Abdulkadir Hasanat

الرياضيات

2023 / 2024

Hasanat

الثاني الثانوي العلمي Collins

المتجهات

الوحدة 5

المتجهات
Vectors

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات

078 531 88 77

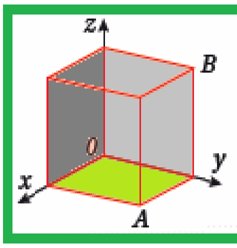
I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

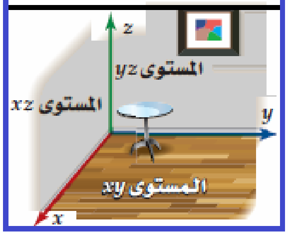
Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

الدرس 1 المتجهات في الفضاء
Vectors in Space

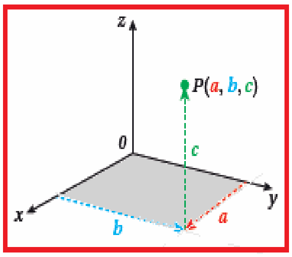


يُمكِن تحديد موقع نقطة في الفضاء بإضافة محور ثالث عمودي إلى كلٍّ من المحور x والمحور y يُسمّى المحور z، عندئذٍ يُحدِّد الثلاثي المُرتَّب (x , y , z) موقع النقطة في الفضاء.

يُشبِه الثُّمن جزءًا من غرفة بين حائطين متقاطعين وأرضية الغرفة.



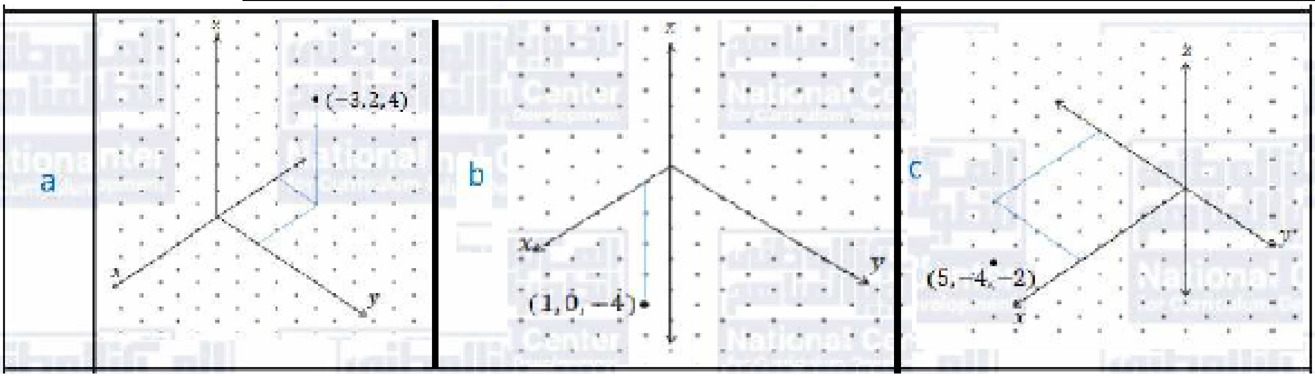
ينتج من إضافة المحور z ثلاثة مستويات،هي: المستوى xy،والمستوى xz، والمستوى yz وتُقسِّم هذه المستويات الفضاء إلى 8 أقسام، يُسمّى كلٌّ منها الثُّمُن (octant)



لتحديد موقع النقطة P(a, b, c) في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أُعيِّن النقطة (a, b) في المستوى xy أوَّلًا، ثم أتحرَّك إلى الأعلى أو إلى الأسفل بموازاة المحور z، تبعًا لقيمة الإحداثي z وإشارته

أتحقَّق من فهمي 111 أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

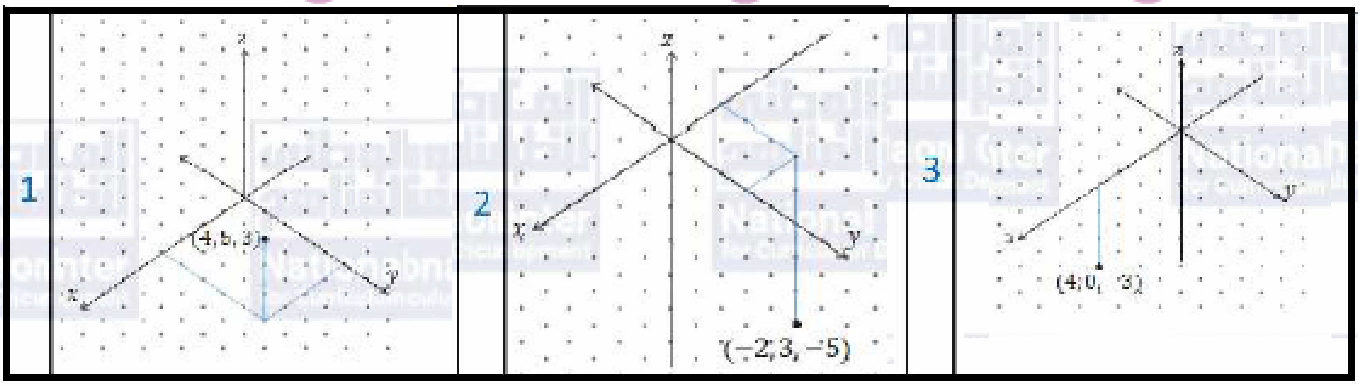
a) $(-3, 2, 4)$ b) $(1, 0, -4)$ c) $(5, -4, -2)$ d) $(-4, -2, 3)$



أتدرّب وأحُلّ المسائل

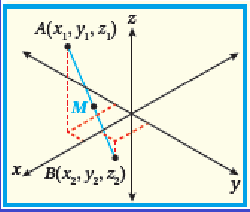
أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1 $(4, 5, 3)$ 2 $(-2, 3, -5)$ 3 $(4, 0, -3)$



المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

إذا كانــت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$، فــإنَّ المسافة بين النقطتين A و B تعطى بالصيغة:



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

*** $A(-3,6,-1)$, $B(7,2,-3)$:

$\Rightarrow$ 1) $AB = \sqrt{(7--3)^2 + (2-6)^2 + (-3--1)^2} = \sqrt{100+16+4} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$

$\Rightarrow$ 2) $M = (\frac{-3+7}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-1+-3}{2}) = (\frac{4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{-4}{2}) = (2,4,-2)$

*** $A(1,-2,-3)$, $B(-5,1,3)$:

$\Rightarrow$ 3) $AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (1--2)^2 + (3--3)^2} = \sqrt{81} = 9$

$\Rightarrow$ 4) $M = (\frac{-5+1}{2}, \frac{1+-2}{2}, \frac{3+-3}{2}) = (\frac{-4}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}) = (-2, \frac{-1}{2}, 0)$

*** $A(4,0,k)$, $B(0,\sqrt{8},6)$, $AB = 7 \Rightarrow k = ?$

$\Rightarrow$ 5) $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2 + (6-k)^2} = 7$

$\sqrt{16+8+(6-k)^2} = 7 \Rightarrow 24 + (6-k)^2 = 49$

$\Rightarrow (6-k)^2 = 25 \Rightarrow 6-k = \pm 5 \Rightarrow k = 1$ OR $k = 11$

*1) $A(-1,6,1)$, $B(7,4,-3)$:

$\Rightarrow AB = ?$

$\Rightarrow M = ?$

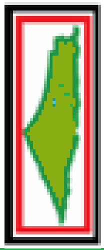
*2) $A(0,3,-1)$, $B(5,4,-1)$:

$\Rightarrow AB = ?$

$\Rightarrow M = ?$

*3) $A(-2,1,2)$, $B(k,3,-3)$, $AB = \sqrt{30} \Rightarrow k = ?$

*4) $A(k-1,4,2)$, $B(1,2k,2)$, $M = (1,4,2) \Rightarrow k = ?$



الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي 113 إذا كانت: $N(2, 1, -6), M(5, -3, 6)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) المسافة بين N و M.

b) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$.

أتحقق من فهمي صفحة 113

a	$NM = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2 + (6-(-6))^2} = \sqrt{169} = 13$
b	$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, 0\right)$

أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أُعطِي طرفاها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$ **5** $(-2, 7, 0), (2, -5, 3)$

6 $(12, 8, -5), (-3, 6, 7)$ **7** $(-5, -8, 4), (3, 2, -6)$

4 $A(3,-2,8), B(5,4,2)$

$AB = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$

$N = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 1, 5)$

5 $A(-2,7,0), B(2,-5,3)$

$AB = \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$

لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$

$N = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{7-5}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

6 $A(12,8,-5), B(-3,6,7)$

$AB = \sqrt{225 + 4 + 144} = \sqrt{373}$

لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$

$N = \left(\frac{12-3}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 7, 1\right)$

7 $A(-5,-8,4), B(3,2,-6)$

$AB = \sqrt{64 + 100 + 100} = \sqrt{264} = 2\sqrt{66}$

لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$

$N = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-8+2}{2}, \frac{4-6}{2}\right) = (-1, -3, -1)$

41 أكتشف الخطأ: قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإنَّ النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة". في حين قالت هديل: "النقطة B تقع داخل هذه الكرة".
أيُّ القولين صحيح، مُبرِّرًا إجابتي؟

42 تبرير: إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأُبيِّن أنَّ النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $M(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مُبرِّرًا إجابتي.

43 تبرير: تُمثِّل النقاط: $A(2, 3, -1), B(2, 3, 5), C(8, -3, 5)$ ثلاثةً من رؤوس مُكعَّب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: xy, xz, yz. أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي.

41 بما أن مركز الكرة هو $O(0,0,0)$ والنقطة $A(7,-3,3)$ تقع عليها فإن طول نصف قطرها R حيث:

$$R = OA = \sqrt{(7-0)^2 + (-3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49+9+9} = \sqrt{67}$$

$$OB = \sqrt{(2-0)^2 + (-8-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69}$$

بما أن $OB > R$ فإن النقطة B تقع خارج الكرة، ويكون قول حنان هو الصواب.

42 مركز الكرة هو النقطة C التي تنصف القطر المعطى طرفاه وطول نصف قطر الكرة هو R حيث:

$$C=\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-1+17}{2}\right)=(-3,4,8)$$

$$R = CK = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (4-2)^2 + (8-17)^2} = \sqrt{1+4+81} = \sqrt{86}$$

الآن نجد كلا من CM, CL ونقارنه مع R لمعرفة موقع كل من النقطتين M, L بالنسبة لهذه الكرة:

$$CL = \sqrt{(2-(-3)^2 + (10-4)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{25+36+25} = \sqrt{86} = R$$

إذن، النقطة L تقع على سطح الكرة.

$$CM = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-2-4)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86} = R$$

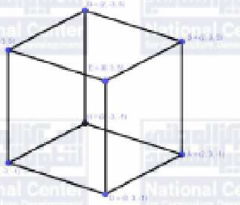
إذن، النقطة M أيضًا تقع على سطح هذه الكرة.

43 تختلف النقطة B عن النقطة A فقط في الإحداثي z، والفرق بين قيمتي z يساوي 6

إذن، AB أحد أحرف المكعب، وطول ضلع المكعب 6 وحدات.

أما النقطة C فيزيد إحداثيها x بمقدار 6 وحدات عن الإحداثي x للنقطة B، كما يقل إحداثيها y بمقدار 6 عن الإحداثي y للنقطة B (مُزاحة عنها 6 وحدات لليسار).

نجد باقي النقاط (الرؤوس) بإحداث إزاحات مقدارها 6 وحدات لإحداثيات الرؤوس الثلاثة المعطاة.



$D(8,3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

$E(8,3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

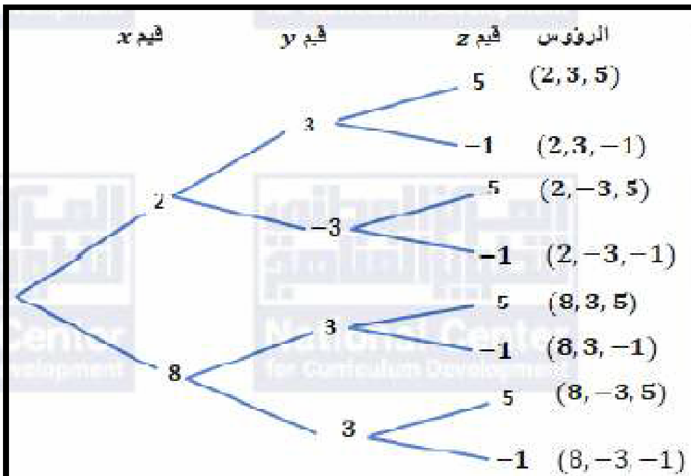
$F(8,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة C بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور z السالب.

$G(2,-3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.

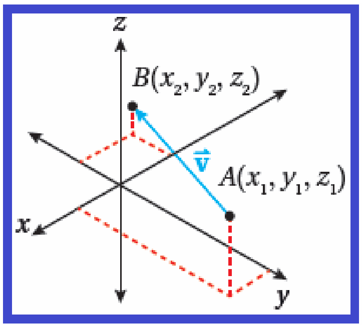
$H(2,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.

طريقة ثانية:

يمكن حل هذا السؤال باستعمال شجرة الاحتمال لأن كل وجهين يوازيان أحد المستويات: xy, xz, yz فلا يوجد لقيم x سوى 2 و 8، ولقيم y سوى 3 و -3، ولقيم z سوى 5 و -1 (القيم المعطاة في إحداثيات الرؤوس المعلومة)



المتجهات في الفضاء



المتجه v الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ، ونقطة نهايته $(B(x_2 , y_2, z_2)$ ،
يُمثَّل في الفضاء بسهم، بدايته A ، ونهايته B
ويُرمَز إليه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ ، أو الرمز $\vec{v}$

ويُمكِن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية عن طريق طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية كما يأتي:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

<u>ملاحظة</u> : تُسمّى v_1, v_2, v_3 إحداثيات المتجه v ،ويُعبِّر كلٌّ منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور x أو y أو z

تنبيه: يشترك المتجه والقطعة المستقيمة بأن لكل منهما بداية ونهاية ، ولكنه يختلف عنها بأن له اتجاه

مثلاً : المتجه الذي بدايته $A(-2,7,2)$ ونهايته $B(5,6, -1)$ يمكن كتابته بالصورة الإحداثية كما يأتي :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle 5 - -2, 6 - 7, -1 - 2 \rangle = \langle 7, -1, -3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

مقدار المتجه في الفضاء ورمزه $|\overrightarrow{AB}|$ أو $|\vec{v}|$

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتي بداية المتجه $\overrightarrow{AB}$، ونهايته، فإنَّ:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$، فإنَّ: $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

مثال 1: إذا كانت $A(-1,4,3)$ ، $B(2,5, -2)$ فجد مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$

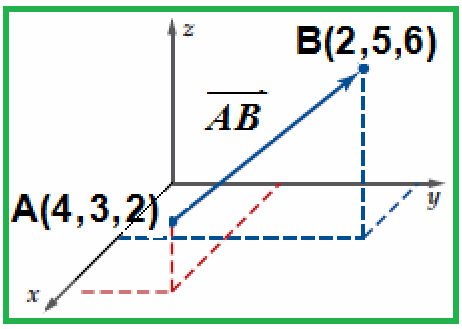
الحل:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - -1)^2 + (5-4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

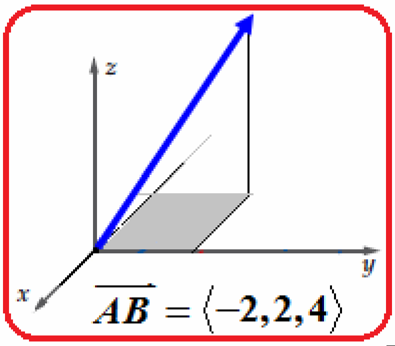
مثال 2: إذا كانت $A(-3 , 0 , 2)$ ، $B(-1, 4 , -2)$ فاكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية ثم جد مقداره

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1 - -3, 4 - 0, -2 - 2 \rangle = \langle 2, 4, -4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$



المتجه $\overrightarrow{AB}$ بدلالة نقطة بدايته ونهايته



المتجه $\overrightarrow{AB}$ في الوضع القياسي بالصورة الإحداثية

أتحقّق من فهمي 114

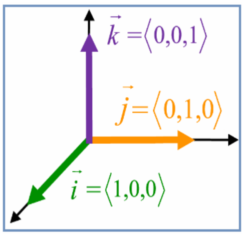
إذا كان: $A(-1,5,3), B(-5,3,-2)$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle -5-(-1), 3-5, -2-3 \rangle = \langle -4, -2, -5 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2} = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

ملاحظة : توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\mathbf{\vec{a}}$

مثل: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، و $a_1\,\hat{\mathbf{i}} + a_2\,\hat{\mathbf{j}} + a_3\,\hat{\mathbf{k}}$ ، ويُمكن أيضًا كتابته بالصورة العمودية: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$



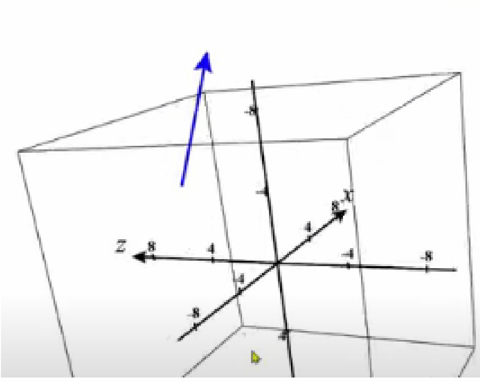
مثلاً :

$$A(4,6,-4) \quad , \quad B(7,4,-3) \Rightarrow$$

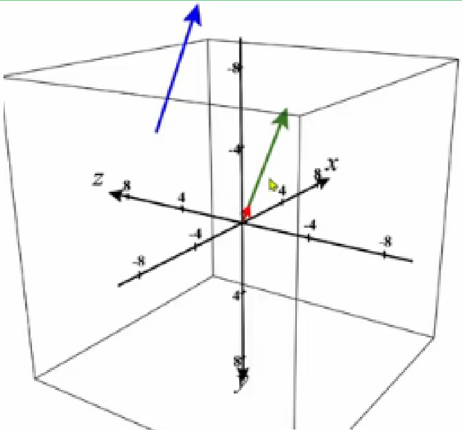
$$\overrightarrow{AB} = \langle 7-4, 4-6, -3--4 \rangle = \langle 3,-2,1 \rangle$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$(-3,-5,3)$ ، $(-2,-11,1)$.



<1, -6, -2>

أُمثّل كُلًّا من المتجهات الآتية بيانيًّا في الفضاء:

8 $\vec{\mathbf{v}}=\langle -3,-4,5\rangle$

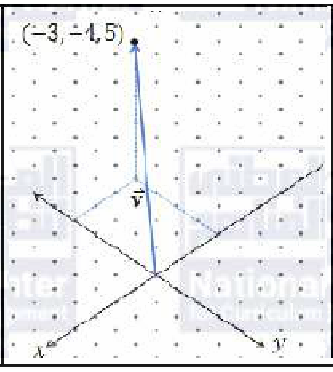
9 $\vec{\mathbf{m}}=\langle 2,-3,-4\rangle$

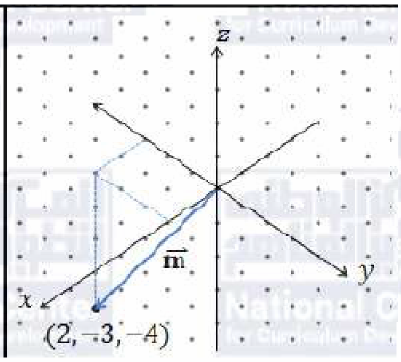
10 $\vec{\mathbf{p}}=\langle -3,5,-2\rangle$

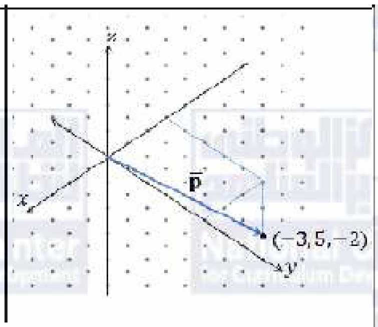
11 $\vec{\mathbf{e}}=-5\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$

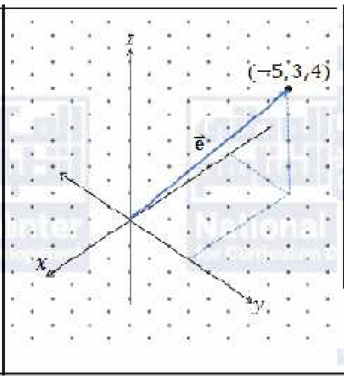
12 $\overrightarrow{AB}: A(4,1,1), B(-3,6,3)$

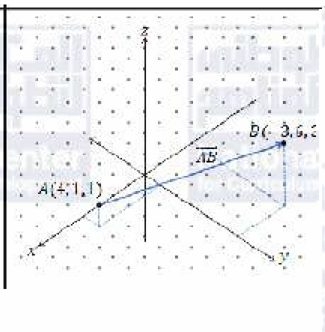
13 $\overrightarrow{GH}: G(1,-3,5), H(0,4,-2)$

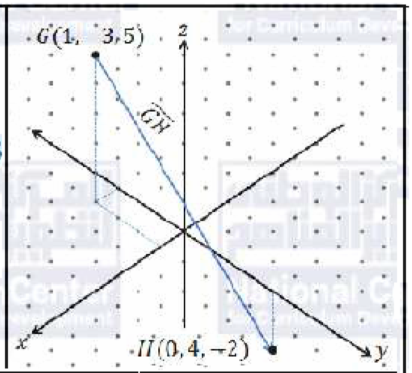
8


9


10


11


12


13


أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي أُعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $A(4,6,9), B(-3,2,5)$

15 $A(-8,5,7), B(6,3,2)$

16 $A(12,-5,4), B(4,1,-1)$

17 $A(24,-8,10), B(10,6,3)$

14	$\overrightarrow{AB}=\langle -3-4, 2-6, 5-9\rangle=\langle -7,-4,-4\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}=\sqrt{49+16+16}=\sqrt{81}=9$	16	$\overrightarrow{AB}=\langle 4-12, 1-(-5), -1-4\rangle=\langle -8,6,-5\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}=\sqrt{64+36+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$
15	$\overrightarrow{AB}=\langle 6-(-8), 3-5, 2-7\rangle=\langle 14,-2,-5\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}=\sqrt{196+4+25}=\sqrt{225}=15$	17	$\overrightarrow{AB}=\langle 10-24, 6-(-8), 3-10\rangle=\langle -14,14,-7\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}=\sqrt{196+196+49}=\sqrt{441}=21$

39 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}}=\langle u-3, u+1, u-2\rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}|=17$، فما قيمة u؟

39 $|\vec{\mathbf{v}}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}=\sqrt{(u-3)^2+(u+1)^2+(u-2)^2}=17$

نربع الطرفين ونفك الأقواس: $u^2-6u+9+u^2+2u+1+u^2-4u+4=289$

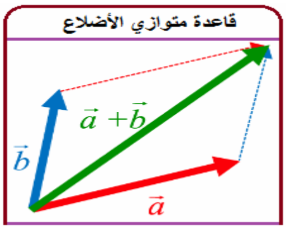
$3u^2-8u-275=0$

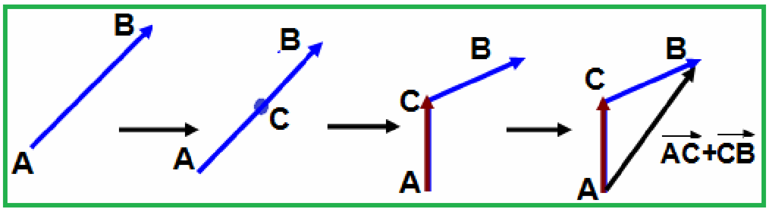
$u=\frac{8\pm\sqrt{3364}}{2(3)}=\frac{8\pm 58}{6} \Rightarrow$ إذن: $u=\frac{66}{6}=11$، أو $u=\frac{-50}{6}=\frac{-25}{3}$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

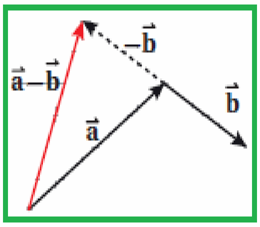
جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا

لجمع المتجه a والمتجه b هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث، فإنَّا نرسم المتجه a أوَّلًا،
ثم نرسم المتجه b بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه a ،
ثم نَصِل بين نقطة بداية المتجه a ونقطة نهاية المتجه b كما في الشكل المجاور،
فينتج المتجه (a + b) الذي يُسمّى أيضًا المُحصِّلة.

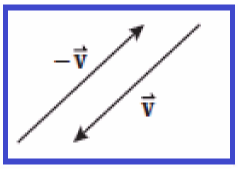




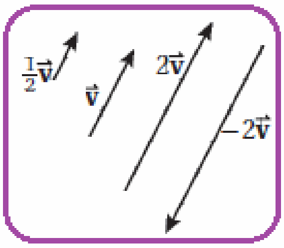
أما الطرح ، فإنَّه لإيجاد a – b ، فإنَّا نجمع المتجه a مع معكوس المتجه b؛
أيْ: a – b = a + (– b) ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد ناتج طرح a – b هندسيًّا
بطريقة مُشابِهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور.



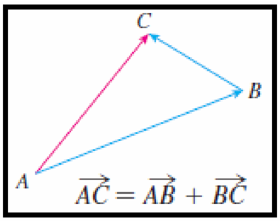
ملاحظة : معكوس المتجه v هو متجه له نفس مقدار المتجه v ،
لكنَّه يكون في اتجاه مُعاكِس له، ويُرمَز إليه بالرمز (– v)

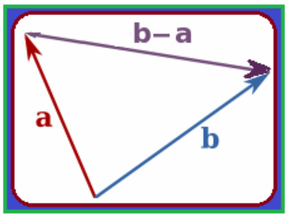


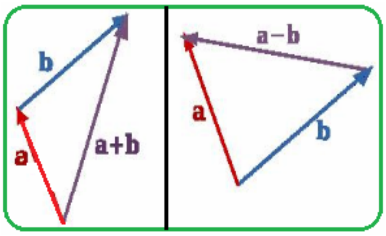
يُمكِن تمثيل ضرب المتجه v في العدد الحقيقي k برسم متجه موازٍ لـ v،
وطوله | k | مَرَّة طول v، وله الاتجاه نفسه إذا كان k > 0 ،
وله عكس اتجاه v إذا كان k < 0 كما في الشكل المجاور.

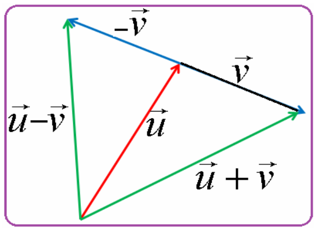


أمثلة على قاعدة المثلث لجمع وطرح المتجهات

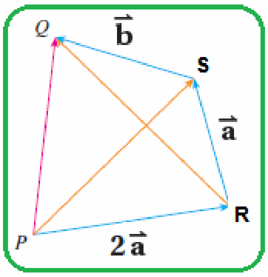








مثال 1 : معتمداً الشكل المجاور ، اكتب المتجه PQ بدلالة المتجهين a و b فقط

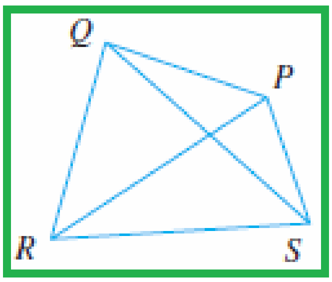


$$\overline{PQ}=\overline{PR}+\overline{RQ}$$

$$\overline{RQ}=\overline{RS}+\overline{SQ}$$

$$=\vec{a}+\vec{b}\Rightarrow\overline{PQ}=2\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}=3\vec{a}+\vec{b}$$

مثال 2 : معتمداً الشكل المجاور ، اكتب المتجهات الآتية بدلالة متجه واحد فقط



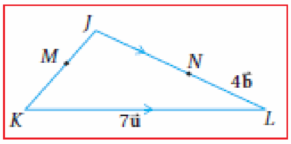
$a)\ \overline{PQ}+\overline{QR}$ $\quad b)\ \overline{RP}+\overline{PS}$ $\quad c)\ \overline{QS}-\overline{PS}$ $\quad d)\ \overline{RS}+\overline{SP}+\overline{PQ}$

الحل :

$a)\ \overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$ $\qquad b)\ \overline{RP}+\overline{PS}=\overline{RS}$

$c)\ \overline{QS}-\overline{PS}=\overline{QP}$ $\qquad d)\ \overline{RS}+\overline{SP}+\overline{PQ}=\overline{RQ}$

مثال



في المثلث JKL المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف $\overrightarrow{JK}$، وكانت: $JN : NL = 3 : 2$، وكان: $\overrightarrow{KL} = 7\vec{u}$، وكان: $\overrightarrow{NL} = 4\vec{b}$، فأكتب $\overrightarrow{JM}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{b}$.

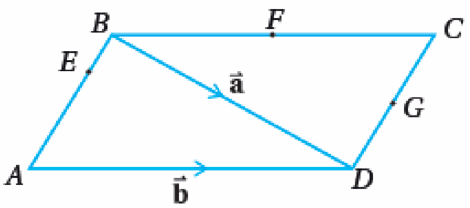
$$\overrightarrow{JN} = \frac{3}{2} \times \overrightarrow{NL}$$

$$\overrightarrow{JN} = \frac{3}{2} \times 4\vec{b} = 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LK} \quad = 6\vec{b} + 4\vec{b} - 7\vec{u} = 10\vec{b} - 7\vec{u}$$

$$\overrightarrow{JM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JK} \quad = \frac{1}{2}(10\vec{b} - 7\vec{u}) \Rightarrow \overrightarrow{JM} = 5\vec{b} - 3.5\vec{u}$$

أتحقّق من فهمي 116



في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف $\overline{BC}$، و G نقطة منتصف $\overline{DC}$، وكانت: $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$، وكانت: $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$، وكانت: $AE = 3EB$، فأكتب كُلًّا ممّا يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{EB}$ c) $\overrightarrow{EF}$

a	أتحقق من فهمي صفحة 116 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$
b	$AB = AE + EB = 3EB + EB = 4EB \Rightarrow EB = \frac{1}{4}AB$ $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$
c	$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $= \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ وذلك لأن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ كون الشكل متوازي أضلاع $= \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبريًا

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle, \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ متجهين في الفضاء،
وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ: $\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3)\rangle$

$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3)\rangle$

$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$

$$\vec{a} = \langle 3, 6, -2\rangle \quad , \quad \vec{b} = \langle 8, -3, -4\rangle \Rightarrow$$

1) $2\vec{a} + 3\vec{b} =$

2) $5\vec{a} - 2\vec{b} =$

1) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} =$

أتحقَّق من فهمي 117 إذا كان: $\vec{u} = \langle 4, 5, -3\rangle, \vec{v} = \langle 3, 0, -5\rangle, \vec{w} = \langle 9, -2, -5\rangle$،

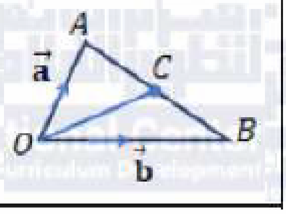
فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

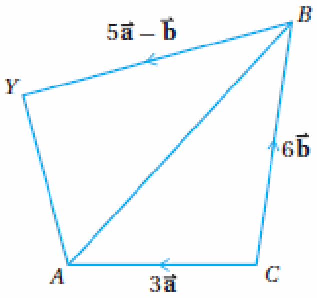
a) $3\vec{v} - 4\vec{u}$ b) $3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$

a	$3\vec{v} - 4\vec{u} = 3\langle 3,0,-5\rangle - 4\langle 4,5,-3\rangle = \langle 9,0,-15\rangle - \langle 16,20,-12\rangle = \langle -7,-20,-3\rangle$
b	$3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w} = 3\langle 4,5,-3\rangle + 5\langle 3,0,-5\rangle - 2\langle 9,-2,-5\rangle$ $= \langle 12,15,-9\rangle + \langle 15,0,-25\rangle + \langle -18,4,10\rangle = \langle 9,19,-24\rangle$

18 إذا كان OAB مثلثًا، فيه: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$، و $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$، والنقطة C هي منتصف $\overline{AB}$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

18	$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$





44 تحدٍّ: في الشكل الآتي، إذا كان: $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{BY} = 5\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{CB} = 6\vec{b}$،

وكانت X تقع على $\overline{AB}$، حيث $AX : XB = 1 : 2$، فأُثبت أنَّ: $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$.

44	$\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2} \Rightarrow XB = 2AX \Rightarrow AB = AX + XB = AX + 2AX = 3AX \Rightarrow AX = \frac{1}{3}AB$ $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(-3\vec{a} + 6\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BY} = 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b} = 5(\vec{a} + \vec{b})$ $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b})$ $\frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{CY}} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b})}{5(\vec{a} + \vec{b})} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$

تساوي المتجهات

يتساوى متجهان إذا كان لهما الاتجاه والمقدار نفساهما، عندئذٍ تكون لهما الصورة الإحداثية نفسها؛ أيْ إنَّ إحداثياتهما المُتناظِرة تكون متساوية.

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$، فإنَّ:
$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}$ إذا وفقط إذا كان: $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$

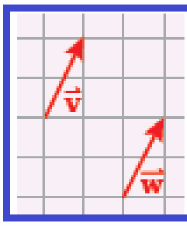
مثال : إذا كان $\vec{a} = \langle 7, y-3, -4 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3+2x, 6, z-2 \rangle$ وكان $\vec{a} = \vec{b}$

فجد قيم الثوابت: x , y , z

$$3 + 2x = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y - 3 = 6 \Rightarrow y = 9$$

$$z - 2 = -4 \Rightarrow z = 6$$



قد يتساوى المتجهان $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ بالرغم من اختلاف موقعيهما في حال تساوى الاتجاه والمقدار لكلٍّ منهما كما

أتحقّق من فهمي 117 إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 20, 2p-5, -12 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 3q+8, 0, 3r \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$،
فأجد قيمة كلٍّ من: p، q، و r.

أتحقق من فهمي صفحة 117 $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow 20 = 3q + 8$ و $2p - 5 = 0$ و $-12 = 3r$

$$\Rightarrow q = 4, p = \frac{5}{2}, r = -4$$

38 إذا كان: $\vec{\mathbf{m}} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \vec{\mathbf{n}} = \langle 6, 2, -3 \rangle, \vec{\mathbf{p}} = \langle 2, a, -1 \rangle, 5\vec{\mathbf{m}} + 2\vec{\mathbf{p}} = 4\vec{\mathbf{n}}$، فما قيمة الثابت a؟

38 $5\vec{\mathbf{m}} + 2\vec{\mathbf{p}} = 4\vec{\mathbf{n}}$

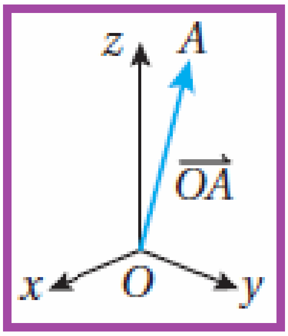
$5\langle 4,1,-2 \rangle + 2\langle 2,a,-1 \rangle = 4\langle 6,2,-3 \rangle$

$\langle 24, 5+2a, -12 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية: $5 + 2a = 8 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

متجها الموقع والإزاحة

يُطلَق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل، وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ اسم متجه الموقع للنقطة A



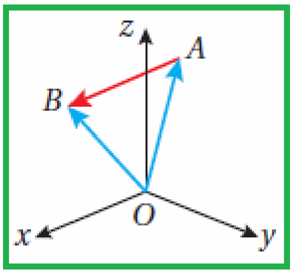
ويُستعمَل الرمز $\overline{OA}$ للدلالة على متجه الموقع للنقطة A

أمّا الصورة الإحداثية لهذا المتجه فهي:

$$\overline{OA} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 0, 0, 0 \rangle = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

وقد سُمِّي متجه الموقع بهذا الاسم لأنَّه يُحدِّد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل .

متجه الإزاحة



في الشكل المجاور، متجها الموقع للنقطة A ، والنقطة B وهما: $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$

ويسمى المتجه $\overline{AB}$ متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B

وهو فعليا ناتج طرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B

حسب قاعدة المثلث لجمع المتجهات؛ أيْ إنَّ: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

ومقدار متجه الإزاحة $|\overline{AB}|$ يُمثِّل المسافة بين النقطة A والنقطة B ، وهي قيمة عددية وليست متجهة

مثال إذا كانت: $A(-11, 2, 21), B(3, -5, 7)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 متجه موقع كلٍّ من النقطة A، والنقطة B. متجه موقع النقطة A هو: $\overrightarrow{OA} = \langle -11, 2, 21 \rangle$.

متجه موقع النقطة B هو: $\overrightarrow{OB} = \langle 3, -5, 7 \rangle$.

2 متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \langle 3, -5, 7 \rangle - \langle -11, 2, 21 \rangle = \langle 14, -7, -14 \rangle$$

3 المسافة بين النقطة A والنقطة B. المسافة بين النقطة A والنقطة B هي مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2} = \sqrt{441} = 21$$

أتحقّق من فهمي 119

إذا كانت: $A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$ نقاطًا في الفضاء، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) متجه موقع كلٍّ من النقاط: A، وB، وC.

b) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C.

c) المسافة بين النقطة A والنقطة C.

a	$\overrightarrow{OA} = \langle -2, 8, 13 \rangle, \overrightarrow{OB} = \langle 5, -7, -9 \rangle, \overrightarrow{OC} = \langle 0, 1, -14 \rangle$
b	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \langle -5, 8, -5 \rangle$
c	$AC = \sqrt{(0-(-2))^2 + (1-8)^2 + (-14-13)^2} = \sqrt{4+49+729} = \sqrt{782}$

إذا كانت: $A(-1,6,5), B(0,1,-4), C(2,1,1)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كُلّاً ممّا يأتي:

23 متجه موقع كلٍّ من النقاط: A، وB، وC.

24 متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A.

25 متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B.

26 المسافة بين النقطة C والنقطة B.

23	$\overrightarrow{OA} = \langle -1,6,5 \rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0,1,-4 \rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 2,1,1 \rangle$
24	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1,6,5 \rangle - \langle 0,1,-4 \rangle = \langle -1,5,9 \rangle$
25	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \langle 0,1,-4 \rangle - \langle 2,1,1 \rangle = \langle -2,0,-5 \rangle$
26	$\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{4+0+25} = \sqrt{29}$

40 إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما: $\vec{\mathbf{g}} = \langle -2, c+1, -8 \rangle$، و $\vec{\mathbf{h}} = \langle c-1, -4, c+2 \rangle$ على الترتيب، فأجد قيمة c، علماً بأنَّ: $|\overrightarrow{GH}| = 19$، وأنَّ: $c > 0$.

40	$\overrightarrow{GH} = \langle c-1-(-2), -4-(c+1), c+2-(-8) \rangle = \langle c+1, -5-c, c+10 \rangle$
	$\lvert\overrightarrow{GH}\rvert = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2} = 19$
	نربع الطرفين ونفك الأقواس: $c^2 + 2c + 1 + 25 + 10c + c^2 + c^2 + 20c + 100 = 361$
	$\Rightarrow 3c^2 + 32c - 235 = 0 \quad \Rightarrow c = \dfrac{-32 \pm \sqrt{3844}}{6} = \dfrac{-32 \pm 62}{6}$
	إذن: $c = \dfrac{30}{6} = 5$، أو $c = \dfrac{-94}{6} = \dfrac{-47}{3}$ لكن $c > 0$ إذن، $c = 5$

تحدٍّ: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط: M, L, N هي: $\vec{\mathbf{m}} = -3\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{l}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 9\hat{\mathbf{k}}$ على الترتيب، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

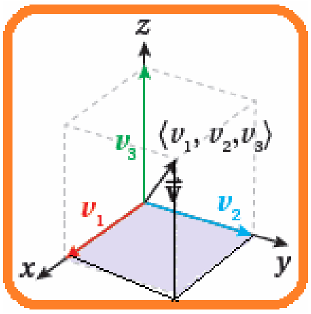
45 أُثبِت أنَّ المثلث LMN قائم الزاوية.

46 أجد مساحة المثلث LMN.

إرشاد: أستعمل عكس نظرية فيثاغورس التي تعلَّمْتُها في الصف الثامن.

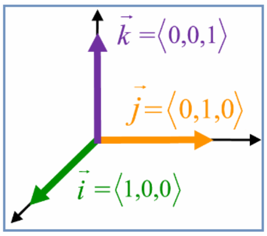
45	$\overrightarrow{LN} = \langle 1,13,-12 \rangle \Rightarrow LN = \lvert\overrightarrow{LN}\rvert = \sqrt{1+169+144} = \sqrt{314}$
	$\overrightarrow{ML} = \langle 7,-4,2 \rangle \Rightarrow ML = \lvert\overrightarrow{ML}\rvert = \sqrt{49+16+4} = \sqrt{69}$
	$\overrightarrow{NM} = \langle -8,-9,10 \rangle \Rightarrow NM = \lvert\overrightarrow{NM}\rvert = \sqrt{64+81+100} = \sqrt{245}$
	بما أن: $(LN)^2 = (ML)^2 + (NM)^2$ إذ أن: $314 = 69 + 245$
	فإن ΔLMN قائم الزاوية في M (بعكس نظرية فيثاغورس)
46	مساحة المثلث هي A حيث: $A = \dfrac{1}{2}(ML)(NM) = \dfrac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{245} = \dfrac{7}{2}\sqrt{345}$

متجهات الوحدة الأساسية: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$



إذا كانت نقطة بداية المتجه v هي نقطة الأصل ، ونقطة نهايته هي (v_1, v_2, v_3)

كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن التعبير عن ذلك بالصورة الإحداثية : $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$



يُطلَق على المتجه الذي مقداره وحدة واحدة اسم متجه الوحدة (unit vector).
وتُعَدُّ متجهات الوحدة في الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الثلاثة أهم متجهات الوحدة، وأكثرها استخدامًا؛ لذا تُسمّى متجهات الوحدة الأساسية.

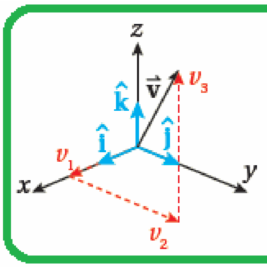
يشار إلى كلٍّ من متجهات الوحدة الأساسية الثلاثة برمز خاص؛

إذ يُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور x الموجب بالرمز I ، وصورته الإحداثية هي: $i = \langle 1 ، 0 ، 0 \rangle$ ،

ويُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور y الموجب بالرمز j ، وصورته الإحداثية هي: $j = \langle 0 ، 1 ، 0 \rangle$

ويُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور z الموجب بالرمز k ، وصورته الإحداثية هي : $k = \langle 0 ، 0 ، 1 \rangle$

ويُمكِن كتابة أيِّ متجه بدلالة متجهات الوحدة: i, j, k كما هو مُبيَّن في ما يأتي:



يُمكِن كتابة المتجه: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$$

مثال : اكتب المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

1) $\vec{u} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

$$\Rightarrow \vec{u} = 4\hat{i} + (-2)\hat{j} + 6\hat{k} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

2)
$$\left.\begin{aligned} \vec{u} &= 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \\ \vec{v} &= 4\hat{i} + 3\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\vec{u} + 2\vec{v} = ?$$

$$3(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 2(4\hat{i} + 3\hat{k}) = 6\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} + 8\hat{i} + 6\hat{k} = 14\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}$$

ملاحظة :

توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\vec{a}$،

مثل: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، و $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ، ويُمكِن أيضًا كتابته بالصورة العمودية: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

أتحقّق من فهمي 121 أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4 \rangle$ b) $\overrightarrow{AB}: A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)$

c) $4\vec{m} - 5\vec{f}: \vec{m} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{f} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

أتحقق من فهمي صفحة 121

a	$\vec{g} = 9\hat{i} - 4\hat{k}$
b	$\overrightarrow{AB} = \langle 7-2, 6-(-1), -2-4 \rangle = \langle 5,7,-6 \rangle = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$
c	$4\vec{m} - 5\vec{f} = 4(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) - 5(3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k})$ $= (-8-15)\hat{i} + (12+25)\hat{j} + (-16-30)\hat{k} = -23\hat{i} + 37\hat{j} - 46\hat{k}$

إذا كان: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle, \vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}, \vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

19) $3\vec{e} + 4\vec{f}$ 20) $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$ 21) $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$ 22) $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

19	$3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3,9,-4 \rangle + 4\langle 5,-3,7 \rangle = \langle -9,27,-12 \rangle + \langle 20,-12,28 \rangle = \langle 11,15,16 \rangle$
20	$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3,9,-4 \rangle + \langle 5,-3,7 \rangle - 3\langle -1,8,-5 \rangle = \langle 5,-18,18 \rangle$
21	$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3,9,-4 \rangle - 2\langle 5,-3,7 \rangle + 3\langle -1,8,-5 \rangle = \langle -25,66,-45 \rangle$
22	$2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} = 2\langle -3,9,-4 \rangle + 7\langle 5,-3,7 \rangle - 2\langle -1,8,-5 \rangle = \langle 31,-19,51 \rangle$

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

27) $\vec{g} = \langle 5, 7, -1 \rangle$ 28) $\overrightarrow{ST}: S(1, 0, -5), T(2, -2, 0)$

29) $-\vec{a} + 3\vec{b}: \vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

27	$\vec{g} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$
28	$\overrightarrow{ST} = (2-1)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (0-(-5))\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$
29	$-\vec{a} + 3\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k} = 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$

36 إذا كان: $\vec{\mathbf{a}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = 7\hat{\mathbf{i}} + 39\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $3\vec{\mathbf{a}} + c\vec{\mathbf{b}} = -23\hat{\mathbf{i}} - 66\hat{\mathbf{j}} + 40\hat{\mathbf{k}}$، فأجـــد قيمة c.

36	$3\vec{a} + c\vec{b} = 3(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}) + c(7\hat{\imath} + 39\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ $= (-9 + 7c)\hat{\imath} + (12 + 39c)\hat{\jmath} + (36 - 2c)\hat{k})$ $\Rightarrow -23\hat{\imath} - 66\hat{\jmath} + 40\hat{k} = (-9 + 7c)\hat{\imath} + (12 + 39c)\hat{\jmath} + (36 - 2c)\hat{k})$ في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية: $-9 + 7c = -23, \quad 12 + 39c = -66, \quad 36 - 2c = 40$ وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c = -2$

37 إذا كان: $\vec{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 2 \\ w + 47 \\ -4 \end{pmatrix}$، وكان: $k\vec{\mathbf{s}} - 4\vec{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من v، و w، و k.

37	$k\vec{s} - 4\vec{t} = k\begin{pmatrix} 2 \\ w + 47 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k - 12 \\ k(w + 47) - 4v \\ -4k - 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k - 12 \\ k(w + 47) - 4v \\ -4k - 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow 2k - 12 = 6 \Rightarrow k = 9$ $-4k - 8 = w \quad \Rightarrow w = -36 - 8 = -44$ $k(w + 47) - 4v = 31 \Rightarrow 9(-44 + 47) - 4v = 31 \Rightarrow v = -1$

38 إذا كان: $\vec{\mathbf{m}} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \vec{\mathbf{n}} = \langle 6, 2, -3 \rangle, \vec{\mathbf{p}} = \langle 2, a, -1 \rangle, 5\vec{\mathbf{m}} + 2\vec{\mathbf{p}} = 4\vec{\mathbf{n}}$، فما قيمة الثابت a؟

38	$5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n} \qquad 5\langle 4,1,-2 \rangle + 2\langle 2,a,-1 \rangle = 4\langle 6,2,-3 \rangle$ $\langle 24, 5 + 2a, -12 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$ $5 + 2a = 8 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيِّ متجه

لإيجاد متجه وحدة في اتجاه أيِّ متجه : نقسم ذلك المتجه على مقداره ، فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة

مثال : جد مجه وحدة في اتجاه كل متجه فيما يأتي :

1) $\overrightarrow{AB} : A(-2,3,3), B(2,1,7)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \langle 4,-2,4\rangle \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \tfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{6}\langle 4,-2,4\rangle = \left\langle \tfrac{4}{6}, \tfrac{-2}{6}, \tfrac{4}{6}\right\rangle = \left\langle \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\rangle$$

للتأكـــد

$$\boxed{\left|\hat{u}\right| = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{-1}{3})^2+(\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{9}} = \sqrt{\tfrac{9}{9}} = 1}$$

2) $\vec{u} = \langle -4, \sqrt{3}, 1\rangle$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2+(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{16+3+1} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\vec{u} = \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\langle -4,\sqrt{3},1\rangle = \left\langle \tfrac{-4}{2\sqrt{5}}, \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\right\rangle$$

3) $\vec{v} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(3)^2+(4)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \hat{v} = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}\vec{v} = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}) = \tfrac{3}{5\sqrt{2}}\hat{i}+\tfrac{4}{5\sqrt{2}}\hat{j}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

4) $\vec{a} = 4\hat{i}-3\hat{j}$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \tfrac{1}{5}\vec{a} = \tfrac{1}{5}(4\hat{i}-3\hat{j}) = \tfrac{4}{5}\hat{i}-\tfrac{3}{5}\hat{j}$$

5) $\vec{b} = \begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix} :\Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(5)^2+(2)^2+(-4)^2} = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \hat{b} = \tfrac{1}{3\sqrt{5}}\vec{b} = \tfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-5}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-4}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

أتحقّق من فهمي 122 أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

a) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, -3, 5 \rangle$ b) $\vec{\mathbf{v}} = 8\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}} - 17\hat{\mathbf{k}}$ c) $\overrightarrow{AB} : A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

أتحقق من فهمي صفحة 122

a $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{16+9+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{\mathbf{u}} = \langle \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}} \rangle = \langle \frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

b $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{64+225+289} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$

$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{17\sqrt{2}}\vec{\mathbf{v}} = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{17}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}} = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}$

c $\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-1), 3-4, 8-6 \rangle = \langle 4, -1, 2 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

ليكن $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ ، فيكون:

$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\overrightarrow{AB} = \langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \rangle$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

30 $-4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ 31 $143\hat{\mathbf{i}} - 24\hat{\mathbf{j}}$ 32 $-72\hat{\mathbf{i}} + 33\hat{\mathbf{j}} + 56\hat{\mathbf{k}}$

33 $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$ 34 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 35 $\vec{\mathbf{n}} = \langle -2, 0, 3 \rangle$

30 $\vec{\mathbf{v}} = -4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{5}\vec{\mathbf{v}} = \frac{-4}{5}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\hat{\mathbf{j}}$

31 $\vec{\mathbf{v}} = 143\hat{\mathbf{i}} - 24\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{20449+576} = \sqrt{21025} = 145$

$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{145}\vec{\mathbf{v}} = \frac{143}{145}\hat{\mathbf{i}} - \frac{24}{145}\hat{\mathbf{j}}$

32 $\vec{\mathbf{v}} = -72\hat{\mathbf{i}} + 33\hat{\mathbf{j}} + 56\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{5184+1089+3136} = \sqrt{9409} = 97$

$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{97}\vec{\mathbf{v}} = \frac{-72}{97}\hat{\mathbf{i}} + \frac{33}{97}\hat{\mathbf{j}} + \frac{56}{97}\hat{\mathbf{k}}$

33 $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{121+169+64} = \sqrt{354} \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{354}}\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{354}} \\ \frac{13}{\sqrt{354}} \\ \frac{8}{\sqrt{354}} \end{pmatrix}$

34 $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

35 $\vec{\mathbf{n}} = \langle -2, 0, 3 \rangle \Rightarrow |\vec{\mathbf{n}}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$

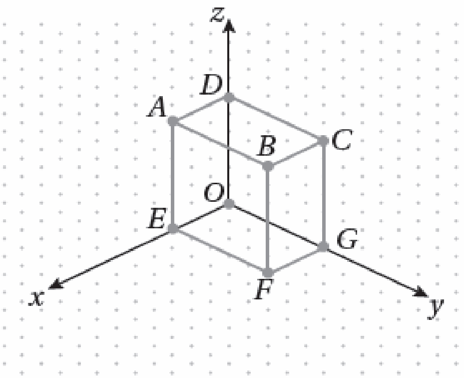
$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{\mathbf{n}} = \langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$

من كتاب التمارين

أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1 $A(0, 2, -3)$ 2 $B(-1, 0, 4)$ 3 $C(2, 4, 3)$ 4 $D(-3, -2, -5)$

في متوازي المستطيلات المجاور، إذا كانت إحداثيات الرأس B هي: $(3, 5, 6)$، فأكتب إحداثيات كلٍّ ممّا يأتي:



5 الرأس A.

6 الرأس C.

7 الرأس D.

8 الرأس F.

9 مركز متوازي المستطيلات $ABCDOEFG$.

أكتب الصورة الإحداثية لكلٍّ من المتجهات الآتية، ثم أجد مقدار كلٍّ منها:

10 $\overrightarrow{AB}$ ، حيث: $A(-2, 5, 0), B(4, 9, -3)$.

11 $\overrightarrow{EF}$ ، حيث: $E(3, 4, 6), F(6, 8, -6)$.

12 $\overrightarrow{GH}$ ، حيث: $H(10, 7, 8), G(-2, 3, 2)$.

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

14 $\vec{v} = \langle -5, 4, 20 \rangle$

13 $\overrightarrow{AC} = 8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\,\hat{k}$

15 أجد متجهًا له نفس اتجاه المتجه: $\vec{v} = 4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}$، ومقداره 52.

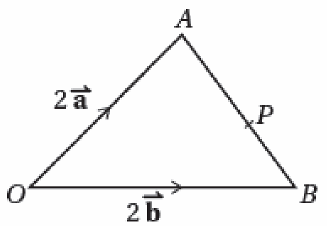
إذا كان: $\vec{u} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}, \vec{v} = \langle -4, 3, -6 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $3\vec{u} - 2\vec{v}$

16 $2\vec{u} + 4\vec{v}$

18 أجد قيمة كلٍّ من الأعداد الحقيقية: a، و b، و c التي تُحقِّق المعادلة الآتية: $a\vec{u} + 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

19 في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB، حيث: $AP : PB = 5:3$. إذا كان: $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{a} + 5\vec{b})$، فما قيمة العدد الحقيقي k؟

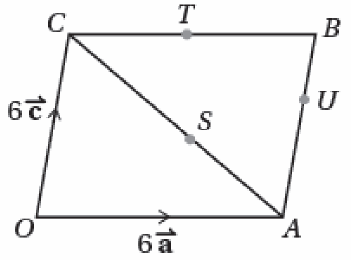


20 متجهـا الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3, 4, -5 \rangle$، و $\langle 0, -2, 4 \rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$، علمًا بأنَّ: $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$.

21 $ABCD$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$، و $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$، و $\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$، و $\overrightarrow{BD} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$. أجد كُلًّا من $\vec{b}$، و $\vec{a}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

22 إذا كان: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$، فأجد الأعداد الحقيقية: p, q, r التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

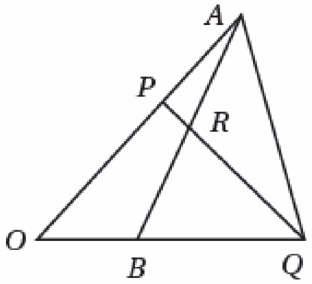


في الشكل المجاور، $OABC$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{OA} = 6\,\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OC} = 6\,\vec{\mathbf{c}}$، والنقطة T هي منتصف الضلع BC، والنقطة U تقع على الضلع AB، حيث: $AU:UB = 2:1$، والنقطة S تقع على القُطْر CA، حيث: $CS:SA = 3:2$.

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$:

23 $\overrightarrow{OB}$ 24 $\overrightarrow{AC}$ 25 $\overrightarrow{OU}$ 26 $\overrightarrow{UT}$

27 $\overrightarrow{TA}$ 28 $\overrightarrow{OS}$ 29 $\overrightarrow{US}$ 30 $\overrightarrow{SB}$

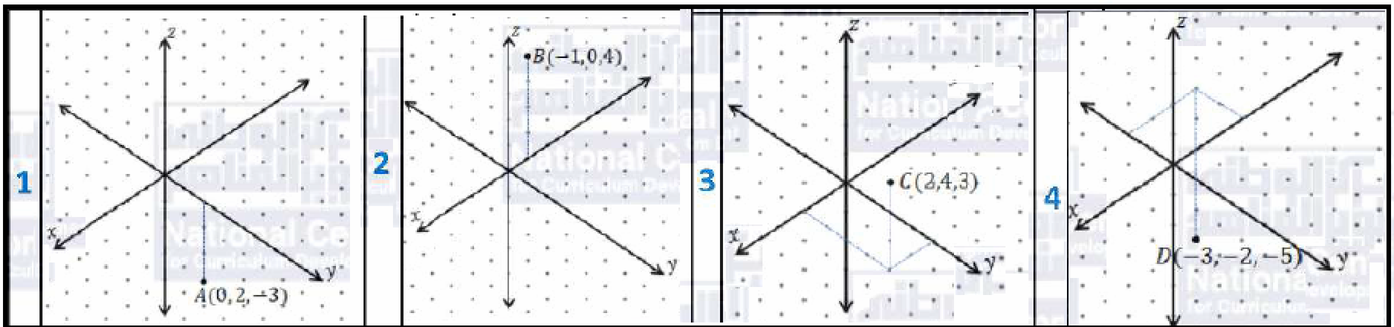


في المثلث OAQ المجاور، إذا كان $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}$، وكان $\overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$، وكانت $OP:OA = 3:5$، وكانت $OB:BQ = 1:2$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

31 إذا عُلِم أنَّ $\overrightarrow{AR} = h\overrightarrow{AB}$، حيث h عدد حقيقي، و $0 < h < 1$، فأُثبِت أنَّ: $\overrightarrow{OR} = (1-h)\,\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{b}}$.

32 إذا عُلِم أنَّ $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$، حيث k عدد حقيقي، و $0 < k < 1$، فأكتب $\overrightarrow{OR}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, k$.

33 أجد قيمة كلٍّ من h، و k. 34 أجد النسبة $\overrightarrow{PR} : \overrightarrow{PQ}$.



5	$A(3,0,6)$	7	$D(0,0,6)$
6	$C(0,5,6)$	8	$F(3,5,0)$

9	مركزه هو منتصف $\overline{OB}$ وهو: $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$
10	$\overrightarrow{AB} = \langle 6,4,-3\rangle, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{36+16+9} = \sqrt{61}$
11	$\overrightarrow{EF} = \langle 3,4,-12\rangle, \lvert\overrightarrow{EF}\rvert = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$
12	$\overrightarrow{GH} = \langle 12,4,6\rangle, \lvert\overrightarrow{GH}\rvert = \sqrt{144+16+36} = \sqrt{196} = 14$

13 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64+25+45} = \sqrt{134}$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\sqrt{134}}(8\hat{i}+5\hat{j}-3\sqrt{5}\hat{k}) = \frac{8}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{134}}\hat{j} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{k}$$

14 $|\vec{v}| = \sqrt{25+16+400} = \sqrt{441} = 21 \Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{21}\langle -5,4,20\rangle = \langle \frac{-5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{6}{21}\rangle$

15 $|\vec{v}| = \sqrt{16+144+9} = 13 \Rightarrow \hat{v} = \frac{4}{13}\hat{i} - \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{3}{13}\hat{k}$

$\hat{v}$ هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$ ، إذن، المتجه الذي له اتجاه $\vec{v}$ نفسه ومقداره 52 هو $52\hat{v}$ ويساوي:

$$52\left(\frac{4}{13}\hat{i} - \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{3}{13}\hat{k}\right) = 16\hat{i} - 48\hat{j} + 12\hat{k}$$

16 $2\vec{u} + 4\vec{v} = 2\langle 3,5,-7\rangle + 4\langle -4,3,-6\rangle = \langle -10,22,-38\rangle$

17 $3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\langle 3,5,-7\rangle - 2\langle -4,3,-6\rangle = \langle 17,9,-9\rangle$

18 $a\langle 3,5,-7\rangle + 5\langle -4,3,-6\rangle = \langle 3a-20, 5a+15, -7a-30\rangle$

$\Rightarrow \langle 3a-20, 5a+15, -7a-30\rangle = \langle -2, b, c\rangle$

$\Rightarrow 3a-20=-2$ و $5a+15=b$ و $-7a-30=c$

$\Rightarrow a=6$ و $b=45$ و $c=-72$

19 $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{3}{8}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(-2\vec{b} + 2\vec{a})$$

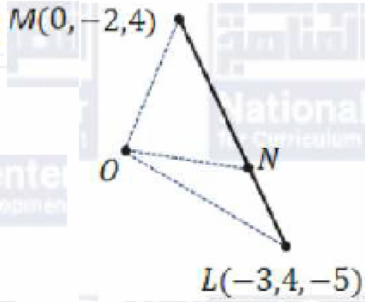
$$= \left(2 - \frac{3}{4}\right)\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(5\vec{b} + 3\vec{a}) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

20 ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{LN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL})$

$= \langle -3,4,-5\rangle + \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle = \langle -2,2,-2\rangle$

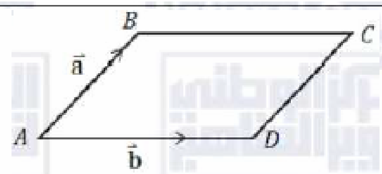


21 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{b} + \vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \ldots\ldots\ldots (1)$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow -\vec{a} + \vec{b} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k} \ldots\ldots (2)$

$(1)+(2): 2\vec{b} = -4\hat{i} + 10\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$

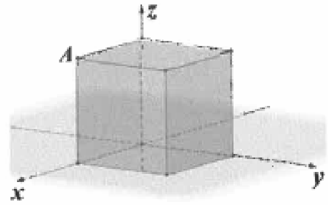
$(1)-(2): 2\vec{a} = 8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow \vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$



22	$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=p\langle 1,0,4\rangle+q\langle 2,0,-3\rangle+r\langle -5,3,1\rangle$ $=\langle p+2q-5r,3r,4p-3q+r\rangle=\langle 28,-12,-5\rangle$ $3r=-12\Rightarrow r=-4$ $p+2q-5r=28\Rightarrow p+2q=8\ \dots\dots\dots\dots(1)$ $4p-3q+r=-5\Rightarrow 4p-3q=-1\ \dots\dots\dots\dots(2)$ $(1)\times 4-(2): 11q=33\Rightarrow q=3\ \ ,p=2$
23	$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=6\vec{a}+6\vec{c}$
24	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-6\vec{a}+6\vec{c}$
25	$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AU}=6\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=6\vec{a}+\frac{2}{3}(6\vec{c})=6\vec{a}+4\vec{c}$
26	$\overrightarrow{UT}=\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{BT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(6\vec{c})+\frac{1}{2}(-6\vec{a})=2\vec{c}-3\vec{a}$
27	$\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-6\vec{c}=\frac{1}{2}(6\vec{a})-6\vec{c}=3\vec{a}-6\vec{c}$
28	$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=6\vec{c}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}=6\vec{c}+\frac{3}{5}(6\vec{a}-6\vec{c})=\frac{18}{5}\vec{a}+\frac{12}{5}\vec{c}$
29	$\overrightarrow{US}=\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}(-6\vec{c})+\frac{2}{5}(-6\vec{a}+6\vec{c})=-\frac{12}{5}\vec{a}-\frac{8}{5}\vec{c}$
30	$\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}(-6\vec{a}+6\vec{c})+6\vec{a}=\frac{12}{5}\vec{a}+\frac{18}{5}\vec{c}$
31	$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OA}+h\overrightarrow{AB}\ =\overrightarrow{OA}+h(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$ $=\vec{a}+h(-\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-h\vec{a}+h\vec{b}\ =(1-h)\vec{a}+h\vec{b}$
32	$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PQ}\ =\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ})$ $=\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB})=\frac{3}{5}\vec{a}+k\left(-\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}\right)=\frac{3}{5}(1-k)\vec{a}+3k\vec{b}$
33	في السؤالين السابقين وجدنا أنّ: $\overrightarrow{OR}=(1-h)\vec{a}+h\vec{b}$ $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}(1-k)\vec{a}+3k\vec{b}\ \Rightarrow(1-h)\vec{a}+h\vec{b}=\frac{3}{5}(1-k)\vec{a}+3k\vec{b}$ $\Rightarrow 1-h=\frac{3}{5}(1-k),\quad h=3k\quad\Rightarrow 1-3k=\frac{3}{5}(1-k)\ \Rightarrow k=\frac{1}{6}\ ,h=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
34	$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PQ}\ \Rightarrow\ \frac{PR}{PQ}=\frac{1}{6}\Rightarrow PR:PQ=1:6$

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي

14) اعتمادًا على الشكل الآتي الذي يمثّل مكعبًا طول ضلعه 8 cm ، فإنّ إحداثيات النقطة A هي:



a) $(0,8,8)$ c) $(8,0,8)$

b) $(0,8,0)$ d) $(8,8,0)$

15) إذا كانت: $A(3,a,2)$ و $B(-5,2,a+b)$ ، وكانت إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(-1,-1,-3)$ ، فإنّ قيمة الثابت b هي:

a) -2 b) 2 c) -4 d) 4

16) إذا كان: $\vec{\mathbf{u}}=\langle 3,-5,-2\rangle,\ \vec{\mathbf{v}}=\langle 1,3,1\rangle$ ، فإنّ: $2\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}$ هو:

a) $\langle 7,-13,-5\rangle$ b) $\langle -5,13,5\rangle$ c) $\langle 7,-13,5\rangle$ d) $\langle 5,-13,-5\rangle$

17) إذا كان متجه الموقع للنقطة P هو $\langle 6,5,7\rangle$ ، وكان متجه الموقع للنقطة Q هو $\langle 3,-1,1\rangle$ ، فإنّ متجه الموقع للنقطة F التي تقع على $\overline{PQ}$ ، حيث: $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ هو:

a) $\langle 4,1,3\rangle$ b) $\langle -3,-6,-6\rangle$ c) $\langle 4,9,11\rangle$ d) $\langle -2,-4,-4\rangle$

14	15	16	17
c	c	d	a

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي تكميلي

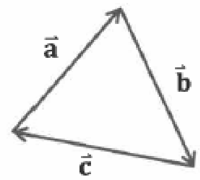
14) عند تعيين النقطة $A(0,-1,1)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، فإنّها تقع على:

a) المستوى xy b) المحور x c) المستوى yz d) المحور y

15) إذا كانت $A(-5,2,5)\ ,B(-1,5,-7)$ ، فإنّ AB يساوي:

a) 7 b) 13 c) $\sqrt{89}$ d) $\sqrt{229}$

16) معتمدًا الشكل الآتي الذي يمثّل كلًا من المتجهات $\vec{\mathbf{a}}\,,\vec{\mathbf{b}}\,,\vec{\mathbf{c}}$ ، أيّ من الآتية يمثّل جمعًا هندسيًا صحيحًا للمتجهات؟



a) $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ c) $\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{c}}-\vec{\mathbf{a}}$

b) $\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ d) $\vec{\mathbf{c}}=-\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$

17) إذا كان $A(3\,,2,-7)\ ,B(-8,1,-9)$ ، فإنّ متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A ، هو:

a) $\langle 11,1,2\rangle$ b) $\langle -11,-1,-2\rangle$ c) $\langle 5\,,-3,16\rangle$ d) $\langle -5,3,-16\rangle$

14	15	16	17
c	b	d	a

من أسئلة الوزارة 2023 / صناعي

19- إذا كانت: $A(-2,3,6),\ B(1,3,2)$ نقطتين في الفضاء، فإنّ المسافة بين B و A هي:

a) 5 b) 25 c) 13 d) 19

20- إذا وقعت النقطة $A(-6,7,-2)$ والنقطة $B(2,3,8)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فإنّ مركز الكرة هو:

a) $(2,-5,-3)$ b) $(-2,5,3)$ c) $(-2,5,5)$ d) $(-4,10,6)$

21- إذا كانت: $A(4,5,-3),\ B(-2,3,-5)$ نقطتين في الفضاء، فإنّ المتجه $\overrightarrow{AB}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية هو:

a) $6\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ c) $-6\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$

b) $6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ d) $-6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

22- إذا كان: $\vec{v}=\langle k,-4,5\rangle$، وكان: $|\vec{v}|=5\sqrt{2}$ ، فإنّ قيم الثابت k هي:

a) $-3,3$ b) $-4,4$ c) $-9,9$ d) $4,5$

23- إذا كان: $\vec{m}=\langle -3,0,4\rangle$ ، فإنّ متجه الوحدة باتجاه $\vec{m}$ هو:

a) $\langle -1,0,\frac{4}{3}\rangle$ b) $\langle -\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\rangle$ c) $\langle -\frac{3}{25},0,\frac{4}{25}\rangle$ d) $\langle -\frac{3}{4},0,1\rangle$

24- إذا كان: $\vec{w}=\langle 6,3,9\rangle$ ، $\vec{v}=\langle 4,5-p,6\rangle$ ، وكان: $2\vec{w}=3\vec{v}$ ، فإنّ قيمة الثابت p هي:

a) 2 b) -5 c) 3 d) 5

19	20	21	22	23	24
a	b	c	a	b	c

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

من أسئلة الوزارة 2023 / صناعي تكميلي

19- إذا كانت: $M(2\,,1\,,-4\,)$ ، $N(7\,,1\,,8\,)$ نقطتين في الفضاء، فإنّ المسافة بين $M\,,\,N$ هي:

a) 5 b) 12 c) 13 d) 169

20- إذا كانت: $A(-3\,,k\,,7)$ ، $B(1\,,3\,,5\,)$ نقطتين في الفضاء، وكانت $C(-1\,,4\,,6\,)$ هي نقطة منتصف $\overrightarrow{AB}$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:

a) -5 b) 5 c) 6 d) -1

21- إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 8\,,-2\,,-4\rangle$ ، $\vec{\mathbf{u}} = \langle 5\,,6\,,-3\rangle$ ، فإنّ $2\,\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}$ هو:

a) $\langle 11\,,-10\,,-5\rangle$

b) $\langle -11\,,10\,,-5\rangle$

c) $\langle 11\,,10\,,-5\rangle$

d) $\langle -11\,,-10\,,-5\rangle$

22- إذا كان: OAB مثلثًا، فيه: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}$ ، $\overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$ ، والنقطة C هي نقطة منتصف $\overrightarrow{AB}$ ، فإن المتجه $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ هو:

a) $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}})$

b) $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

d) $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

23- إذا كانت: $A(3\,,1\,,5)$ ، $B(2\,,3\,,-1\,)$ نقطتين في الفضاء، فإنّ المتجه $\overrightarrow{AB}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية هو:

a) $\hat{\mathbf{i}} - 2\,\hat{\mathbf{j}} + 6\,\hat{\mathbf{k}}$

b) $-\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 6\,\hat{\mathbf{k}}$

c) $-\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - 6\,\hat{\mathbf{k}}$

d) $\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - 6\,\hat{\mathbf{k}}$

24- إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 0\,,-6\,,8\rangle$ ، فإنّ متجه الوحدة باتجاه $\vec{\mathbf{u}}$ هو:

a) $\langle 0\,,\frac{-6}{5}\,,\frac{8}{5}\rangle$

b) $\langle 0\,,\frac{-3}{10}\,,\frac{4}{10}\rangle$

c) $\langle 0\,,\frac{-6}{5}\,,\frac{-4}{10}\rangle$

d) $\langle 0\,,\frac{-3}{5}\,,\frac{4}{5}\rangle$

19	20	21	22	23	24
c	b	a	b	c	d

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

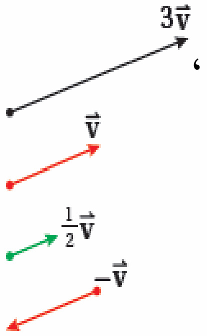
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الدرس 2 المستقيمات في الفضاء
Lines in Space

توازي المتجهات

توازي المتجهات إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$، فإنَّ:

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا وفقط إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $k \neq 0$، بحيث يكون: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = k \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$



المتجهان المتوازيان: متجهان لهما الاتجاه نفسه أو عكسه، ولا يشترط أنْ يكون لهما المقدار نفسه ، وهذا يعني أنَّه يُمكِن كتابة كلٍّ منهما في صورة المتجه الآخر مضروبًا في عدد حقيقي.

*** لإثبات توازي قطعتين مستقيمتين بوجه عام ،
يكفي إثبات توازي متجهين يقعان على هاتين القطعتين المستقيمتين.

مثال: إذا كانت $A(4,3,2)$ ، $B(-1,5,3)$ ، $C(8,-2,5)$ ، $D(-2,2,7)$ ،
حدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}: \quad \overrightarrow{AB} = \langle -5,2,1 \rangle \;,\; \overrightarrow{CD} = \langle -10,4,2 \rangle = 2\langle -5,2,1 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ متوازيان

$OR \; \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} \Rightarrow \frac{-5}{-10} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ صحيح

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

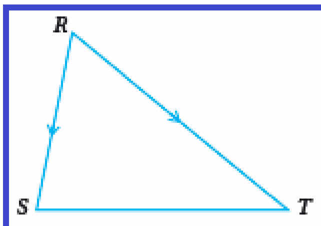
2) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}: \quad \overrightarrow{AC} = \langle 4,-5,3 \rangle \;,\; \overrightarrow{BD} = \langle -1,-3,4 \rangle$

$\overrightarrow{AC} \neq k \times \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ غير متوازيين

$OR \; \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} \Rightarrow \frac{4}{-1} \neq \frac{-5}{-3} \neq \frac{3}{4}$

أتحقَّق من فهمي 127 إذا كان: $G(7, 5, -11), H(4, 4, -4), K(4, 5, 3), L(7, 7, 3)$،
فأُحـدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:
a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ b) $\overrightarrow{GL}, \overrightarrow{HK}$

a	أتحقق من فهمي صفحة 127 $\overrightarrow{GH} = \langle -3, -1, 7 \rangle$ $\overrightarrow{KL} = \langle 3, 2, 0 \rangle$ لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\overrightarrow{GH} = c(\overrightarrow{KL})$ صحيحة. ⇐ غير متوازيين
b	$\overrightarrow{GL} = \langle 0, 2, 14 \rangle$ $\overrightarrow{HK} = \langle 0, 1, 7 \rangle$ نلاحظ أن $\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{HK}$ ونستنتج أن $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$



أتحقّق من فهمي 129

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS}=4\vec{a}, \overrightarrow{RT}=6\vec{b}$،

والنقطة U منتصف $\overline{RS}$، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$،

فأُثبت أنّ $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$.

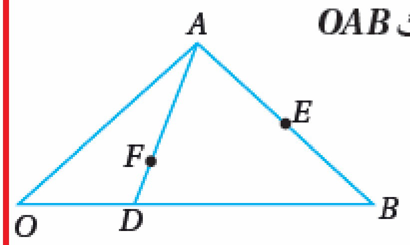
أتحقق من فهمي صفحة 129

$$\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{UR}+\overrightarrow{RV}=\frac{1}{2}(-4\vec{a})+\frac{1}{2}(6\vec{b})=3\vec{b}-2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RT}=-4\vec{a}+6\vec{b}=2(3\vec{b}-2\vec{a})$$

إذن، $\overrightarrow{ST}=2\overrightarrow{UV}$ ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST},\overrightarrow{UV}$ متوازيان.

لإثبات أنَّ ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة، وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.



أتحقّق من فهمي 130 يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB

إذا كان: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$، وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$،

والنقطة E منتصف $\overline{AB}$، والنقطة F تقع على $\overline{AD}$،

حيث: $\overrightarrow{OF}=\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$، فأُثبت أنَّ O، وF، وE تقع على استقامة واحدة.

أتحقق من فهمي صفحة 130

$$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\vec{b}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

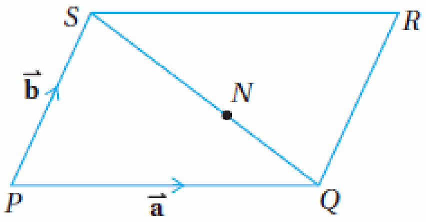
$$\frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{OE}}=\frac{\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})}{\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}=\frac{4}{5}\Rightarrow\overrightarrow{OF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OE}$ متوازيان،

وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن، النقاط O, E, F تقع على استقامة واحدة.

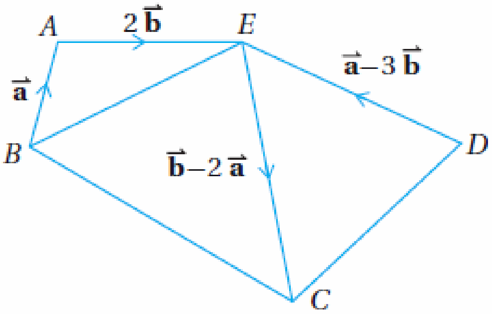
أتدرّب وأحُلُّ المسائل أُحدِّد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\langle 8, 12, 24\rangle, \langle 15, 10, -20\rangle$
2. $\langle 27, -48, -36\rangle, \langle 9, -16, -12\rangle$
3. $\langle -6, -4, 10\rangle, \langle -3, -1, 13\rangle$
4. $\langle 12, -8, 32\rangle, \langle 21, -14, 56\rangle$



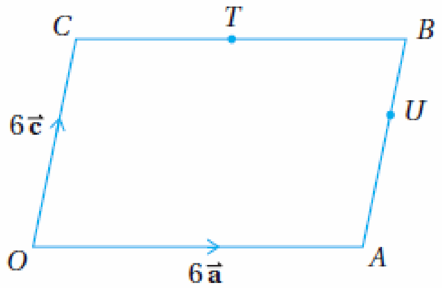
يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$، الذي تقع فيه النقطة N على $\overline{SQ}$، حيث: $SN : NQ = 3 : 2$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}, \overrightarrow{PS} = \vec{b}$:

5. أكتب $\overrightarrow{SQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.
6. أكتب $\overrightarrow{NR}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

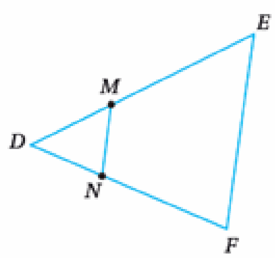


7. مُعتمِدًا المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أُثبِت أنَّ $BEDC$ متوازي أضلاع.

إرشاد: في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متوازيان، ولهما الطول نفسه.



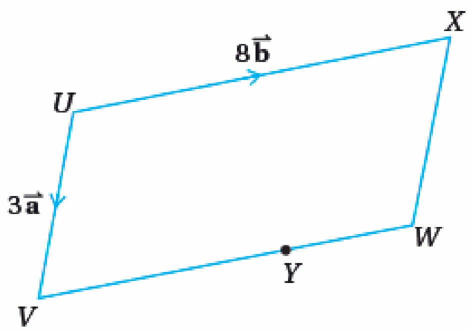
8. في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 6\vec{a}, \overrightarrow{OC} = 6\vec{c}$، والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$، والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $1 : 2$. إذا مُدَّ الضلع $\overline{OA}$ على استقامته إلى النقطة X، حيث: $OA = AX$، فأُثبِت أنَّ T، و U، و X تقع على استقامة واحدة.



تبرير: في الشكل المجاور، $\overrightarrow{DE} = 12\vec{a}$، و $\overrightarrow{DF} = 8\vec{b}$، والنقطة M تقسم DE بنسبة $2 : 1$، والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة $1 : 2$

39. أُثبِت أنَّ: $FEMN$ شبه مُنحرِف.

40. إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة $FEMN$.

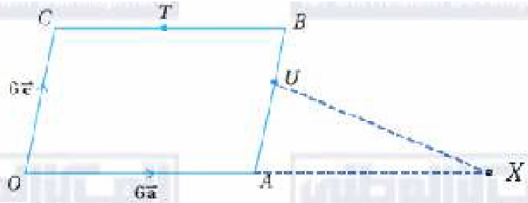


42. تحدٍّ: يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان: $\overrightarrow{UX} = 8\vec{b}$، و $\overrightarrow{UV} = 3\vec{a}$، وكانت النقطة Y تقع بين V و W، حيث: $VY = 3YW$، وتقع النقطة Z على المستقيم XW، حيث: $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$، فأُثبِت أنَّ U، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة.

1	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle 15,10,-20\rangle = k\langle 8,12,24\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
2	نلاحظ أن $\langle 27,-48,-36\rangle = 3\langle 9,-16,-12\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.
3	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle -6,-4,10\rangle = k\langle -3,-1,13\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
4	نلاحظ أن $\langle 12,-8,32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21,-14,56\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.

5	$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$
6	$\frac{NQ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow NQ = \frac{2}{3}SN \Rightarrow SQ = SN + NQ = SN + \frac{2}{3}SN = \frac{5}{3}SN$ $\Rightarrow SQ = \frac{5}{3}SN \Rightarrow SN = \frac{3}{5}SQ \Rightarrow NQ = \frac{2}{5}SQ$ وبما أن الشكل متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \vec{b}$ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

7	$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ....(1) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = -(\vec{b} - 2\vec{a}) - (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b}$ ....(2) $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ إذن، الضلعان $\overline{BE}$ ، و $\overline{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل $BEDC$ متوازي أضلاع. ويمكن إثبات المطلوب بطريقة أخرى بإيجاد المتجهين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}$ وبيان تساويهما.

8	$\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{XO} + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}) = -12\vec{a} + (6\vec{c} + 3\vec{a}) = 6\vec{c} - 9\vec{a} = 3(2\vec{c} - 3\vec{a})$ $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c}) = 4\vec{c} - 6\vec{a} = 2(2\vec{c} - 3\vec{a})$  $\frac{\overrightarrow{XU}}{\overrightarrow{XT}} = \frac{2(2\vec{c} - 3\vec{a})}{3(2\vec{c} - 3\vec{a})} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{XU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$ إذن، $\overrightarrow{XU}, \overrightarrow{XT}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة نفسها X، فإن النقاط T, U, X تقع على استقامة واحدة.

39

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(-12\vec{\mathbf{a}} + 8\vec{\mathbf{b}})$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -12\vec{\mathbf{a}} + 8\vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ وهذا يثبت أن $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{EF}$

إذن الشكل $FEMN$ رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين، فهو شبه منحرف.

40

يمكن حل هذا السؤال بتوظيف تشابه المثلثات.

أو باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي:

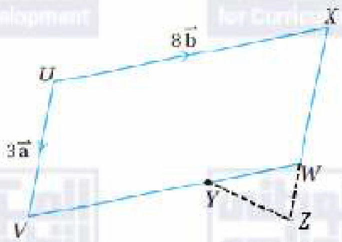
ليكن A_2 مساحة ΔDEF ، A_1 مساحة ΔDMN

$A_2 = \frac{1}{2}(DE)(DF)\sin D$

$A_1 = \frac{1}{2}(DM)(DN)\sin D \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{DN}{DF} \times \frac{DM}{DE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{A_2}{72} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 8$

مساحة شبه المنحرف $FEMN$ تساوي: $A_1 - A_2 = 72 - 8 = 64 \Leftarrow$ إذن مساحة الشكل $FEMN$ تساوي 64

42



$\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW} = \frac{4}{3}\overrightarrow{UV} = \frac{4}{3}(3\vec{\mathbf{a}}) = 4\vec{\mathbf{a}}$

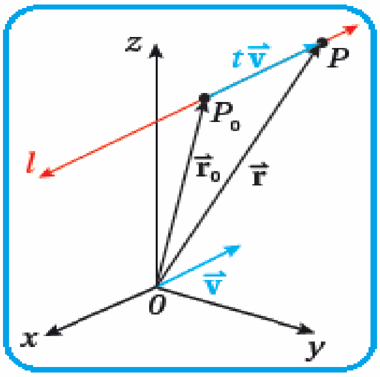
$\Rightarrow \overrightarrow{XW} + \overrightarrow{WZ} = 4\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \overrightarrow{WZ} = 4\vec{\mathbf{a}} - 3\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$

$\frac{YW}{VY} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{YW}{VW} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{YW} = 2\vec{\mathbf{b}}\ ,\ \overrightarrow{VY} = 6\vec{\mathbf{b}}$

$\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY} = 3\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{b}} = 3(\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ} = 2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{UY} = 3\overrightarrow{YZ} \Rightarrow \overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{UY}$ وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن، النقاط U, Z, Y تقع على استقامة واحدة.



المعادلة المتجهة للمستقيم

في الشكل المجاور، يمرُّ المستقيم L بالنقطة المعلومة P_0 ، موازيًا المتجه v،
ولتكن النقطة P أيَّ نقطة على المستقيم L ومن ثَمَّ ،
فإنَّ المتجه P_0P يوازي المتجه v؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة: $P_0P = t\ v$ ،
حيث t عدد حقيقي.
ووَفقًا لقاعدة المثلث لجمع المتجهات، فإنَّ متجه الموقع للنقطة P يساوي
مجموع متجه الموقع للنقطة P_0 والمتجه P_0P ؛ أيْ إنَّ: $OP = OP_0 + P_0P$

وإذا كان متجه الموقع للنقطة P هو r، ومتجه الموقع للنقطة P_0 هو r_0 ، فإنَّ: $r = r_0 + t\ v$
يُطلَق على هذه الصيغة اسم المعادلة المتجهة للمستقيم

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه $\vec{v}$،
ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{r}_0$ ، هي: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$

يوازي المستقيم l المتجه $\vec{v}$
إذا كان $\vec{v}$ اتجاهًا للمستقيم l.

مثال 1 : جد المعادلة المتجهة للمستقيم L الذي يوازي المتجه $v = \langle -3 , 3 , 8\rangle$ ، ويمرُّ بالنقطة $(3, -2,6)$

$$\vec{r} = r_0 + t\vec{v} = \langle 3,-2,6\rangle + t\langle -3,3,8\rangle$$

أتحقَّق من فهمي 132
أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1, -4, -5\rangle$، ويمرُّ بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

أتحقق من فهمي صفحة 132 $\vec{r} = \langle 0,-6,9\rangle + t\langle 1,-4,-5\rangle \Leftarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

*** المعادلة المتجهة للمستقيم لها عِدَّة صور مُتكافِئة تختلف باختلاف النقطة P_0

مثال 2: جد معادلة متجهة للمستقيم L المارِّ بالنقطتين: $(7 ، -2 ، B(1$ و $A(4 ، 1 ، -5)$
الحل :

$$A(4,1,-5)\ ,\ \ B(1,-2,7)$$
$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-4,-2-1,7--5\rangle = \langle -3,-3,12\rangle = 3\langle -1,-1,4\rangle$$
$$\Rightarrow \vec{r} = r_0 + t\vec{v} = \langle 4,1,-5\rangle + t\langle -1,-1,4\rangle$$
$$OR\ \ \vec{r} = r_0 + t\vec{v} = \langle 1,-2,7\rangle + t\langle -1,-1,4\rangle$$
$$OR\ \ \vec{r} = r_0 + t\vec{v} = \langle 1,-2,7\rangle + t\langle -3,-3,12\rangle$$

يُمكن أن تكون r_0 النقطة A أو النقطة B أو منتصفهما
كذلك الاتجاه له عدة احتمالات

أتحقَّق من فهمي 133 أجد معادلة متجهة للمستقيم l المارِّ بالنقطتين: $M(3, 7, -9)$، و $N(2, -4, 3)$.

أتحقق من فهمي صفحة 133
$$\overrightarrow{NM} = \langle 3-2, 7-(-4), -9-3\rangle = \langle 1,11,-12\rangle$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle$$

أتحقَّق من فهمي 134

تُمثِّل: $\vec{\mathbf{r}} = 11\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}} + t(7\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ معادلة متجهة للمستقيم l:

a) أُبيِّن أنَّ النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}})$ تقع على المستقيم l.

b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتُقابِل القيمة: $t = -3$.

c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم l، فما قيمة v؟

a	أتحقق من فهمي صفحة 134 $\vec{\mathbf{r}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ نبحث عن قيمة لـ t تحقق: $39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ $\boxed{39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4}$ $\boxed{-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4}$ $\boxed{14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4}$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t = 4)$، فإن النقطة التي متجه موقعها $39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}}$ وهي النقطة (39, -3, 14) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته.
b	$t = -3 \Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = (11 + 7(-3))\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2(-3))\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5(-3))\hat{\mathbf{k}}$ $= -10\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}} - 21\hat{\mathbf{k}}$

c	متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ هو $v\hat{\mathbf{i}} - 3v\hat{\mathbf{j}} + (5v - 1)\hat{\mathbf{k}}$ $v\hat{\mathbf{i}} - 3v\hat{\mathbf{j}} + (5v - 1)\hat{\mathbf{k}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ $\boxed{v = 11 + 7t \text{ ..... } (1)}$ $\boxed{-3v = 5 - 2t \text{ ... } (2)}$ $\boxed{5v - 1 = -6 + 5t \text{ ... } (3)}$ $(1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow v = -3$ نتحقق من أنّ $t = -2$، و $v = -3$ تحققان المعادلة (3) $\quad 5(-3) - 1 \overset{?}{=} -6 + 5(-2)$ $-16 = -16$ ✓ إذن، قيمة v التي تجعل النقطة واقعة على المستقيم l هي: $v = -3$

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

9) $\vec{a} = -7\hat{i} + \hat{j}, \vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

10) $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

11) $\vec{a} = \langle 4, 3\rangle, \vec{b} = \langle 9, -2\rangle$

12) $\vec{a} = \langle 0, -1, 3\rangle, \vec{b} = \langle 10, 3, -6\rangle$

إرشاد: تظلُّ المعادلة المتجهة للمستقيم صحيحة في المستوى الإحداثي.

9	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + t(-7\hat{i} + \hat{j})$
10	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = -2\hat{i} + 8\hat{k} + t(-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$
11	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 9,-2\rangle + t\langle 4,3\rangle$
12	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 10,3,-6\rangle + t\langle 0,-1,3\rangle$

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

13) $(10, 3, -6), (0, -1, 3)$

14) $(11, -6, 9), (1, 4, 29)$

15) $(-30, -6, 30), (-26, -12, 23)$

16) $(-2, 9, 1), (10, 5, -7)$

13	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle 10-0, 3-(-1), -6-3\rangle = \langle 10,4,-9\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 0,-1,3\rangle + t\langle 10,4,-9\rangle$
14	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle 11-1, -6-4, 9-29\rangle = \langle 10,-10,-20\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 10 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v} = \langle 1,-1,-2\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 1,4,29\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$
15	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle -30-(-26), -6-(-12), 30-23\rangle = \langle -4,6,7\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle -26,-12,23\rangle + t\langle -4,6,7\rangle$
16	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle -2-10, 9-5, 1-(-7)\rangle = \langle -12,4,8\rangle$ ويمكن تبسيطه بقسمته على 4 إلى $\langle -3,1,2\rangle$ $\vec{r} = \langle 10,5,-7\rangle + t\langle -3,1,2\rangle$

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(-2, 9, 1)$ و $B(10, 5, -7)$: **20** أكتب معادلة متجهة للمستقيم l.

21 أُبيِّن أنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l. **22** أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l.

23 أجد قيمة كلٍّ من b، و c إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l.

24 أجد نقطة تقع على المستقيم l، وتقع أيضًا في المستوى xz.

20	$\overrightarrow{AB} = \langle 12, -4, -8 \rangle \Rightarrow \vec{v} = \langle 3, -1, -2 \rangle$ معادلة المستقيم AB: $\vec{r} = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle 3, -1, -2 \rangle$
21	متجه الموقع للنقطة (19,2,-13) هو: $\langle 19, 2, -13 \rangle$ ⇦ $\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$ $\boxed{-13 = 1 - 2t \Rightarrow t = 7}$ $\boxed{2 = 9 - t \Rightarrow t = 7}$ $\boxed{19 = -2 + 3t \Rightarrow t = 7}$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t = 7)$، فإن النقطة(19,2,-13)
22	بما أن النقطة تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته ⇦ $\langle 1, a, -1 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$ $\Rightarrow 1 = -2 + 3t \Rightarrow t = 1$ ⇨ $a = 9 - t = 9 - 1 \Rightarrow a = 8$
23	بما أن النقطة$(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته، أي أنّ: $\langle -8, b, c \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$ $\Rightarrow -2 + 3t = -8 \Rightarrow t = -2$ ⇨ $b = 9 - t = 9 - (-2) \Rightarrow \boxed{b = 11}$ $c = 1 - 2t = 1 - 2(-2) \Rightarrow \boxed{c = 5}$
24	بما أن النقطة المطلوبة تقع في المستوى xz فإن الإحداثي y لها يساوي صفرًا $\langle x, 0, z \rangle = \langle -2 + 3t, 9 - t, 1 - 2t \rangle$ ⇨ $9 - t = 0 \Rightarrow t = 9$ $x = -2 + 3t = -2 + 3(9) \Rightarrow x = 25$ ⇨ $z = 1 - 2t = 1 - 2(9) \Rightarrow z = -17$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $(25, 0, -17)$

26 إذا كان: $\vec{v} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من: a، و b، و c، علمًا بأنَّ اتجاه $\vec{v}$ في اتجاه محور y الموجب، و $|\vec{v}| = 34$.

26	اتجاه المحور y الموجب هو $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $\vec{v} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, k > 0$ وبما أن اتجاه $\vec{v}$ هو اتجاه المحور y الموجب، فإن: $\begin{pmatrix} 3a + b \\ -5a + 4b \\ 6a + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ $3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $-5a + 4b = 34 \ldots\ldots\ldots (2)$ $|\vec{v}| = |k| = 34 \Rightarrow k = 34$ ⇨ $6a + bc = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $-4 \times (1) + (2) \Rightarrow -17a = 34 \Rightarrow a = -2, \quad b = 6$ بتعويض قيمة a وقيمة b في المعادلة (3) نجد أنّ: $6(-2) + 6c = 0 \Rightarrow c = 2$

31 $A(1,2)$، و$B(2,3)$ نقطتان في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المارّ بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مُقارِنًا بين المعادلتين.

31

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{2-1}=1$

المعادلة الديكارتية للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $y-2=1(x-1)\Rightarrow y=x+1$ اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{v}=\langle 1,1\rangle$

المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}\Rightarrow \vec{r}=\langle 1,2\rangle+t\langle 1,1\rangle$

$\vec{v}$ تقابل الميل m، و$\vec{r}_0$ تقابل المقطع y في المعادلة الديكارتية

يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة $\vec{r}=\langle x,y\rangle=\langle 1+t,2+t\rangle$

وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة: $\Rightarrow x=1+t\ \Rightarrow\ t=x-1$

$y=2+t\ \Rightarrow\ y=2+x-1\Rightarrow\ y=x+1$

إذا كانت: $A(-1,-2,1)$، و$B(-3,4,-5)$، و$C(0,-2,4)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

35 إذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$، وكان: $|\overline{NC}|=2|\overline{BN}|$، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المارّ بالنقطتين M و N.

34 $M=\left(\frac{-1-3}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{1-5}{2}\right)=(-2,1,-2)$

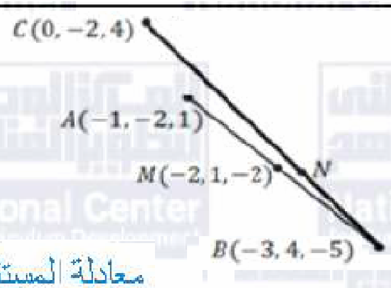
35

$|\overline{NC}|=2|\overline{BN}|\Rightarrow NC=2BN\Rightarrow \overline{BN}=\frac{1}{3}\overline{BC}$

$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{MB}+\frac{1}{3}\overline{BC}$

$=\langle -1,3,-3\rangle+\frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle=\langle 0,1,0\rangle=\vec{v}$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ المتجهة هي: $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}\Rightarrow \vec{r}=\langle -2,1,-2\rangle+t\langle 0,1,0\rangle$



حل آخر: لتكن إحداثيات N هي (x_1,y_1,z_1)

بما أن $|\overline{NC}|=2|\overline{BN}|$، فإن $\overline{BN}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ ⟸ $\langle x_1+3,y_1-4,z_1+5,\rangle=\frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$

$\Rightarrow x_1+3=1\ ,\ \ y_1-4=-2\ ,\ \ z_1+5=3$

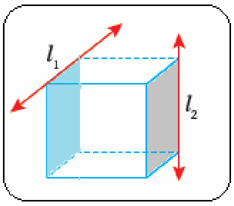
$\Rightarrow x_1=-2\ ,\ \ y_1=2\ ,\ \ z_1=-2\Rightarrow N(-2,2,-2)$

$\overline{MN}=\langle -2-(-2),2-1,-2-(-2)\rangle=\langle 0,1,0\rangle$

إذن، اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ هو: $\langle 0,1,0\rangle$ ومعادلته المتجهة هي: $\vec{r}=\langle -2,1,-2\rangle+t\langle 0,1,0\rangle$

41 تحدٍّ: أجد جميع النقاط على المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -2, -6\rangle + t\langle 1, 2, 3\rangle$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

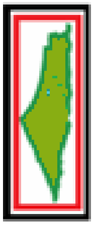
41	النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة: $P(3+t, -2+2t, -6+3t)$ $OP = \sqrt{(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2} = 29$ نربع الطرفين ونفك الأقواس، فنحصل على: $14t^2 - 38t - 792 = 0$ $\Rightarrow 7t^2 - 19t - 396 = 0 \Rightarrow (t-9)(7t+44) = 0 \Rightarrow t = 9 \ , \ t = -\frac{44}{7}$ إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما: $P_1 = (12, 16, 21) \, , P_2 = \left(-\frac{23}{7}, -\frac{102}{7}, -\frac{174}{7}\right)$



المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

يكون المستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين، أو متقاطعين.
أمّا في الفضاء فتوجد حالة ثالثة، هي أنْ يكون المستقيمان متخالفين (skew)؛
أيْ غير متوازيين، وغير متقاطعين ، مثل المستقيمين: L1 ، و L2 في الشكل المجاور.

إذا عُلِمت معادلتا مستقيمين في الفضاء، فيُمكِن الجزم بتوازيهما إذا كان اتجاه كلٍّ منهما موازيًا للآخر؛
أيْ إنَّ أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي.



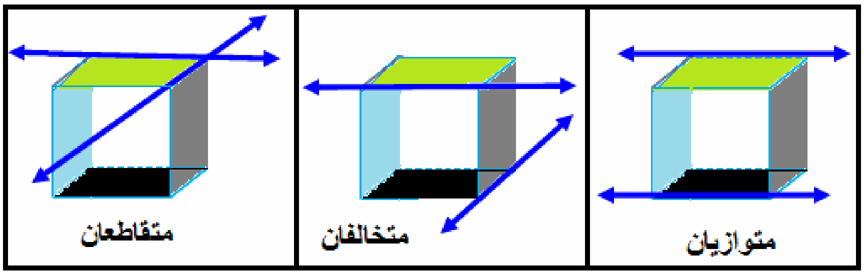
المستقيمات المتوازية

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{a}}+t\vec{\mathbf{b}}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{c}}+u\vec{\mathbf{d}}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فإنَّ: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{d}}$.

يُمكِن الحكم على تقاطع المستقيمين: $l_1: \vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{a}}+t\vec{\mathbf{b}}$ ، و $l_2: \vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{c}}+u\vec{\mathbf{d}}$

بمساواة متجهي الموقع r في معادلتيهما، وحلِّ المعادلات الثلاث الناتجة لإيجاد قيمة كلٍّ من المُتغيِّر t والمُتغيِّر u.
فإذا تحقَّقت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المُتغيِّرين، كان المستقيمان متقاطعين.
وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ، فإنَّهما يكونان متخالفين.

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



أتحقَّق من فهمي 136 إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1،
وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2،
فأُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1، و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين،
ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

أتحقق من فهمي صفحة 136

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{\mathbf{v}}_1=\langle 1,11,-12\rangle$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{\mathbf{v}}_2=\langle 4,-6,3\rangle$
وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{\mathbf{v}}_1=k\vec{\mathbf{v}}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ من معادلتي المستقيمين: $\langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle = \langle -30,-6,30\rangle + u\langle 4,-6,3\rangle$

$3+t=-30+4u \Rightarrow t-4u=-33 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$7+11t=-6-6u \Rightarrow 11t+6u=-13 \ldots\ldots\ldots (2)$

$-9-12t=30+3u \Rightarrow 12t+3u=-39 \ldots\ldots (3)$

$3\times(1)+2\times(2) \Rightarrow 25t=-125 \Rightarrow t=-5 \;, u=7$

نتحقق من أنّ $t=-5$، و $u=7$ تحققان المعادلة (3)

$12(-5)+3(7) \stackrel{?}{=} -39$

$-39=-39$ ✓

بما أن قيمة t، وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان،

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l_1: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 3,7,-9\rangle-5\langle 1,11,-12\rangle=\langle -2,-48,51\rangle$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2,-48,51)$

أتحقق من فهمي 138

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته: $(0, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته: $(-2, 0, 0)$. وبعد التحليق مدّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8, 15, 16)$، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22, 24, 48)$. هل خطّا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

أتحقق من فهمي صفحة 138

اتجاه الطائرة الأولى هو $\vec{v}_1 = \langle 8-0, 15-7, 16-0\rangle = \langle 8,8,16\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$ معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle 0,7,0\rangle + t\langle 1,1,2\rangle$

واتجاه الثانية هو $\vec{v}_2 = \langle 22-(-2), 24-0, 48-0\rangle = \langle 24,24,48\rangle$

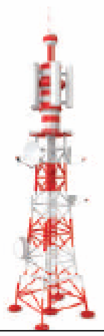
ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -2,0,0\rangle + u\langle 1,1,2\rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.

مسألة اليوم

أُرسِلت إشارة لاسلكية من موقعٍ إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(-11, 9, 15)$. وفي الوقت نفسه، أُرسِلت إشارة من موقعٍ إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(2, -5, 17)$. إذا علمْتُ أنَّ الإشارة تسير في خط مستقيم، فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟



مسألة اليوم صفحة 126

اتجاه مسار الإشارة الأولى: $\langle -11-(-1), 9-4, 15-5\rangle = \langle -10,5,10\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 5 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v}_1 = \langle -2,1,2\rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle -1,4,5\rangle + t\langle -2,1,2\rangle$

اتجاه مسار الإشارة الثانية: $\langle 2-(-5), -5-9, 17-3\rangle = \langle 7,-14,14\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 7 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v}_2 = \langle 1,-2,2\rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -5,9,3\rangle + u\langle 1,-2,2\rangle$

نبحث في التقاطع بمساواة متجهي الموقع $\vec{r}$: $\langle -1-2t, 4+t, 5+2t\rangle = \langle -5+u, 9-2u, 3+2u\rangle$

$-1-2t = -5+u \Longrightarrow 2t+u = 4 \ldots\ldots(1)$

$4+t = 9-2u \Longrightarrow t+2u = 5 \ldots\ldots(2)$

$5+2t = 3+2u \Longrightarrow -2t+2u = 2 \ldots\ldots(3)$

نحل المعادلتين (1)، و(2) لإيجاد قيم t, u: $(1)\times 2-(2) \Longrightarrow 3t = 3 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow u = 2$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند هذه القيم t=1, u=2: $-2(1)+2(2) \stackrel{?}{=} 2 \qquad -2+4 = 2$ ✓

إذن، يتقاطع مسارا الإشارتين عندما يكون t=1, u=2 ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض t=1 في معادلة مسار الإشارة الأولى، فتكون نقطة التقاطع $(-3,5,7)$

17 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle$ و $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$.

17

نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين: $\langle -2,2,-1\rangle + t\langle 1,2,-1\rangle = \langle 4,4,-7\rangle + u\langle -1,3,1\rangle$

$-2 + t = 4 - u \Rightarrow t + u = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2 + 2t = 4 + 3u \Rightarrow 2t - 3u = 2 \ldots\ldots (2)$

$-1 - t = -7 + u \Rightarrow t + u = 6 \ldots\ldots\ldots (3)$

$3 \times (1) + (2) \Rightarrow 5t = 20 \Rightarrow t = 4 \;, u = 2$

نلاحظ أن المعادلة (3) هي المعادلة (1) نفسها فهي متحققة لقيمتي $t = 4, u = 2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 4$ في معادلة المستقيم الأول (أو $u = 2$ في معادلة الثاني):

نقطة تقاطع المستقيمين هي: $(2,10,-5)$ ⇦ $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2,2,-1\rangle + 4\langle 1,2,-1\rangle = \langle 2,10,-5\rangle$

يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E، وF، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G، وH. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

18 $E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)$

19 $E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), G(24, 14, -29), H(3, -21, 20)$

18

$\overrightarrow{EF} = \langle -14,14,21\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_1 = \langle -2,2,3\rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle -6,6,9\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_2 = \langle -2,2,3\rangle$ نلاحظ أن $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

19

$\overrightarrow{EF} = \langle -1,-11,12\rangle = \vec{\mathbf{v}}_1$ $\quad \overrightarrow{HG} = \langle 21,35,-49\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_2 = \langle 3,5,-7\rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{\mathbf{v}}_1 = k\vec{\mathbf{v}}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان غير متوازيين.

معادلة $\overleftrightarrow{GH}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$ $\quad$ معادلة $\overleftrightarrow{EF}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle$

نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين ونساوي الإحداثيات المتناظرة:

$\langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$

$3 - t = 3 + 3u \Rightarrow t + 3u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$7 - 11t = -21 + 5u \Rightarrow 11t + 5u = 28 \ldots\ldots (2)$

$-9 + 12t = 20 - 7u \Rightarrow 12t + 7u = 29 \ldots\ldots (3)$ مستقيمين

$--5 \times (1) + 3 \times (2) \Rightarrow 28t = 84 \Rightarrow t = 3, u = -1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عندما $t = 3, u = -1$ $\quad 12(3) + 7(-1) \overset{?}{=} 29$ ⇦ $29 = 29$ ✓

فالمستقيمان متقاطعان. نجد نقطة التقاطع بتعويض t=3 في معادلة $\overleftrightarrow{EF}$ (أو u=-1 في معادلة $\overleftrightarrow{GH}$):

إذن، نقطة التقاطع هي: (0, -26, 27) ⇦ $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,7,-9\rangle + 3\langle -1,-11,12\rangle = \langle 0,-26,27\rangle$

25 إذا كان: $\mathbf{n} = \langle -5, 4, a\rangle$, $\mathbf{m} = \langle 1, -2, 3\rangle$، وكان المتجه: $3\vec{\mathbf{n}} + b\vec{\mathbf{m}}$ يوازي المتجه: $\langle 3, -3, 5\rangle$،

فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

25	$3\vec{n} + b\vec{m} = \langle -15,12,3a\rangle + \langle b,-2b,3b\rangle = \langle -15+b, 12-2b, 3a+3b\rangle$ وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه $\langle 3,-3,5\rangle$، فإن: $\langle -15+b, 12-2b, 3a+3b\rangle = k\langle 3,-3,5\rangle$ $\Rightarrow -15 + b = 3k \ldots\ldots(1)$ $12 - 2b = -3k \ldots\ldots(2)$ $3a + 3b = 5k \ldots\ldots(3)$ $(1)\times 2 + (2) \Rightarrow -18 = 3k \Rightarrow k = -6,$ $b = -3$, $a = -7$

متجهات الموقع للنقاط: A, B, C الواقعة على مستقيم واحد هي:

$\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\imath} + p\,\hat{\jmath} + q\,\hat{k},\ \vec{\mathbf{b}} = -4\,\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k}, \vec{\mathbf{c}} = 14\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}$ على الترتيب:

27 أجد قيمة p.

28 أجد قيمة q.

29 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المارِّ بالنقطتين: A، و B مع المستوى yz.

30 أجد طول $\overline{AC}$ في صورة: $a\sqrt{14}$، حيث a عدد صحيح.

27	$\overrightarrow{BC} = 18\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 6\hat{k} \Rightarrow \vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ هي: $\vec{r} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ متجه موقع النقطة A يحقق هذه المعادلة لأن النقطة A تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ $\Rightarrow 2\hat{\imath} + p\hat{\jmath} + q\hat{k} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة: $\Rightarrow 2 = -4 + 3t \Rightarrow t = 2$ $p = 13 - 2t \Rightarrow p = 13 - 2(2) = 9$
28	استكمالاً لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل $\hat{k}$ في المعادلة $\hat{\imath} + p\hat{\jmath} + q\hat{k} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}) \Rightarrow q = -1 + t = -1 + 2 = 1$

29	معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي معادلة $\overleftrightarrow{BC}$ نفسها $\vec{r} = (-4 + 3t)\hat{\imath} + (13 - 2t)\hat{\jmath} + (-1 + t)\hat{k}$ متجه موقع أيِّ نقطة في المستوى yz يكون على الصورة $y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم z, y, t التي تحقق المعادلة: $y\hat{\jmath} + z\hat{k} = (-4 + 3t)\hat{\imath} + (13 - 2t)\hat{\jmath} + (-1 + t)\hat{k}$ $0 = -4 + 3t \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow y = 13 - 2t \Rightarrow y = \frac{31}{3} \Rightarrow z = -1 + t \Rightarrow z = \frac{1}{3} \Rightarrow (0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3})$
30	$A(2,9,1)$, $C(14,1,5) \Rightarrow AC = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

إذا كان المستقيم l_1 يمرُّ بالنقطة $A(-3, -1, 12)$، والنقطة $B(-2, 0, 11)$، وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1،

ويمرُّ بالنقطة $C(11, 9, 12)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

32 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_1.

33 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_2.

32	$\overrightarrow{AB} = \langle 1,1,-1\rangle$ اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v}_1 = \langle 1,1,-1\rangle$ ومعادلته هي: $\vec{r} = \langle -3,-1,12\rangle + t\langle 1,1,-1\rangle$
33	بما أن $l_2 \parallel l_1$ فلهما الاتجاه نفسه $\vec{v}_1 = \langle 1,1,-1\rangle$ أعلاه $\Rightarrow l_2 :\ \vec{r} = \langle 11,9,12\rangle + u\langle 1,1,-1\rangle$

36 أقمار صناعية: مَرَّ القمر الصناعي S_1 بموقعين، هما: $A(30, -75, 90)$، و $B(100, 65, 220)$، ومَرَّ القمر الصناعي S_2 بموقعين، هما: $C(-20, 45, 200)$، و $D(120, 85, 160)$.
أُحدِّد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ من معادلتيهما.

36 $\overrightarrow{AB} = \langle 70,140,130 \rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{AB}$: $\vec{v}_1 = \langle 7,14,13 \rangle$

وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle 30,-75,90 \rangle + t\langle 7,14,13 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 140,40,-40 \rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{CD}$: $\vec{v}_2 = \langle 7,2,-2 \rangle$

وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle -20,45,200 \rangle + u\langle 7,2,-2 \rangle$

المستقيمان ليسا متوازيين لأن اتجاهيهما ليسا متوازيين $(\vec{v}_1 \neq k\vec{v}_2)$

نبحث عن تقاطع المستقيمين بمحاولة إيجاد t,u بحيث:

$\langle 30+7t, -75+14t, 90+13t \rangle = \langle -20+7u, 45+2u, 200-2u \rangle$

$30+7t = -20+7u \Rightarrow u = \frac{50}{7} + t \ldots\ldots (1)$

$-75+14t = 45+2u \Rightarrow u = -60+7t \ldots\ldots (2)$

$90+13t = 200-2u \Rightarrow 13t+2u = 110 \ldots (3)$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $t = \frac{235}{21}, u = \frac{385}{21}$

لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3)

إذن المستقيمان غير متقاطعين ، وهما غير متوازيين فهما إذن متخالفان.

38 تحدٍّ: يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q} = \langle -6, 14, -19 \rangle$، ويمرُّ أيضًا بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s} = \langle -4, 6, -3 \rangle$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$، ويوازي المستقيم: $\vec{r} = \langle 0,-6, 1 \rangle + t\langle 4,7,4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U، فأُثبِت أنَّ المثلث STU متطابق الضلعين.

38 $\overrightarrow{QS} = \langle 2,-8,16 \rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{QS}$: $\vec{v}_1 = \langle 1,-4,8 \rangle$

إذن معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \langle -6,14,-19 \rangle + t\langle 1,-4,8 \rangle$

معادلة l_2 هي: $\vec{r} = \langle 1,9,9 \rangle + u\langle 4,7,4 \rangle$

لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u,t اللتين تجعلان $\vec{r}$ في المعادلتين متساويين:

$\langle -6+t, 14-4t, -19+8t \rangle = \langle 1+4u, 9+7u, 9+4u \rangle$

$-6+t = 1+4u \Rightarrow t-4u = 7 \ldots\ldots (1)$

$14-4t = 9+7u \Rightarrow 4t+7u = 5 \ldots\ldots (2)$

$-19+8t = 9+4u \Rightarrow 4t-2u = 14 \ldots (3)$

$(3)-(2): 9u = -9$

$\Rightarrow u = -1, \quad t = 3$

وهاتان القيمتان تحققان أيضًا المعادلة (1)

نجد نقطة تقاطع l_1 و l_2 بتعويض $t = 3$ في معادلة l_1 : $\vec{r} = \langle -6,14,-19 \rangle + 3\langle 1,-4,8 \rangle = \langle -3,2,5 \rangle$

إذن، نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي: $U(-3,2,5)$

الآن لدينا أيضًا $T(1,9,9), S(-4,6,-3)$

$TU = \sqrt{16+49+16} = 9$

$SU = \sqrt{1+16+64} = 9$

بما أن $TU = SU$ إذن، ΔSTU متطابق الضلعين.

من كتاب التمارين

أُبيِّن إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ في الحالتين الآتيتين متوازي أضلاع أم لا، مُبرِّرًا إجابتي:

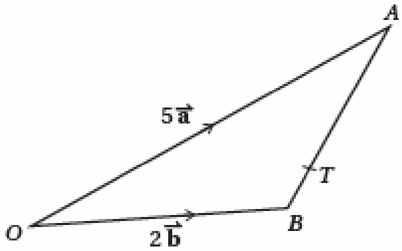
1. $A(3, -2, 1), B(-4, 0, 8), C(-6, 5, 5), D(8, 1, -9)$
2. $A(12, 5, -8), B(6, 2, -10), C(-8, 1, 13), D(-2, 4, 15)$

3. إذا كانت: $A(2, 3, 1), B(6, 5, 4), C(3, 1, 5)$، وكان $ABCD$ متوازي أضلاع، فما إحداثيات D؟

4. في الشكل المجاور، OAB مثلث، فيه: $\overrightarrow{OA} = 5\vec{\mathbf{a}}$ و $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\mathbf{b}}$

والنقطة T تقع على الضلع AB، حيث: $AT : TB = 5 : 1$.

أُبيِّن أنَّ $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$

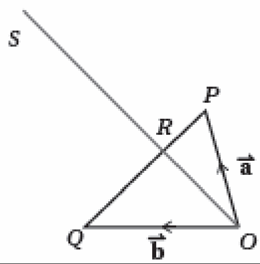


في الشكل المجاور، OPQ مثلث، فيه: $\overrightarrow{RQ} = 2\,\overrightarrow{PR}$ ، و $\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{OR}$، و $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{b}}$:

5. أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{OS} = 2\,\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

6. أُضيف النقطة T إلى الشكل، حيث: $\overrightarrow{OT} = -\vec{\mathbf{b}}$.

أُثبِت أنَّ النقاط: S, P, T تقع على استقامة واحدة.



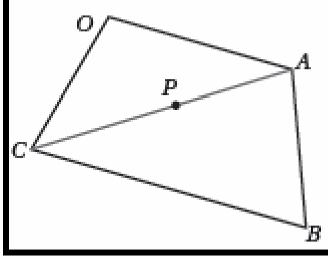
في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 8\,\vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OC} = 7\,\vec{\mathbf{c}}$، و $\overrightarrow{CB} = 12\,\vec{\mathbf{a}}$،

والنقطة P تقسم $\overline{CA}$ بنسبة $3:2$

7. أجد المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{c}}$.

8. أُثبِت أنَّ النقاط: O, P, B تقع على استقامة واحدة.

9. أجد النسبة: $OP : PB$.



10. أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

11. أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 5, 8\rangle$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $\langle 2, -7, 11\rangle$.

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

12. $(1, -7), (6, 19)$
13. $(-5, 4, 15), (7, 13, -8)$
14. $(5, 22, -8), (13, 10, 3)$
15. $(0, 2, -5), (9, 4, 6)$

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16. هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l؟ أُبرِّر إجابتي.

17. إذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l، فأجد قيمة كلٍّ من b، و c.

18. ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz؟

19 إذا كانت: $\mathbf{r} = \langle 3, 2, 1\rangle + t\langle 4, a, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\mathbf{r} = \langle -2, 4, 3\rangle + u\langle 3, -2, -9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$.

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $U(p, -3, -1)$، و $V(2, 5, -3)$، وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l:

20 أجد قيمة p. **21** أكتب معادلة متجهة للمستقيم l. **22** أجد قيمة q.

23 إذا كانت $A(3, -2, 4)$، وكانت $B(6, 0, 3)$، وكانت: $\mathbf{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1، حيث: $\lambda = 2$،
فأجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يمرُّ بالنقطة D، ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

أُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1، و l_2 متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين،
ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

24 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$، و $(4, 3, 3)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 1, 1)$، و $(5, 1, 0)$.

25 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 3, 1)$، و $(3, 1, -2)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(11, 7, -3)$، و $(9, 6, -2)$.

26 يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$، و $B(5, -2, 1)$. إذا وقعت النقطة C على المستقيم l، وكان $AC = 3CB$، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة.

27 المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$، و $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$، و $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

أُبيِّن أنَّ هذه المستقيمات تُكوِّن مثلثًا، ثم أجد أطوال أضلاعه.

1	$\overrightarrow{AB} = \langle -7,2,7\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 14,-4,-14\rangle$ بما أن: $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ إذن: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,5,-3\rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle -5,-3,10\rangle$ لكن لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$ نظرًا لأن النسبة بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، لذلك $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$ و الشكل $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.
2	$\overrightarrow{AB} = \langle -6,-3,-2\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 6,3,2\rangle$ $\overrightarrow{BC} = \langle -14,-1,23\rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle 14,1,-23\rangle$ $\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ إذن، الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع $\overrightarrow{BC} = (-1)\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$ لأن فيه زوجين من الأضلاع المتوازية.

3	يمكن الحل بالاستناد للتوازي: $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle 3,1,5\rangle + \langle 2,3,1\rangle - \langle 6,5,4\rangle = \langle -1,-1,2\rangle \Rightarrow D(-1,-1,2)$

4	$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT}=2\vec{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=2\vec{b}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=2\vec{b}+\frac{1}{6}(-2\vec{b}+5\vec{a})$ $=\left(2-\frac{2}{6}\right)\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}=\frac{10}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}=\frac{5}{6}(2\vec{b}+\vec{a})\Rightarrow\overrightarrow{OT}=\frac{5}{6}(2\vec{b}+\vec{a})\Rightarrow\overrightarrow{OT}\parallel(2\vec{b}+\vec{a})$
5	$\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}=3(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR})=3\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}\right)=3\vec{a}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=3\vec{a}-\vec{a}+\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$
6	$\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OT}=-\vec{a}-\vec{b}$ $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OS}=-\vec{a}+(2\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}\Rightarrow\overrightarrow{PT}=(-1)\overrightarrow{PS}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة P نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط T, P, S تقع على استقامة واحدة.
7	$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=8\vec{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=8\vec{a}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})=8\vec{a}+\frac{2}{5}(-8\vec{a}+7\vec{c})$ $=\left(8-\frac{16}{5}\right)\vec{a}+\frac{14}{5}\vec{c}=\frac{24}{5}\vec{a}+\frac{14}{5}\vec{c}=\frac{2}{5}(12\vec{a}+7\vec{c})$
8	$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=7\vec{c}+12\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}(12\vec{a}+7\vec{c})=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{OB}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة.
9	وجدنا في السؤال السابق أن: $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ $\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OB}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{OP}{OB}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{OP}{OP+PB}=\frac{2}{5}$ $\Rightarrow 5\,OP=2\,OP+2PB\Rightarrow 3\,OP=2PB\Rightarrow\frac{OP}{PB}=\frac{2}{3}\Rightarrow OP:PB=2:3$

10	$\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+t(4\hat{j}-2\hat{k})=2\hat{i}+(3+4t)\hat{j}-(5+2t)\hat{k}$
11	$\vec{r}=\langle 2,-7,11\rangle+t\langle -4,5,8\rangle=\langle 2-4t,-7+5t,11+8t\rangle$

12	$\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\vec{v}=\langle 6-1,19-(-7)\rangle=\langle 5,26\rangle$ $\Rightarrow\vec{r}=\langle 1,-7\rangle+t\langle 5,26\rangle=\langle 1+5t,-7+26t\rangle$
13	$\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\vec{v}=\langle 7-(-5),13-4,-8-15\rangle=\langle 12,9,-23\rangle$ $\Rightarrow\vec{r}=\langle -5,4,15\rangle+t\langle 12,9,-23\rangle=\langle -5+12t,4+9t,15-23t\rangle$
14	$\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\vec{v}=\langle 13-5,10-22,3-(-8)\rangle=\langle 8,-12,11\rangle$ $\Rightarrow\vec{r}=\langle 5,22,-8\rangle+t\langle 8,-12,11\rangle=\langle 5+8t,22-12t,-8+11t\rangle$
15	$\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\vec{v}=\langle 9-0,4-2,6-(-5)\rangle=\langle 9,2,11\rangle$ $\Rightarrow\vec{r}=\langle 0,2,-5\rangle+t\langle 9,2,11\rangle=\langle 9t,2+2t,-5+11t\rangle$

16 تقع النقطة $(3,7,11)$ على المستقيم l إذا وُجد عدد حقيقي t حيث:

$\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 3,7,11\rangle$

$\Rightarrow -5+3t=3$ و $8-2t=7$ و $4+9t=11$

$\Rightarrow t=\frac{8}{3}$, $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{7}{9}$

لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث، إذن: النقطة $(3,7,11)$ لا تقع على المستقيم l.

17 تقع النقطة $(1,b,c)$ على المستقيم l ، إذن توجد قيمة للوسيط t تحقق المعادلة الآتية:

$\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 1,b,c\rangle$ $\boxed{-5+3t=1} \Rightarrow t=2$

$\boxed{8-2t=b} \Rightarrow 8-4=b \Rightarrow b=4$ $\boxed{4+9t=c} \Rightarrow 4+18=c \Rightarrow c=22$

18 الإحداثي y للنقطة الواقعة في المستوى xz هو 0

نجد قيمة t التي تحقق المعادلة $8-2t=0$، وهي $t=4$

ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz نعوض $t=4$ في معادلته:

$\vec{r} = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle -5+12, 8-8, 4+36\rangle = \langle 7,0,40\rangle$

إذن، إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz هي: $(7,0,40)$

19 يتوازى المستقيمان إذا توازى اتجاهاهما، أي:

$\langle 4,a,-12\rangle \parallel \langle 3,-2,-9\rangle$

$\Rightarrow \langle 4,a,-12\rangle = k\langle 3,-2,-9\rangle , k\in\mathcal{R} \Rightarrow 4=3k \Rightarrow k=\frac{4}{3} \Rightarrow a=-2k=\frac{4}{3}(-2)=-\frac{8}{3}$

20 النقاط $A(7,1,q), V(2,5,-3), U(p,-3,-1)$ على استقامة واحدة:

$\Rightarrow \overrightarrow{AV} \parallel \overrightarrow{VU} \Rightarrow \overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{VU} , k\in\mathcal{R} \Rightarrow \langle -5,4,-3-q\rangle = k\langle p-2,-8,2\rangle$

$4=-8k \Rightarrow k=-\frac{1}{2} \Rightarrow -5=k(p-2) \Rightarrow p=12$

21 $\overrightarrow{VU} = \langle 12-2, -3-5, -1-(-3)\rangle = \langle 10,-8,2\rangle$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{v}=\langle 10,-8,2\rangle$،

ويمكن تبسيطه إلى $\langle 5,-4,1\rangle \Leftarrow$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 2,5,-3\rangle + t\langle 5,4,1\rangle$

22 من السؤال 20 نجد أن: $-3-q=2k \Rightarrow -3-q=-1 \Rightarrow q=-2$

23 لإيجاد متجه موقع النقطة D نعوض $\lambda=2$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle 3+2, -2+2(2), 4-2\rangle = \langle 5,2,2\rangle$

إذن، معادلة المستقيم المطلوب هي: $\overrightarrow{AB} = \langle 3,2,-1\rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle 5,2,2\rangle + t\langle 3,2,-1\rangle$

24

اتجاه $l_1 : \langle 1,-1,-2\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{r} = \langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$

اتجاه $l_2 : \langle -1,0,1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{r} = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$

المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 1,-1,-2\rangle = k\langle -1,0,1\rangle$

يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u يحققان:

$\langle 4+t, 3-t, 3-2t\rangle = \langle 5-u, 1, u\rangle \Rightarrow 3-t=1 \Rightarrow t=2$

$\Rightarrow 4+t = 5-u \Rightarrow t+u=1 \Rightarrow 2+u=1 \Rightarrow u=-1$

$\Rightarrow 3-2t = u \Rightarrow 2t+u=3$

$2(2)+(-1) \stackrel{?}{=} 3 \Rightarrow 3=3$ ✓

تحققت المعادلات الثلاث للقيمتين $t=2, u=-1$ ، فالمستقيمان متقاطعان، ونجد نقطة تقاطعهما

بتعويض $t=2$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle 4,3,3\rangle + 2\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 6,1,-1\rangle$

إذن، نقطة التقاطع هي: $(6,1,-1)$

25

اتجاه $l_1 : \langle 2,2,3\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{r} = \langle 3,1,-2\rangle + t\langle 2,2,3\rangle$

اتجاه $l_2 : \langle 2,1,-1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{r} = \langle 9,6,-2\rangle + u\langle 2,1,-1\rangle$

المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 2,2,3\rangle = k\langle 2,1,-1\rangle$

يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u بحيث:

$\langle 3+2t, 1+2t, -2+3t\rangle = \langle 9+2u, 6+u, -2-u\rangle$

$\Rightarrow 3+2t = 9+2u \Rightarrow t-u=3 \ldots\ldots (1)$

$1+2t = 6+u \Rightarrow 2t-u=5 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$-2+3t = -2-u \Rightarrow 3t+u=0 \ldots\ldots (3)$

$\Rightarrow (2)-(1): t=2 \Rightarrow u=-1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t=2, u=-1$:

$3(2)+(-1) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 5=0$ ×

المعادلة غير متحققة، إذن، المستقيمان غير متقاطعين، و غير متوازيين، فهما متخالفان.

26

$\overrightarrow{AB} = \langle 3,-3,-2\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 2,1,3\rangle + t\langle 3,-3,-2\rangle$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \langle 2+3t, 1-3t, 3-2t\rangle \Rightarrow AC = 3CB \Rightarrow |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$

$\Rightarrow \sqrt{(2+3t-2)^2 + (1-3t-1)^2 + (3-2t-3)^2} = 3\sqrt{(2+3t-5)^2 + (1-3t+2)^2 + (3-2t-1)^2}$

$\Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow (2t-3)(4t-3) = 0$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right)$ أو $t = \frac{3}{4} \Rightarrow C\left(\frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

26

حل آخر: هناك حالتان لمواضع النقاط A, B, C: الأولى: أن تكون C بين A، وB كما في الرسم الآتي:

وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو: متجه موقع A زائد $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$، أي:

$\vec{r} = \langle 2,1,3\rangle + \frac{3}{4}\langle 3,-3,-2\rangle = \langle \frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2}\rangle$

والثانية: أن تكون C خارج القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؛

وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو: متجه موقع A زائد $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$، أي:

$\vec{r} = \langle 2,1,3\rangle + \frac{3}{2}\langle 3,-3,-2\rangle = \langle \frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0\rangle$

إذن، الإحداثيات الممكنة للنقطة C هي: $(\frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0)$ ، و $(\frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2})$

27	نثبت أن كل زوج من أزواج المستقيمات، متقاطعان، ونجد نقاط التقاطع (رؤوس المثلث): متجه موقع أي نقطة على المستقيمات الثلاثة على التوالي تعطى كما يأتي: $\begin{pmatrix}-3+5t\\1-2t\\4-4t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+s\\5+s\\-4-2s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2+2q\\-1-5q\\2q\end{pmatrix}$ أولاً: $\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle$ $-3+5t = 1+s \Rightarrow 5t-s=4 \ldots\ldots(1)$ $1-2t = 5+s \Rightarrow 2t+s=-4 \ldots\ldots(2)$ $4-4t=-4-2s \Rightarrow 2t-s=4 \ldots(3)$ $(1)+(2) \Rightarrow t=0 \quad , s=-4$ المعادلة (3) $\Rightarrow 2t-s=4$ $4=4$ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $A(-3,1,4)$ ثانيًا: $\langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$ $1+s=2+2q \Rightarrow s-2q=1 \ldots\ldots(1)$ $5+s=-1-5q \Rightarrow s+5q=-6 \ldots(2)$ $-4-2s=2q \Rightarrow s+q=-2 \ldots\ldots(3)$ $(2)-(1) \Rightarrow q=-1 \quad , s=-1$ المعادلة (3) $\Rightarrow (-1)+(-1)=-2$ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $B(0,4,-2)$
	ثالثًا: $\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$ $-3+5t=2+2q \Rightarrow 5t-2q=5 \ldots(1)$ $1-2t=-1-5q \Rightarrow 2t-5q=2 \ldots(2)$ $4-4t=2q \Rightarrow 2t+q=2 \ldots\ldots(3)$ $(3)-(2) \Rightarrow t=1 \quad , q=0$ المعادلة (1) $\Rightarrow 5t-2q=5$ $5=5$ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $C(2,-1,0)$ أثبتنا أنّ كل اثنين من هذه المستقيمات متقاطعان ، فهذه المستقيمات تكوّن مثلثًا، أطوال أضلاعه هي: $AB=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}$ $BC=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$ $AC=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}$

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي

18) إذا كانت النقطة $(1, 2a, -1)$ تقع على مستقيم له معادلة متجهة هي: $\vec{r}=\langle -2,9,1\rangle + t\langle 3,-1,-2\rangle$ ، فإنّ قيمة الثابت a هي:

a) -4 b) 4 c) -8 d) 8

b) إذا كان: $l_1: \vec{r}=\langle 10,4,0\rangle + t\langle 6,3,5\rangle$ ، وكان: $l_2: \vec{r}=\langle -2,2,5\rangle + u\langle -9,3,0\rangle$ ، فأثبت أنّ المستقيمين l_1 و l_2 متخالفان. (10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي تكميلي

b) إذا كان: $l_1: \vec{r_1}=\langle -5,2,4\rangle + t\langle 3,-5,-1\rangle$ ، $l_2: \vec{r_2}=\langle 0,-8,-1\rangle + u\langle 12,-15,a+1\rangle$ ، فما قيمة الثابت a التي تجعل المستقيمين l_1 و l_2 متقاطعين؟ (10 علامات)

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

الدرس 3 الضرب القياسي
Scalar Product

الضرب القياسي في الفضاء

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$،

فإنَّ: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

لأيِّ ثلاثة متجهات: $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}$، وأيِّ عدد حقيقي c، فإنَّ:

- $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$
- $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$
- $c(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (c\,\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$

نضرب الإحداثي (x) للمتجه الأول في الإحداثي (x) للمتجه الثاني ، ثم الإحداثي (y) لكل منهما ، ثم (z) ثم نجمع

1) $\vec{v} = \langle 3,-1,2\rangle \;,\; \vec{u} = \langle 1,-2,-4\rangle \Rightarrow$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (3)(1) + (-1)(-2) + (2)(-4) = 3 + 2 - 8 = -3$$

ناتج الضرب القياسي لمتجهين هو عدد، وليس متجهًا.

2) $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} \;,\; \vec{u} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (4)(3) + (-2)(5) + (-1)(-2) = 12 - 10 + 2 = 4$$

3) $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \;,\; \vec{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = ?$

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = (3)(-1) + (3)(0) + (5)(2) = -3 + 0 + 10 = 7$$

4) $\vec{v} = \langle 2a,-3,a\rangle \;,\; \vec{u} = \langle 1,-6,-4\rangle \;,\; \vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \Rightarrow a = ?$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2a)(1) + (-3)(-6) + (a)(-4) = 2a + 18 - 4a = 2$$

$$\Rightarrow -2a + 18 = 2 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

أتحقَّق من فهمي 144 أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\vec{v} = \langle 4,8,-3\rangle, \vec{w} = \langle -3,7,2\rangle$

b) $\vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}, \vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

a	$\vec{v}\cdot\vec{w} = 4(-3) + 8(7) - 3(2) = -12 + 56 - 6 = 38$ أتحقق من فهمي صفحة 144
b	$\vec{m}\cdot\vec{n} = -3(-12) + 5(6) - 1(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$

أتدرّب وأحلّ المسائل أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

2) $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

3) $\vec{u} = \langle -5, 9, 17\rangle, \vec{v} = \langle 4, 6, -2\rangle$

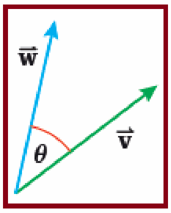
4) $\vec{u} = \langle 1, -4, 12\rangle, \vec{v} = \langle 3, 10, -5\rangle$

1	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5(7) - 4(6) + 3(-2) = 5$	3	$\vec{u}\cdot\vec{v} = -5(4) + 9(6) + 17(-2) = 0$
2	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4(12) - 8(9) - 3(-8) = 0$	4	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1(3) - 4(10) + 12(-5) = -97$

14) حزام ناقل: يُمثِّل المتجه: $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوَّة التي يُولِّدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوَّة F، علمًا بأنَّ القوَّة بالنيوتن N، والمسافة بالمتر m، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوَّة في متجه الإزاحة؛ أيْ: $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$.

14	$\vec{d} = \langle 8,3,6\rangle \ ,\vec{F} = \langle 5,-3,1\rangle$ $W = \vec{F}.\vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37J$

قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء



لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، فإنَّها تُرسَم بحيث يكون للمتجهين نقطة البداية نفسها

ويُمكِن عن طريق الضرب القياسي إيجاد قياس الزاوية θ بين المتجهين غير الصفريين: v، و w في الفضاء، وذلك باستعمال العلاقة: v · w = | v | | w | cos θ

قياس الزاوية بين متجهين

إذا كان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهين غير صفريين، فإنَّهُ يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بينهما θ باســتعمال الصيغة الآتية: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$

الزاويــة بيــن متجهيــن هــي الزاويــة الصغرى المحصــورة بينهما عند رســمهما بَــدْءًا بالنقطة نفسها، أي إنَّ: $0 \le \theta \le \pi$

مثال 1)

$$\vec{v} = \langle 3,-1,2 \rangle \quad , \quad \vec{u} = \langle 1,-2,-4 \rangle \Rightarrow \theta = ?$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\vec{v} \,.\, \vec{u} = (3)(1) + (-1)(-2) + (2)(-4) = 3 + 2 - 8 = -3$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \,.\, \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) = 100.1$$

مثال 2)

أتحقَّق من فهمي 146 أجـد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{\mathbf{u}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشـر درجة:

a) $\vec{\mathbf{u}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{w}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$

b) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, -10, 6\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle -3, 15, -9\rangle$

أتحقق من فهمي صفحة 146

a

$|\vec{u}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = -3(4) + 5(2) - 4(-3) = -12 + 10 + 12 = 10$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\times\sqrt{29}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right) \approx 74.8^\circ$$

b

$|\vec{u}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 2(-3) - 10(15) + 6(-9) = -6 - 150 - 54 = -210$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\times\sqrt{315}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{44100}}\right) = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$$

ملحوظة: $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{w}$ وبالتالي فإن اتجاهيهما متعاكسان، وقياس الزاوية بينهما 180°

مسألة اليوم أُطلِق صـاروخ من النقطـة $(1, 2, 1)$، ثـم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$. وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$. ما قياس الزاوية بين مسـاري الصاروخين؟

اتجاه مسار الصاروخ الأول: $\vec{v} = \langle 8,11,20\rangle$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني: $\vec{u} = \langle 10,4,16\rangle$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$

$|u| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$

مسألة اليوم صفحة 143

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 8(10) + 11(4) + 20(16) = 80 + 44 + 320 = 444$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||u|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65}\times 2\sqrt{93}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9^\circ$$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:

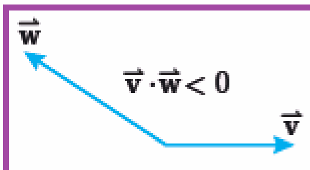
5 $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}\,,\ \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ **6** $\vec{v} = \langle 3, -2, 9\rangle,\ \vec{w} = \langle 5, 3, -4\rangle$

5	$\lvert\vec{m}\rvert = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45}$ $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$ $\vec{m}\cdot\vec{n} = 4(3) - 2(4) + 5(-2) = -6$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert\lvert\vec{n}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{45}\times\sqrt{29}}\right) = 99.6$
6	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{9+4+81} = \sqrt{94}$ $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = 3(5) - 2(3) + 9(-4) = -27$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94}\times\sqrt{50}}\right) \approx 113.2^\circ$

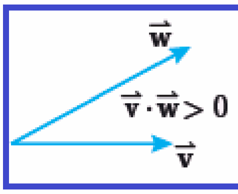
7 إذا كانت $A(3, 5, -4)$، و $B(7, 4, -3)$، و O نقطة الأصل، فأجد $m\angle OAB$ إلى أقرب درجة

7	$\overrightarrow{AO} = \langle -3, -5, 4\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AO}\rvert = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \langle 4, -1, 1\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} \Rightarrow \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -3$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AO}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50}\times\sqrt{18}}\right) = \cos^{-1}(-0.1) \approx 96^\circ$

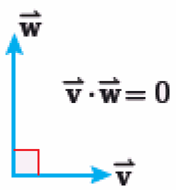
إذا كان : $v \cdot w < 0$
فإنَّ الزاوية بين المتجه
v والمتجه w مُنفرجة



إذا كان: $v \cdot w > 0$
فإنَّ الزاوية بين المتجه
v والمتجه w حادّة

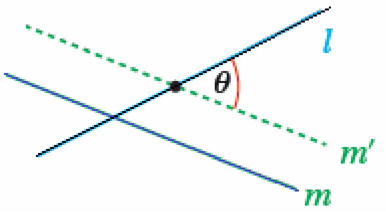


إذا كان: $v \cdot w = 0$
فإنَّ الزاوية بين المتجه
v والمتجه w قائمة
(المتجهان مُتعامِدان)



الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

اتجاه المستقيم في الفضاء يُحدِّده أيُّ متجه يوازيه ؛ لذا يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين في الفضاء عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.



وكذلك يُمكِن إيجاد الزاوية بين المستقيمين في الفضاء حتى لو كانا متخالفين .
فالمستقيم l والمستقيم m في الشكل المجاور متخالفان،
ولكنْ يُمكِن إيجاد الزاوية بينهما عن طريق إيجاد الزاوية بين
اتجاه المستقيم l واتجاه المستقيم ' m الذي يُعَدُّ إزاحة للمستقيم .

إذا تقاطع مستقيمان غير مُتعامِدين، فإنَّه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادَّتان ومُتقابِلتان بالرأس، وزاويتان مُنفرِجتان ومُتقابِلتان بالرأس. ويُمكِن إيجاد قياس الزاوية الحادَّة بينهما بطرح الزاوية المُنفرِجة من 180

مثال 1) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

1) $\vec{r_1} = \langle 3,3,5\rangle + t\,\langle -4,3,-1\rangle \quad ,\vec{r_2} = \langle 6,-3,4\rangle + u\,\langle 2,2,-3\rangle$

نحـــدد اتجـــاه كـــل مســـتقيم

ثـــم نجـــد مقـــدار كـــل متجـــه والضـــرب القياســـي

$$\vec{v} = \langle -4,3,-1\rangle \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

$$\vec{w} = \langle 2,2,-3\rangle \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = (-4)(2)+(3)(2)+(-1)(-3) = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\,.\,\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}\sqrt{17}}\right) = \cos^{-1}(0.467) \approx 62$$

2) $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \vec{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \langle -3,4,2\rangle \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

$$\vec{w} = \langle 2,-3,3\rangle \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$$

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = (-3)(2)+(4)(-3)+(2)(3) = -12$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\,.\,\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-12}{\sqrt{29}\sqrt{22}}\right) = \cos^{-1}(-0.475) \approx 118.4^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - 118.4^\circ = 61.6^\circ$$

أتحقّق من فهمي 147

إذا كانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قياس الزاوية الحادّة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

أتحقق من فهمي صفحة 147 اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v}=\langle 2,-5,-1\rangle$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{u}=\langle 1,0,-3\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{u}=1(2)+0(-5)-3(-1)=5$ $|\vec{u}|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$ $|\vec{v}|=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{30}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right)\approx 73^\circ$$

8 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(-3,5,7)$، و $(2,-1,4)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(1,2,-1)$، و $(6,-5,3)$. أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عُشر درجة.

9 إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\lambda\langle -6,q+5,3\rangle$، والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\mu\langle 5,q-6,-4\rangle$ مُتعامِدين، فما القِيَم المُمكِنة للثابت q؟

8

اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v}=\langle -3-2,5+1,7-4\rangle=\langle -5,6,3\rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w}=\langle 1-6,2+5,-1-3\rangle=\langle -5,7,-4\rangle$

$|\vec{w}|=\sqrt{25+49+16}=\sqrt{90}$ $|\vec{v}|=\sqrt{25+36+9}=\sqrt{70}$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=-5(-5)+6(7)+3(-4)=55$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{6300}}\right)\approx 46.1^\circ$$

9

اتجاه المستقيم الثاني هو $\vec{u}=\langle 5,q-6,-4\rangle$ اتجاه المستقيم الأول هو $\vec{v}=\langle -6,q+5,3\rangle$

المستقيمان متعامدان، فاتجاهها متعامدان، أي أنّ: $\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

$\Rightarrow -6(5)+(q+5)(q-6)+3(-4)=0\Rightarrow q^2-q-72=0$

$\Rightarrow (q-9)(q+8)=0 \Rightarrow q=9$,or $q=-8$

15 إذا كانت النقطة $R(27,-17,-1)$، والنقطة $S(11,-9,11)$ تقعان على المســـتقيم l، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l، حيث $\overline{OQ}$ عمودي على l، فأجد متجه الموقع للنقطة Q.

15 $\overline{RS}=\langle -16,8,12\rangle$ بقسمة $\overline{RS}$ على 4: $\Rightarrow$ $\vec{v}=\langle -4,2,3\rangle$

معادلة المستقيم l هي: $\vec{r}=\langle 11,-9,11\rangle+t\langle -4,2,3\rangle$

النقطة Q هي المسقط العمودي للنقطة O على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها $\overline{OQ}$ هو:

$\overline{OQ}=\langle 11-4t,-9+2t,11+3t\rangle$

بما أن l و $\overline{OQ}$ متعامدان، فإن: $\overline{OQ}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow -4(11-4t)+2(-9+2t)+3(11+3t)=0\Rightarrow t=1\Rightarrow \overline{OQ}=\langle 7,-7,14\rangle$

إذا كانت: $\vec{r}=\langle 5,3,0\rangle+\lambda\langle -1,3,1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت $A(3,-2,1)$، و $B(5,3,0)$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا: **22** أجد قياس الزاوية الحادّة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم l.

23 تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$، حيث: $AB=AC$. أجد إحداثيات النقطة C.

22	اتجاه المستقيم l هو: $\vec{v}=\langle -1,3,1\rangle$ اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB}=\langle 2,5,-1\rangle$ $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=2(-1)+5(3)-1(1)=12 \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30}\times\sqrt{11}}\right)\approx 48.7^\circ$
23	بما أن A,B,C على استقامة واحدة و AB=AC إذن، $A(3,-2,1)$ هي نقطة منتصف $\overline{BC}$ حيث : $C(x,y,z),B(5,3,0)\Rightarrow\left(\frac{x+5}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z+0}{2}\right)=(3,-2,1)\Rightarrow \boxed{\frac{x+5}{2}=3\Rightarrow x=1}$ $\boxed{\frac{y+3}{2}=-2\Rightarrow y=-7}$ $\boxed{\frac{z+0}{2}=1\Rightarrow z=2}$ إذن إحداثيات النقطة C هي: $(1,-7,2)$

إذا كانت $A(3,1,-6)$، و $B(5,-2,0)$، و $C(8,-4,-6)$، فأُجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعًا:

31 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{AC}=n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$، حيث n عدد صحيح. **32** أُبيِّن أنَّ قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$.

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$. **34** إذا كانت $D(6,-1,p)$، وعُلِم أنَّ $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان، فما قيمة p؟

35 أُبيِّن أنَّ الشكل $ABCD$ مَعين، ثم أجد طول ضلعه. إرشاد: المَعين هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة.

31	$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow n=5$
32	$\overrightarrow{CA}=\langle -5,5,0\rangle\Rightarrow\lvert\overrightarrow{CA}\rvert=\sqrt{25+25+0}=5\sqrt{2}$ $\overrightarrow{CB}=\langle -3,2,6\rangle\Rightarrow\lvert\overrightarrow{CB}\rvert=\sqrt{9+4+36}=7$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-5(-3)+5(2)+0(6)=25 \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{25}{35.\sqrt{2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{14}\right)$
33	$\overrightarrow{AC}=\langle 5,-5,0\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ بالمتجه $\vec{v}=\langle 1,-1,0\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{r}=\langle 8,-4,-6\rangle+t\langle 1,-1,0\rangle$
34	$\overrightarrow{BD}=\langle 1,1,p\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ بالمتجه $\vec{v}=\langle 1,1,p\rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{BD}$: $\vec{r}=\langle 5,-2,0\rangle+u\langle 1,1,p\rangle$ يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u,t بحيث تتساوى لهما $\vec{r}$ في المعادلتين: $(8+t,-4-t,-6)=(5+u,-2+u,up)$ $8+t=5+u\Rightarrow t-u=-3\ldots\ldots\ldots(1)$ $-4-t=-2+u\Rightarrow t+u=-2\ldots\ldots(2)$ $up=-6\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $t=-\frac{5}{2}, u=\frac{1}{2}$ ثم بالتعويض في (3) نجد أنّ: $p=-12$ $D(6,-1,-12)$
35	$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\langle 2,-3,6\rangle\\\overrightarrow{DC}=\langle 2,-3,6\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\ldots(1)$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=\langle 3,-2,-6\rangle\\\overrightarrow{AD}=\langle 3,-2,-6\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\ldots(2)$ من (1) و (2) ينتج ان الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. والآن نجد طول $\overline{AB}$، و $\overline{AD}$: $AB=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$ $AD=\lvert\overrightarrow{AD}\rvert=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة $=7$

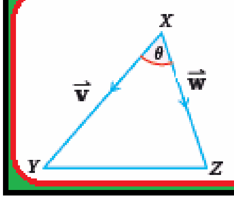
37 تبريـر: إذا كانت $A(3,-2,4)$ و $B(1,-5,9)$، و $C(-4,7,-1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D؟ أُبرِّر إجابتي.

37	بما أن $\angle CDA$ قائمة، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي: $\overrightarrow{AB}=\langle -2,-3,5\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 3,-2,4\rangle+t\langle -2,-3,5\rangle$ بما أنّ النقطة D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ فإن: $\overrightarrow{OD}=\langle 3-2t,-2-3t,4+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD}=\langle 3-2t+4,-2-3t-7,4+5t+1\rangle=\langle 7-2t,-9-3t,5+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}\Longrightarrow\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -2(7-2t)-3(-9-3t)+5(5+5t)\Longrightarrow t=-1$ $\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\langle 3-2(-1),-2-3(-1),4+5(-1)\rangle=\langle 5,1,-1\rangle \Longrightarrow D=(5,1,-1)$

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

إذا علمْتُ إحداثيات رؤوس مثلث في الفضاء، فيُمكِن استعمال الضرب القياسي للمتجهات في إيجاد مساحته.
نحدِّد أوَّلا متجهين يُمثِّلان ضلعين في المثلث، لهما نقطة البداية نفسها،
ثم نجد طولي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتجه،
ثم نجد قياس الزاوية بينهما،

عندئذٍ يُمكِن إيجاد مساحة المثلث عن طريق القانون :



مساحة المثلث XYZ هي:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XY}||\overrightarrow{XZ}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}|\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta$$

مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أيِّ ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما

أتحقَّق من فهمي 149 أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:
$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$.

أتحقق من فهمي صفحة 149

$\overrightarrow{GF} = \langle -1,4,6\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$

$\overrightarrow{GE} = \langle -4,4,-2\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE} = -1(-4)+4(4)+6(-2) = 4+16-12 = 8$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right) \approx 79.4° \Rightarrow A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GF}| \times |\overrightarrow{GE}|\sin\theta \approx \frac{1}{2}\times 6\sqrt{53}\sin 79.4° \approx 21.5$

ويمكن إيجاد المساحة بإيجاد $\sin\theta$ من معرفتنا بقيمة $\cos\theta$ من دون إيجاد الزاوية θ كما يأتي:

$\cos\theta = \frac{4}{3\sqrt{53}} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{53}}\right)^2} = \sqrt{\frac{477-16}{477}} = \frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\times 6\sqrt{53}\times\frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}} = \sqrt{461} \approx 21.5$

12 أجد مساحة المثلث ABC، حيث: $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1\rangle$، و $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4\rangle$.

13 أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$.

12	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{81+1+16} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9(4)+1(9)+4(1) = 49$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}\times\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \times \lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{98}\times\sqrt{98}\sin 60° = \frac{49\sqrt{3}}{2}$
13	$\overrightarrow{AB} = \langle 1,4,-4\rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1(3)+4(-8)-4(1) = -33}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 3,-8,1\rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{-33}{\sqrt{33}\times\sqrt{74}} = -\sqrt{\frac{33}{74}} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{33}{74}} = \sqrt{\frac{41}{74}}$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \times \lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\times\sqrt{74}\sqrt{\frac{41}{74}} = \frac{\sqrt{1353}}{2} \approx 18.4$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط A, B, D هي: $\langle 2, -29, 7\rangle, \langle 4, 17, 14\rangle, \langle -4, 13, 22\rangle$ على الترتيب،

فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

16 أُثبِت أنَّ: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

17 أجد متجه موقع النقطة C إذا كان $ABCD$ مستطيلًا.

18 أجد مساحة المستطيل $ABCD$.

19 أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$.

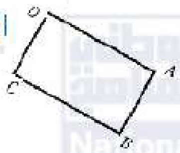
16 $\overrightarrow{OA} = \langle -4,13,22\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 4,17,14\rangle$, $\overrightarrow{OD} = \langle 2,-29,7\rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle 2+4, -29-13, 7-22\rangle = \langle 6,-42,-15\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 4+4, 17-13, 14-22\rangle = \langle 8,4,-8\rangle$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6(8) - 42(4) - 15(-8) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

17 ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة) ، أينما كان موقع O، فإن:



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \langle 4,17,14\rangle + \langle 6,-42,-15\rangle = \langle 10,-25,-1\rangle$

(ويمكن أيضًا إيجاد $\overrightarrow{OC}$ عبر الرأس D من العلاقة: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$)

18 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{36+1764+225} = \sqrt{2025} = 45$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow Area = (45)(12) = 540$

19 مركز المستطيل هو نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر $\overline{BD}$ ولتكن

نقطة منتصفه E، فإن: $E\left(\frac{4+2}{2}, \frac{17-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right) = \left(3,-6,\frac{21}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \left\langle 3,-6,\frac{21}{2}\right\rangle$

تقع النقطة $A(-7,-4,9)$ والنقطة $B(8,5,3)$ على المستقيم l_1، وتقع النقطة $C(6,11,7)$ على المستقيم l_2

الذي معادلته: $\vec{r} = \langle 6,11,7\rangle + t\langle -1,3,2\rangle$:

24 أُبيِّن أنَّ النقطة B تقع على المستقيم l_2.

25 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

26 أجد $m\angle ABC$.

27 أجد مساحة المثلث ABC.

24 متجه موقع أي نقطة على l_2 يكون $\vec{r} = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t\rangle$

حتى تقع B على l_2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle 6-t, 11+3t, 7+2t\rangle = \langle 8,5,3\rangle$

$\Rightarrow \boxed{6-t=8 \Rightarrow t=-2}$ $\boxed{11+3t=5 \Rightarrow t=-2}$ $\boxed{7+2t=3 \Rightarrow t=-2}$

لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه $t=-2$ ،

إذن، B تقع على المستقيم l_2 لأنها تنتج من تعويض $t=-2$ في معادلته.

25 اتجاه l_1 هو: $\overrightarrow{AB} = \langle 15,9,-6\rangle$ ، ويمكن تبسيطه إلى $\vec{u} = \langle 5,3,-2\rangle$

اتجاه l_2 هو: $\vec{v} = \langle -1,3,2\rangle$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0 \Rightarrow$ إذن، المستقيمان l_1، و l_2 متعامدان.

26 بما أن المستقيمين l_1 و l_2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (واقعة على كل منهما) إذن، $m\angle ABC = 90°$

27 المثلث ABC قائم في B.

$AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{342}$

$BC = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

$Area = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{342} \times 2\sqrt{14} = \sqrt{4788} \approx 69.2$

تحدٍّ: إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-8\\16\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-3\\-6\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-10\\31\\-26\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1، حيث: $t=3$، والنقطة R تقع على المستقيم l_2، حيث: $u>3$، و $PQ=PR$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

38 أجد إحداثيات كلٍّ من النقطة P، والنقطة Q.

39 أجد إحداثيات النقطة R.

40 إذا كان $m\angle RPQ=\theta$، فأُبيِّن أنَّ: $\cos\theta=-\frac{3}{94}$.

41 أُبيِّن أنَّ مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة.

38 P هي نقطة تقاطع المستقيمين l_1، و l_2، ونجدها بمساواة $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ومساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t\rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$$

$$\Rightarrow -8+7t=-10+3u \Rightarrow 7t-3u=-2 \ldots\ldots(1)$$

$$16-3t=31-6u \Rightarrow -3t+6u=15 \ldots\ldots(2)$$

$$1-6t=-26+7u \Rightarrow 7u+6t=27 \ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow t=1, u=3$$

ولإيجاد P نعوض $t=1$ في l_1: $\vec{\mathbf{r}}=\langle -8+7, 16-3, 1-6\rangle=\langle -1,13,-5\rangle \Rightarrow P(-1,13,-5)$

ونجد Q بتعويض $t=3$ في l_1: $\vec{\mathbf{r}}=\langle -8+21, 16-9, 1-18\rangle \Rightarrow Q(13,7,-17)$

39 النقطة R تقع على المستقيم l_2 ، فمتجه موقعها هو: $\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$

$$\overrightarrow{PQ}=\langle 13,7,-17\rangle-\langle -1,13,-5\rangle=\langle 14,-6,-12\rangle$$

$$\overrightarrow{PR}=\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle-\langle -1,13,-5\rangle=\langle -9+3u, 18-6u, -21+7u\rangle$$

$$PR=PQ \Rightarrow |\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{PQ}|$$

$$\Rightarrow (-9+3u)^2+(18-6u)^2+(-21+7u)^2=14^2+(-6)^2+(-12)^2$$

$$94u^2-564u+470=0 \Rightarrow u^2-6u+5=0 \Rightarrow u=1 \text{ أو } u=5$$

لكن $u>3$ ، فإن $u=5$، وتكون $R(5,1,9)$

40 الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1، و l_2 وهي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$

حيث $P(-1,13,-5), Q(13,7,-17), R(5,1,9)$

$$\overrightarrow{PQ}=\langle 14,-6,-12\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{14^2+(-6)^2+(-12)^2}=\sqrt{376}$$

$$\overrightarrow{PR}=\langle 6,-12,14\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{PR}|=\sqrt{6^2+(-12)^2+(-14)^2}=\sqrt{376}$$

$$m\angle RPQ=\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\frac{14\times 6+(-6)(-12)+(-12)\times 14}{\sqrt{376}\times\sqrt{376}}=\frac{-12}{376}=\frac{-3}{94}$$

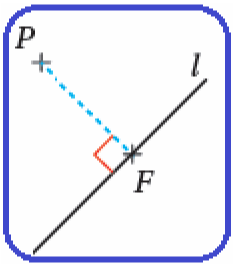
41 مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية بينهما.

$$Area(\Delta PQR)=\frac{1}{2}PQ\times PR\times\sin\theta \Rightarrow Area(\Delta PQR)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}|\times|\overrightarrow{PR}|\sin\theta$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{-3}{94}\right)^2}=\frac{\sqrt{8827}}{94}$$

$$Area(\Delta PQR)=\frac{1}{2}\sqrt{376}\times\sqrt{376}\times\frac{\sqrt{8827}}{94}=\frac{1}{2}\times 376\times\frac{\sqrt{8827}}{94}=2\sqrt{8827}$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



يُبيِّن الشكل المجاور المستقيم L ونقطة لا تقع عليه هي P

عند رسم مستقيم عمودي على L ، يمرُّ بالنقطة P، فإنَّ نقطة تقاطع هذا المستقيم مع L تُسمّى مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L وهي النقطة F في الشكل المجاور.

يُمثِّل طول العمود PF البُعْد بين النقطة P والمستقيم L.

ويُمكِن استعمال حقيقة أنَّ ناتج الضرب القياسي للمتجهين المُتعامِدين يساوي صفرًا؛ لتحديد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L (أي إحداثيات النقطة F)

> البُعْد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، التي تُمثِّل أقصر مسـافة بين النقطة والمستقيم.

يُمكِن استعمال فكرة مسقط العمود

لإيجاد أقصر مسافة في الفضاء بين أيِّ مستقيم عُلِمت معادلته المتجهة ونقطة لا تقع عليه عُلِمت إحداثياتها.

أتحقَّق من فهمي 151 إذا كانت: $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $P\left(2, 0, \frac{10}{3}\right)$ غير واقعة على المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُحدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l.

b) أجد البُعْد بين النقطة P والمستقيم l.

أتحقق من فهمي صفحة 151

a اتجاه المستقيم المعطى l هو: $\vec{v} = \langle 5, 7, -3 \rangle$

افرض أن مسقط النقطة P على l هو النقطة F، فيكون متجه موقعها هو:

$\overrightarrow{OF} = (16+5t)\hat{i} + (11+7t)\hat{j} - (3+3t)\hat{k}$

ويكون العمود من P على l هو $\overrightarrow{PF}$ حيث

$\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = (16+5t)\hat{i} + (11+7t)\hat{j} - (3+3t)\hat{k} - (2\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{k})$

$\overrightarrow{PF} = (14+5t)\hat{i} + (11+7t)\hat{j} - \left(\frac{19}{3} + 3t\right)\hat{k}$

ولأن المتجهين $\overrightarrow{PF}$، و $\vec{v}$ متعامدان فإن: $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow 5(14+5t) + 7(11+7t) - 3\left(-\frac{19}{3} - 3t\right) = 0 \Rightarrow t = -2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OF} = (16+5(-2))\hat{i} + (11+7(-2))\hat{j} - (3+3(-2))\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

إذن، مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة F(6, -3, 3)

b $PF = \sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{226}}{3}$

لإيجاد المسافة بين النقطة P والمستقيم L الذي لا يمرُّ بها، أتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد النقطة F التي تُمثِّل مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L

الخطوة 2: أجد طول المتجه PF

إذا كانت: $\vec{r}=2\hat{j}-3\hat{k}+t(-\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $P(-2,26,5)$ غير واقعة على المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أُحدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l.

11 أجد البُعد بين النقطة P والمستقيم l.

10	لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم l، فإن متجه موقعها هو: $\overrightarrow{OA}=\langle -t,2+2t,-3+5t\rangle$ وإذا كان $\overrightarrow{AP}$ هو العمود من P على المستقيم l، فإن: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AP}=\langle -2+t,26-(2+2t),5-(-3+5t)\rangle=\langle -2+t,24-2t,8-5t\rangle$ بما أن $\overrightarrow{AP}$ يعامد l إذن: $\overrightarrow{AP}\cdot\langle -1,2,5\rangle=0$ $\Rightarrow -1(-2+t)+2(24-2t)+5(8-5t)=0$ إذن، مسقط العمود من P على المستقيم l هو $A(-3,8,12)$ $\Rightarrow t=3\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\langle -3,8,12\rangle$
11	$AP=\sqrt{(-2+3)^2+(26-8)^2+(5-12)^2}=\sqrt{374}\approx 19.34$

تُمثِّل: $\vec{r}=\langle -5,7,1\rangle+t\langle 3,1,4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وتُمثِّل: $\vec{r}=\langle 2,8,-1\rangle+u\langle 2,0,-3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، وتُمثِّل: $\vec{r}=\langle 3,19,10\rangle+v\langle -1,3,1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3.

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3، حيث: $\overline{TF}\perp l_3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

20 أجد إحداثيات النقطة F.

21 أجد البُعد بين النقطة T والمستقيم l_3.

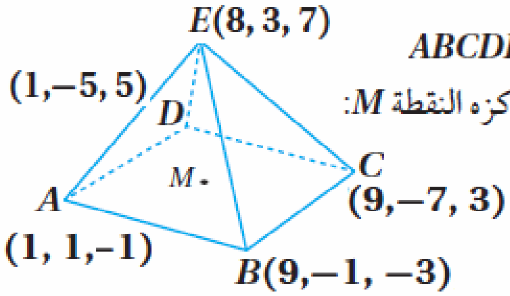
20	لإيجاد نقطة تقاطع l_1 و l_2 نساوي $\vec{r}$ في معادلتيهما ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle -5+3t,7+t,1+4t\rangle=\langle 2+2u,8,-1-3u\rangle$ $-5+3t=2+2u\Rightarrow 3t-2u=7\ldots\ldots\ldots(1)$ $\boxed{7+t=8\Rightarrow t=1}$ $1+4t=-1-3u\Rightarrow 4t+3u=-2\ldots\ldots(2)$ بتعويض $t=1$ في المعادلتين (1) و(2) نجد أن $u=-2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=1$ في معادلة l_1 $\vec{r}=\langle -5+3(1),7+1,1+4(1)\rangle=\langle -2,8,5\rangle$ إذن نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي $T(-2,8,5)$ F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن $\overrightarrow{OF}=\langle 3-v,19+3v,10+v\rangle$ $\overrightarrow{TF}=\langle 3-v-(-2),19+3v-8,10+v-5\rangle=\langle 5-v,11+3v,v+5\rangle$ اتجاه l_3 هو $\vec{w}=\langle -1,3,1\rangle$ لكن $\overrightarrow{TF}$ يعامد l_3 إذن، $\overrightarrow{TF}\cdot\vec{w}=0$ $\Rightarrow -1(5-v)+3(11+3v)+1(v+5)=0\Rightarrow v=-3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF}=\langle 3-(-3),19+3(-3),10-3\rangle\Rightarrow F(6,10,7)$
21	$\overrightarrow{TF}=\langle 8,2,2\rangle\Rightarrow \lvert\overrightarrow{TF}\rvert=\sqrt{64+4+4}=6\sqrt{2}$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

يُمكِن استعمال المتجهات لتحديد قياسات بعض الزوايا والأطوال لأضلاع تقع في مستويات مائلة ضمن أشكال ثلاثية البُعد، عُلِمت إحداثيات رؤوسها.

يشير الرمز $m\angle AEC$ إلى قياس الزاوية AEC، والحرف m هو اختصار للكلمة (measure) التي تعني القياس.

يظهر في الشكل المجاور الهرم $ABCDE$ الذي قاعدته المربع $ABCD$، ومركزه النقطة M:



حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه

أتحقَّق من فهمي 154

a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المُبيَّن في المثال السابق.

b) أجد حجم الهرم.

أتحقق من فهمي صفحة 154

a
$$\overrightarrow{DE} = \langle 7,8,2\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}$$
$$\overrightarrow{DB} = \langle 8,4,-8\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$
$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB} = 7(8)+8(4)+2(-8) = 72 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) \approx 56.3^\circ$$

b
$$AB = \sqrt{8^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{72}$$
$$EM = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-6)^2} = 9$$
$$V = \frac{1}{3}(\sqrt{72})^2(9) = 72(3) = 216$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM، حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة المربعة:
$$M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (5,-3,1)$$

$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي: $A(4,3,-1), B(-4,5,2), C(6,-1,0), D(10,11,19)$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28) أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a\sqrt{6}$.

29) أُثبِت أنَّ: $m\angle AED = 90^\circ$، حيث $E(1,2,1)$.

30) إذا علمْتُ أنَّ النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

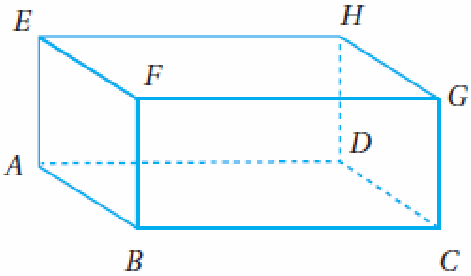
28
$$\overrightarrow{AB} = \langle -8,2,3\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 2,-4,1\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -8(2)+2(-4)+3(1) = -21$$
ليكن θ قياس الزاوية BAC
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-21}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \Rightarrow Area = \frac{1}{2}\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$$

29
$$\overrightarrow{EA} = \langle 3,1,-2\rangle,\ \overrightarrow{ED} = \langle 9,9,18\rangle$$
$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED} = 3(9)+1(9)-2(18) = 0$$
إذن، $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ وقياس الزاوية AED هو 90°

30
$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{81+81+324} = 9\sqrt{6}$$
و يمثل ارتفاع الهرم h ، أما مساحة قاعدته فهي $A = 7\sqrt{6}$ وذلك من السؤال 28، إذن، حجم الهرم هو:
$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\times 7\sqrt{6}\times 9\sqrt{6} = 126$$
إذن، حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.

تحدٍّ: رُسِم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overrightarrow{AB}=(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+4\hat{k}),\ \overrightarrow{AD}=(-10\hat{\imath}+10\hat{\jmath}-5\hat{k}),\ \overrightarrow{AE}=(-6\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+6\hat{k})$$



42 إذا كانت $B(8, 3, -2)$، فأجد إحداثيات النقطة H.

43 أجد قياس الزاوية GAC مُقرَّبًا إلى أقرب عُشر درجة.

44 إذا كان X نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$، فأجد جيب تمام الزاوية DXC.

42

لتكن $H(x,y,z)$

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH} \qquad (\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE})$

$\langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -2,-4,-4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle + \langle -6,-3,6\rangle$

$\Rightarrow \langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -18,3,-3\rangle \Rightarrow x-8=-18 \Rightarrow x=-10$

$\boxed{y-3=3 \Rightarrow y=6}$ $\boxed{z+2=-3 \Rightarrow z=-5}$ $\Rightarrow H(-10,6,-5)$

ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H...

43

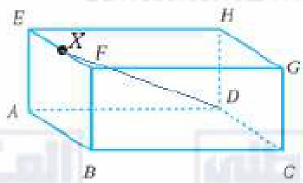
يمكن بالطرق الواردة في حل السؤال السابق إيجاد إحداثيات كل من C, G وإكمال الحل لحساب قياس الزاوية المطلوبة تقليديًا، هنا سنستفيد من حقيقة أن GC و AC متعامدان (أي أن ΔACG قائم في C)

ليكن $m\angle GAC=\theta$

$$\tan\theta=\frac{|\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|}=\frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle 2,4,4\rangle+\langle -10,10,-5\rangle|}=\frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle -8,14,-1\rangle|}$$

$$=\frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{261}}=\frac{9}{3\sqrt{29}}=\frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}}\approx 29.1^\circ$$

44



$$\overrightarrow{XD}=\overrightarrow{XE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$$

$=\langle -1,-2,-2\rangle-\langle -6,-3,6\rangle+\langle -10,10,-5\rangle=\langle -5,11,-13\rangle$

$\Rightarrow |\overrightarrow{XD}|=\sqrt{25+121+169}=\sqrt{315}$

$$\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$$

$=\langle 1,2,2\rangle-\langle -6,-3,6\rangle+\langle -10,10,-5\rangle=\langle -3,15,-9\rangle$

$\Rightarrow |\overrightarrow{XD}|=\sqrt{9+225+81}=\sqrt{315}$

$\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}=-5(-3)+11(15)-13(-9)=297 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}}{|\overrightarrow{XD}||\overrightarrow{XC}|}=\dfrac{297}{315}=\dfrac{33}{35}$

من كتاب التمارين

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\vec{u} = \langle 4, 5, -3\rangle, \vec{v} = \langle -2, 3, -7\rangle$

2 $\vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

3 $\vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k}, \vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$

4 إذا كان المتجه: $\vec{v} = \langle 6, 5, a\rangle$ يُعامِد المتجه: $\vec{w} = \langle 15, 24, -7\rangle$، فما قيمة a؟

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:

5 $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

6 $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

7 إذا كان المتجه: $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ والمتجه: $\vec{b} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ مُتعامِدين، فما قيمة (قِيَم) λ؟

8 إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

9 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(3, -5, 9)$، و $(-2, 11, 6)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 3, 8)$، و $(-5, 9, 12)$.
أجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

10 إذا كان قياس الزاوية بين المتجه: $\langle v, 0, -1\rangle$ والمتجه: $\langle 2, -1, 0\rangle$ هو $60°$، فما قيمة v؟

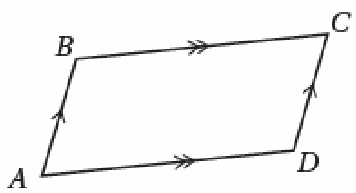
11 إذا كان: $A(3, -2, 6)$، وكان: $B(-5, 4, 1)$، فأجد مساحة المثلث AOB، حيث O نقطة الأصل.

إذا مَرَّ المستقيم l بالنقطتين: $E(-3, 7, 12)$، و $F(1, -3, 5)$، وكانت النقطة $G(0, -6, 4)$ لا تقع على المستقيم l، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l.

13 البُعْد بين النقطة G والمستقيم l.

14 يُبيِّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$، حيث:
$\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}$، و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$.
أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}8\\2\\-12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-4\\10\\p\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2،

والنقطة $A(9,-1,-14)$ تقع على المستقيم l_1، والنقطة C تقع على المستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

15 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدين، فأجد قيمة q.

16 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فأجد قيمة p، وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

17 رُسِمت دائرة مركزها النقطة C، فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A، وB. أجد متجه الموقع للنقطة B.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-19\\14\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\a\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمســـتقيم l، والنقطة $T(-2,5,8)$ تقع خارج المســـتقيم l،

والنقطة F تقع على المستقيم l، حيث $\overrightarrow{TF}$ يُعامِد المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

18 أُبيِّن أنَّ قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هي: $t=\frac{13a+44}{a^2+10}$.

19 إذا كانت $t=5$ في الفرع السابق، فأجد متجهي الموقع المُمكِنين للنقطة F.

إذا كانـــت: $A(3,-2,4),\ B(1,-5,6),\ C(-4,5,-1)$ والمســـتقيم l يمـــرُّ بالنقطـــة A، ولـــه المعادلـــة المتجهـــة:

$\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}7\\-7\\5\end{pmatrix}$:

20 أُبيِّن أنَّ النقطة C تقع على المستقيم l.

21 أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B.

22 إذا وقعت النقطة D على المســـتقيم المـــارِّ بالنقطة A والنقطـــة B، بحيث كانت الزاوية CDA قائمـــة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمســـتقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-9\\21\\-4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمســـتقيم l_2،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

24 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$.

1	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4(-2) + 5(3) - 3(-7) = 28$
2	$\vec{e}\cdot\vec{f} = -13(-2) + 8(3) - 5(10) = 0$
3	$\vec{m}\cdot\vec{n} = 7(2) + 4(-5) - 9(10) = -96$
4	$\vec{w}\cdot\vec{v} = 15(6) + 24(5) - 7(a) = 0 \Rightarrow a = 30$

5

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5(2) + 2(-1) + 3(-2) = 2$

$|\vec{a}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 83.8°$

6

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(-1)+1(-1)-1(4) = -6$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 144.7°$

7

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda(\lambda) + 4(-3) + \lambda(4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+6)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \ , \ \lambda = 2$

8

اتجاه l_1 : $\vec{v} = \langle 2,-6,3\rangle$

اتجاه l_2 : $\vec{w} = \langle 3,-4,12\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 2(3) - 6(-4) + 3(12) = 66$

$|\vec{v}| = \sqrt{4+36+9} = 7$

$|\vec{w}| = \sqrt{9+16+144} = 13$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{7(13)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{91}\right) \approx 43.5°$

9

$\vec{v} = \langle 3-(-2), -5-11, 9-6\rangle = \langle 5,-16,3\rangle$

$\vec{w} = \langle 4-(-5), 3-9, 8-12\rangle = \langle 9,-6,-4\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 5(9) - 16(-6) + 3(-4) = 129$

$|\vec{v}| = \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290}$

$|\vec{w}| = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \approx 48.9°$

10

$\vec{m} = \langle v,0,-1\rangle$, $\vec{n} = \langle 2,-1,0\rangle$

$|\vec{m}| = \sqrt{v^2+1}$

$|\vec{n}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

$\vec{m}\cdot\vec{n} = 2v + 0 + 0 = 2v$

$\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|\cos 60°$

$\Rightarrow 2v = \sqrt{5(v^2+1)} \times \frac{1}{2} \Rightarrow 16v^2 = 5v^2 + 5 \Rightarrow v^2 = \frac{5}{11} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}}$

لأن $\left(-\sqrt{\frac{5}{11}}\right)$ لا يجعل قياس الزاوية بين المتجهين $60°$

11

$\overline{OA} = \langle 3,-2,6\rangle$, $\overline{OB} = \langle -5,4,1\rangle$

$\left|\overline{OA}\right| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$

$m\angle AOB = \theta$

$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = -5(3) + 4(-2) + 1(6) = -17$

$\cos\theta = \frac{-17}{7\sqrt{42}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}}$

$Area = \frac{1}{2}(OA)(OB)\sin\theta = \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42})\frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}} = \frac{1}{2}\sqrt{1776} \approx 21.07$

12 معادلة المستقيم l هي : $\overleftrightarrow{EF}=\langle 4,-10,-7\rangle \Rightarrow \vec{r}=\langle 1,-3,5\rangle+t\langle 4,-10,-7\rangle$

إذا كانت M هي مسقط العمود من G على المستقيم l، فإنّ: $\Rightarrow \overrightarrow{OM}=(1+4t,-3-10t,5-7t)$

ويكون: $\overrightarrow{MG}=(-1-4t,-3+10t,-1+7t)$

$$\overleftrightarrow{EF}\perp \overleftrightarrow{MG} \Longrightarrow \langle 4,-10,-7\rangle \perp \langle -1-4t,-3+10t,-1+7t\rangle$$

$$\Rightarrow 4(-1-4t)-10(-3+10t)-7(-1+7t)=0$$

$$\Rightarrow -4-16t+30-100t+7-49t=0 \Rightarrow t=\frac{33}{165}=0.2 \Rightarrow M(1.8,-5,3.6)$$

13 $GM=\sqrt{(1.8-0)^2+(-5+6)^2+(3.6-4)^2}=\sqrt{4.4}\approx 2.1$

14 مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$=مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر $\overline{AC}$ يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6(15)-2(8)+11(5)=129$$

$$\boxed{\begin{array}{l}|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36+4+121}=\sqrt{161}\\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{225+64+25}=\sqrt{314}\end{array}}$$

$$m\measuredangle BAC=\theta=\cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right)\approx 55^\circ$$

$$Area(ABCD)=2\times\frac{1}{2}(AC)(AB)\sin\theta=\sqrt{161}\sqrt{314}\sin 55^\circ\approx 184.2$$

15 $$\begin{pmatrix} q\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} q\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=0\Rightarrow -q+6-2\quad 0\Rightarrow q=4$$

16 $\langle -4+4u,10+2u,p-u\rangle=\langle 8-t,2+3t,-12+2t\rangle$

$-4+4u=8-t\Rightarrow 4u+t=12\ \dots\dots\dots(1)$

$10+2u=2+3t\Rightarrow 2u-3t=-8\ \dots\dots(2)$

$p-u=-12+2t\Rightarrow p=2t+u-12\ ..(3)$

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\times 3+(2):\\ 14u=28\Rightarrow u=2\\ ,t=4\end{array}}$$

وبما أن المستقيمين متقاطعان، تتحقق المعادلة (3) أيضا عند $t=4$, $u=2$ ويكون: $p=-2$

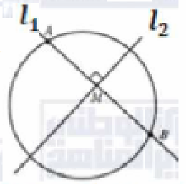
وتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي $M(4,14,-4)$

17 العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه (نظرية)، والنقطة M (نقطة تقاطع l_1، و l_2) هي نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}$

$=\langle 9,-1,-14\rangle+2(\langle 4,14,-4\rangle-\langle 9,-1,-14\rangle)$

$=\langle 9,-1,-14\rangle+2\langle -5,15,10\rangle=\langle -1,29,6\rangle$



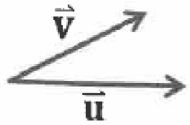
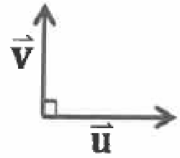
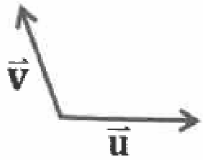
18	$\overrightarrow{OF}=\langle -19+t, 14-3t, -5+at\rangle$ $\quad \overrightarrow{TF}=\langle -19+t+2, 14-3t-5, -5+at-8\rangle = \langle -17+t, 9-3t, -13+at\rangle$ $\overrightarrow{TF}\perp l \Rightarrow \langle -17+t, 9-3t, -13+ta\rangle\cdot\langle 1,-3,a\rangle = 0$ $\Rightarrow -17+t-3(9-3t)+a(-13+at)=0 \Rightarrow -17+t-27+9t-13a+a^2t=0$ $\Rightarrow (10+a^2)t = 13a+44 \Rightarrow t=\frac{13a+44}{10+a^2}$
19	$\frac{13a+44}{10+a^2}=5 \Rightarrow 5a^2+50=13a+44$ $\Rightarrow 5a^2-13a+6=0 \Rightarrow (5a-3)(a-2)=0 \Rightarrow a=\frac{3}{5}, a=2$ $\overrightarrow{OF}=\langle -19+t, 14-3t, -5+at\rangle$ $a=2 \Rightarrow \overrightarrow{OF}=\langle -19+5, 14-15, -5+10\rangle=\langle -14,-1,5\rangle$ $a=\frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF}=\langle -19+5, 14-15, -5+3\rangle=\langle -14,-1,-2\rangle$
20	متجه الموقع لأي نقطة على المستقيم l هو: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u\rangle$ تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u\rangle = \langle -4,5,-1\rangle$ $\Rightarrow 3+7u=-4 \quad , \quad -2-7u=5 \quad , \quad 4+5u=-1$ $\Rightarrow u=-1 \quad , \quad u=-1 \quad , \quad u=-1$ إذن، C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u=-1$ في معادلته المتجهة.
21	$\overrightarrow{AB}=\langle 1-3, -5-(-2), 6-4\rangle=\langle -2,-3,2\rangle$ $\Rightarrow \vec{r}=\langle 3,-2,4\rangle+t\langle -2,-3,2\rangle$ هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب.
22	$\overrightarrow{OD}=\langle 3-2t, -2-3t, 4+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD}=\langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1\rangle=\langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle$ $\angle CDA$ قائمة، فإن $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AD}$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{CD}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overrightarrow{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD} \Rightarrow \langle -2,-3,2\rangle\cdot\langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle=0$ $\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t)=0 \Rightarrow -14+4t+21+9t+10+4t=0$ $\Rightarrow 17t=-17 \Rightarrow t=-1$ $\overrightarrow{OD}=\langle 3+2, -2+3, 4-2\rangle=\langle 5,1,2\rangle \Rightarrow D(5,1,2)$
23	اتجاه المستقيم الأول l_1: $\langle 2,-1,-2\rangle$ اتجاه المستقيم الثاني l_2: $\langle 1,-2,2\rangle$ المستقيمان متعامدان لأن: $\langle 2,-1,-2\rangle\cdot\langle 1,-2,2\rangle = 2(1)-1(-2)-2(2)=0$
24	يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t, u تحقق: $\langle 8+2t, 2-t, -2t\rangle=\langle -9+u, 21-2u, -4+2u\rangle$ $8+2t=-9+u \Rightarrow 2t-u=-17 \ldots\ldots(1)$ $2-t=21-2u \Rightarrow 2u-t=19 \ldots\ldots(2)$ $-2t=-4+2u \Rightarrow 2t+2u=4 \ldots\ldots(3)$ $(3)-(1): 3u=21$ $\Rightarrow u=7, \quad t=-5$ نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم: $2(7)-(-5)=19$ ✓ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونجد نقطة التقاطع بتعويض $u=7$ في معادلة l_2: $\vec{r}=\langle -9+7, 21-14, -4+14\rangle=\langle -2,7,10\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $E(-2,7,10)$

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي

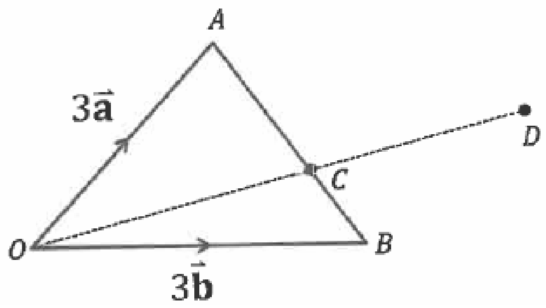
19) إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 13, -3, 6\rangle$ ، $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3c, 2, -12\rangle$ متعامدين، فإنّ قيمة الثابت c هي:

a) 2 b) -2 c) $\frac{13}{3}$ d) $\frac{32}{3}$ **a**

20) إذا كان: $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ متجهين غير صفريين، فأيّ الأشكال الآتية يكون فيها $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} > 0$ ؟ **a**

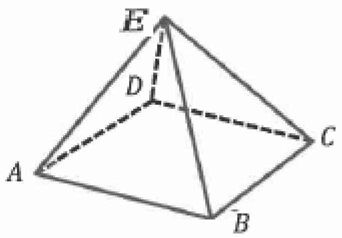
a)  b)  c)  d) 

a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يظهر فيه المثلث OAB، والنقطتان: C، و D . إذا كان: $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{\mathbf{b}}$ وكانت النقطة C تقع $\overline{AB}$ ، حيث: $AC = m\, CB$ وكان $\overrightarrow{BD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ ، فجد قيمة الثابت m التي تجعل النقاط O, C, D تقع على استقامة احدة. (12 علامة)



b) إذا كان: $l_1: \vec{\mathbf{r}} = \langle 10, 4, 0\rangle + t\langle 6, 3, 5\rangle$ ، وكان: $l_2: \vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 2, 5\rangle + u\langle -9, 3, 0\rangle$ ، فأثبت أنّ المستقيمين l_1 و l_2 متخالفان. (10 علامات)

a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يظهر فيه الهرم الرباعي $ABCDE$، إذا كان: $\overrightarrow{ED} = \langle -7, -8, -2\rangle, \overrightarrow{EB} = \langle 1, -4, -10\rangle$ ، فجد $m\angle BED$ إلى أقرب عُشر درجة. (6 علامات)



من أسئلة الوزارة 2023 / صناعي

25- إذا كان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 3, -1, 3\rangle$, $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2, 1, 1\rangle$ ، فإنّ قيمة $\vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{w}}$ هي: **b**

a) 10 b) -4 c) -10 d) 4

c) إذا كانت: $C(-4, 1, 3)$, $B(3, 0, 2)$, $A(1, 4, -5)$ ثلاث نقاط في الفضاء. فجد كلًا ممّا يأتي:

1) الصورة الإحداثية للمتجهين: $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ 2) ناتج $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

3) قياس الزاوية بين المتجهين: $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ بالدرجات إلى أقرب عدد صحيح. (14 علامة)

من أسئلة الوزارة 2023 / علمي تكميلي

18) إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -1 , 5 , 2\rangle + t\langle 4 , 0 , 5\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، و$P(5,5,7)$ نقطة غير واقعة عليه، وكانت النقطة F هي مسقط النقطة P على المستقيم l ، فإنّ $\overrightarrow{PF}$ ، هو: c

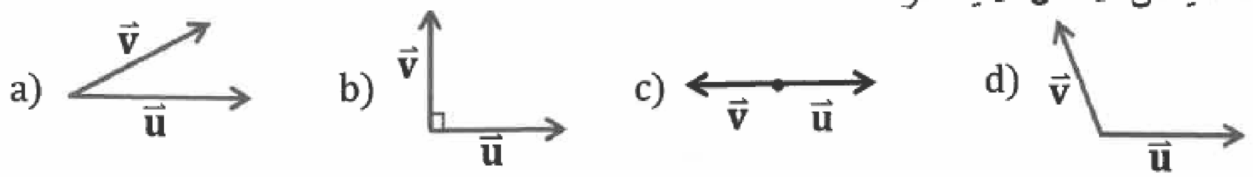
a) $\langle 4+4t, 10, 9+5t\rangle$ c) $\langle -6+4t, 0, -5+5t\rangle$

b) $\langle 6+4t, 0, 5+5t\rangle$ d) $\langle 5+4t, 5, 7+5t\rangle$

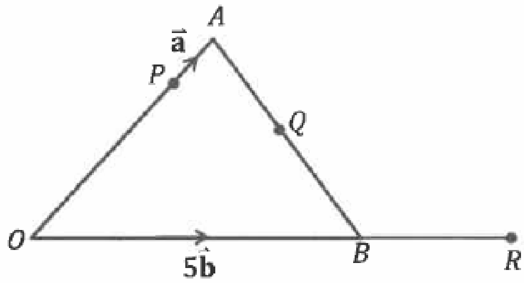
19) إذا كان: $\vec{\mathbf{c}} = \langle 1,-2,6\rangle$ ، $A(2,1,4)$ ، $B(-3,0,4)$ ، وكان $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ ، فإنّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{c}}$ يساوي: a

a) -3 b) 3 c) -7 d) 7

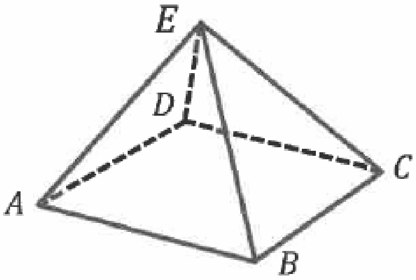
20) إذا كان: $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ متجهين غير صفريين، وكان $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ ، فإنّ الشكل الأنسب للتعبير عن المتجهين $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ هندسيًا من الأشكال الآتية، هو: b



a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يظهر فيه المثلث OAB ، إذا كانت النقطة P تقع على $\overline{OA}$ ، حيث: $AP:PO = 1:4$ ، والنقطة Q تقع على $\overline{AB}$ حيث: $AQ:QB = 2:3$ ، والنقطة R تقع على امتداد OB حيث: $OB:BR = 5:3$ ، وكان $\overrightarrow{PA} = \vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = 5\vec{\mathbf{b}}$ ، فأثبت أنّ النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة. (12 علامة)



a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يظهر فيه الهرم $ABCDE$، إذا علمت أنّ إحداثيات رؤوس قاعدة هذا الهرم هي: A, B, C, D ، وأنّ: $\overrightarrow{EA} = < -7 , 2 , 8 > , \overrightarrow{EC} = < 1 , -10 , -4 >$ ، فجد $m\angle AEC$ مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر درجة. (6 علامات)



من أسئلة الوزارة 2023 / صناعي تكميلي

25- إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 4 , 2 , -3\rangle$ ، $\vec{\mathbf{u}} = \langle -2 , 8 , 6 \rangle$ ، فإنّ قيمة $\vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}}$ هي: a

a) -10 b) 10 c) -16 d) 16

c) إذا كانت: $A(2 , 5 , -6)$ ، $B(2 , 0 , 3)$ ، $C(-3 , 1 , 4)$ ثلاث نقاط في الفضاء، فجد كلًا مما يأتي:

1) الصورة الإحداثية للمتجهين: $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ 2) ناتج الضرب القياسي: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) قياس الزاوية بين المتجهين: $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ بالدرجات إلى أقرب عدد صحيح. (14 علامة)

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلّ ممّا يأتي:

1 إذا كانت $A(-3, 4, 9), B(5, -2, 3)$، فإنّ الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -2, 2, 12 \rangle$ b) $\langle 8, -6, -6 \rangle$

c) $\langle -1, 1, 6 \rangle$ d) $\langle -8, 6, -6 \rangle$

2 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, c, -5 \rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}| = 3\sqrt{5}$، فإنّ c تساوي:

a) 4 b) $-3, 5$

c) 15 d) $-4, 4$

3 إذا كان PQR مستقيمًا، حيث: $PQ : QR = 3 : 1$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{a}}$، فإنّ التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ هو:

a) $\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ b) $\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ d) $-\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, -2, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 3 \rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$

c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

5 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -2, 5 \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3, 4, 6 \rangle$، فإنّ $3\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$ يساوي:

a) $\langle 0, 2, 3 \rangle$ b) $\langle 12, -14, 3 \rangle$

c) $\langle 13, -16, -8 \rangle$ d) $\langle -13, 16, 8 \rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ هو $60°$، وكان: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 30$، وكان: $|\vec{\mathbf{a}}| = 10$، فإنّ مقدار $\vec{\mathbf{b}}$ هو:

a) 3 b) 5

c) 6 d) 24

7 إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle -4, 2, a \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, b, 5 \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} \parallel \vec{\mathbf{u}}$، فإنّ قيمة a هي:

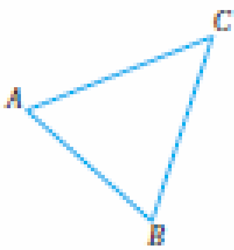
a) -10 b) -5

c) -1 d) 5

8 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين، فإنّ قيمة q هي:

a) 0 b) 8 c) 10 d) 18

9 في المثلث المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{AB} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $\overrightarrow{BC} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عُشر درجة.



10 إذا وقعت النقاط: $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كلٍّ من h، و k؟

11 إذا كانت $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

12 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2.

13 أجد قياس الزاوية الحادّة بين المستقيمين: l_1, l_2.

إذا كانت $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

14 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

15 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$، فأُثبت أنَّ: $\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$.

17 أجد مساحة المثلث ABC.

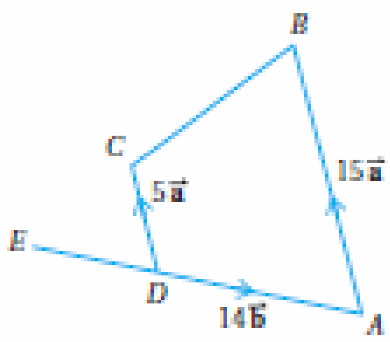
18 إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l، حيث: $\overline{OV} \perp l$، فما إحداثيات النقطة V؟

يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E، و F، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G، و H. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

19 $E(17, 6, 34), F(5, 9, 16),$
$G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$

20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$
$G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدَّ AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: $AD = 2\,DE$. إذا كان: $\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$، وكان: $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$، وكان: $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$، فأُثبت أنَّ B، و C، و E تقع على استقامة واحدة.



1	b
2	d
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d

9
$\overrightarrow{BA} = \langle -3,1,-2\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{BC} = \langle -2,4,3\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -3(-2)+1(4)-2(3) = 4$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14}\times\sqrt{29}}\right) \approx 78.5°$

10
E, F, G على استقامة واحدة، إذن، $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{FG}$، ومنه: $\langle h-2,5,-3\rangle \parallel \langle 3-h,5,k-1\rangle$

إذن، يوجد عدد حقيقي، مثل c بحيث: $\langle h-2,5,-3\rangle = c\langle 3-h,5,k-1\rangle$

$\Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow h-2 = (3-h)c \Rightarrow h-2 = 3-h \Rightarrow h = \frac{5}{2}$

$(k-1)c = -3 \Rightarrow k-1 = -3 \Rightarrow k = -2$

11
معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\overrightarrow{AB} = \langle -2,-3,2\rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle - \langle -4,5,-1\rangle = \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t) = 0$

$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2,-2+3,4-2\rangle = \langle 5,1,2\rangle \Rightarrow D(5,1,2)$

12
لإيجاد نقطة التقاطع، نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين μ, وλ:

$\langle -2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle = \langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle$

$-17+4\mu = -5 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow -2-5\lambda = -3+2\mu \Rightarrow \lambda = -1$

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية: $9+7\lambda = 5-\mu$

$9+7(-1) = 5-3 \Rightarrow 2 = 2$ ✓

نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda = -1$ في معادلة l_1، وهي النقطة $(3,-5,2)$

13
اتجاه المستقيم l_1: $\vec{v} = \langle -5,0,7\rangle$

اتجاه المستقيم l_2: $\vec{u} = \langle 2,4,-1\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{u} = -5(2)+0+7(-1) = -17$

$|\vec{v}| = \sqrt{25+0+49} = \sqrt{74}$

$|\vec{u}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\times\sqrt{21}}\right) \approx 115.5° \Rightarrow \alpha = 180° - 115.5° = 64.5°$

14
معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\overrightarrow{AB} = \langle 2,-4,7\rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle 1,4,-5\rangle + t\langle 2,-4,7\rangle$

15
معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هي: $\overrightarrow{AC} = \langle -5,-3,8\rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle 1,4,-5\rangle + u\langle -5,-3,8\rangle$

16
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(-5)-4(-3)+7(8) = 58 \Rightarrow \cos\theta = \frac{58}{\sqrt{69}\times\sqrt{98}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$

17
$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$

$Area(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\times 7\sqrt{138}\times\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$

18 V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: $\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle$

اتجاه l هو: $\vec{w} = \langle 4,5,-1\rangle$ ⟸ وبما أن $\overrightarrow{OV} \perp l$ إذن يكون: $\vec{w}.\overrightarrow{OV} = 0$ ومنه:

$$4(3+4t) + 5(-25+5t) - 1(13-t) = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OV} = \langle 3+12, -25+15, 13-3\rangle \Rightarrow V(15,-10,10)$$

19 $\overrightarrow{EF} = \langle -12,3,-18\rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -14,-35,21\rangle$

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين. معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \langle 17,6,34\rangle + t\langle -12,3,-18\rangle$

معادلة l_2 هي: $\vec{r} = \langle 1,21,-2\rangle + u\langle -14,-35,21\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle 17-12t, 6+3t, 34-18t\rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u\rangle$$

$$17-12t = 1-14u \Rightarrow -12t+14u = -16 \Rightarrow -6t+7u = -8 \ldots\ldots (1)$$

$$6+3t = 21-35u \Rightarrow 3t+35u = 15 \ldots\ldots (2)$$

$$34-18t = -2+21u \Rightarrow 18t+21u = 36 \Rightarrow 6t+7u = 12 \ldots\ldots (3)$$

$$(1)+(3) \Rightarrow u = \frac{2}{7}, \quad t = \frac{5}{3}$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (2) ينتج أن: $3\left(\frac{5}{3}\right) + 35\left(\frac{2}{7}\right) = 5+10 = 15$

هذه القيم تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان متقاطعان. ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t = \frac{5}{3}$ في معادلة l_1

$$\vec{r} = \langle 17,6,34\rangle + \frac{5}{3}\langle -12,3,-18\rangle = \langle -3,11,4\rangle$$

إذن، إحداثيات نقطة التقاطع هي $(-3,11,4)$.

20 $\overrightarrow{EF} = \langle 15,5,-15\rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -6,-24,12\rangle$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\vec{r} = \langle -3,-5,16\rangle + t\langle 3,1,-3\rangle$

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\vec{r} = \langle 7,2,11\rangle + u\langle -1,-4,2\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle -3+3t, -5+t, 16-3t\rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u\rangle$$

$$-3+3t = 7-u \Rightarrow 3t+u = 10 \ldots\ldots (1)$$

$$-5+t = 2-4u \Rightarrow t+4u = 7 \ldots\ldots (2)$$

$$16-3t = 11+2u \Rightarrow 3t+2u = 5 \ldots (3)$$

$$(3)-(1) \Rightarrow u = -5 \Rightarrow t = 5$$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

21 $AD = 2DE \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(-14\vec{b}) = -7\vec{b}$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 7\vec{b} + 5\vec{a}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = 21\vec{b} + 15\vec{a} = 3(7\vec{b}+5\vec{a}) \Rightarrow \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B,C,E تقع على استقامة واحدة.