المرجع في الرياضيات

الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفصل الأول/ الوحدة الأولى

الدرس الرابع

الاشتقـــــاق الضمنــــي

+ اجابات اسئلة الوحدة الأولى

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

أعزائي الطلاب: لأي ملاحظات الرجاء ارسالها على رقم الواتس اب أعلاه

طبعة السنة 2025/2024

ولا تنسونا من دعائكم

نسخة مجانية ليستفيد منها الطلبة، فلا تتردد بنشرها لتعم الفائدة وكسب الأجر

مخطط الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني

- العلاقة الضمنية ومشتقتها
- ميل المماس لمنحني علاقة ضمنية
- معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية
- المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية
- المشتقة الثانية للعلاقات الوسيطية
- الاشتقاق اللوغاريتمي

تأسيس الدرس الثالث: (مهم جداً)

انواع الاقتران

- اقتران صريح
- اقتران ضمني

الفرق بين الاقتران الصريح والاقتران الضمني :

الاقتران الصريح: يكون الاقتران صريح إذا توافرت فيه جميع هذه الشروط:

1) إذا كانت y في طرف الاقتران لوحدها .

2) أن يكون معامل y يساوي 1 .

3) أن يكون أسّ y يساوي 1 .

الاقتران الضمني : يكون الاقتران ضمنياً إذا كان فيه إحدى الشروط التالية:

1) إذا كانت y ليست لوحدها في أحد أطراف الاقتران .

2) أن يكون معامل y أكثر من 1 .

3) أن يكون أسّ y أكثر 1 .

ملاحظة 1) هل يمكن تحويل الاقتران الضمني إلى اقتران صريح :

1) إذا كانت y ليست لوحدها في أحد أطراف الاقتران ، نستطيع إعادة ترتيب المعادلة بحيث تكون y في طرف لوحدها .

مثال: $y - 4x^2 + 7x - 5 = 0$ ، إعادة ترتيب $y = 4x^2 - 7x + 5$

2) إذا كان الاقتران ضمني بسبب معامل y أكثر من 1 نستطيع قسمة جميع حدود الاقتران على معامل y لنتخلص من المعامل .

مثال : $2y = 3x + 7$ ، نقسم جميع الحدود على 2 .

3) إذا كان الاقتران ضمني بسبب أسّ y أكثر من 1 نستطيع أخذ الجذر وحسب القوة المرفوعة لها y لنتخلص من أسّ y الأكثر من 1 .

مثال1) : $y^2 = 5x^3 + 1$ ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي الاقتران لنتخلص من الأس التربيعي .

مثال2) : $y^3 = 9x^2 + 4$ ، نأخذ الجذر التكعيبي لطرفي الاقتران لنتخلص من الأس التكعيبي .

4) وممكن أن تجتمع هذه الشروط معاً في اقتران واحد بأن تكون y ليست لوحدها ، وقوتها أكبر من 1 ، ومعاملها أكبر من 1 .

مثال) : $4y^2 + 2x^3 + 6 = 0$

بالتالي يصعب تحويل الاقتران ليصبح اقتران صريح، لذلك تم إيجاد طريقة لاشتقاق هذه الشكل من الاقترانات وهو ما يسمى بالاشتقاق الضمني.

إذاً الاشتقاق الضمني : هو عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية دون الحاجة لتحويلها إلى لعلاقة صريحة .

خطوات الاشتقاق الضمني :

1) اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x ، بمعنى :

أ) اذا كان الحد يحتوي على x فيشتق اشتقاق اعتيادي كما تعلمنا سابقاً .

ب) اما اذا كان الحد يحتوي على y فيشتق مرتين مرة بالنسبة للـ y ومرة ثانية بالنسبة للـ x ، (أي نشتق y بنفس طريقة اشتقاق x ، مع إضافة (ضرب $\frac{dy}{dx}$ بجانبها) .(*بمعنى كل حد فيه y يشتق كأشتقاق x وبجانبه نضع $\frac{dy}{dx}$*) . (هذه الفكرة الجوهرية في الاشتقاق الضمني).

ج) إذا كان الحد يحتوي على yx فنطبق عليها قاعدة الضرب .

2) ارتب حدود المعادلة بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر ، والحدود الأخرى في طرف المعادلة الأيسر .

3) أخرج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً من حدود طرف المعادلة الأيسر .

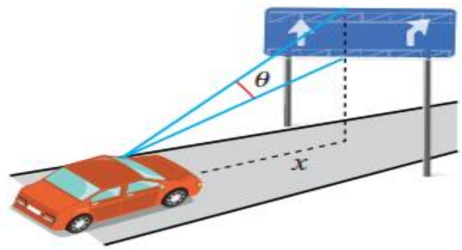
4) أحل المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم: (صفحة 56)

يقود سائق سيارته في اتجاه لافتته على طريق سريع كما في الشكل المجاور ، إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتته ، و x المسافة بينه وبين اللافتته بالأمتار ، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي :

$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$ **فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟**



$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(4x^2+1008)-(8x^2)}{(x^2+252)^2}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\left(\frac{4x}{x^2+252}\right)^2\right)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\frac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}}$$

العلاقة الضمنية ومشتقاتها:

مثال 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة57)

1) $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$

$$\cos x - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-\cos x}{3-\sin y}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة58)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 + y^2 = 13$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx}\ (10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx}\ \frac{(10y - \cos y)}{(10y - \cos y)} = \frac{-2}{(10y - \cos y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

مثال 2 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة58)

1) $2xy + y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}\ (y^3) = 0$$

$$2x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}\ (y^3) = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx}\ = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx}\ = -2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2)\ = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$

2) $\sin(x + y) = y^2 \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x + y)) = \frac{d}{dx}\ (y^2 \cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x + y)) = y^2\frac{d}{dx}\ (\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$\cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x\,(2y\frac{dy}{dx})$$

$$\cos(x + y) + \cos\,(x + y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y\ \cos x\ \frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x + y)\frac{dy}{dx} - 2y \cos\ x\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos\,(\,x + y) - 2y \cos\ \,x) = -y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)}{\cos\,(\,x + y) - 2y\ \cos x}$$

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2y\frac{d}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة60)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3\left((x)(2y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(1)\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\frac{(6xy+3y^2)}{(6xy+3y^2)}\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{(6xy+3y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy+3y^2}$$

2) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 2\left((x)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (y^3)(1)\right)$$

$$\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + y^3$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$\sec^2(x-y) - 2y^3 = 6xy^2\frac{dy}{dx} + \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6xy^2 + \sec^2(x-y)\right) = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(6xy^2+\sec^2(x-y))}{(6xy^2+\sec^2(x-y))} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{(6xy^2+\sec^2(x-y))}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2+\sec^2(x-y)}$$

3) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$2x = \frac{(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$$

$$2x(x+y)^2 = (x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x(x+y)^2 = \left(x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx}\right) - \left(x + x\frac{dy}{dx} - y - y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x(x+y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$$

$$2x(x+y)^2 = -2x\frac{dy}{dx} + 2y$$

$$2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x(x+y)^2}{x}$$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

الخطوات لإيجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية (إذا كانت النقطة (x, y) معطاة في السؤال) :

1) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران المعطى $\frac{dy}{dx}$.

2) إيجاد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة في السؤال ، بحيث يتم تعويض النقطة في كل من x و y.

الخطوات لإيجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية (إذا كانت x وحدها المعطاة في السؤال):

1) إيجاد النقطة (x, y) من خلال تعويض x في الاقتران المعطى لايجاد قيمة y .

2) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران المعطى $\frac{dy}{dx}$.

3) إيجاد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة في السؤال ، بحيث يتم تعويض النقطة في كل من x و y.

مثال 3: (صفحة60)

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $e^{2x}\ln y = x + y - 2$ عند النقطة (1،1) .

الخطوة 1): أجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y) + \ln y\frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(2)$$

$$e^{2x} \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times 2\,e^{2x} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{e^{2x}}{y} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (1،1)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1 - 2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{(1)} - 1}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{e^2 - 1}}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (1،1) هو : $\frac{1}{e^2-1}$

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة $y^2 = x$ عندما $x = 4$

الخطوة 1): أجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

الخطوة 2): أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$

أعوض قيمة x في العلاقة الأصلية لإيجاد قيمة y المقابلة لها:

$$y^2 = x$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

إذن، أجد الميل عند النقطتين: (4, 2) و (4,-2)

الميل عند النقطة $(4, 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

الميل عند النقطة $(4, -2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة61)

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

$$y^2 = \ln x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\left[2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\right] \times \frac{1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e(1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عند النقطة $x = 6$

الخطوة الأولى : إيجاد النقطة :

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$(y-3)^2 = 4(6-5)$$

$$(y-3)^2 = 4$$

$$(y-3) = \pm 2$$

$$y = 2+3$$

$$\boxed{y = 5}$$

$$y = -2+3$$

$$\boxed{y = 1}$$

النقاط هي : $(6, 5)$ و $(6, 1)$

الخطوة الثانية : إيجاد ميل المماس عند النقاط و $(6,1)$ و$(6,5)$:

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{2(y-3)}{2(y-3)}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = -1$$ ميل المماس عند النقطة الأولى هو

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 1$$ ميل المماس عند النقطة الثانية هو

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يمكن إيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية بإيجاد ميله، ثم التعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

الخطوات لإيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية (إذا كانت النقطة (x, y) معطاة في السؤال) :

1) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران المعطى $\frac{dy}{dx}$.

2) إيجاد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة في السؤال ، بحيث يتم تعويض النقطة في كل من x و y.

3) تعويض قيمة ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة ، و قيمة النقطة (x, y) الصورة العامة لمعادلة المستقيم وهي $y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$.

الخطوات لإيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية (إذا كانت x وحدها المعطاة في السؤال):

1) إيجاد النقطة (x, y) من خلال تعويض x في الاقتران المعطى لايجاد قيمة y .

2) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران المعطى $\frac{dy}{dx}$.

3) إيجاد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة في السؤال ، بحيث يتم تعويض النقطة في كل من x وy.

4) تعويض قيمة ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة المعطاة ، و قيمة النقطة (x, y) الصورة العامة لمعادلة المستقيم وهي $y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$.

مثال 4: (صفحة62)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

الخطوة 1): أجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

الخطوة 2): أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-1,2)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{5}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-1,2)$ هو : $\frac{4}{5}$

الخطوة 3): أجد معادلة المماس عند النقطة $\frac{dy}{dx}$ $(-1,2)$.

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)$$

$$y-(2)=\mathrm{m}(x-(-1))$$

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$$ معادلة المماس

أتحقق من فهمي: (صفحة63)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^3+y^3-3xy=17$ عند النقطة $(2,3)$.

الخطوة الأولى : أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2,3)$.

$$x^3+y^3-3xy=17$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3x\frac{dy}{dx}-3y(1)=0$$

بتعويض $x=2$ و $y=3$ ينتج أن :

$$3(2)^2+3(3)^2\frac{dy}{dx}-3(2)\frac{dy}{dx}-3(3)=0$$

$$12+27\frac{dy}{dx}-6\frac{dy}{dx}-9=0$$

$$(27-6)\frac{dy}{dx}=9-12$$

$$21\frac{dy}{dx}=-3$$

$$\frac{21}{21}\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{21}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)}=\frac{-1}{7}$$ ميل المماس

الخطوة 2 :أجد معادلة المماس عند النقطة $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2،3)}$.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + \frac{21}{7}$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7}$$ معادلة المماس

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

خطوات الحل :

1) يتم من خلال الاشتقاق الضمني الأول للعلاقة وينتج عنها حدود تتضمن $\frac{dy}{dx}$ للمشتقة الأولى، ومن ثم ترتيب العلاقة لتصبح $\frac{dy}{dx}$ بطرف بمعنى أن لها قيمة محددة، كما تعلمنا سابقا في خطوات الاشتقاق الضمني .

2) نشتق مرة ثانية لجميع الحدود ، بالتالي سينتج أيضاً حدود تتضمن $\frac{dy}{dx}$ في المشتقة الثانية .

3) نقوم بتعويض قيمة $\frac{dy}{dx}$ التي حصلنا عليها في المشتقة الأولى كل $\frac{dy}{dx}$ التي نتجت بعد الاشتقاق الثاني .

4) نحصل بالنتيجة على المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ بعد التبسيط والترتيب .

مثال 5: (صفحة63)

إذا كان : $2x^3 - 3y^3 = 8$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الخطوة 1): أجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = 0$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(y)}{(y^2)}$$

$$= \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy - x^2(\frac{x^2}{y})}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{2xy^2}{y} - \frac{x^4}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{2xy^2 - x^4}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y} \times \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

اتحقق من فهمي : (صفحة64)

إذا كان : $xy + y^2 = 2x$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$xy + y^2 = 2x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$(x+2y)\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\frac{(x+2y)}{x+2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(1 + \left(2 \times \frac{2-y}{x+2y}\right))}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(\frac{x+2y+4-2y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(\frac{x+4}{x+2y})\right)\left(\frac{1}{(x+2y)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right) - (x+2y) - (x+4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-x-2y-x-4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-2x-2y-4)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{-4x-4y-8+2xy+2y^2+4y}{(x+2y)^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{-4x-8+2xy+2y^2}{(x+2y)^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy-4x+2y^2-8}{(x+2y)^3}$$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

تذكير : (مشتقة المعادلات الوسطية)

ويتم استخدامها عندما يكون لدينا اقترانين مختلفين بدلالة نفس المتغير.

1) الاقتران الثاني : (y) بدلالة المتغير (t)بحيث يكون : $y = g\ (t)$

2) الاقتران الأول : (x) بدلالة المتغير (t) بحيث يكون : $x = h\ (t)$

ونريد إيجاد مشتقة (y) بدلالة المتغير (x) أي $\frac{dy}{dx}$

كيفية إيجاد المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية باستعمال الاشتقاق الضمني :

خطوات الحل :

1) نشتق الاقتران الأول $y = g\ (t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dt}$.

2) نشتق الاقتران الثاني $x = h\ (t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dx}{dt}$.

3) نقسم الاقتران الأول على الاقتران الثاني $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx}$.

4) نشتق الاقتران $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى (t) .

5) نجد المشتقة الثانية الوسيطية بقسمة المشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى (t)على المشتقة $\frac{dx}{dt}$ ،لنحصل على $\frac{d^2y}{dx^2}$

6) نعوض قيمة (t) المعطاة في السؤال في المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$.

مثال 6: (صفحة64)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$

$$x = t^3 + 3t^2 \quad , \quad y = t^4 + 8t^2$$

الخطوة 1: أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 4t^3 + 16t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4t^3+16t}{3t^2+6t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4t(t^2-4)}{3t(t+2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4(t+2)(t-2)}{3(t+2)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}(t-2)}$$

الخطوة 2: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t=1$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{4}{3}}{3t^2+6t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{3(3t^2+6t)}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{4}{3(3(1)^2+6(1))}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{4}{27}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة65)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$$

الخطوة 1: أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$y = t^3 - 2t^2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t}$$

$$x = 3t^2 + 1$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4t}{6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{6t} - \frac{4t}{6t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}}$$

الخطوة 2: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 2$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)} = \frac{1}{24}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

ويتم استخدام طريقة الاشتقاق اللوغاريتمي في الحالات التالية :

1) أن يكون الاقتران أسّي ، ويكون الاساس متغير والأسّ متغير.

2) أن يكون اقتران غير لوغاريتمي معقد يتضمن ضرباً أو قسمة ويطلب بالسؤال أن أشتقه باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي لتبسيط وتسهيل الحل ، على الرغم أني أستطيع اشتقاقه حسب قاعدة الاشتقاق الضرب أو القسمة ولكن سيصعب ويطول حل السؤال .

خطوات الحل :

1) إدخال $\ln$ على الطرفين (الأيمن والأيسر) .

2) نستخدم قوانين اللوغاريتمات : بحيث من الممكن أن نستخدم أكثر من قانون لنفس الاقتران ليتم تبسيط الاقتران بأبسط صورة قبل الاشتقاق.

- قانون القوة: $\ln x^p = p \ln x$.

- قانون القسمة: $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

قانون الضرب: $\ln xy = \ln x + \ln y$

3) نشتق الطرفين بحيث يتم تطبيق قاعدة اشتقاق اللوغاريتم ،وهي :

$f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ ، فإن المشتقة : $f'(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$).

4) نعوض y التي نتجت من الاشتقاق بـقيمة $f(x)$ المعطاة في السؤال .

مثال 7: (صفحة66)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

$1)\ y = x^x$

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$

$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$

$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$

$2)\ y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$\ln y = 2\ \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ (x^2+9)$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left((2\ \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ (x^2+9)\right)$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left((2\ \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ \ln\ (x^2+9)\right)$

$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9}$

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(x-1)^2(x^2 + x + 18}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

أتحقق من فهمي : (صفحة67)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

$1)\ y = x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x\right] \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln x$$

$$2)\ y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

$$y=\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)-\ln(x^4+1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4x^3}{2(x^4+1)}$$

$$\left[\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{(x^4+1)}\right]\quad\times y$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{(x^4+1)}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}\right)$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة67)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-4y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$$x^{-2} + y^{-2} = \frac{1}{10}$$

$$-2x^{-3} - 2y^{-3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left[-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}\right] \times -\frac{y^3}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3}$$

3) $(x^2+y^2)^2 = 50(x^2-y^2)$

$$(x^2+y^2)^2 = 50x^2 - 50y^2$$

$$2(x^2+y^2)(2x+2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$(2x^2+2y^2)(2x+2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4x^3 + 4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4xy^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} + 100y\frac{dy}{dx} = 100x - 4x^3 - 4xy^2$$

$$\left[4\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 100x - 4x^3 - 4xy^2\right] \quad \div 4$$

$$\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$$

4) $e^x y = xe^y$

$$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x) = (x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$$

$$e^x\frac{dy}{dx} + ye^x = xe^y\frac{dy}{dx} + e^y$$

$$e^x\frac{dy}{dx} - xe^y\frac{dy}{dx} = e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$$

5) $3^x = y - 2xy$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 2x) = 3^x \ln 3 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3^x \ln 3 + 2y}{1 - 2x}$$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right] \times \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

7) $x = \sec\frac{1}{y}$

$$1 = \sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{(y.0) - (1.\frac{dy}{dx})}{y^2}$$

$$1 = -\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\left[1 = -\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}\right] \times -y^2$$

$$\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{\cos\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \cot\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,y^2\ \cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

$$2(\sin \pi x + \cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$\frac{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx})}{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)} = \frac{0}{(2\sin \pi x + 2\cos \pi y)}$$

$$\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi\cos\pi x}{\pi\sin\pi y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\pi x}{\sin\pi y}$$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$\frac{(x.x) + (y^2.y^2)}{xy^2} = 5$$

$$x^2 + y^4 = 5xy^2$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 5(x.2y\frac{dy}{dx} + y^2)$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 10xy\frac{dy}{dx} + 5y^2$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 10xy\frac{dy}{dx} = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y^2 - 2x}{4y^3 - 10xy}$$

10) $x + y = \cos(xy)$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy)((x)(\frac{dy}{dx}) + (y)(1))$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy)(x\frac{dy}{dx} + y)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -x\sin xy\frac{dy}{dx} - y\sin xy$$

$$x\sin xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -1 - y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x\sin xy + 1) = -1 - y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x\sin xy + 1) = -(1 + y\sin xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y\sin xy}{x\sin xy + 1}$$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(x + y)(1 + \frac{dy}{dx})}{(x + y)^2}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(1 + \frac{dy}{dx})}{(x + y)}$$

$$(2x + 2y\frac{dy}{dx})(x + y) = 2(1 + \frac{dy}{dx})$$

$$2x^2 + 2xy + 2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2\frac{dy}{dx} = 2 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 2 - 2x^2 - 2xy$$

$$2\frac{dy}{dx}(xy + y^2 - 1) = 2 - 2x^2 - 2xy$$

$$\frac{2\frac{dy}{dx}(xy + y^2 - 1)}{2(xy + y^2 - 1)} = \frac{2 - 2x^2 - 2xy}{2(xy + y^2 - 1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$(\sin x)(-\sin y\frac{dy}{dx}) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$(-\sin x \sin y\frac{dy}{dx}) + 5\frac{dy}{dx} = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} - (\sin x \sin y - 5) = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx}\,\frac{-(\sin x \sin y - 5)}{-(\sin x \sin y - 5)} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-(\sin x \sin y - 5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-\sin x \sin y + 5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + (\cos y)(\cos x)}{\sin x \sin y - 5}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة :

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , x = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2(\frac{1}{2})y - 1 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$2y - 1 = 0$$

$$2y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

$$y + 1 = 0$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+\left(2x.\frac{dy}{dx}\right)+(2y.1)=0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}(4y+2x)=-2y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(4y+2x)}{4y+2x}=\frac{-2y}{4y+2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{4y+2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2y+x}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{-y}{2y+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}$$

$$\boxed{=-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{1}{2},-1\right)=\frac{-y}{2y+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-(-1)}{2(-1)+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{-2}{3}$$

$$\boxed{= \frac{-2}{3}}$$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , y = 1$

$$(1)^3 + 2x^2 = 11(1)$$

$$1 + 2x^2 = 11$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{10}{2}$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 4x = 11 \frac{dy}{dx}$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 11 \frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 11) = -4x$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{(3y^2 - 11)}{3y^2 - 11} = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(\sqrt{5},1) = \frac{-4(\sqrt{5})}{3(1)^2-11}$$

$$= \frac{-4(\sqrt{5})}{8}$$

$$= \boxed{\frac{-(\sqrt{5})}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(-\sqrt{5},1) = \frac{-4(-\sqrt{5})}{3(1)^2-11}$$

$$= \frac{-4(-\sqrt{5})}{8}$$

$$= \boxed{\frac{(\sqrt{5})}{2}}$$

أجد ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25 \quad ,(3,-4)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(3,-4) = \frac{-x}{y}$$

$$\boxed{= \frac{-3}{4}}$$

16) $x^2y = 4(2-y) \quad ,(2,1)$

$$(x^2\frac{dy}{dx}) + (y.2x) = 4(-\frac{dy}{dx})$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+4) = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{-2xy}{x^2+4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2+4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(2,1) = \frac{-2(2)(1)}{(2)^2+4}$$

$$= \frac{-4}{4+4}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}}$$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e+1 \quad ,(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$(e^{\sin x}).(\cos x) + (e^{\cos y}).(-\sin y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y} = \frac{e^{\cos y}\sin y}{e^{\cos y}\sin y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x - \cos y}\cos x}{\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{(1)-(0)}(0)}{1}$$

$$= 0$$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \quad , (8, 1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(8, 1)$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{8}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{1}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3(2)} + \frac{2}{3(1)}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\right] \quad \times\frac{3}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{6}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (8,1) = -\frac{1}{2}}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

19) $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , (-4,3)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$2x + (x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x+2y)}{x+2y} = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (-4,3) = -\frac{2(-4)+(3)}{(-4)+2(3)}$$

$$= -\frac{-8+3}{-4+6}$$

$$= -\frac{-5}{2}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (-4,3) \quad = \frac{5}{2}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{20}{2} + 3$$

$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

20) $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \quad , (1, 0)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$x + y - 1 = \ln x^2 + \ln y^2$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + \frac{dy}{dx})(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + y^2 - 2y} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=\frac{2(1)-(1)^2-(0)^2}{(1)^2+(0)^2-2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=\frac{2-1}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(1,0)=1$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)$$

$$y-0=1(x-1)$$

$$y=x-1$$

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

21) $x+y=\sin y$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y).(1)=\cos y\,\frac{dy}{dx}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(1-\cos y)}{1-\cos y}=\frac{-1}{1-\cos y}=\frac{1}{-1+\cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{-1+\cos y}$$

$$=(-1+\cos y)^{-1}$$

$$=-(-1+\cos y)^{-2}\,(-\sin y)\,\frac{dy}{dx}$$

$$= (-1+\cos y)^{-2}\,(\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{(\sin y)\dfrac{1}{-1+\cos y}}{(-1+\cos y)^2}$$

$$= \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^2.(-1+\cos y)}$$

$$= \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$$

22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$12y^2\frac{dy}{dx} = 12x$$

$$\frac{12y^2\dfrac{dy}{dx}}{12y^2} = \frac{12x}{12y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{y^2}$$

$$= \frac{(y^2).(1)-(x).2y(\dfrac{dy}{dx})}{(y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\dfrac{x}{y^2}}{y^4}$$

$$= \frac{y - 2x\dfrac{x}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{y - \dfrac{2x^2}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{\dfrac{y^3 - 2x^2}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{y^3 - 2x^2}{y^3 . y^2}$$

$$= \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

23) $xy + e^y = e$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + \frac{dy}{dx}e^y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + e^y) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x + e^y).\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - (y).(1 + e^y\dfrac{dy}{dx})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y).\left(\dfrac{y}{x + e^y}\right) + (y).(1 + \dfrac{-y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y).\left(\dfrac{y}{x + e^y}\right) + (y).(\dfrac{x + e^y - y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x-6)(y+4)=2$ عند النقطة $(7,-2)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x-6)(y+4)=2$$

$$(x-6)\left(\frac{dy}{dx}+0\right)+(y+4)(1+0)=0$$

$$(x-6)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y+4)(1)=0$$

$$x\frac{dy}{dx}-6\frac{dy}{dx}+y+4=0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x-6)}{x-6}=\frac{-y-4}{x-6}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4}{x-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-\frac{-2+4}{7-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-\frac{2}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|(7,-2)=-2$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$$m_1=-\frac{1}{m}$$

$$m_1=-\frac{1}{-2}$$

$$m_1=\frac{1}{2}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

25) اثبت أن لمنحنى العلاقة : $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين ، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

1) الخطوة الأولى : ايجاد مشتقة العلاقة $\frac{dy}{dx}$

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$

$$6x + (2x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (2y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x + 2y) = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(2x + 2y)}{2x + 2y} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - y}{x + y}$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر

$$\frac{-3x-y}{x+y}=0$$

لكي يكون الناتج صفر يجب ان يكون البسط يساوي صفر

$$-3x-y=0$$

$$y=-3x$$

3) نعوض قيمة $y=-3x$ في العلاقة الرئيسية لإيجاد قيمة x

$$3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6$$

$$3x^2-6x^2+9x^2=6$$

$$\frac{6x^2}{6}=\frac{6}{6}$$

$$x^2=1$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$

$$\boxed{x=\pm 1}$$

4- نعوض قيمتي $x=\pm 1$ في العلاقة $y=-3x$ لإيجاد قيمة y

$$y=-3(1)=\boxed{-3}$$

$$y=-3(-1)=\boxed{3}$$

إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1,-3),(-1,3)$

26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى $x + y^2 = 1$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x + 2y = 0$

1- الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$x + y^2 = 1$$

$$1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$x + 2y = 0$$

$$1 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{2}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

3- الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{-1}{2y} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

$$\boxed{y = 1}$$

4- الخطوة الرابعة : نعوض قيمة $y = 1$ في علاقة المنحني $x + y^2 = 1$

$$x + y^2 = 1$$

$$x + (1)^2 = 1$$

$$x + 1 = 1$$

$$x = 1 - 1$$

$$\boxed{x = 0}$$

اذن النقطة المطلوبة هي $\boxed{(0, 1)}$

27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى : $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم : $y + 3x - 5 = 0$

1- الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$y^3 = x^2$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{3y^2}{3y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$y + 3x - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$\frac{dy}{dx} = -3$ ميل المستقيم

$\frac{1}{3}$ ميل العمودي المستقيم

3- الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3}$$

$$6x = 3y^2$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{3y^2}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

4- الخطوة الرابعة : نعوض قيمة $x = \frac{1}{2}y^2$ في علاقة المنحني $y^3 = x^2$

$$y^3 = x^2$$

$$y^3 = (\frac{1}{2}y^2)^2$$

$$y^3 = \frac{1}{4}y^4$$

$$y^3 - \frac{1}{4}y^4 = 0$$

$$y^3(1 - \frac{y}{4}) = 0$$

إما $y^3 = 0 \quad \rightarrow \boxed{y = 0}$

أو $1 - \frac{y}{4} = 0$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$\boxed{y = 4}$$

4- الخطوة الخامسة : نعوض قيم y في $x = \frac{1}{2}y^2$ لإيجاد قيم x

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

$$x = \frac{1}{2}(0)^2$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x = \frac{1}{2}(4)^2$$

$$x = \frac{1}{2}16$$

$$\boxed{x = 8}$$

اذن النقاط المطلوبة هي $\boxed{(8,4)}$ و $\boxed{(0,0)}$

28) إذا كان : $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=10$ ، حيث $x \neq y \neq 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$$

$$\frac{\frac{(y.1)-(x.\frac{dy}{dx})}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{\left(x.\frac{dy}{dx}\right)-(y.1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\left[\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\right]\times\frac{2}{1}$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)(y^2\sqrt{\frac{x}{y}})$$

$$x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}(xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}})=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}\right)=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}}$$

29) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $y = x^{\frac{1}{x}} , x > 0$ ، التي يكون عندها ميل المماس صفراً .

1- الخطوة الأولى: ايجاد ميل المماس للاقتران

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\ln y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \ln x)}{x^2}}$$ ميل المماس

2- الخطوة الثانية: مساواة ميل المماس بالصفر

$$\frac{y(1 - \ln x)}{x^2} = 0$$

لكي يكون الناتج يساوي صفر يجب ان يكون البسط يساوي صفر بالتالي:

$$y(1 - \ln x) = 0$$

$$\frac{y(1 - \ln x)}{y} = \frac{0}{y}$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$\boxed{x = e}$$

3- الخطوة الثالثة: نعوض قيم x في $y = x^{\frac{1}{x}}$ لإيجاد قيم y

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{e}}}$$

4- النقطة المطلوبة هي $(e, e^{\frac{1}{e}})$

30) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $x^2 + y^2 = 100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

1) الخطوة الأولى: ايجاد ميل المماس للاقتران

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$ ميل المماس

2) الخطوة الثانية : مساواة ميل المماس بـ $\frac{3}{4}$

$$\frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$3y = -4x$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{-4x}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{-4x}{3}}$$

3) الخطوة الثالثة : نعوض المعادلة y في الاقتران لإيجاد قيم x

$$x^2 + (\frac{-4x}{3})^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$\left[\frac{25}{9}x^2 = 100\right] \quad \times \frac{9}{25}$$

$x^2 = 36$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$

$\boxed{x = \pm 6}$

$\boxed{x = 6}$

$y = \frac{-4(6)}{3}$

$y = \frac{-24}{3}$

$\boxed{y = -8}$

$\boxed{x = -6}$

$y = \frac{-4(-6)}{3}$

$y = \frac{24}{3}$

$\boxed{y = 8}$

4) الخطوة الرابعة : النقاط المطلوبة هي $\boxed{(-6, 8)}$ و $\boxed{(6, -8)}$

يمثل الاقتران $t > 0$ ، $s(t) = t^{\frac{1}{t}}$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

31) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه.

الخطوة الأولى: ايجاد مشتقة اقتران موقع الجسيم

$s(t) = t^{\frac{1}{t}}$

$\ln s(t) = \ln t^{\frac{1}{t}}$

$\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + \ln t^{\frac{1}{t}} (-\frac{1}{t^2})$

$= \frac{1 - \ln t}{t^2}$

$$v(t) = s(t) \times \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$v(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$\ln v(t) = \ln(t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2})$$

$$\ln v(t) = \ln t^{\frac{1}{t}} + \ln(1-\ln t) - \ln t^2$$

$$\ln v(t) = \frac{1}{t}\ln t + \ln(1-\ln t) - 2\ln t$$

$$a(t) = v(t)(\frac{1-\ln t}{t^2} + \frac{-\frac{1}{t}}{1-\ln t} - \frac{2}{t})$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2}(\frac{1-\ln t}{t^2} - \frac{1}{t(1-\ln t)} - \frac{2}{t})$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}}(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1-\ln t)}{t^3})$$

32) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

$$v(t) = t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2} = 0$$

$$1 - \ln t = 0$$

$$\ln t = 1$$

$$t = e$$

$$a(t) = t^{\frac{1}{t}}(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1-\ln t)}{t^3})$$

$$a(t) = e^{\frac{1}{t}}(\frac{(1-\ln e)^2}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{2(1-\ln e)}{e^3})$$

$$a(t) = -e^{\frac{1}{e}-3}\ m/s^2$$

33) إذا كان $y = \ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني :

$y = \ln x \ , x > 0$

بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن:

$e^y = x$

باشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة إلى x ينتج أن :

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

بتعويض $e^y = x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

34) $y = (x^2+3)^x$

$$\ln y = x \ln(x^2+3)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)\right] \quad \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$$

35) $y=\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

$$\ln y=\ln\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

$$\ln y=\ln(x^4+1)+\ln\left(\sqrt{x+2}\right)-\ln(2x^2+2x+1)$$

$$\ln y=\ln(x^4+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\ln(2x^2+2x+1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{1}{2x+4}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{1}{2x+4}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right]\quad\times\frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{1}{2x+4}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$$

36) $y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$$\ln y=\ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x^2(x+1)(x+2))$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right]\quad\times\frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

37) $y = x^{\sin x}, x > 0$

$\ln y = (\sin x)\ln x$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sin x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\cos x)(\ln x)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sin x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(\cos x)\right] \quad \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة :

38) $x = \sin t, \; y = \cos t, \; t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{\frac{1}{\sec t}}$$

$$= -\sec^2 t \,.\, \sec t$$

$$= -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3 \frac{\pi}{4}$$

$$= -\sec^3 \frac{\pi}{4}$$

$$= -(\frac{2}{\sqrt{2}})^3 . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(\frac{2\sqrt{2}}{2})^3 = -\sqrt{2}^3$$

$$= -(2^3)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{8} = -\sqrt{4}.\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

39) $x = e^{-t},\ y = t^3 + t + 1\ ,\ t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2-1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t)+(-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-6e^t t - 3e^t t^2 + e^t}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{e^t(-6t-3t^2-1)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{e^t e^t(-6t-3t^2-1)}{-1}$$

$$= e^{2t}(6t+3t^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^{2t}(6t+3t^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^{2(0)}(6(0)+3(0)^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^0(1) = 1$$

إذا كانت العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً .

40) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول .

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$$y = x$$

$$x^3 + (x)^3 = 6x(x)$$

$$x^3 + x^3 = 6x^2$$

$$2x^3 = 6x^2$$

$$\frac{2x^3}{2} = \frac{6x^2}{2}$$

$$x^3 = 3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

إما $x^2 = 0$

$$\boxed{x = 0}$$

أو $(x-3) = 0$

$$\boxed{x = 3}$$

بما أن $y = x$ فإن $y = 3$ بالتالي نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$

2- الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس للمنحنى

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = (6x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (6y).(1)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{3y^2 - 6x}{3y^2 - 6x}\right) = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{2(3)-(3)^2}{(3)^2-2(3)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{6-9}{9-6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{-3}{3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=-1 \quad \text{ميل المماس}}$$

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس للمنحنى

$$y-y_1=\mathrm{m}_1(x-x_1)$$

$$y-3=-1(x-3)$$

$$y-3=-x+3$$

$$y=-x+3+3$$

$$\boxed{y=-x+6 \quad \text{معادلة المماس}}$$

41) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول ، بحيث يكون مماس المنحنى أفقياً.

الخطوة الأولى : بما أن المماس أفقي نساوي المشتقة بالصفر ، فإن $\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}=0$$

$$2y-x^2=0$$

$$2y = x^2$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$$

الخطوة الثانية : نعوض قيمة $y = \frac{1}{2}x^2$ في العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ لإيجاد قيم x

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$x^3 + (\frac{1}{2}x^2)^3 = 6x(\frac{1}{2}x^2)$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x(x^2)$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\left[\frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0\right] \quad \times \frac{8}{1}$$

$$x^6 - 16x^3 = 0$$

$$x^3(x^3 - 16) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$x^3 - 16 = 0$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{16}$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{16}}$$

الخطوة الثالثة : نعوض قيم x المستخرجة في العلاقة $y = \frac{1}{2}x^2$ لإيجاد قيم y

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$$y=\frac{1}{2}(0)^2$$

$$\boxed{y=0}$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي : $\left(\sqrt[3]{16},\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

42) مصباح : يبين الشكل المجاور مصباحاً على ارتفاع h وحدة من المحور x ، إذا وقعت النقطة $(1.25,0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح ، الذي يمس منحنى العلاقة : $x^2+y^2=1$ فأجد ارتفاع المصباح h .

$$x^2+y^2=1$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

لتكن $P(1.25,0)$ نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة :

$$y^2=1-x^2$$

$$\boxed{m=\frac{0-y}{1.25-x}=-\frac{x}{y}}$$

$$y^2=1.25x-x^2$$

$$1-x^2=1.25x-x^2$$

$$1=1.25x-x^2+x^2$$

$$\frac{1.25}{1.25}x=\frac{1}{1.25}$$

$$\boxed{x=\frac{4}{5}}$$

$$y^2=1-x^2$$

$$y^2 = 1-(\frac{4}{5})^2$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}}$$

$$y = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\boxed{y = \frac{3}{5}}$$

فتكون النقطة $P(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

ميل المماس عند النقطة P :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})} = -\frac{4}{3}$$

$$m = \frac{h-0}{-2-\frac{5}{4}}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{h-0}{-2-\frac{5}{4}}$$

$$3h = 8+5$$

$$\frac{3h}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{13}{3}}$$

ارتفاع المصباح يساوي $h = \frac{13}{3}$ وحدة

مهارات التفكير العليا: : (صفحة69)

تبرير : إذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجب عن الاسئلة الأربعة الآتية تباعاً :

42) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

43) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة : $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية : $x = \sec t\,, y = \tan t$ ، حيث : $0 \le t \le 2\pi$.

استعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y = \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

44) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان ، مبرراً إجابتي .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان ، لأنه من نص السؤال : $x = \sec t$ و $y = \tan t$
ومنه فإن $\frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$

45) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة 2.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$(2y)^2 - y^2 = 1$$

$$4y^2 - y^2 = 1$$

$$3y^2 = 1$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = 2\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{x = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = -2\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{x = -\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

النقطة التي يكون عندها ميل المماس 2 هي : $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

46) تبرير : إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبرراً إجابتي .

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\quad\times\frac{2\sqrt{y}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1,y_1) فيكون ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس :

$$x=0\ \rightarrow y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(0-x_1)$$

$$y-y_1=\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$\boxed{y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

$$y = 0 \ \rightarrow 0 - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$-y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$\left[\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}\right] \ \times \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{y_1}}$$

$$x = \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1$$

$$\boxed{x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

مجموع المقطعين:

$$y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$= y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1$$

$$= \left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{k}\right)^2$$

$$= k$$

47) تحد : إذا كان مماس منحنى الاقتران : $y=(x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4,1)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة ΔOBC حيث O نقطة الاصل .

$$y=(x-3)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\ln(x-3)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\sqrt{x}\ln(x-3)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sqrt{x})\left(\frac{1}{(x-3)}\right)+\ln(x-3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right]\quad\times y$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=(x-3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{(x-3)}+\frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=(4-3)^{\sqrt{4}}\left(\frac{\sqrt{4}}{(4-3)}+\frac{\ln(4-3)}{2\sqrt{4}}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=(1)^{2}\left(\frac{\sqrt{4}}{1}+\frac{\ln(1)}{2(2)}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=\left(2+\frac{0}{4}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)}=2$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 4)$$

$$y - 1 = 2x - 8$$

$$y = 2x - 8 + 1$$

$$y = 2x - 7$$

المقطع x والمقطع y للمماس :

$$x = 0 \ \rightarrow \ y = 2(0) - 7$$

$$y = -7$$

$$y = 0 \ \rightarrow \ 0 = 2x - 7$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x = 3.5$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي :

$$A = \frac{1}{2} \times x \times y$$

$$A = \frac{1}{2} \times 3.5 \times |-7|$$

$$A = 12.25$$

اختبار نهاية الوحدة:

1) يمثل الاقتران $s(t)=3+\sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم ، إحدى الآتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم المتجهة صفراً :

$$s(t)=3+\sin t$$

$$v(t)=\cos t=0$$

a) $t=0$ b) $t=\frac{\pi}{4}$ c) $\boxed{t=\frac{\pi}{2}}$ d) $t=\pi$

2) إذا كان: $y=uv$ ، وكان: $u(1)=2, \acute{u}(1)=3, v(1)=-1, \acute{v}(1)=1$ فإن $\acute{y}(1)$ تساوي:

$$y=uv$$

$$\acute{y}=(u.\acute{v})+(v.\acute{u})$$

$$\acute{y}=(2.1)+(-1.3)$$

$$\acute{y}=(2)+(-3)$$

$$\acute{y}=-1$$

a) 1 b) $\boxed{-1}$ c) 1 d) 4

3) إذا كان $f(x)=x-\frac{1}{x}$ ، فإن $\acute{\acute{f}}(x)$ هو :

$$f(x)=x-\frac{1}{x}$$

$$f(x)=x-x^{-1}$$

$$\acute{f}(x)=1+x^{-2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=-2x^{-3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=-\frac{2}{x^3}$$

a) $1+\frac{1}{x^2}$ b) $1-\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $\boxed{-\frac{2}{x^3}}$

4) إذا كان $y = \tan 4t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو:

$$y = \tan 4t$$
$$\acute{y} = \sec^2 4t \ (4)$$
$$\acute{y} = 4\sec^2 4t$$

a) $4\sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$ c) $\sec^2(4t)$ d) $\boxed{4\sec^2(4t)}$

5) إذا كان $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

$$y^2 - x^2 = 1$$
$$2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$
$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2}$

6) إذا كان $f(x) = \log\,(2x-3)$ ، فإن $\acute{f}(x)$ هو:

$$f(x) = \log\,(2x-3)$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1}{(2x-3)\ln 10}(2)$$
$$\acute{f}(x) = \frac{2}{(2x-3)\ln 10}$$

a) $\boxed{\frac{2}{(2x-3)\ln 10}}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$ c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7) إذا كان $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

$$y = 2^{1-x}$$

$$\acute{y} = 2^{1-x}(-1)$$

$$\acute{y} = -2^{1-x}\ln 2$$

$$\acute{y} = -2^{1-2}\ln 2$$

$$\acute{y} = -2^{-1}\ln 2$$

$$\acute{y} = -\frac{\ln 2}{2}$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $\boxed{-\frac{\ln 2}{2}}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

8) $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

$$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = e^x + \frac{\sqrt{x}}{2}e^x + \sqrt{x}e^x + xe^x + x\sqrt{x}e^x$$

$$\acute{f}(x) = e^x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right)$$

$$\acute{f}(x) = e^x\left(1 + \frac{3\sqrt{x}}{2} + x + x\sqrt{x}\right)$$

9) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)\,(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

10) $f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$

$$f(x) = x^{-1} - 12\sec x$$

$$f'(x) = -x^{-2} - 12\sec x \tan x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x \tan x$$

11) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{e^x\,(\ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\,(\frac{x\ln x - 1}{x})}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\,(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

$$f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8}$$

$$f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - (\ln x)(4x^3)}{x^8}$$

$$f'(x) = \frac{1 - (\ln x)(4)}{x^5}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$$

13) $f(x) = 5^{2-x}$

$$\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$$

$$\ln f(x) = (2-x)\ln 5$$

$$\ln f(x) = \ln 10 - x\ln 5$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 0 - \ln 5$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$$

14) $f(x) = 10\sin 0.5x$

$$f'(x) = 10\cos 0.5x\,(0.5)$$

$$f'(x) = 5\cos 0.5x$$

15) $f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{2}{x^4}-\frac{3x^3}{x^4}-\frac{6x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3-2x+2x^2-2-3x^3-6x^2-3x-6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-x^3-4x^2-5x-8}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^3+4x^2+5x+8}{x^4}\right)$$

16) $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

$f'(x) = (e^{-1.5x})(-\sin x^2)(2x) + (\cos x^2)(e^{-1.5x})(-1.5)$

$f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$

$f'(x) = (-e^{-1.5x})(2x \sin x^2 + 1.5 \cos x^2)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 2$

وكان : $g'(2) = 2$, $g(2) = 1$, $f'(2) = -4$, $f(2) = 3$ فأجد كلا مما يأتي :

17) $f(g)'\ (2)$

$f(g)'\ (2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2)$

$f(g)'\ (2) = (3 \times 2) + (1 \times -4)$

$f(g)'\ (2) = 6 - 4$

$f(g)'\ (2) = -2$

18) $f(\frac{f}{g})'\ (2)$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{g(2)f'(2) - f(2)g'(2)}{g^2(2)}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{(1 \times -4) - (3 \times 2)}{(1)^2}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{-4 - 6}{1}$$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2) = -10$$

19) $(3f - 4fg)'\ (2)$

$= 3f'(2) - 4(fg)'(2)$

$= 3(-4) - 4(2)$

$= -12 - 8$

$= -20$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^7 \ln x$

$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$

$f'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$

$f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5)$

$f''(x) = 6x^5 + 7x^5 + 42x^5 \ln x$

$f''(x) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$

21) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$f'(x) = \frac{(x)\,(-\sin x) - (\cos x)(1)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$

$f''(x) = \frac{(x)(-\cos x) - (-\sin x)(1)}{x^2} - \frac{(x^2)(-\sin x) - (\cos x)(2x)}{x^4}$

$f''(x) = \frac{-x\cos x + \sin x}{x^2} + \frac{x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$

$f''(x) = \frac{-x^3\cos x + x^2\sin x}{x^4} + \frac{x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$

$f''(x) = \frac{-x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$

$f''(x) = \frac{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^3}$

22) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(1) - (x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(2(1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left((1+\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} - \left(\frac{4+4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}-4-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$$

23) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x - 2x^3) - (2x - 2x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x - 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)(-4) - (-4x)(2(2x)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4 - 4x^2 + 16x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{16x^2 - 4}{(1+x^2)^3}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة:

24) $f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad , x = 1$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f(1) = \frac{(1)^2}{1+1}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(1\,,\frac{1}{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x)(2x) - (x^2)(1)}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$$\acute{f}(1) = \frac{(1)^2 + 2(1)}{(1+1)^2} = \frac{1+2}{(2)^2}$$

$\boxed{\acute{f}(1) = \frac{3}{4}}$ ميل المماس

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x-1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$\boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}$ معادلة المماس

25) $f(x)=\frac{x^2}{\cos x} \quad , x=\frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi^2}{16}.\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(\cos x)(2x)-(x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\cos\frac{\pi}{4})\left(2(\frac{\pi}{4})\right)-(\frac{\pi}{4})^2(-\sin\frac{\pi}{4})}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\cos\frac{\pi}{4})\left(2(\frac{\pi}{4})\right)-(\frac{\pi}{4})^2(-\sin\frac{\pi}{4})}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})\left(\frac{\pi}{2}\right)-(\frac{\pi^2}{16})(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{8\pi}{16\sqrt{2}}+\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}\right)\frac{2}{1}$$

$$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}} \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = \frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})$$

26) $f(x) = \ln(x+5) \quad , x = 0$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس :

$$f(x) = \ln(x+5)$$

$$f(0) = \ln(0+5)$$

$$f(0) = \ln 5$$

نقطة التماس هي $\boxed{(0 , \ln 5)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \ln(x+5)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0+5}$$

$\boxed{f'(0) = \frac{1}{5}}$ ميل المماس

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x - 0)$$

$\boxed{y = \frac{1}{5}x + \ln 5}$ معادلة المماس

27) $f(x) = \sin x + \sin 3x \quad , x = \frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$f(x) = \sin x + \sin 3x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin(\frac{3\pi}{4})$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f(x) = \sin x + \sin 3x$$

$$f'(x) = \cos x + \cos 3x\,(3)$$

$$f'(x) = \cos x + 3\cos 3x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos 3\frac{\pi}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{ميل المماس}}$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{4}$$

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(\frac{\pi + 4}{4}\right)$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

28) $x = t^2 \quad , y = t + 2 , t = 4$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$x = t^2$$

$$x = (4)^2$$

$$\boxed{x = 16}$$

$$y = t + 2$$

$$y = 4 + 2$$

$$\boxed{y = 6}$$

نقطة التماس هي $\boxed{(16 , 6)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{2(4)}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{8}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16)$$

$$y = \frac{1}{8}x - 16\left(\frac{1}{8}\right) + 6$$

$$y = \frac{1}{8}x - 2 + 6$$

$$y = \frac{1}{8}x + 4$$

29) $x = 4\cos t \quad , y = 3\sin t \ , \quad t = \frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$x = 4\cos t$$

$$x = 4\cos\frac{\pi}{4}$$

$$x = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{2}}$$

$$y = 3\sin\frac{\pi}{4}$$

$$y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(2\sqrt{2}\,, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = -4\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t}{-4\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}(1)$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2})$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}x + 2\sqrt{2}(\frac{3}{4})$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$$

إذا كان : $y = x\ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y = x\ln x$$

$$\acute{f}(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$

$$\acute{f}(x) = 1 + \ln x$$

$$\acute{f}(1) = 1 + \ln 1$$

$\boxed{\acute{f}(1) = 1 \quad \text{ميل المماس}}$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$\boxed{y = x - 1 \quad \text{معادلة المماس}}$

31) أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها.

$$\acute{f}(x) = 2$$
$$1 + \ln x = 2$$

$$\ln x = 2 - 1$$

$$\ln x = 1$$

$$\boxed{x = e}$$

$$y = x\ln x$$

$$y = e\ln e$$

$$\boxed{y = e}$$

نقطة المطلوبة هي $\boxed{(e\,, e)}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

32) $x(x+y)=2y^2$

$$x^2+xy=2y^2$$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y=4y\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=4y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+$$

$$4y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=2x+y$$

$$\frac{dy}{dx}(4y-x)=2x+y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(4y-x)}{4y-x}=\frac{2x+y}{4y-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{4y-x}$$

33) $x=\frac{2y}{x^2-y}$

$$x^3-xy=2y$$

$$3x^2-x\frac{dy}{dx}-y=2\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2-y=2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=3x^2-y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(2+x)}{2+x}=\frac{3x^2-y}{2+x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{2+x}$$

34) $y\cos x = x^2 + y^2$

$$(y)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\cos x - 2y\frac{dy}{dx} = 2x + y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(\cos x - 2y)}{\cos x - 2y} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

35) $2xe^y + ye^x = 3$

$$(2x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(2) + (y)(e^x) + (e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xe^y\frac{dy}{dx} + e^x\frac{dy}{dx} = -2e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}(2xe^y + e^x) = -2e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{2xe^y + e^x}{2xe^y + e^x}\right) = \frac{-2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$$

36) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2)-(x^3)(-x)}{(2-x)^2}$$

$$2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3(1)^2)-((1)^3)(-1)}{(2-1)^2}$$

$$(-2)\frac{dy}{dx} = \frac{3+1}{1}$$

$$\frac{-2}{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2 \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$m = -2$ ميل المماس

$$m_1 = \frac{-1}{m}$$

$$m_1 = \frac{-1}{-2}$$

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ميل العمودي}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{معادلة العمودي}}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37) $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) + \ln(x+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right] \times y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

38) $y = x^{\ln x}$

$$\ln y = \ln x^{\ln x}$$

$$\ln y = (\ln x)(\ln x)$$

$$\ln y = (\ln x)^2$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 2(\ln x)(\frac{1}{x})$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right) y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right) x^{\ln x}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

39) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad , (2, -1)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(2, -1)$

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$2(2) + 3(2)\frac{dy}{dx} + 3(-1) + 2(-1)\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$4 + 6\frac{dy}{dx} - 3 - 2\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 1 + 3 - 4$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,-1)} = 0 \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 0(x - 2)$$

$$y + 1 = 0$$

$$\boxed{y = -1 \quad \text{معادلة المماس}}$$

40) $x^2 e^y = 1 \quad , (1, 0)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(1, 0)$

$$x^2 e^y \frac{dy}{dx} + 2xe^y = 0$$

$$(1)^2 e^0 \frac{dy}{dx} + 2(1)e^0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = -2$$

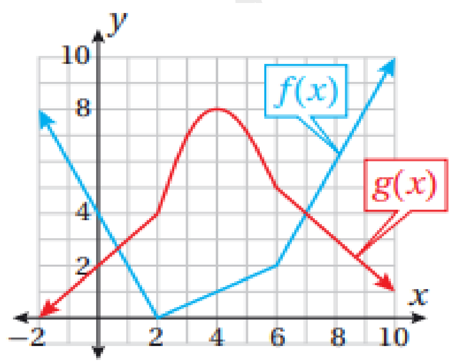
الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -2(x - 1)$$

$$\boxed{y = -2x + 2 \quad \text{معادلة المماس}}$$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانيين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان $p(x) = f(x)g(x)$ ، وكان $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فأجد كلا مما يأتي:



41) $p'(1)$

$$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$

$$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$

$$p'(1) = 2 \times 1 + 3 \times -2$$

$$p'(1) = -4$$

42) $p'(4)$

$$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4)$$

$$p'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5$$

$$p'(4) = 4$$

43) $q'(7)$

$$q'(7) = \frac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{(g(7))^2}$$

$$q'(7) = \frac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2}$$

$$q'(7) = \frac{12}{16}$$

$$q'(7) = \frac{3}{4}$$

44) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200\ g$ من عنصر مشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران : $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

$$R(t) = 200(0.9)^t$$

$$\frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} \approx -17.1\ g/day$$

45) يمثل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالسنتيمترات ، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

$$v(t) = 10\pi\frac{1}{4}\cos(10\pi t)$$

$$v(t) = \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$$

$$a(t) = -10\pi\frac{5\pi}{2}\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -5\pi\frac{5\pi}{1}\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -25\pi^2\sin(10\pi t)$$

كتاب التمارين

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^3y^3 = 144$

$$(x^3).(3y^2\frac{dy}{dx}) + (y^3).(3x^2) = 0$$

$$x^3 3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 = 0$$

$$\frac{3x^3y^2}{3x^3y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^3}{3x^3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

2) $xy = \sin(x+y)$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) = \cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x-\cos(x+y))}{(x-\cos(x+y))} = \frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$$

3) $y^4 - y^2 = 10x - 3$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 10$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 2y) = 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{4y^3 - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2y^3 - y}$$

4) $x\sin y - y\cos x = 1$

$$(x).\left(\cos y\frac{dy}{dx}\right) + (\sin y).(1) - (y).(-\sin x) + (\cos x).(\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y + y\sin x - \cos x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx} - \cos x\frac{dy}{dx} = -\sin y - y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x\cos y - \cos x)}{x\cos y - \cos x} = \frac{-\sin y - y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin y - y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y\sin x}{x\cos y - \cos x}$$

5) $\cot y = x - y$

$$-\csc^2 y \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$-\csc^2 y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(1 - \csc^2 y)}{1 - \csc^2 y} = \frac{1}{1 - \csc^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cot^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan^2 y$$

6) $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

$$(xy)^{\frac{1}{2}} + x + y^2 = 0$$

$$\frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx}\right] = 0 \qquad \frac{2\sqrt{xy}}{1}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x + 4y\sqrt{xy})}{x + 4y\sqrt{xy}} = \frac{-y - 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

7) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad , (2, -1)$

1 -الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$2x + (3x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 1 - 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(3x + 2y - 3)}{3x + 2y - 3} = \frac{1 - 2x - 3y}{3x + 2y - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x - 3y}{3x + 2y - 3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, -1) = \frac{1 - 2(2) - 3(-1)}{3(2) + 2(-1) - 3}$$

$$= \frac{1 - 4 + 3}{6 - 2 - 3}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right| (2, -1) = 0}$$ ميل المماس

2- الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **معادلة المماس:**

$y - (-1) = 0(x - 2)$

$y + 1 = 0$

$\boxed{y = -1}$ معادلة المماس

8) $xe^{y} + y\ln x = 2 \quad ,(1,\ln 2)$

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x).\left(e^{y}\frac{dy}{dx}\right) + (e^{y}).(1) + (y).\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x).\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$xe^{y}\frac{dy}{dx} + e^{y} + \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$xe^{y}\frac{dy}{dx} + \ln x\frac{dy}{dx} = -e^{y} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}(xe^{y} + \ln x) = -\left(e^{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$\left[\frac{dy}{dx}(xe^{y} + \ln x) = -\left(\frac{xe^{y} + y}{x}\right)\right] \quad \times \frac{1}{(xe^{y} + \ln x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xe^{y} + y}{x(xe^{y} + \ln x)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) = -\frac{(1)e^{\ln 2} + \ln 2}{1(1e^{\ln 2} + \ln 1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) = -\frac{e^{\ln 2} + \ln 2}{(e^{\ln 2} + \ln 1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) = -\frac{2 + \ln 2}{(2 + 0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) = -\frac{2 + \ln 2}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\ \ln 2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,\ln 2) \boxed{= -1 - \frac{1}{2}\ \ln 2} \qquad \text{ميل المماس}$$

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \ln 2 = (-1 - \frac{1}{2}\ \ln 2)(x - 1)$$

$$y = -x + 1 - \frac{1}{2}\ \ln 2x + \frac{1}{2}\ \ln 2 + \ln 2$$

$$y = (-1 - \frac{1}{2}\ \ln 2)x + 1 + \frac{3}{2}\ \ln 2$$

9) $4xy = 9 \quad ,(1, \frac{9}{4})$

1-الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(4x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (4y).(1) = 0$$

$$4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$\frac{4x\frac{dy}{dx}}{4x} = \frac{-4y}{4x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{(1,\frac{9}{4})} = -\frac{\frac{9}{4}}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{(1,\frac{9}{4})} \boxed{= -\frac{9}{4}}$$

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}(x - 1)$$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4}$$

معادلة المماس $\boxed{y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}}$

10) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad , (1,2)$

1-الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$$

$$2\,\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{8}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + \frac{1}{4}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{y}{4}\frac{dy}{dx} = -x\right] \times \frac{4}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,2) = -\frac{4(1)}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (1,2) \boxed{= -2}$$ ميل المماس

2-الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -2(x - 1)$

$y - 2 = -2x + 2$

$y = -2x + 2 + 2$

$\boxed{y = -2x + 4 \quad \text{معادلة المماس}}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

11) $x^2y - 4x = 5$

$(x^2).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(2x) - 4 = 0$

$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0$

$\frac{x^2}{x^2}\frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 4x^{-2} - 2yx^{-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} - (-2y.-x^{-2}) + \left(-2x^{-1}.\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}(4x^{-2} - 2yx^{-1})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 8x^{-3} + 4yx^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -16x^{-3} + 6yx^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$$

12) $x^2 + y^2 = 8$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-x.-y^{-2}\frac{dy}{dx}\right) + (-y^{-1}.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2}(-xy^{-1}) - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^2y^{-3} - y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{1.y^2}{y.y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2 - y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{y^3}$$

13) $2y = x^3$

$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y).(6x) - (3x^2).(2\frac{dy}{dx})}{(2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2\frac{dy}{dx}}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2\left(\frac{3x^2}{2y}\right)}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - \frac{9x^4}{y}}{4y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[12xy - \frac{9x^4}{y}\right] \times \frac{y}{1}}{4y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

14) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x^{(x^2)}$ عندما $x = 2$.

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$$y = x^{(x^2)}$$

$$y = 2^{(2^2)}$$

$$y = 2^{(4)}$$

$$y = 16$$

النقطة $\boxed{(2,16)}$

2- الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\ln y = \ln x^{(x^2)}$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x^2 . \frac{1}{x}) + (\ln x . 2x)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x + 2x\ln x\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy + 2xy\ln x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2,16) = (2 \times 16) + (2 \times 2 \times 16\ln 2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (2,16) = \boxed{32 + 64\ln 2}$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 16 = 32 + 64\ln 2\,(x - 2)$$

15) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1,0)$

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x+y)^3 = x^2 + y$$

$$3(x+y)^2(1+\frac{dy}{dx}) = 2x + \frac{dy}{dx}$$

$$3(1+0)^2(1+\frac{dy}{dx}) = 2(1) + \frac{dy}{dx}$$

$$3\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 2 - 3$$

$$\frac{2}{2}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}}$ ميل المماس

بما أن ميل المماس هو $\frac{-1}{2}$ فإن ميل العمودي على المماس هو (- مقلوب ميل المماس) = 2

معادلة العمودي على المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - 0 = 2(x-1)$$

$$y = 2x - 2$$

16) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

1- الخطوة الاولى إيجاد النقطة

$$y = x(\ln x)^x$$
$$y = e(\ln e)^e$$
$$y = e(1)^e$$
$$\boxed{y = e}$$

النقطة $\boxed{(e, e)}$

2- الخطوة الثانية إيجاد ميل المماس

$$y = x(\ln x)^x$$
$$\ln y = \ln(x(\ln x)^x)$$
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \ln x$$
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$
$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right] \times \frac{y}{1}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y}{\ln x} + y\ln(\ln x)$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = \frac{e}{e} + \frac{e}{\ln e} + e\ln(\ln e)$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + \frac{e}{1} + e\ln(1)$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + e + 0$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right| (e, e) = 1 + e$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - e = (1 + e)(x - e)$$

$$y - e = 1(x - e) + e(x - e)$$

$$y - e = x - e + ex - e^2$$

$$y = x - e + ex - e^2 + e$$

$$y = x + ex - e^2$$

$$\boxed{y = (1 + e)x - e^2}$$ معادلة المماس

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

17) $y = (x - 2)^{x+1}$

$$\ln y = (x + 1)\ln(x - 2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x + 1) \times \left(\frac{1}{x - 2}\right) + \ln(x - 2)(1)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{(x + 1)}{x - 2} + \ln(x - 2)\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x + 1)}{x - 2} + y\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2)^{x+1}(x + 1)}{x - 2} + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2)(x - 2)^{x}(x + 1)}{x - 2} + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x - 2)^{x}(x + 1) + (x - 2)^{x+1}\ln(x - 2)$$

18) $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$y = \frac{x^{10}(x^2+5)^{\frac{1}{2}}}{(8x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\ln y = 10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 10.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{3}.\frac{16x}{(8x^2+2)}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right] \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+1)}\right)$$

19) $y = (\cos x)^x$

$$\ln y = x\ln(\cos x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln(\cos x)(1)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln(\cos x)(1)$$

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)(-\tan x) + \ln(\cos x)\right] \quad \times \frac{y}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(x)(-\tan x) + y\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(x)(-\tan x) + (\cos x)^x\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x) + (\cos x)^x\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln(\cos x))$$

20) أجد معادلتي مماس منحنى العلاقة : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمران بالنقطة $(4,0)$.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}2x + \frac{1}{9}2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{4}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{9}.y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$$

$$\left[\frac{2y}{9}.\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}\right] \quad \times \frac{9}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

ميل المماس يساوي

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

$$\frac{y-0}{x-4}=-\frac{9x}{4y}$$

$$4y^2=36x-9x^2$$

بضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أن:

$$\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right]\quad\times 36$$

$$9x^2+4y^2=36$$

$$4y^2=36-9x^2$$

$$36x-9x^2=36-9x^2$$

$$36x=36-9x^2+9x^2$$

$$36x=36$$

$$\boxed{x=1}$$

نعوض قيمة $x=1$ في المعادلة $4y^2=36-9x^2$ لإيجاد قيم y

$$\sqrt{4y^2}=\pm\sqrt{36-9x^2}$$

$$\frac{2y}{2}=\pm\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}$$

$$\boxed{y=\pm\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}}$$

$$\sqrt{4y^2}=\pm\sqrt{36x-9x^2}$$

$$\frac{2y}{2} = \pm\frac{\sqrt{36x - 9x^2}}{2}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{36x - 9x^2}}{2}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{36 - 9x^2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{36x - 9x^2}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{36 - 9(1)^2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{36(1) - 9(1)^2}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{(9)(3)}}{2} = \pm\frac{\sqrt{(9)(3)}}{2}$$

$$y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

النقطتان هما : $\left(1, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{(9)(1)}{-(4)(\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{9}{(\frac{12\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{9}{6\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2.3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9x}{4y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{(9)(1)}{(4)(\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9}{(\frac{12\sqrt{3}}{2})}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{9}{6\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{3\sqrt{3}}{2.3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

معادلة المماس الأول:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}(4)$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\sqrt{3}}$$

معادلة المماس الثاني:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}(4)$$

$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}}$$

21) أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة : $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x ، ثم أثبت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان .

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة أو النقاط

حيث ان تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x بالتالي $y = 0$

بتعويض $y = 0$ لإيجاد قيمة x

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$x^2 + x(0) + (0)^2 = 7$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{7} \quad \boxed{x = \pm\sqrt{7}}$$

النقطتان هما : $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$

الخطوة الثانية: ايجاد الميل

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$2x + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x+2y}{x+2y}\right) = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{2\sqrt{7}+0}{\sqrt{7}+2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \boxed{= -2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{7},0)} = -\frac{-2\sqrt{7}+0}{-\sqrt{7}+2(0)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} \boxed{= -2}$$

ميلا المماس متساويان ، إذن هذان المماسان متوازيان .