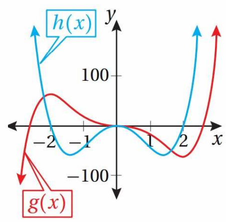
② f' متزايد $(2,\infty)$
$\Rightarrow f$ مقعر للاعلى $(2,\infty)$

③ 

مقعر للاعلى
$(-\infty,1)(3,\infty)$

تحدي من الكتاب

تحدٍّ: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.

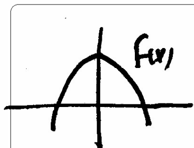


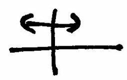
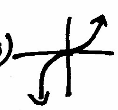
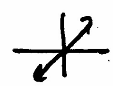
$g'(-2)=0 \quad (= h(-2))$

$g'(2)=0 \quad (= h(2))$

$x < -2$ g متزايد $\Longrightarrow$ g' موجب (موجب h) $\Longrightarrow$ $\boxed{g' = h}$

س إذا علمت أن الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$ فأي من الأشكال التالية يمثل منحنى f'



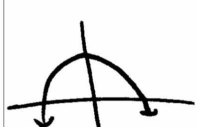
a)  b)  c)  d) 

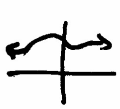
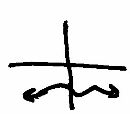
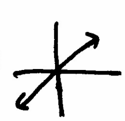
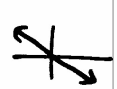
$f'(0)=0$

$x < 0$ $f(x)$ متزايد $\Longrightarrow$ f' موجب $\Longrightarrow$ $\boxed{d}$

$x > 0$ f متناقص $\Longrightarrow$ f' سالب

س إذا علمت أن الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$ فأي من الأشكال التالية يمثل منحنى $f''(x)$

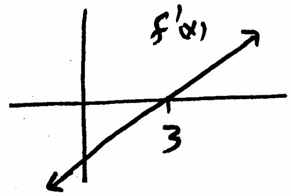


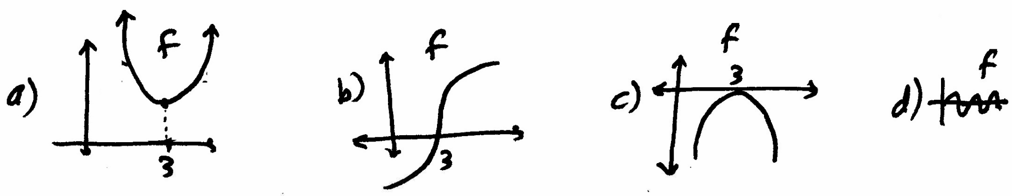
a)  b)  c)  d) 

لأن f مقعر للأسفل $\Longrightarrow$ f'' سالب $\Longrightarrow$ $\boxed{b}$

تمرين

الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$ ، بالاعتماد عليه فإن منحنى $f(x)$ يعطى بالشكل





الحل

جرب جميع الخيارات !

a) $f'(3)=0$ ✓
$x>3$ متزايد $\Rightarrow$ f' موجب ✓
$x<3$ متناقص $\Rightarrow$ f' سالب ✓
$\Longrightarrow$ $\boxed{a}$ ✓

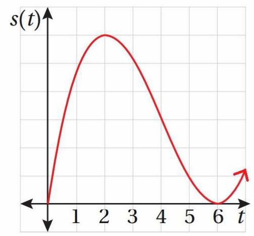
b) $f'(3) \neq 0$ ✗

c) $f'(3)=0$ ✓
$x>3$ تناقص $\Rightarrow$ f' سالب ✗

d) طنش تعش منتعش

منحنى السرعة

يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:



39 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

40 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

41 إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الحل سكونه $\Rightarrow V=0 \Rightarrow S'=0 \Rightarrow$ مماس أفقي $\Rightarrow t=\{2,6\}$

الاتجاه الموجب $\Rightarrow V+ \Rightarrow S'+ \Rightarrow S$ تزايد $\Rightarrow (0,2)(6,\infty)$

الاتجاه السالب $\Rightarrow V- \Rightarrow S'- \Rightarrow S$ تناقص $\Rightarrow (2,6)$

تزايد $V \Rightarrow$ تزايد $S' \Rightarrow$ تقعر للأعلى $S \Rightarrow (4,\infty)$

تناقص $V \Rightarrow$ تناقص $S' \Rightarrow$ تقعر للأسفل $S \Rightarrow (0,4)$

مراجعة وامتحان

تزايد f'

س) إذا كان $f(x) = x^3 - 6x^2$ ، فإن $f'(x)$ يكون متزايد في الفترة

a) $(0,4)$ b) $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ c) $(2,\infty)$ d) none

الحل $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f''$ $\frac{-\ \cap \quad +\ \cup}{2}$

$\Rightarrow f$ مقعر للأعلى $(2,\infty) \Rightarrow f'$ متزايد $(2,\infty) \Rightarrow \boxed{c}$

تذكر تزايد f' ⟸ تقعر f للأعلى

س) إذا كان $f(x) = x + \sin x$ ، حيث $x \in [0, 2\pi]$ ، جد:

① فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x)$

② فترات التزايد والتناقص لـ $f'(x)$

الحل ① $\boxed{f'(x) = 1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$ f': $[0 \ + \ \pi \ + \ 2\pi]$

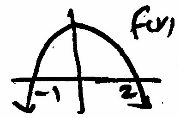
$\Rightarrow f(x)$ متزايد $\cancel{[0, 2\pi]}$ $(0, 2\pi)$

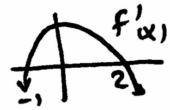
② $\boxed{f''(x) = -\sin x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow$ f'': $[0 \ -\ \cap \ \pi \ +\ \cup \ 2\pi]$

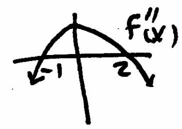
$\Rightarrow f(x)$ مقعر للأعلى (f' متزايد) $(\pi, 2\pi)$

$f(x)$ مقعر للأسفل (f' متناقص) $(0, \pi)$

س) جد فترات تناقص f' ، لكل مما يلي

① 

② 

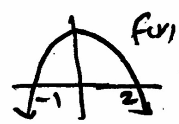
③ 

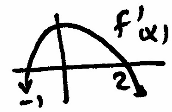
الحل ① f مقعر للأسفل $(-\infty,\infty) \Longrightarrow f'$ متناقص $(-\infty,\infty)$

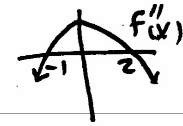
② f' متناقص $(0,\infty)$

③ $f''=0 \rightarrow x=-1,2 \Longrightarrow$ $\overset{-}{\longleftarrow}\underset{-1}{|}\overset{+}{—}\underset{2}{|}\overset{-}{\longrightarrow}$ $\Longrightarrow$ f مقعر للأسفل (f' متناقص) $(-\infty,-1)$ ، $(2,\infty)$

س) جد فترات تقعر $f(x)$ للأعلى:

① 

② 

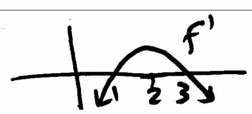
③ 

① لا يوجد

② f تقعر للأعلى $\Longleftarrow f'$ تزايد $\Longrightarrow (-\infty,0)$

③ $\overset{-}{—}\underset{-1}{|}\overset{+}{—}\underset{2}{|}\overset{-}{—}$ $\Longrightarrow$ مقعر للأعلى $(-1,2)$

س) إذا كان منحنى $f'(x)$ معطى في الشكل



فجد ① فترات التقعر للأعلى وللأسفل لـ f
② نقط الانعطاف f

f مقعر للأعلى $(-\infty,2)$ $\wedge$ f مقعر للأسفل $(2,\infty) \Longrightarrow$ نقطة الانعطاف $(2, f(2))$

تفكير: هل $f''(2)=0$ ؟ الجواب: نعم

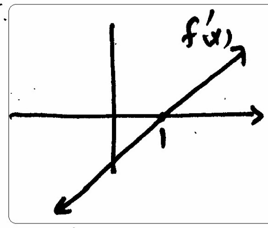
التمارين

① الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$

بالاعتماد عليه جد:

① فترات التقعر f

② قيم x لنقطة الانعطاف (إن وجدت)



الحل f' متزايد $(-\infty,\infty) \Longrightarrow$ مقعر للأعلى f $(-\infty,\infty)$

$\Longrightarrow$ لا تقعر للأسفل

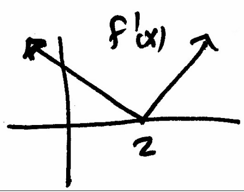
$\Longrightarrow$ لا انعطاف

② الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$

بالاعتماد عليه جد:

① فترات التقعر f

② قيم x لنقطة الانعطاف (إن وجدت)



الحل f' متناقص $(-\infty,2) \Longrightarrow$ مقعر للأسفل f $(-\infty,2)$

f' متزايد $(2,\infty) \Longrightarrow$ مقعر للأعلى f $(2,\infty)$

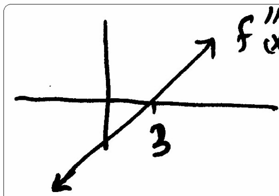
انعطاف $x=2$ (لأنه التقعر عندما ينقلب f ∩ ∪ عند 2)

③ الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$

بالاعتماد عليه جد:

① فترات التقعر f

② قيم x لنقطة الانعطاف f

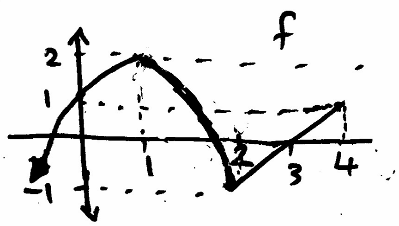


الحل $f''=0 \Rightarrow x=3$ ⇨ f'': $- \; - \; \big| \; + \; +$ (عند 3، f: ∩ ∪)

مقعر للأسفل $(-\infty,3)$ مقعر للأعلى $(3,\infty)$ انعطاف $x=3$

المنحنيات الثلاث

س الشكل المجاور يمثل منحنى f بالاعتماد عليه جد



أولاً ① القيم الحرجة للاقتران f
② قيمة $f'(3)$ و $f''(3)$
③ قيمة $f'(2)$ و $f''(2)$
④ قيمة $f'(1)$ و إشارة $f''(1)$
⑤ القيم القصوى للاقتران f
⑥ نقاط الانعطاف للاقتران f

ثانياً: فترات التزايد والتناقص لـ f
② قيم x حيث $f'(x) < 0$
③ قيم x حيث $f''(x) \leq 0$

ثالثاً ① فترات التقعر للأعلى والأسفل للاقتران f
② فترة تناقص f'
③ قيم x حيث $f''(x) < 0$

أولاً الحل: الحرجة $x = \{1, 3\}$

$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $f''(3) = 0$

$f'(2)$ غ م $\Longrightarrow$ $f''(2)$ غ م

$f'(1) = 0$ و $f''(1) < 0$

عظمى محلية $f(1) = 2$
صغرى محلية $f(2) = -1$
عظمى مطلقة $f(1) = f(4) = 2$
صغرى مطلقة: لا يوجد
انعطاف: لا يوجد

ثانياً تزايد $(-\infty, 1)$ $(2, \infty)$ و تناقص $(1, 2)$

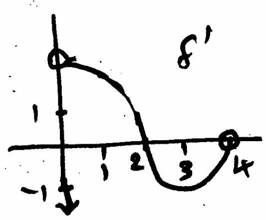
$f'(x) < 0 \Longrightarrow (1, 2)$ ، $f'(x) \leq 0 \Longrightarrow [1, 2)$, $(2, 4)$

$f'' = 0$

ثالثاً للأسفل $(-\infty, 2)$ ؛ للأعلى: —

f' تناقص $\Longrightarrow (-\infty, 2)$

$f''(x) \leq 0 \Longrightarrow (-\infty, 2)$



س) الشكل المجاور يبين منحنى f'

أولاً: ① جد $f'(3)$ ، $f''(3)$

② $f'(2)$

③ قيم x حيث يوجد مماس أفقي f

④ القيم الحرجة للاقتران f

ثانياً: ① فترات التقعر f

② قيم x لنقاط انعطاف منحنى f

③ فترات التزايد والتناقص لمنحنى f

الحل

أولاً ① $f'(3) = -1$ و $f''(3) = 0$

② $f'(2) = 0$

③ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

④ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2 \longrightarrow$ حرجة $x = \{2\}$

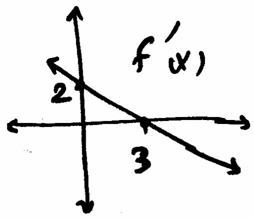
$f'(x)$ غ م $\Longrightarrow x = \{\}$

ثانياً f مقعر للأسفل $\Longrightarrow$ (تناقص f') $\Longrightarrow (0,3)$

① f مقعر للأعلى $\Longrightarrow$ (تزايد f') $\longrightarrow (3,4)$

② انعطاف $x = 3$

③ $f' = 0 \Longrightarrow x = 3$ $\quad$ [0 + 3 − 4] $\longrightarrow$ تزايد $(0,3)$ ، تناقص $(3,4)$



س) الشكل المجاور يمثل منحنى f'

① جد $f'(3)$ ، $f''(3)$

② فترات التزايد للاقتران f

③ الفترة حيث $f'(x) \geq 0$

④ فترات تقعر f

⑤ الفترة حيث $f''(x) > 0$

الحل ① $f'(3) = 0$, $f''(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3}$

②③ $f' = 0 \Rightarrow x = 3$ $\quad + \; | \; - \quad$ (3) $\Rightarrow$ تزايد $(-\infty, 3)$

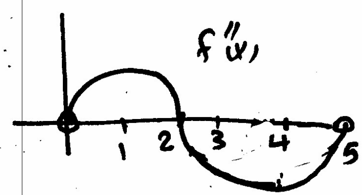
$f' \geq 0 \quad (-\infty, 3]$

④ تقعر f للأعلى $\Rightarrow$ (تزايد f') $\Rightarrow \{\ \}$

تقعر f للأسفل $\Rightarrow$ (تناقص f') $\Rightarrow R$

⑤ $f'' > 0 \Rightarrow$ f' تزايد $\Rightarrow \{\ \}$

س) الشكل المجاور يمثل منحنى f'' بالاعتماد عليه جد:



أولاً: ① فترات التقعر للأعلى وللأسفل f

② نقاط الانعطاف f

③ فترات تزايد f'

ثانياً: إذا علمت أن قيم f الحرجة هي $x = \{1, 4\}$

① حدد القيم القصوى المحلية لـ f

الحل

① $f'' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

$$[0 \quad + \quad 2 \quad - \quad 5]$$

أولاً للأعلى $(0, 2)$

للأسفل $(2, 5)$

② انعطاف $(2, f(2))$

③ f' تزايد $\Rightarrow f$ تقعر للأعلى $\Rightarrow (0, 2)$

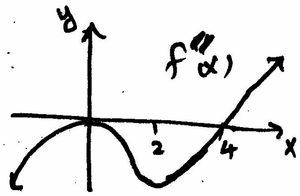
ثانياً ① اختبار المشتقة الثانية $\Longrightarrow$ $f'(1) = 0$ & $f''(1) > 0 \Longrightarrow$ صغرى محلية عند $x = 1$

$f'(4) = 0$ & $f''(4) < 0 \Longrightarrow$ عظمى محلية $x = 4$

تمارين

1 سنوات 2018

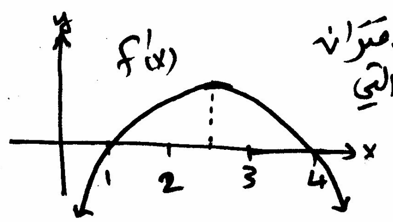
إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$، فإن مجموعة قيم x التي يكون للاقتران f نقطة انعطاف عندها هي



a) $\{4\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 4\}$ d) $\{0, 2, 4\}$

2 سنوات 2018

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f'(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$، فإن الفترة التي يكون فيها $f''(x) \geq 0$ هي :

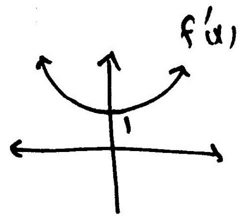


a) $[2.5, 4]$ b) $[4, \infty)$

c) $[1, 4]$ d) $(-\infty, 2.5)$

3 سنوات 2011

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ فإن فترة التزايد للاقتران $f(x)$ هي:

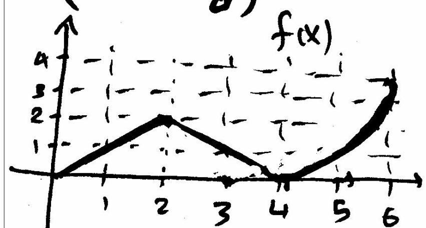


a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[1, \infty)$ d) $\mathbb{R}$

4 سنوات 2017

(8 علامات)

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$، $x \in [0, 6]$ جد ما يأتي:



① القيم الحرجة للاقتران $f(x)$

② مجموعة قيم x التي عندها $f'(x) < 0$

③ $\left.\frac{d}{dx}\sqrt{3x + f(x)}\right|_{x=3}$

حل ① $f''=0 \Rightarrow x=0,4$ — $\overset{-}{\quad}\ 0\ \overset{-}{\quad}\ 4\ \overset{+}{\quad}$ $\Rightarrow$ انعطاف $x=4 \longrightarrow \boxed{a}$

حل ② $f''(x) \geq 0$? $\Longrightarrow$ تقعر للأعلى $\Rightarrow$ f' تزايد $\Rightarrow (-\infty, 2.5)$]?

$f''(2.5)=0 \Rightarrow (-\infty, 2.5) \Longrightarrow \boxed{d}$

حل ③ $f'=0 \Rightarrow x=\{\}$ $\Leftarrow\Rightarrow$ $\overset{+\ +\ +}{\longleftrightarrow}$ $\Rightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{d}$

حل ④

① $f'(x)=0 \Rightarrow x=\{\}$ علامتان

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=\{2,4\} \longrightarrow$ الحرجة $x=\{2,4\}$ ②

② $f'(x)<0 \Longrightarrow$ تناقص $\Rightarrow (2,4)$ علامتان ②

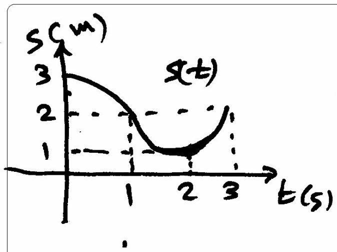
③ $\dfrac{d}{dx}\sqrt{3x+f(x)} = \dfrac{3+f'(x)}{2\sqrt{3x+f(x)}}$ علامة ①

$\dfrac{d}{dx}\sqrt{3x+f(x)}\Big|_{x=3} = \dfrac{3+f'(3)}{2\sqrt{3(3)+f(3)}}$ علامة ①

$f'(3)=\dfrac{2-0}{2-4}=-1$ علامة ①

$=\dfrac{3+-1}{2\sqrt{9+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ علامة ①

منحنى s و منحنى v



س) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى اقتران بُعد الجسم s(t)

جد ① بعد الجسم عن المرجع بعد ثانية

② متى يتوقف الجسم عن الحركة

③ الفترة التي يتحرك فيها الجسم بالاتجاه الموجب

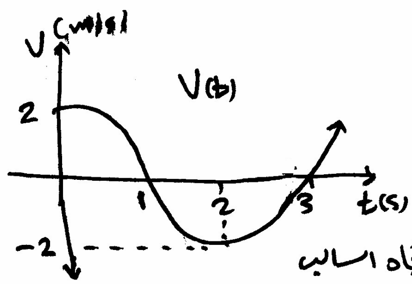
④ الفترة التي تتناقص فيها السرعة المتجهة

① $s(1)=2$

② $V=0 \Rightarrow s'=0 \Rightarrow$ مماس أفقي $\Rightarrow t=2$

③ $V+ \Rightarrow s'+ \Rightarrow$ تزايد s $\Rightarrow (2,3)$

④ $\underset{s'}{V}$ تناقص $\Rightarrow$ تقعر s للأسفل $\Rightarrow (0,1)$



س) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى السرعة المتجهة V(t)، جد:

① السرعة المتجهة الابتدائية

② سرعة الجسم بعد ثانيتين من الانطلاق

③ متى يتوقف الجسم عن الحركة

④ الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم بالاتجاه السالب

⑤ فترة تزايد السرعة المتجهة

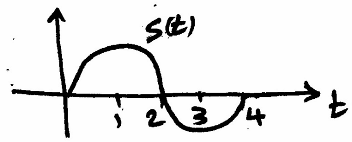
الحل ① $V(0)=2$

② $|V(2)|=|-2|=2$

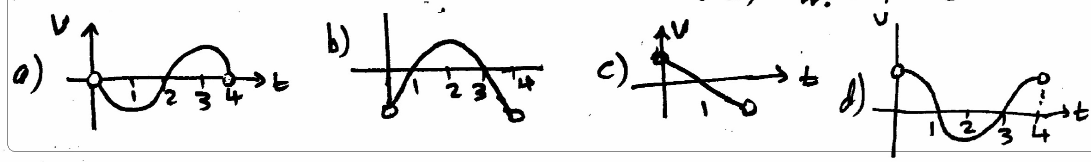
③ $V=0 \Rightarrow t=1,3$

④ $V- \Rightarrow t\in(1,3)$

⑤ V تزايد $\Rightarrow (2,\infty)$



س) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى البعد $s(t)$ ، فأي من الأشكال التالية يمثل منحنى السرعة المتجهة $V(t)$



الحل $s'(1)=0$

$s'(3)=0$

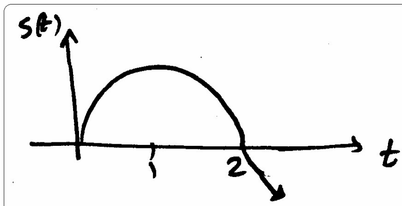
$t \in (0,1)$, $(3,4)$ s متزايد $\Rightarrow$ s' موجب

$s' \downarrow V$

$t \in (1,3)$ s متناقص $\Rightarrow$ s' سالب

$\Longrightarrow \boxed{d}$

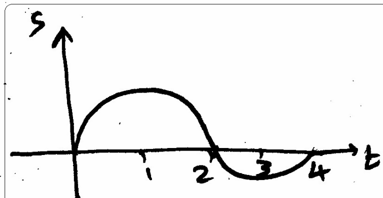
تمارين



① الشكل المجاور يمثل منحنى $s(t)$ ، يتوقف الجسم عن الحركة بعد

a) ثانية واحدة b) ثانيتين c) ثلاث ثواني d) ؟؟

الحل $V=0 \Rightarrow s'=0 \Longrightarrow$ مماس افقي $\Rightarrow t=1 \Longrightarrow \boxed{a}$

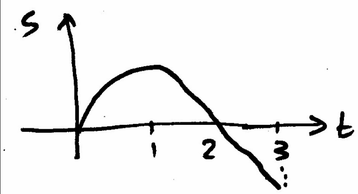


② الشكل المجاور يمثل منحنى $s(t)$ ، السرعة المتجهة تزداد في الفترة الزمنية:

a) $(0,2)$ b) $(2,4)$

c) $(1,3)$ d) none

الحل V تزايد ($V \downarrow s'$) $\equiv$ s مقعر للأعلى $\Rightarrow (2,4) \Longrightarrow \boxed{b}$

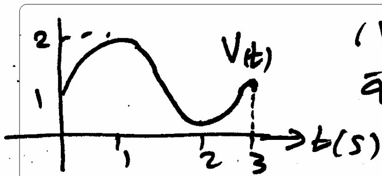


③ الشكل المجاور يمثل منحنى $s(t)$ الجسم يتجه نحو اليمين عندما

a) $t>1$ b) $t>2$

c) $0<t<1$ d) $0<t<2$

الحل $V+ \Rightarrow s$ يزداد $\Rightarrow (0,1) \Longrightarrow \boxed{c}$



④ الشكل المجاور يمثل منحنى السرعة المتجهة $V(t)$، بالاعتماد عليه، فإن أعظم قيمة للسرعة المتجهة على الإطلاق تحصل بعد مرور

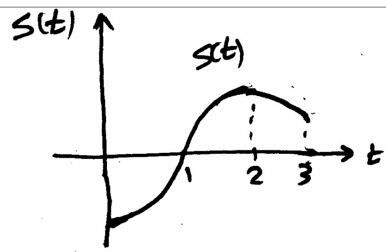
a) ثانية واحدة b) ثانيتين

c) ثلاث ثوانٍ d) ثانية ونصف

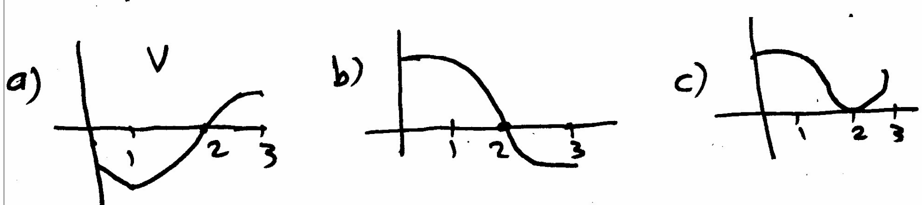
الحل V عظمى مطلقة عند $t=1$ وهي $V(1)=2$

$\Downarrow$

$\boxed{a}$



⑤ الشكل المجاور يمثل منحنى $s(t)$، أيٌّ من الأشكال التالية يمثل منحنى $V(t)$



d) none

$s'(2)=0$

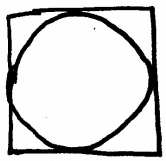
$t\in(0,2) \Rightarrow s$ يزداد $\Rightarrow s'$ موجب V

$t\in(2,3) \Rightarrow s$ يتناقص $\Rightarrow s'$ سالب V

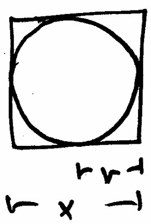
$\Longrightarrow \boxed{b}$

الدائرة والمعدلات

س) دائرة مرسومة داخل مربع، يتمددان معاً بحيث يبقيان متلامسين، إذا علمت أن معدل تزايد نصف قطر الدائرة $2 cm/s$، فما معدل تزايد المساحة المحصورة بينهما، عندما يصبح نصف قطر الدائرة $3 cm$



الحل



$x = 2r$

$\frac{dr}{dt} = 2$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=3} = ?$

$$A = x^2 - \pi r^2$$

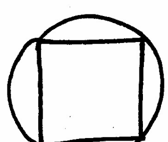
$$A = (2r)^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2$$

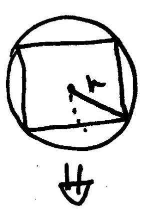
$$\frac{dA}{dt} = 8r\frac{dr}{dt} - 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$= 8(3)(2) - 2\pi(3)(2)$$

$$= 48 - 12\pi$$

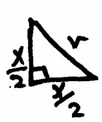
س) مربع مرسوم داخل دائرة، يتمددان معاً بحيث يبقيان متلامسين، إذا علمت أن معدل تزايد نصف قطر الدائرة $2 cm/s$، جد معدل تزايد مساحة المربع عند يصبح نصف قطر الدائرة $3 cm$





$\frac{dr}{dt} = 2$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=3} = ?$



$\Rightarrow r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\boxed{x = \sqrt{2}\,r}$

$$A = x^2 \Longrightarrow$$

$$A = (\sqrt{2}\,r)^2 = 2r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 4r\frac{dr}{dt}$$

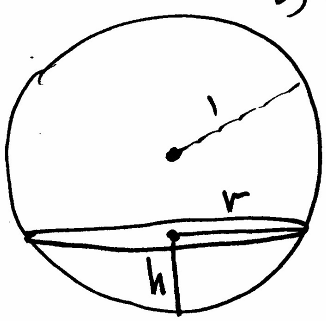
$$\frac{dA}{dt} = 4(3)(2) = 6$$

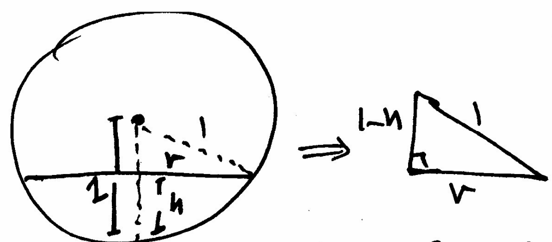
سنوات 2018

تحري

خزان ماء كروي الشكل نصف قطره 1 m . صب فيه الماء . إذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه هو $\frac{1}{4}$ m/min جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد دقيقتين من بدء صب الماء فيه

$A = \pi r^2$ سطح الماء على شكل دائرة





$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=2} = ?$

$(1)^2 = r^2 + (1-h)^2$

$r^2 = 1 - (1-h)^2$

$r^2 = 1 - (1 - 2h + h^2)$

$r^2 = 2h - h^2$

$A = \pi r^2$

$A = \pi(2h - h^2)$

$\frac{dA}{dt} = \pi\left(2\frac{dh}{dt} - 2h\frac{dh}{dt}\right)$

$h = h_0 + \frac{dh}{dt} t$

$h = 0 + \frac{1}{4} 2$

$h = \frac{1}{2}$

$\frac{dA}{dt} = \pi\left(2 \cdot \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}\right)$

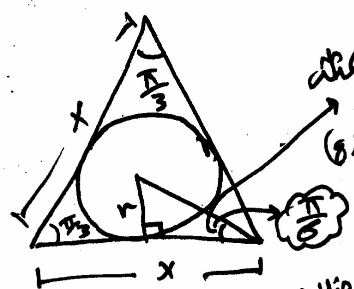
$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

تمرين

تتمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل 2 cm/min ، رسمت دائرة داخل المثلث تمس أضلاعه وأخذت تتمدد مع المثلث ، جد معدل زيادة مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة. عندما يكون طول ضلع المثلث 12 cm

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=12} = ?$$

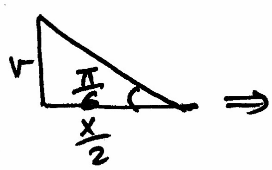


مركز الدائرة نفس مركز المثلث (لأنه متساوي الأضلاع)

$\Longrightarrow$

= نصف زاوية المثلث متساوي الأضلاع =

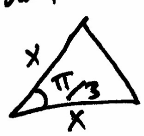
$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\;\frac{1}{2} =$$

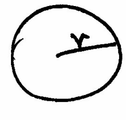


$$\Longrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{\frac{x}{2}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = \frac{x}{2\sqrt{3}}}$$

$A =$ مساحة المثلث $-$ مساحة الدائرة $= \frac{1}{2}\, x\, x \sin\frac{\pi}{3} - \pi r^2$





$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}\, x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - \frac{\pi}{12} x^2}$$

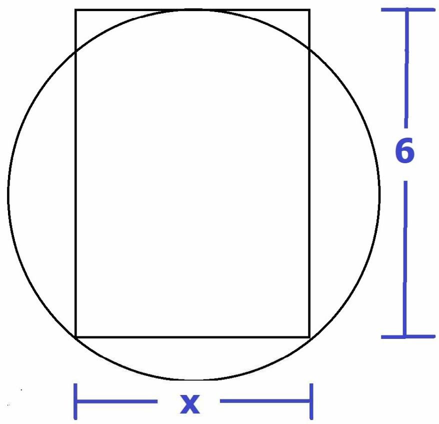
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, x\, \frac{dx}{dt} - \frac{\pi}{6}\, x\, \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=12} = \frac{\sqrt{3}}{2}(12)(2) - \frac{\pi}{6}(12)(2) = \boxed{12\sqrt{3} - 4\pi}$$

امتحان التحدي

مدة الامتحان 25 دقيقة

1 تحدي هندسي

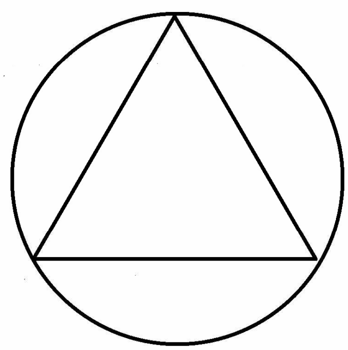


أثبت ان العلاقة بين x ونصف قطر الدائرة هي :

$$r = 3 + \frac{x^2}{48}$$

ملاحظة : هذا سؤال تأسيس هندسي وليس سؤال معدلات ...
يعني لا تشتق !

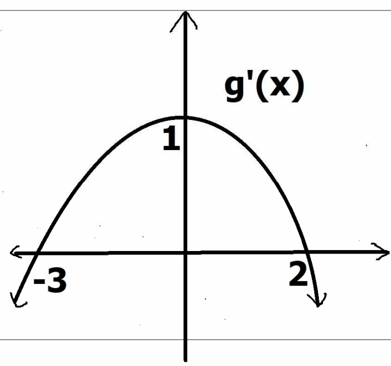
2



مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث تلامس رؤوسه محيط الدائرة، يتمددان معا، بحيث يزداد طول ضلع المثلث بمعدل 2 cm/s ، جد معدل تزايد المساحة المحصورة بينهما عندما يصبح طول ضلع المثلث 3 cm

3 يمثل الشكل المجاور منحنى $g'(x)$ ، بالاعتماد عليه ، جد :

1 - قيم x التي يوجد عندها مماس افقي للاقتران g(x)
2 - قيمة $g''(0)$
3 - فترات التزايد والتناقص للاقتران g(x)
4 - فترات التقعر للأعلى والأسفل للاقتران g(x)
5 - نقطة الانعطاف للاقتران g(x)



للتصحيح : ابعثوا حلكم على الموقع أو الفيس أو الواتس 0787488070

نهاية تطبيقات التفاضل 3