1) طرائق التكامل : هناك أكثر من طريقة للتكامل، منها :

1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامَل.

2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار

3) من خلال المتطابقات المثلثية

4) طريقة التكامل بالتعويض

5) طريقة الكسور الجزئية

6) طريقة التكامل بالأجزاء

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

Hasanat

*** التحدي الذي يوجه الطالب هو (اختيار الطريقة المناسبة) اختصارا للوقت والجهد ولللأسف لا يوجد قواعد ثابتة ، فلكل مسألة ظروفها ، ولكن هناك نصائح وملاحظات يمكن مراعاتها عند الحل ، أيضا حل عدد كبير من الأسئلة يمنح الطالب الخبرة لتحديد البداية

مثلاً : (1) وجود (sinx) أو (cosx) بقوى زوجية في المسألة : لا تحل إلا عن طريق المتطابقات

$$\int (\sin x+\cos x)^2\,dx \ ,\ \int (x-\cos^4 8x)\,dx \ ,\ \int \sin^4 x\ \cos^2 x dx \ ,\ \int \sin^2 4x\ dx$$

2) وجود (مقدار) و (مشتقته) أو جذور : طريقة التعويض

$$\int \sec x\ \tan x\ (2\sec x+4)^3 dx \ ,\ \int \frac{\sqrt{x}+x+2}{\sqrt{x}-x}\,dx \ ,\ \int x^2\sin(x^3+1)dx$$

3) عدم وجود (مقدار) و (مشتقته) : طريقة الأجزاء

$$\int \sin x\cos 2x\ dx \ ,\ \int xLnx\ dx \ ,\ \int 5x\ e^{3x+2}dx \ ,\ \int x\ \cos 4x\ dx$$

$$\boxed{\int x\ \sin x\ dx \Leftarrow \text{الأجـزاء}} \qquad \boxed{\int x\ \sin(x^2)\ dx \Leftarrow \text{التعـــويض}}$$

(4 $\int \sin(x)\,dx \ ,\int \tan(4x)\,dx \ ,\ \int e^{(3x-1)}dx \ ,\ \int Ln(x+2)\,dx \ ,\ \dots$

إذا كان ما بداخل القوس غير خطي نبدأ بالتعويض :

$\int \sin(x^2+5)\,dx \ ,\int \tan(e^{2x})\,dx \ ,\ \int e^{\cos x-1}dx \ ,\ \int Ln(1+x^2)\,dx$ ... التعويض أولا

5) عند وجود مقدار نسبي (كل من بسطه ومقامه كثير حدود) ، وأحدهما ليس مشتقة للآخر ، نستخدم طريقة الكسور الجزئية ، (درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام :الخوارزمية أولا)

$$\int \frac{2x-5}{x^2-2x-24}\,dx \ ,\ \int \frac{3x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx ,\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-3x^2+2x}\,dx \ ,\ \int \frac{x^2-1}{x^2-9}\,dx$$

فيما يأتي عدد كبير من التكاملات بشكل عشوائي (تحاكي مسائل الكتاب) مع إجاباتها النهائية للتأكد من صحة الحل:

1) $\int (x^2+1)\sin(2x)\,dx = \dots\ .\ \dots = -\frac{1}{2}(x^2+1)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

2) $\int 2x\ \sin(x^2+1)\,dx = \dots\ .\ \dots = -\cos(x^2+1)+c$

$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$

3) $\int \frac{x^2+2x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx = \dots\ .\ \dots = -Ln|x| + 5Ln|x-2| - 5Ln|x-1| + c =$

4) $\int \frac{2x^2+x}{x-3}\,dx = \dots\ .\ \dots\ = x^2+7x+21\ Ln|x-3|+c$

5) $\int \frac{1}{\cos x - 1}\,dx = \dots\ .\ \dots\ = \csc x + \cot x + c$

6) $\int 6\tan^2 2x\ dx = \dots\ .\ \dots\ 3\tan 2x - 6x + c$

$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$

7) $\int \cos^2(3x+1)\,dx = \dots\ .\ \dots = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{6}\sin 2(3x+1))+c$

8) $\int 4x\ Lnx\ dx = \dots\ .\ \dots\ = 2x^2 Lnx - x^2 + c$

9) $\int (\csc^2 x + \frac{4}{x+1} - 3^{2x} + \pi^2)\,dx = \dots\ .\ \dots\ = -\cot x + 4Ln|x+1| - 3^{2x}\ \frac{1}{2Ln3} = \pi^2 x + c$

10) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx = \dots\ .\ \dots\ = \frac{-1}{2(1-\cos x)^2}+c$

$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$

11) $\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx = \dots\ .\ \dots = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} = 4$

12) $\int (\sec x - \tan x)^2\,dx = \dots\ .\ \dots = 2\tan x + 2\sec x - x + c$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

13) $\int \sec^4 x \ \tan^8 x \ dx = \dots \ . \ \dots = \frac{1}{10}\tan^{10} x + \frac{1}{11}\tan^{11} xc$

14) $\int \frac{\sin(Lnx)}{x}\, dx = \dots \ . \ \dots \ = -\cos(Lnx) + c$

15) $\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x-1}}\, dx = \dots \ . \ \dots \ = 2\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + c$

لكـــي لا ننســـى

16) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \dots \ . \ \dots \ = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

17) $\int 8\sin x \ \cos 3x \ dx = \dots \ . \ \dots = 2\cos 2x - \cos 4x + c$

$\boxed{2\sin a \ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)}$

18) $\int \frac{3x}{(x-1)(x-2)^2}\, dx = \dots \ . \ \dots = 3\ln|x-1| - 3\ln|x-2| - 6(x-2)^{-1} + c$

19) $\int (\sin x - \cos x)^2 \ dx = \dots \ . \ \dots \ = x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

20) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx = \dots \ . \ \dots = \ln|e^x - 2| + \ln|e^x - 1| + c = \ln\left|\frac{e^x - 2}{e^x - 1}\right| + c$

21) $\int \frac{(Lnx)^3}{x}\, dx = \dots \ . \ \dots \ = \frac{1}{4}(Lnx)^4 + c$

22) $\int 8\sin x \ \sin 3x \ dx = \dots \ . \ \dots = 4\sin 2x - \sin 4x + c$

$\boxed{2\sin a \ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)}$

23) $\int 3\tan^4 x \ dx = \dots \ . \ \dots = \tan^3 x - 3\tan x + c$

24) $\int \frac{7x^2 + 4x + 12}{(x+1)(x^2+4)}\, dx = \dots \ . \ \dots = 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2+4| + c$

25) $\int 32\sin^4 x \; dx = \dots . \dots \; = 12x - 8\sin 2x + \sin 4x + c$

26) $\int 2x^3(x^2+1)^4 \; dx = \dots . \dots = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 - \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + c$

27) $\int (\tan x + \sec x) \; dx = \dots . \dots = Ln\left|\sec x + \tan x\right| - Ln\left|\cos x\right| + c$

28) $\int_0^{2\pi} \left|\sin x\right| \; dx = \dots . \dots = 2 + 2 = 4$

29) $\int \cot x \; dx = \dots . \dots = Ln\left|\sin x\right| + c$

30) $\int \frac{4x^2 - 2x + 4}{x^3 + 8} \; dx = \dots . \dots = 2\ln\left|x+2\right| + \ln\left|x^2 - 2x + 4\right| + c$

31) $\int_1^e 16x^3 Lnx \; dx = \dots . \dots = (4x^4 Lnx - x^4)\Big]_1^e = 3e^4 - 1$

32) $\int 14x \sqrt[3]{7x-1} \; dx = \dots . \dots = \frac{3}{14}\sqrt[3]{(7x-1)^4} - \frac{6}{49}\sqrt[3]{(7x-1)^7} + c$

33) $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \; dx = \dots . \dots = x + \cos x + c$

$$\boxed{2\cos a \; \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)}$$

34) $\int 8\cos x \; \cos 3x \; dx = \dots . \dots = \sin 4x + 2\sin 2x + c$

35) $\int 2\tan x \; Ln(\cos x) \; dx = \dots . \dots = (Ln(\cos x))^2 + c$

36) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) \; dx = \dots . \dots = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

37) $\int \sin^4 x \ \cos^4 x \ dx = \dots \ . \ \dots = \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + c$

38) $\int \frac{2Ln\,6x}{x}\,dx = \dots \ . \ \dots = (Ln\,6x)^2 + c$

39) $\int \frac{Ln(Lnx)^2}{x\ Lnx}\,dx = \dots \ . \ \dots = (Ln(Lnx))^2 + c$

40) $\int_9^1 \frac{3\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \dots \ . \ \dots = 4(\sqrt{1+\sqrt{x}})^3 \Big]_4^2 = 8\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$

41) $\int \sin x \ Ln(\cos x)\,dx = \dots \ . \ \dots = -\cos x \ Ln(\cos x) + \cos x + c$

42) $\int \frac{\sin(Lnx)}{x}\,dx = \dots \ . \ \dots = -\cos(Lnx) + c$

43) $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx = \dots \ . \ \dots = (2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1})\Big]_0^1 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

44) $\int 6\sec^4 2x \ dx = \dots \ . \ \dots = 3\tan 2x + 2\tan^3 2x + c$

45) $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \dots \ . \ \dots \ = \frac{-1}{Ln\,2} 2^{\frac{1}{x}} + c$

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \ \cos x}$$

46) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \ \cos x + 4}\,dx = \dots \ . \ \dots \ = Ln\left|\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right| + c$

47) $\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\,dx = \dots \ . \ \dots \ = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + c$

48) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{2x}\,dx = \dots \ . \ \dots = \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}Ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + \frac{1}{2}Ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + c$

49) $\int \frac{x+1}{x^2+x\sqrt{x}}\,dx = \dots\,.\,\dots = -2Ln\left|\sqrt{x}\right| - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4Ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$

50) $\int \sec^3 x\ dx = \dots\,.\,\dots = \frac{1}{2}\sec x\ \tan x + \frac{1}{2}Ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$

51) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\ dx = \dots\,.\,\dots = Ln\left|1-\cos x\right| + c$

52) $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx = \dots\,.\,\dots = Ln\left|1+\sin x\right| + c$

53) $\int \cot x\ dx = \dots\,.\,\dots = Ln\left|\sin x\right| + c$

54) $\int \sin^2 x\ \cos^3 x\ dx = \dots\,.\,\dots = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

55) $\int x^2 \sin x\ dx = \dots\,.\,\dots = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$

56) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\ dx = \dots\,.\,\dots = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

57) $\int 6x\ e^{2x} dx = \dots\,.\,\dots = 3x\ e^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + c$

58) $\int \frac{12}{x^2-9}\,dx = \dots\,.\,\dots = 2Ln\left|x-3\right| - 2Ln\left|x+3\right| + c$

59) $\int 2^x\ \cos x\ dx \dots\,.\,\dots = \frac{2^x}{1+Ln^2 2}(Ln2\ \cos x + \sin x) + c$

60) $\int Ln(x^2-1)\ dx = \dots\,.\,\dots = x\ Ln(x^2-1) + Ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2x + c$

61) $\int \sin\sqrt{x}\ dx = \dots\ .\ \dots = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$

62) $\int 4\tan^2 2x\, dx = \dots\ .\ \dots\ = 2\tan 2x - 4x + c$

63) $\int 8\sin^2 2x\ \cos^2 2x\, dx = \dots\ .\ \dots = x - \frac{1}{8}\sin 8x + c$

64) $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}\, dx = \dots\ .\ \dots = Ln\left|\sqrt{1-x^2}\right| + Ln\left|\sqrt{1-x^2}-1\right| - Ln\left|\sqrt{1-x^2}+1\right| + c$

65) $\int \cos^3 x\ \sin^3 x\, dx = \dots\ .\ \dots = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{4}\sin^6 x + c$

66) $\int \cot^3 x\ \csc^3 x\, dx = \dots\ .\ \dots = \frac{1}{3}\csc^3 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + c$

67) $\int \sec^4 x\ \tan^6 x\, dx = \dots\ .\ \dots = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + c$

68) $\int \tan^3 x\, dx = \dots\ .\ \dots = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln\left|\cos x\right| + c$

69) $\int \sin 2x\ e^{\sin x} dx = \dots\ .\ \dots = 2\sin x\ e^{\sin x} - 2\ e^{\sin x} + c$

70) $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\, dx = Ln 48 \Rightarrow a = ? \dots\ .\ \dots\ a = Ln 2$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

2) مسائل لها علاقة بالتكامل :

1) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 4\sin t$ ،

a) جد موقع الجسم بعد ($\frac{\pi}{4}$) ثانية علماً أنه تحرك من نقطة الأصل

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 4\sin t\,dt = -4\cos t + c_1$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow -4\cos 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 4$$

$$\Rightarrow s(t) = -4\cos t + 4 \Rightarrow s(\frac{\pi}{4}) = -4\cos(\frac{\pi}{4}) + 4 = 2 - 2\sqrt{2}$$

b) جد إزاحة الجُسَيْم في الفترة : $[0, 3\pi]$

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{dt}$$

$$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} 4\sin t\,\mathrm{dt} = -4\cos t\,\Big]_0^{3\pi} = -4(\cos 3\pi - \cos 0) = +8$$

c) جد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)|\,\mathrm{dt} = \int_0^{\pi} 4\sin t\,\mathrm{dt} + \int_{\pi}^{2\pi} (-4\sin t)\,dt$$

$$= -4\cos t\,\Big|_0^{\pi} + 4\cos t\,\Big|_{\pi}^{2\pi} = 8 + 8 = 16$$

$4\sin t = 0$

$\Rightarrow t = 0 \;,\; t = \pi \;,\; t = 2\pi$

$2\sin t$ $-2\sin t$

$+++$ $---$

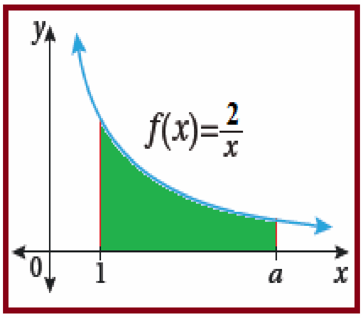
0 π 2π

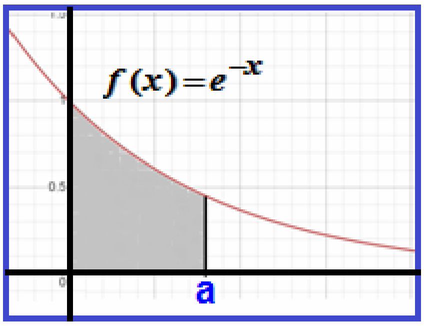
- نفس السؤال : $V(t) = \frac{-3t}{t^2+2} \;,\; [0, 4]$

---

2) في الشكل المجاور، جد قيمة الثابت (a) التي تجعل مساحة المنطقة المظللة 4 وحدات مربعة

الجـواب: $a = e^2$





- نفس السؤال :

المساحة المظللة = 0.5 ، جد قيمة الثابت(a)

الجواب : a=Ln2

---

3) إذا كانت $f'(x) = \frac{\sin 4x}{e + \sin^2 2x}$ ، وكان f(0)= 1 ، فجد قيمة $f(\frac{\pi}{4})$

---

4) 44 تبرير: إذا كان f اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$.

44

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx \qquad u = \frac{\pi}{2} - x \;\Rightarrow dx = -du$$

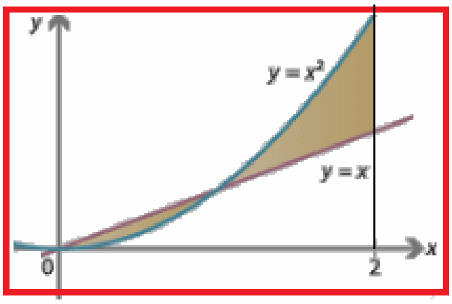
$$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\sin u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx \qquad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

5) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $g(x) = x + 1 \ , \ f(x) = x^2 - 1$

(الجواب:4.5)



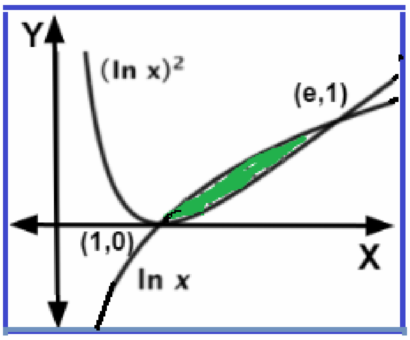
6) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$g(x) = x \ , \ f(x) = x^2$ فــي الفــترة $[0,2]$

(الجواب:1)

5) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $g(x) = x^3 - x \ , \ f(x) = 3 - 3x^2$

(الجواب:8)



6) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنيي الاقترانين

$g(x) = Lnx \ , \ f(x) = (Lnx)^2$

أ) جد مساحة المنطقة المظللة : (الجواب: e – 3)

ب) جد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المظللة : (الجواب: (22 – 8e)π)

7) جد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $g(x) = \sqrt{x} \ , \ f(x) = x^2$

(الجواب:0.3π)

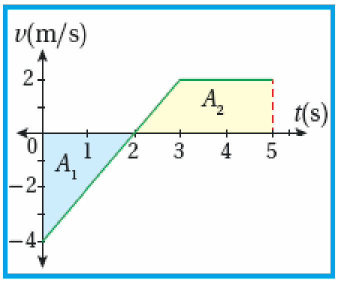
8) جد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين الآتيين حول المحور x

$g(x) = 2 - (x-2)^2 \quad , \quad f(x) = (x-2)^2$

وزارة 2023

الجـواب : $\frac{16}{3}\pi$

تذكير:



إزاحة الجُسَيْم في الفترة [0 ، 5] هي 1 m $\boxed{-4+5=1}$

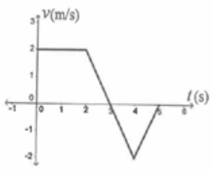
المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة [0 ، 5] $\boxed{4+5=9}$

الموقع النهائي للجُسَيْم : صيغة الإزاحة : $s(5)-s(0)=\int_0^5 v(t)\ dt$

$s(5)-2=1 \Rightarrow s(5)=3$

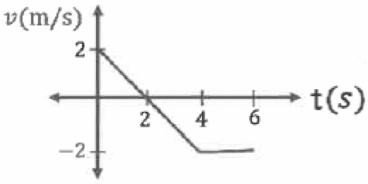
الموقع النهائي للجُسَيْم = $s(t_2)-s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt$

9) يبيّن الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,5]$. إذا بدأ الجُسيم حركته من $x=3$ عندما $t=0$ ، فإنّ الموقع النهائي للجُسيم هو:



a) 10 m   b) 5 m   c) 7 m   d) 6 m

10) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,6]$. إذا بدأ الجسم الحركة من $x=10$ ، عندما $t=0$ ،فإنّ موقع الجسم النهائي، هو:



a) 4   b) 6   c) 14   d) 18

معادلات تفاضلية

1) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2+3x^2y+y+1 \quad , \quad y(1)=-2$

$$\Rightarrow \boxed{\ln|1+y|=x^3+x+c} \Rightarrow \ln|1+y|=x^3+x-2$$

2 $\sin^2 x\ \dfrac{dy}{dx}=y^2\cos^2 x :\Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{y}=x+\cot x+c}$

3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-3}{y} :\Rightarrow \boxed{y+3Ln|y-3|=x+c}$

4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x^2-3}{y^2}-3x^2y+y :\Rightarrow \boxed{Ln|3-y^3|=3x-3x^3+c}$

5) $\dfrac{dy}{dx}=x^2-x^2e^{-y}+e^{-y}-1 :\Rightarrow \boxed{Ln|e^y-1|=\frac{1}{3}x^3-x+c}$

تمارين على الدرس الأول

السؤال الأول :

1) $\int 6e^{2x}dx = a)\ 6e^{2x}+c \quad b)\ 3e^{2x}+c \quad c)\ 12e^{2x}+c \quad d)\ 6e^{3x}+c$

2) $\int_0^1 (3+e^x)\,dx = a)\ 3+e \quad b)\ 2+e \quad c)\ e \quad d)\ 4+e$

3) $\int \tan^2 x\,dx = a)\ \sec x + c \quad b)\ \sec^2 x + c \quad c)\ x - \tan x + c \quad d)\ \tan x - x + c$

4) $\int 4\cos 2x\,dx = a)\ 8\sin 2x + C \quad b)\ 2\sin 2x + C$

$c)\ -8\sin 2x + C \quad d)\ -2\sin 2x + C$

5) $\int 2(\sin x - \cos x)^2\,dx = a)\ x + \sin 2x + C \quad b)\ 2x + \cos 2x + C$

$c)\ x - \sin 2x + C \quad d)\ 2x - \cos 2x + C$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 12\cos^2(\frac{1}{2}x)\,dx = a)\ 6\pi + 3 \quad b)\ \pi + 3 \quad c)\ \pi + 3\sqrt{3} \quad d)\ 6\pi$

7) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx = a)\ 2\ln|\sin x| + C \quad b)\ \ln|\sin x| + C$

$c)\ \frac{1}{2}\ln|\sin x| + C \quad d)\ \cot x + C$

8) $\int_0^3 (1+|2x-4|)dx = a)\ 8 \quad b)\ 7 \quad c)\ 6 \quad d)\ -1$

9) إذا تحرك جسم من نقطة الأصل في خط مستقيم بحيث تعطى سرعته المتجهة بالاقتران v(t)=4sint ،

فإن موقع الجسم بعد ($\frac{\pi}{3}$) ثانية يساوي: $a)\ 6 \quad b)\ 2-2\sqrt{3} \quad c)\ 2 \quad d)\ \sqrt{3}$

10) إذا كان $f'(x) = \frac{4}{2x-1}$ يُمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران f(x) الذي يمر بالنقطة (1 ,4)

فإن قاعدة الاقتران f(x) هي : $a)\ \ln|2x-1|+4 \quad b)\ \ln|2x-1|$

$c)\ 2\ln|2x-1|+4 \quad d)\ \ln|2x-1|+2$

11) $\int 4^{2x}dx = a)\ \frac{4^{2x}}{\ln 16}+c \quad b)\ \frac{4^{2x}}{\ln 4}+c \quad c)\ \frac{4^{2x}}{\ln 8}+c \quad d)\ 4^{2x}\ln 16 + c$

12) $\int \frac{\ln x^4}{2\ln x}\,dx = a)\ 4\ln x + c \quad b)\ 4x + c \quad c)\ 2x + c \quad d)\ 2$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

إجابات الدوائر

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	b	d	b	b	b	a	a	c	c	a	c

ملاحظة مهمة : (نصيحة)

يجب حفظ قوانين اللوغاريتمات وفهم **طريقة تحويل المقدار من شكل إلى آخر** خصوصاً في الأسئلة الموضوعية

$$Ln(x\,y) = Lnx + Lny$$

$$Ln\frac{x}{y} = Lnx - Lny$$

$$Ln(x)^a = a\;Ln(x)$$

$$Ln\;4 + Ln\;5 = Ln\;(4\times 5) = Ln\;20$$

$\text{Ln}0:$ غير معرف

$$\ln e = 1$$

$$3Ln\;2 = Ln\;2^3 = Ln\;8$$

$$\ln 1 = 0$$

$$Ln\;3x^5 \neq 5Ln\;3x$$

$$Ln\;4x^2 = Ln\;4 + Ln\;x^2 = Ln\;4 + 2Ln\;x$$

السؤال الثاني : جد قيمة التكاملات الآتية :

$$1)\int_1^2 \sqrt[3]{e^{6-3x}}\,dx \qquad 2)\int 4^{2x-1}dx \qquad 3)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,dx \qquad 4)\int_0^1 \frac{e^{2x}-3}{e^x-\sqrt{3}}\,dx$$

السؤال الثالث : إذا كانت $f'(x) = \dfrac{\sin 4x}{e+\sin^2 2x}$ ، وكان f(0)= 1 ، فجد قيمة $f(\frac{\pi}{4})$

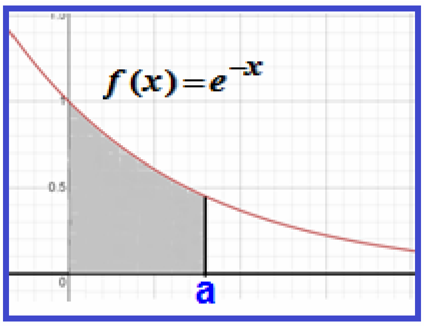
السؤال الرابع : إذا كان معدل تغير مساحة صفيحة غير منتظمة يعطى بالعلاقة $\dfrac{dA}{dt} = e^{\frac{-t}{10}}$ سنتيمترا مربعا / ث

وكانت مساحة الصفيحة تساوي ($80\ cm^2$) عندما (t=0) ، جد مساحة سطحها بعد (5) ثوان

السؤال الخامس : معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x}$ ،

إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والمحور (x)

في الفترة [0 , a] تساوي (0.5) وحدة مربعة ، فجد قيمة الثابت (a)



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

وزارة علمي 2023 ف2

1) قيمة: $\int_0^1 (2^e)^x \, dx$ هي:

a) $\frac{2^e}{e\ln 2}$ b) $\frac{2^e-1}{\ln 2}$ c) $\frac{2^e-1}{e\ln 2}$ d) $\frac{1}{e\ln 2}$

2) ناتج: $\int \left(\frac{1}{\sin^2(3x)} + \pi\right) dx$ هو:

a) $-\frac{1}{3}\cot(3x) + \pi x + C$ c) $-\frac{1}{3}\tan(3x) + \pi x + C$

b) $\frac{1}{3}\cot(3x) + \pi + C$ d) $\frac{1}{3}\tan(3x) + \pi + C$

3) ناتج: $\int \cot(-x) \, dx$ هو:

a) $\ln|\csc x \cot x| + C$ c) $\ln|\csc x| + C$

b) $-\ln|\csc x \cot x| + C$ d) $-\ln|\csc x| + C$

4) قيمة: $\int_3^4 |4-2x| \, dx$ هي:

a) -3 b) 3 c) -2 d) 2

5) إذا كان: $f'(x) = \frac{3x^3+1}{x}$ ، وكان: $f(1) = 6$ ، فإنّ قاعدة الاقتران f هي:

a) $f(x) = 3x^2 + \ln|x| + 5$ c) $f(x) = x^3 + \ln|x| - 5$

b) $f(x) = x^3 + \ln|x| + 5$ d) $f(x) = x^3 - \ln|x| + 5$

6) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-3t}{t^2+2}$ ، حيث t الزمن بالثواني،

و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إزاحة الجُسيم بالأمتار في الفترة $[0,4]$ تساوي:

a) $-\frac{3}{2}\ln 3$ b) $-\frac{3}{2}\ln 9$ c) $\frac{3}{2}\ln 3$ d) $\frac{3}{2}\ln 9$

وزارة علمي 2023 ف2 تكميلي

1) قيمة $\int_{-1}^1 3^x dx$ تساوي:

a) $\frac{2}{3\ln 3}$ b) $\frac{8}{3\ln 3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{3}$

2) $\int \sin(5-3x) \, dx$ يساوي:

a) $-\cos\left(5x - \frac{3}{2}x^2\right) + C$ c) $-\frac{\cos(5-3x)}{3} + C$

b) $\cos(5-3x) + C$ d) $\frac{\cos(5-3x)}{3} + C$

3) $\int (\tan^2 2x - \sec^2 2x) \, dx$ يساوي:

a) $x + C$ c) $x - \tan 2x + C$

b) $-x + C$ d) $\tan 2x - x + C$

4) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}(2-3x)^2 & , x<1\\ 3x^2-2x & , x\geq 1\end{cases}$ ، فإنّ قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$ تساوي:

a) 1 b) 17 c) 18 d) 19

5) إذا كان: $f'(x)=e^x+e^{-x}$ يمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران f ، وكان منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,-1)$، فإنّ قاعدة الاقتران f ، هي:

a) $f(x)=e^x-e^{-x}-1$ c) $f(x)=e^x-e^{-x}+1$

b) $f(x)=e^x+e^{-x}+1$ d) $f(x)=e^x+e^{-x}-1$

6) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=12t-3t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني و v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية. فإنّ ازاحة الجسم في الفترة $[0\,,6]$ تساوي:

a) -36 b) 0 c) 36 d) -24

وزارة صناعي 2023 ف2

14- قيمة: $\int \sin(2x-\pi)\,dx$ هي:

a) $2\cos(2x-\pi)+c$ c) $-2\cos(2x-\pi)+c$

b) $\frac{1}{2}\cos(2x-\pi)+c$ d) $-\frac{1}{2}\cos(2x-\pi)+c$

15- قيمة: $\int_1^e \left(2x-\frac{1}{x}\right)dx$ هي:

a) e^2 b) e^2-2 c) $\frac{1}{2}e^2-1$ d) $\frac{1}{2}e^2-2$

16- قيمة: $\int_{-1}^1 (2-|x|)\,dx$ هي:

a) -3 b) 3 c) 0 d) 4

17- قيمة: $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ هي:

a) $\frac{1}{e}-1$ b) $-\frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{e}$ d) $1-\frac{1}{e}$

18- قيمة: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ هي:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{\pi}{4}$

b) إذا كان: $f'(x)=\sin 2x$ يمثّل ميل المماس لمنحنى الاقتران f ، فجد قاعدة الاقتران f الذي يمر منحناه بالنقطة $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$

(8 علامات)

وزارة صناعي 2023 تكميلي ف2

14- ناتج: $\int 6e^{3x-1}\,dx$ هو:

a) $-3e^{3x-1}+c$ $2e^{3x-1}+c$
b) $3e^{3x-1}+c$ d) $-2e^{3x-1}+c$

15- ناتج: $\int \cos(7-5x)dx$ هو:

$-\frac{1}{5}\sin(7-5x)+c$ c) $\frac{1}{5}\sin(7-5x)+c$
b) $-\frac{1}{7}\sin(7-5x)+c$ d) $\frac{1}{7}\sin(7-5x)+c$

16- قيمة: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ هي:

a) $-1-\frac{\pi}{4}$ b) $-1+\frac{\pi}{4}$ c) $1+\frac{\pi}{4}$ $1-\frac{\pi}{4}$

17- قيمة: $\int_0^e \frac{6x}{x^2+1}\,dx$ هي:

a) $6\ln(e^2+1)$ c) $-3\ln(e^2+1)$
b) $-6\ln(e^2+1)$ $3\ln(e^2+1)$

18- قيمة: $\int_4^6 (5+|3-x|)\,dx$ هي:

14 b) 6 c) −14 d) −6

c) إذا كان: $a>0$, $\int_a^{2a} \frac{1+4x}{x}dx = \ln 32$ ، فجد قيمة الثابت a (8 علامات)

b) إذا كان: $f'(x) = 3(2x-7)^5$ يُمثّل ميل المماس لمنحنى الاقتران f ، فجد قاعدة الاقتران f الذي يمر منحناه بالنقطة $(4,-1)$. (8 علامات)

تمارين إضافية على الدرس الثاني :

السؤال الأول : حدد رمز الإجابة الصحيحة فيم يأتي :

1) $\int \frac{6(Lnx)^2}{x}\,dx = a)\ 2(Lnx)^3 + c \qquad b)\ 2Lnx^3 + c$

$c)\ 3Lnx + c \qquad d)\ 3(Lnx)^2 + c$

---

2) $\int 3\cos^3 x\,dx = \ a)\ 9\cos^2 x\ \sin x + c \qquad b)\ 3\sin x - \sin^3 x + c$

$c)\ \frac{3}{4}\cos^4 x + c \qquad d)\ \sin^3 x - 3\sin x + c$

---

3) $\int \sec^2 x\ e^{\tan x} dx = a)\ e^{\tan x} + c \qquad b)\ e^{\sec x} + c$

$c) \tan x\ e^{\sec^2 x} + c \qquad d)\ \tan x\ e^{\sec x} + c$

---

4) $\int \frac{\tan^2(Lnx)}{x}\,dx = a)\tan^2(Lnx) + c \qquad b)\tan^2(Lnx) - Lnx + c$

$c)\tan^2(Lnx) + Lnx + c \qquad d)\sec(Lnx) + c$

---

5) $\int \csc^4 x\,dx = \ a)\ \frac{1}{5}\cot^5 x + c \qquad b)\ \cot x + c$

$c)\ \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + c \qquad d)\ \frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + c$

---

6) $\int 4x\ e^{x^2} dx = \ a)\ 2x^2 e^{x^3} + c \qquad b)\ 4x\ e^{x^2} + c$

$c)\ 2e^{x^2} + c \qquad d)\ 2x^2 e^{x^2} + c$

---

7) $\int 3\sin 2x\ \sin 4x\,dx = \ a)\ 24\cos 2x\ \cos 4x + c \qquad b)\ \frac{3}{8}\cos 2x\ \cos 4x + c$

$c) -\sin^3 2x + c \qquad d)\ \sin^3 2x + c$

---

8) $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 2}\,dx = a)\ e^x - 2 + Ln(e^x - 2) + c \qquad b)\ e^x - 2 + Ln(e^x - 2)^2 + c$

$c)\ x - e^x + c \qquad d)\ Ln(e^{2x} - 2) + c$

9) $\int_{1}^{e} x\, f(x)\, dx = 5 \Rightarrow \int_{0}^{2} e^{x}\, f(\sqrt{e^{x}})\, dx =$

$a)\ 10 \qquad b)\ 2.5 \qquad c)\ 20 \qquad d)\ e-1$

---

10) $f(-8) = 4 \;,\; f(1) = -6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} 3x^{2}\, f'(x^{3})\, dx =$

$a)\ 10 \qquad b)-2 \qquad c)-10 \qquad d)\ 2$

---

11) $\int_{8}^{1} f(x)\, dx = 6 \Rightarrow \int_{1}^{2} 6x^{2}\, f(x^{3})\, dx =$

$a)-3 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 12 \qquad d)-12$

---

12) $\int 16(x^{5}+x)^{3} dx = \quad a)\ 4(x^{4}+x)^{4}+c \qquad b)\ (x^{5}+x)^{5}+c$

$c)\ (x^{5}+1)^{4}+c \qquad d)\ (x^{4}+1)^{4}+c$

---

13) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 6\frac{\sin^{2}x}{\sec x}\, dx = a)\ \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{4} \qquad b)\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4}$

$c)\ 3-\sqrt{6} \qquad d)\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

---

14) $\int_{1}^{e} \frac{Ln(x^{2})}{x}\, dx = \quad a)\ e \qquad b)\ 1 \qquad c)-1 \qquad d)\ 2$

---

15)

إذا كان $f(x) = a\, x(x-1)^{3}$ فإن قيمة الثابت (a) التي تجعل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والمحور (x) تساوي وحدة مربعة واحدة هي :

$a)\ 10 \qquad b)\ 20 \qquad c)-20 \qquad d)\ 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	b	a	b	c	c	d	b	a	c	d	d	a	b	b

وزارة علمي 2023

7) ناتج: $\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$ هو:

a) $\frac{1}{6}\ln x^6 + C$ c) $\frac{1}{6}(\ln x)^6 + C$

b) $\frac{1}{5}\ln x^5 + C$ d) $\frac{1}{5}(\ln x)^5 + C$

8) ناتج: $\int \sin^3 x\,dx$ هو:

a) $\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ c) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

b) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + C$ d) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\,dx$ (10 علامات)

وزارة صناعي 2023

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{3x-2}}\,dx$ (8 علامات)

وزارة علمي 2023 تكميلي

7) $\int (1-2x)\sqrt[3]{x^2-x}\,dx$ يساوي:

a) $\frac{3\sqrt[3]{(x^2-x)^4}}{4} + C$ $-\frac{3\sqrt[3]{(x^2-x)^4}}{4} + C$

b) $-\frac{3\sqrt[4]{(x^2-x)^3}}{4} + C$ d) $\frac{3\sqrt[4]{(x^2-x)^3}}{4} + C$

8) $\int \sin^2 x \sin 2x\,dx$ يساوي:

a) $-\frac{\sin^4 x}{2} + C$ c) $\frac{\cos^4 x}{2} + C$

b) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ $\frac{\sin^4 x}{2} + C$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int (\sec x \tan x)^4\,dx$ (10 علامات)

وزارة صناعي 2023 تكميلي

a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ (8 علامات)

تمارين إضافية

1) $\int \frac{x+6}{x^2-2x}\,dx =$ a) $Ln\left|x^2-2x\right|+c$ b) $Ln\frac{\left|(x-1)^3\right|}{x^4}+c$

c) $\frac{3}{4}Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+c$ d) $Ln\left|x^4(x-1)^3\right|+c$

2) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx =$ a) $Ln\left|\frac{x(x+1)}{(x-1)}\right|+c$ b) $Ln\left|\frac{x+1}{x(x-1)}\right|+c$

c) $Ln\left|\frac{x(x-1)}{x+1}\right|+c$ d) $Ln\left|\frac{x-1}{x(x+1)}\right|+c$

3) $\int_k^2 \frac{4}{x^2-1}\,dx = Ln(\frac{4}{9})$, $k>0 \Rightarrow k=?$

a) 3 b) 2 c) 1 b) 4

4) $\int \frac{4}{4-x^2}\,dx =$ a) $Ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+c$ b) $Ln\left|4-x^2\right|+c$

c) $Ln(4-x)^2+c$ d) $Ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$

5) $\int \frac{x^2}{4-x^2}\,dx =$ a) $x+Ln\frac{|2+x|}{|2-x|}+c$ b) $x+Ln\frac{|2-x|}{|2+x|}+c$

c) $Ln\frac{|2+x|}{|2-x|}-x+c$ d) $Ln\frac{|2-x|}{|2+x|}-x+c$

6) $\int \frac{4x}{x^2-4}\,dx =$ a) $Ln(\frac{x+2}{x-2})^2+c$ b) $2Ln(\frac{x-2}{x+2})+c$

c) $Ln(\frac{x-2}{x+2})+c$ d) $2Ln(x^2-4)+c$

7) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \sin x}\, dx =$ a) $Ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin^3 x}\right| + c$ b) $Ln\left|\sin^3 x - \sin x\right| + c$

c) $3Ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x}\right| + c$ d) $Ln\left|\frac{\sin x - 1}{3\sin x}\right| + c$

8) $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\, dx =$

a) $Ln4$ b) $Ln4+2$ c) $Ln4+\frac{1}{2}$ b) $Ln\frac{9}{2}$

9) $\int \frac{5x^2 - x + 2}{(x^2+1)(x-1)}\, dx =$ a) $Ln\left|(x^2+1)(x-1)\right| + c$ b) $Ln\left|(x^2+1)(x-1)^3\right| + c$

c) $3Ln\left|(x^2+1)(x-1)\right| + c$ d) $Ln\left|5x^2 - x + 2\right| + c$

10) $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x^2+3x+5)(x-1)}\, dx =$ a) $Ln\left|(x^2+3x+5)(x-1)\right| + c$

b) $Ln\left|(3x^2+4x+2)(x)\right| + c$

c) $Ln\left|(x^2+3x+5)(x+1)\right| + c$

d) $Ln\left|3x^2+4x+2\right| + c$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	d	c	d	a	c	b	a

أسئلة الوزارة

2023

2) $\int \frac{7x^2 - 16x - 2}{(x^2+2)(x-2)}\, dx$ (10 علامات)

2023 تكميلي

2) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}\, dx$ (10 علامات)

تمارين إضافية

1) قيمة $\int_1^e \ln x \, dx$ هي :

$a)\ 2 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ -1 \qquad d)\ e-1$

2) قيمة $\int_1^2 4x \, Lnx \, dx$ هي :

$a)\ Ln4-3 \qquad b)\ Ln16-3$

$c)\ Ln256-3 \qquad d)\ 4Ln4+3$

3) قيمة $\int x\, e^x \, dx$ هي :

$a)\ x\, e^x - e^x + c \qquad b)\ x\, e^x + e^x + c$

$c)\ 2x\, e^x + c \qquad d)\ 2\, e^x + c$

4) قيمة $\int x \sin x \, dx$ هي :

$a)\ \sin x - x\cos x + c \qquad b)\ \sin x + x\cos x + c$

$c)\ x\ \cos x \qquad d)\ \cos x - x\sin x + c$

5) قيمة $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{e^x}} \, dx$ هي :

$a)\ \frac{4e+8}{e} \qquad b)\ \frac{e+4}{8} \qquad c)\ 4 \qquad d)\ \frac{4e-8}{e}$

6) قيمة $\int x \sec^2 x \, dx$ هي :

$a)\ x\ \tan x - Ln|\cos x| + c \qquad b)\ \frac{1}{2}x^2 \tan x + c$

$c)\ x\ \tan x + Ln|\cos x| + c \qquad d)\ x\ \tan x + Ln|\sin x| + c$

7) قيمة $\int 2x^3 \csc^2 x^2 \, dx$ هي :

$a)\ x^2 \cot x^2 + Ln|\sin x^2| + c \qquad b)\ -x^2 \cot x^2 + Ln|\sin x^2| + c$

$c)\ x^4 \cot x^2 + c \qquad d)\ x^2 \cot^2 x^2 + Ln|\sin x^2| + c$

8) إذا كان $f(5)=8$, $f(2)=3$, $\int_2^5 x\, f'(x) dx = 10$, فإن $\int_2^5 f(x) dx =$

$a)\ 14 \qquad b)\ 24 \qquad c)\ -24 \qquad d)\ 44$

9) إذا كان $\int_0^1 (3ax^2+2x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x - 1)\, dx$, فإن قيمة الثابت (a)=

$a)\ \frac{\pi}{2}-3 \qquad b)\ -1 \qquad c)\ -3 \qquad d)\ 3$

10) إذا كان $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos x\, f(x)\, dx = \sqrt{2}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\, f'(x)\, dx = -3\sqrt{2}$, فإن $f(\frac{3\pi}{4})=$

$a)\ 8 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -2 \qquad d)\ 2\sqrt{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	a	d	c	b	b	c	b

أسئلة الوزارة

علمي 2023

9) ناتج: $\int 6x \ln x \, dx$ هو:

a) $3x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 + C$ c) $3x^2 \ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $3x \ln x - \frac{3}{2}x^2 + C$ d) $3x \ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$

10) ناتج: $\int 5x \cos(5x) \, dx$ هو:

a) $x\cos(5x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + C$ c) $x\cos(5x) - \frac{1}{5}\sin(5x) + C$

b) $x\sin(5x) + \frac{1}{5}\cos(5x) + C$ d) $x\sin(5x) - \frac{1}{5}\cos(5x) + C$

11) قيمة: $\int_0^1 x4^x \, dx$ هي:

a) $\frac{4\ln 4 - 4}{(\ln 4)^2}$ b) $\frac{4\ln 4 + 4}{(\ln 4)^2}$ c) $\frac{4\ln 4 + 3}{(\ln 4)^2}$ d) $\frac{4\ln 4 - 3}{(\ln 4)^2}$

صناعي 2023

2) $\int x^2 e^x \, dx$ (8 علامات)

علمي 2023 تكميلي

9) قيمة $\int_1^2 \ln x^2 \, dx$ تساوي:

$4\ln 2 - 2$ c) $4\ln 2 - 4$

b) $4\ln 2 - 6$ d) $2\ln 2 - 1$

10) $\int x \csc^2 x \, dx$ يساوي:

a) $-x\cot x + \ln|\cos x| + C$ $-x\cot x + \ln|\sin x| + C$

b) $x\cot x - \ln|\cos x| + C$ d) $x\cot x + \ln|\sin x| + C$

11) إذا كان: $f(0) = 5 , f(1) = 8 , \int_0^1 f(x)dx = 1$، فإنّ قيمة $\int_0^1 xf'(x)dx$ تساوي:

a) 2 b) 3 c) 8 7

صناعي 2023 تكميلي

a) جد كلاً من التكاملات الآتية: (8 علامات)

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x \, dx$

تمارين إضافية

1) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=x^2 \ , \ g(x)=\sqrt{x}$ تساوي :

$a)\ \frac{1}{3} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ 3 \qquad d)\ 4$

2) إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=Lnx$ والمحور (x) في الفترة $[1,k]$ تساوي وحدة مربعة واحدة ، فإن قيمة (k) تساوي :

$a)\ 2 \qquad b)\ e \qquad c)\ 3 \qquad d)\ 1$

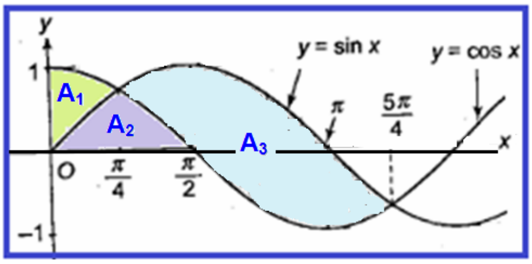
3) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=x-1 \ , \ g(x)=\sqrt{x-1}$ تساوي :

$a)\ \frac{1}{3} \qquad b)\ \frac{1}{2} \qquad c)\ \frac{1}{6} \qquad d)\ 1$

4) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=5x-x^2 \ , \ g(x)=x$ تساوي :

$a)\ \frac{64}{3} \qquad b)\ 22 \qquad c)\ 64 \qquad d)\ \frac{32}{3}$

*** معتمدا الشكل المجاور ، أجب عن الأسئلة (5 , 6 , 7)



5) مساحة المنطقة A_1 تساوي :

$a)\ \sqrt{2}-1 \qquad b)\ 1-\sqrt{2} \qquad c)\ 2\sqrt{2} \qquad d)\ 2-\sqrt{2}$

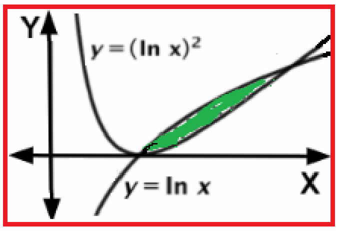
6) مساحة المنطقة A_2 تساوي :

$a)\ \sqrt{2}-1 \qquad b)\ 1-\sqrt{2} \qquad c)\ 2\sqrt{2} \qquad d)\ 2-\sqrt{2}$

7) مساحة المنطقة A_3 تساوي :

$a)\ \sqrt{2}-1 \qquad b)\ 1-\sqrt{2} \qquad c)\ 2\sqrt{2} \qquad d)\ 2-\sqrt{2}$

8) معتمدا الشكل المجاور ، فإن مساحة المنطقة المظللة هي :



$a)\ e-3 \qquad b)\ 3e-1$

$c)\ 1 \qquad d)\ 3-e$

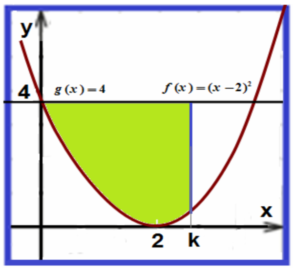
9) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=x^2 \ , \ g(x)=2-x^2$ تساوي :

$a)\ \frac{4}{3} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ \frac{8}{3} \qquad d)\ 4$

10) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=2x^2+10 \ , \ g(x)=4x+16$ تساوي :

$a)\ \frac{64}{3} \qquad b)\ 64 \qquad c)\ \frac{32}{3} \qquad d)\ 32$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	d	a	d	c	d	c	a

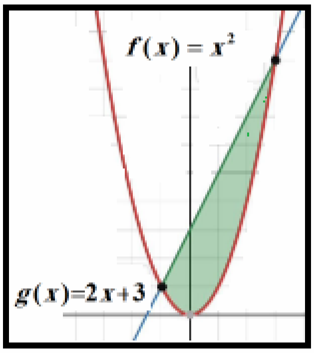


11) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنيي الاقترانين

$$g(x)=4\ ,\ f(x)=(x-2)^2$$

إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي(9) وحدات مربعة ، فإن قيمة الثابت (k) تساوي:

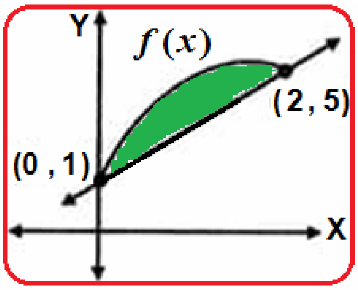
$a)\ \frac{4}{3}$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ \frac{3}{2}$ $\quad d)\ 4$



12) معتمدا الشكل المجاور ، فإن التكامل الذي يدل على مساحة المنطقة المظللة هو :

$a)\ \int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx$ $\quad b)\ \int_{-1}^{3}(x^2-2x+3)\,dx$

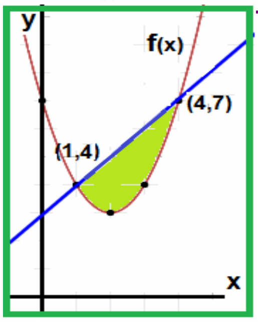
$c)\ \int_{-3}^{1}(2x+3-x^2)^2\,dx$ $\quad d)\ \int_{-1}^{3}\pi(2x+3-x^2)^2\,dx$



13) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة [0 , 2]
إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي (5) وحدات مربعة

فإن قيمة $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ تساوي :

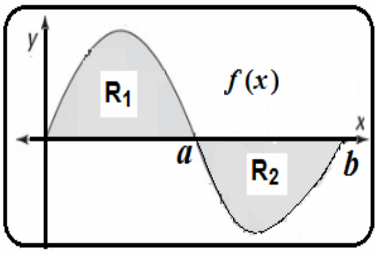
$a)\ 10$ $\quad b)\ 14$ $\quad c)\ 11$ $\quad d)\ 13$



14) معتمدا الشكل المجاور ،والذي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة

إذا كان $\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 12$ ، فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي :

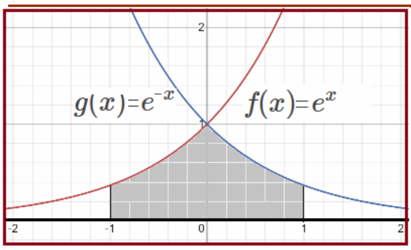
$a)\ \frac{9}{4}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{9}{2}$ $\quad d)\ \frac{33}{2}$



15) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة [0,b]
وكانت مساحة R_1 تساوي (4) ومساحة R_2 تساوي(3) فإن قيمة

$\int_{b}^{0} f(x)\,dx$ تساوي :

$a)\ 7$ $\quad b)\ -7$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$



16) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنيي الاقترانين

$f(x)=e^{x}\ ,\ g(x)=e^{-x}$ في الفترة [-1 , 1]

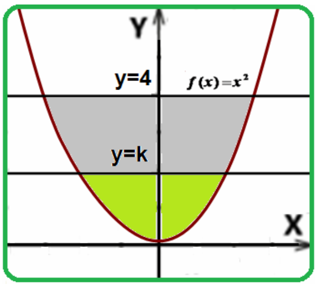
فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي :

$a)\ 2e+2$ $\quad b)\ 2e-2$

$c)\ 2e$ $\quad d)\ 2$

11	12	13	14	15	16
b	a	c	c	d	b

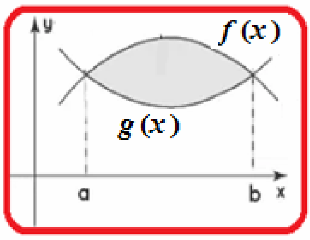
17) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = x^2$ والمستقيم $y = 4$
إذا كان المستقيم $y = k$ يقسم المنطقة المظللة إلى قسمين متساويين
فإن قيمة الثابت (k) تساوي :



$a)\ \frac{3}{4}$ $b)\ 1$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{4}{3}$

---

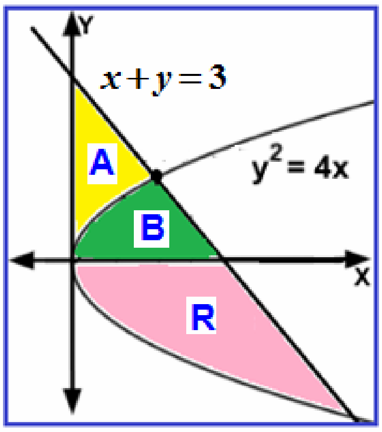
18) معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنيي الاقترانين $f(x), g(x)$
إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 10$ ، وكانت مساحة المنطقة المظللة تساوي (3)
فإن قيمة $\int_b^a (g(x) - 2x)\,dx$ تساوي :



$a)\ b^2 - a^2 - 7$ $b)\ b^2 - a^2 + 7$

$c)\ a^2 - b^2 - 7$ $d)\ b^2 - a^2 - 13$

*** معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنيي الاقترانين
$y^2 = 4x$ ، $x + y = 3$ ، أجب عن الأسئلة (19، 20، 21)



19) مساحة المنطقة (A) تساوي :

$a)\ \frac{7}{3}$ $b)\ \frac{7}{6}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{4}{3}$

20) مساحة المنطقة (B) تساوي :

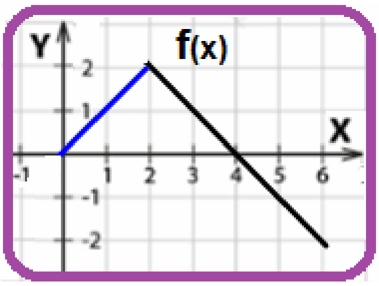
$a)\ \frac{10}{3}$ $b)\ \frac{5}{3}$ $c)\ \frac{3}{2}$ $d)\ \frac{7}{3}$

21) مساحة المنطقة (R) تساوي :

$a)\ 18$ $b)\ 36$ $c)\ 9$ $d)\ \frac{9}{2}$

---

* يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية [0 , 6]،
اعتمد هذا الشكل للإجابة عن الاسئلة (22 ، 23 ، 24) ،
علما بان الجسم بدأ الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$



22) إزاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاة تساوي :

$a)\ 4$ $b)\ 8$ $c)\ 2$ $d)\ 6$

23) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة تساوي :

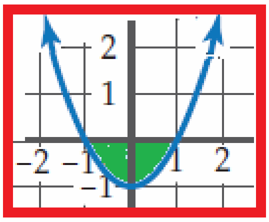
$a)\ 4$ $b)\ 2$ $c)\ 8$ $d)\ 6$

24) الموقع النهائي للجسم يساوي :

$a)\ 4$ $b)\ 8$ $c)\ 2$ $d)\ 6$

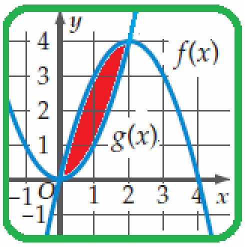
17	18	19	20	21	22	23	24
b	a	b	a	a	c	d	a

25) حجم المُجسَّم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2 - 1$ والمحور(x) حول المحور(x) يساوي :



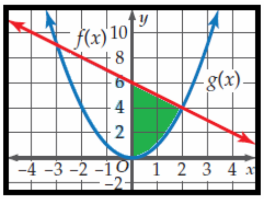
$a)\ \frac{16}{15}\pi \qquad b)\ \frac{4}{15}\pi \qquad c)\ \frac{16}{15} \qquad d)\ \frac{8}{5}\pi$

26) حجم المُجسَّم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x) = 4 - x^2$ ، $g(x) = x^2$ حول المحور x يساوي :



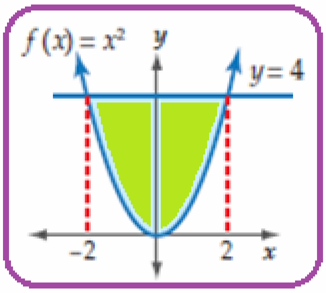
$a)\ \frac{16}{3}\pi \qquad b)\ \frac{32}{3}\pi \qquad c)\ \frac{32}{3} \qquad d)\ \frac{2}{3}\pi$

27) حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 6 - x$ ، $g(x) = x^2$ والواقعة في الربع الأول ، حول المحور (x) يساوي :



$a)\ \frac{288}{3}\pi \qquad b)\ \frac{288}{15}\pi \qquad c)\ \frac{288}{5}\pi \qquad d)\ \frac{288}{5}$

28) معتمدا الشكل المجاور ، فإن التكامل الذي يدل على حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور (x) هو :



$a)\ \pi\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^2\,dx \qquad b)\ \pi\int_{0}^{2}(16 - x^4)\,dx$

$c)\ 2\pi\int_{0}^{2}(16 - x^4)\,dx \qquad d)\ 2\pi\int_{0}^{2}(16 - x^2)\,dx$

29) التكامل الذي يُعبر عن حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ والمحور (x) حول المحور (x) في الفترة [1 , 2] هو :

$a)\ \pi\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\,dx \qquad b)\ \pi\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx \qquad c)\ 2\pi\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx \qquad d)\ \pi\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

30) حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 1 - \sec x$ ، $y = 3$ حول المحور (x) في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ يساوي :

$a)\ 2\pi^2 + 2Ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - 1 \qquad b)\ 2\pi - 2Ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - 1$

$c)\ \pi(2\pi + 2Ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - 1) \qquad d)\ \pi(2\pi - 2Ln\left|\sqrt{2} + 1\right| + 1)$

25	26	27	28	29	30
a	b	c	c	b	c

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

من أسئلة الوزارة 2023

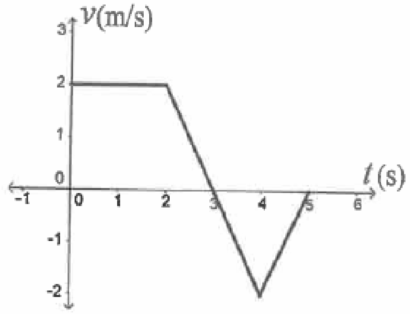
12) يُبيّن الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,5]$.
إذا بدأ الجُسيم حركته من $x = 3$ عندما $t = 0$ ، فإنّ الموقع النهائي للجُسيم هو:

a) 10 m

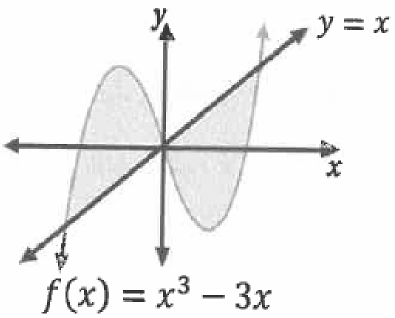
b) 5 m

c) 7 m

d) 6 m



b) معتمدًا الشكل المجاور، ما مساحة المنطقة المظللة؟



(10 علامات)

a) جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين الآتيين حول المحور x .

$f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = 2-(x-2)^2$ (12 علامة)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي

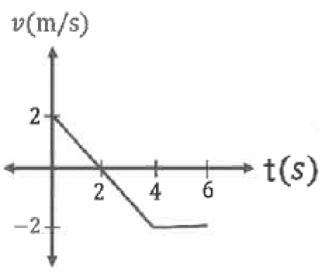
12) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 6]$. إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 10$ ، عندما $t = 0$، فإنّ موقع الجسم النهائي، هو:

a) 4

b) 6

c) 14

d) 18



b) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 12 - \frac{9}{x^2}$

حيث $x \geq 1$ (10 علامات)

a) أثبت أنّ حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$g(x) = (x-3)^2$, $f(x) = \frac{4}{x}$ حول المحور x يساوي $\frac{27}{5}\pi$ وحدة مكعبة. (12 علامة)

معادلات تفاضلية

من أسئلة الوزارة 2023

13) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $dy = \sec x \tan x \; dx$ ، الذي يحقق النقطة $(\pi, -4)$ هو:

a) $y = \sec x + 3$

b) $y = \sec x - 3$

c) $y = \tan^2 x + 5$

d) $y = \tan^2 x - 5$

b) تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2-3}{y^2} - 3x^2y + y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما.

جد قاعدة هذه العلاقة، إذا علمت أنّ منحناها يمر بالنقطة $(2, \sqrt[3]{3})$. (12 علامة)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي

13) إذا كانت: $\frac{dy}{dx} = \tan x - xe^{-x^2}$ ، فإنّ الحل الخاص الذي يحقق النقطة $(0, 0)$، هو:

a) $y = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$

b) $y = \ln|\cos x| + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$

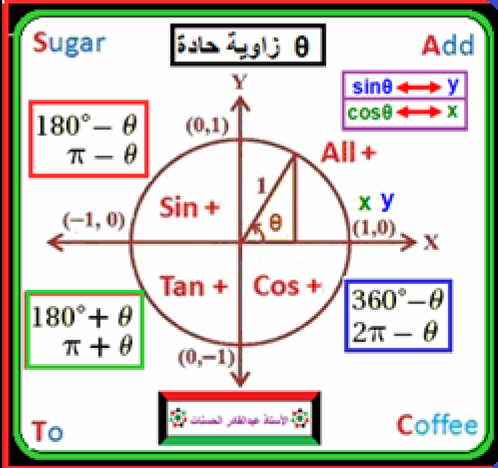
c) $y = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}$

d) $y = \ln|\cos x| - \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}$

b) حُلّ المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{dx} = x^2 - x^2e^{-y} + e^{-y} - 1$ (12 علامة)

متطابقات مثلثية

θ°	0°	30°	45°	60°
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

3) $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

4) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

5) $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \Rightarrow$ 6) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow$ 7) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

بقسمة كل حد في (5)على ($\cos^2\theta$)   بقسمة كل حد في (5)على ($\sin^2\theta$)

8) $\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$ 9) $\boxed{\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta}$

10) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

(جيب) الزاوية يساوي (جتا) متممتها والعكس

11) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(الجتا) لا يتأثر بالسالب

12) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b}$

$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta \Rightarrow$

13) $\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta}$

14) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b}$

$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \Rightarrow$ 15)

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= \boxed{1 - 2\sin^2\theta}$$
$$= \boxed{2\cos^2\theta - 1}$$

16) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

$\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) \Rightarrow$ 17) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

18) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

19) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

20) $\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

تــذكر $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1})$$

لا يحلــل : $a^2+b^2 = \dots$

فــك : $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

تحليــل : $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$

$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

قواعد التكامل غير المحدود

$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

$\int k^{ax+b}dx = \frac{1}{a\,Lnk}e^{ax+b}+c$

$\int a\,x^n dx = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1}+c \;,\; n\neq 1$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin x + c$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

$\int \sec x\ \tan x\, dx = \sec x + c$

$\int \csc x\ \cot x\, dx = -\csc x + c$

$\int \frac{1}{x}\, dx = Ln|x| + c$

$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}Ln|ax+b| + c$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln|f(x)| + c$

$\int \frac{\text{أي مقــدار بسـطه}}{\text{مشـــتقة لمقامــه}}\, dx = Ln|\text{المقــام}| + c$

الإزاحة $= s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$

المســـافة الكليـــة $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$