البوصلة في الرياضيات

الوحدة الأولى

الاقترانات الاسية واللوغارتمية

الفرع الأدبي

ا.محمد العلي

2007

الدرس الأول : الاقترانات الأسية

الاقتران الأُسّي

اقتـــران يُكتَب في صورة: $f(x) = b^x$، حيث:

$b > 0$، و $b \neq 1$، ومن أمثلته:

$f(x) = (0.6)^x$ ، $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ ، $f(x) = 3^x$

مثال 1

جد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = 4^x, x = 3$

② $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, x = -2$

③ $f(x) = 3^x, x = 4$

④ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x = -1$

⑤ $f(x) = -(3)^x + 7, x = 4$

⑥ $f(x) = (13)^x, x = 2$

⑦ $f(x) = -(2)^{\frac{x}{2}} + 1, x = 6$

⑧ $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 3$

⑨ $f(x) = 4(5)^{1-x}, x = 3$

⑩ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-x}{2}} - 12, x = 1$

التمثيل البياني للاقتران الأُسّي، وخصائصه

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2^x$، أجب عن الأسئلة الآتية:

1. مثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
2. جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
3. هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟
4. هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 3

إذا كان: $f(x) = 3^x$ ، أجب عن الأسئلة الآتية:

1. مثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
2. جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
3. هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟
4. هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 4

إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، أجب عن الأسئلة الآتية:

1. مثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
2. جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
3. هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟
4. هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 5

إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$، أجب عن الأسئلة الآتية:

1. مثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
2. جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
3. هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟
4. هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 6

مثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجاله ومداه:

① $f(x) = 7(6)^x$

② $f(x) = 7^{-x}$

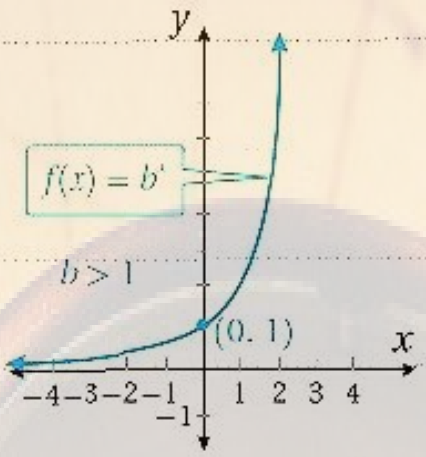
③ $f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$

④ $f(x) = 2(9)^x$

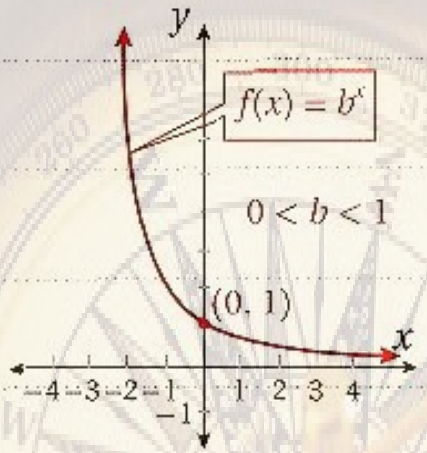
خصائص الاقتران الأسّي

التمثيل البياني للاقتران الأسّي في صورة: $f(x) = b^x$،

حيث: b عدد حقيقي، و $b \neq 1, b > 0$ له الخصائص الآتية:



- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران مُتزايد إذا كان $b > 1$.



- الاقتران مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x.
- الاقتران الأُسّي يقطع المحور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$، ولا يقطع المحور x.
- اقتران واحد لواحد.

خصائص الاقتران الأُسّي في صورة: $f(x) = ab^{x-h} + k$ (مفهوم أساسي)

إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^{x-h} + k$، حيث: a, b, k, h أعداد حقيقية، و $b \neq 1, b > 0, a > 0$، فإن:

- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞).
- الاقتران $f(x)$ مُتزايد إذا كان $b > 1$, ومُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيا هو المستقيم $y = k$.

البوصلة طريقك نحو التميز

مثال 7

جد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم

حدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

① $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

② $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

③ $f(x) = 7^{x-2} + 1$

④ $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

مثال 8

جد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم

حدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

① $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

② $f(x) = -7\,(2)^{-x} + 3$

③ $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

④ $f(x) = -4\,(5)^{-x}$

⑤ $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

مثال 9

يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 30\ (2)^x$ عدد حشرات خنفســـاء الدقيق في كيسِ دقيقٍ، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

1. جد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع.
2. بعد كم أسبوعًا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

مثال 10

يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

1. جد عدد الخلايا البكتيرية عند بَدْء التجربة.
2. جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.
3. بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

مثال 11

يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 500\,(2)^x$

عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

1. جد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 ساعات.
2. بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 4000 خلية؟

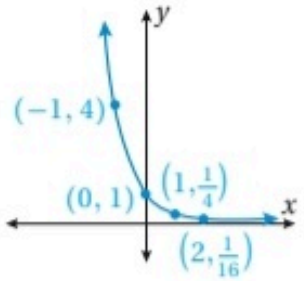
مثال 12

يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$

كمِّية الماء المُتبقِّية في خزّان (بالمتر المُكعَّب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

1. جد كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان بعد ساعة واحدة.
2. ما الزمن الذي تصبح فيه كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان $\frac{9}{8}\ m^3$ تقريبًا؟

مهارات التفكير العليا



22 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$. أجد $f(3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$y = 5(3)^x$ | $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ | $f(x) = 2(4)^x$ | $y = 3^x$

24 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسِّيًّا، فأُثبِت أنَّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

الدرس الثاني : النمو والاضمحلال الأسي

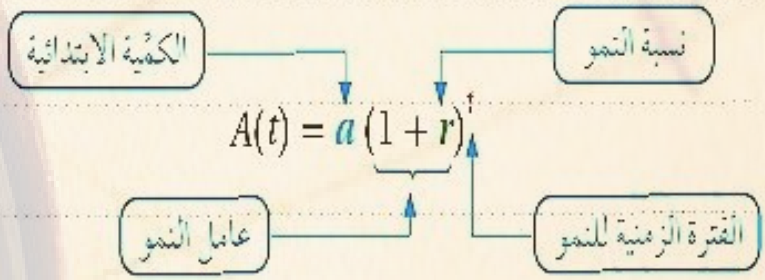
اقتران النمو الأُسّي

(مفهوم أساسي)

بالكلمات:

اقتران النمو الأُسّي هو كل اقتران أُسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:



مثال 1

في دراسة شملت إحدى مَزارع الأغنام، تبيَّن أنَّ عدد الخِراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويًّا:

(1) أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثِّل عدد الخِراف بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 1524 خروفًا.

(2) جد عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدْء الدراسة.

مثال 2

في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيَّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًّا:

(1) أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثِّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

(2) جد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة.

مثال 3

استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا هذه السنة، ومن المُتوقَّع أنْ يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

(1) أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

(2) جد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

مثال 4

بلغ عدد سكّان لواء المُوقَّر (شرق العاصمة عمّان) 84370 نسمة تقريبًا سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني في اللواء 2.4% سنويًّا، فأجب عن السؤالين الآتيين:

(1) أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد سكّان اللواء بعد t سنة.

(2) جد العدد التقريبي لسكّان اللواء سنة 2030م.

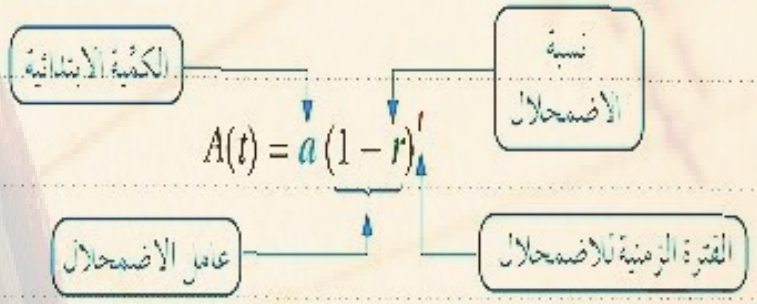
اقتران الاضمحلال الأُسّي

(مفهوم أساسي)

بالكلمات:

اقتران الاضمحلال الأُسّي هو اقتران أُسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:



مثال 5

تتناقص 20 g من أحد النظائر المُشِعَّة لعنصر الثوريوم (Th225) بنسبة 8% كل دقيقة نتيجة الإشعاع:

1. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل كمّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقّية بعد t دقيقة.
2. جد كمّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقّية بعد 5 دقائق.

مثال 6

اشترت سوسن سيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500. إذا كان ثمن السيّارة يقلُّ بنسبة 5% سنويًا

1. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة.
2. جد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

مثال 7

في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوُّث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصَّل الباحثون إلى أنَّ عدد الأسماك في البحيرة يقلُّ بنسبة 20% كل سنة:

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثِّل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 12000 سمكة.

(2) جد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

مثال 8

يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 19725 بنسبة 3% سنويًّا:

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

(2) جد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

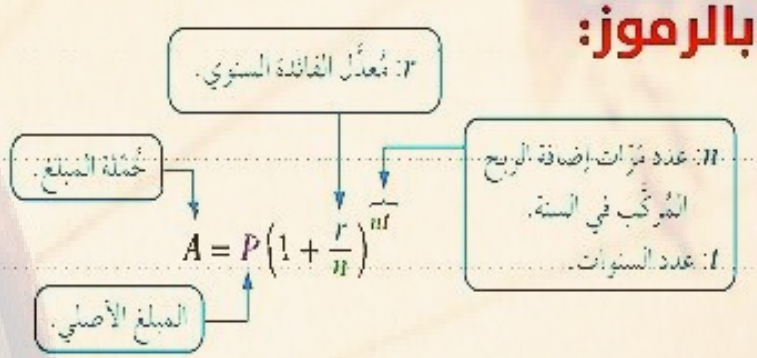
الربح المُركّب

(مفهوم أساسي)

بالكلمات:

يُمكن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركّب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:



مثال 9

استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركّب تبلغ 1.46%، وتضاف كل 3 أشهر.

جد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

مثال 10

استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر.

جد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

مثال 11

استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركّب تبلغ 5.5%، وتضاف كل شهر.

1. أكتب صيغة تُمثّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.
2. جد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

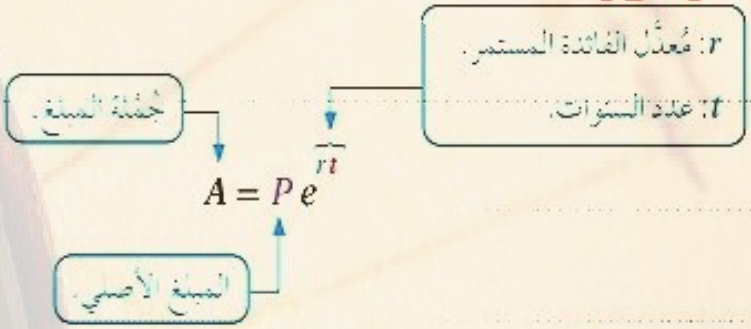
الاقتران الأُسّي الطبيعي

(مفهوم أساسي) الربح المُركّب المستمر

بالكلمات:

يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:



مثال 12

أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4% . جد جُمْلة المبلغ بعد 10 سنوات.

مثال 13

أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.2% .جد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

مثال 14

أودعت ليلى مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 6% . جد جُمْلة المبلغ بعد 17 سنة.

مهارات التفكير العليا

17 **أكتشـــف الخطأ:** أوجد رامي جُمْلة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حســـاب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.25%، وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$
$$= 6533.29$$ ✗

أكتشف الخطأ في حَلِّ رامي، ثم أُصحِّحه.

18 **تحدٍّ:** اكتُشِفت 12 إصابة بالإنفلونزا الموسمية في إحدى البلدات، ولوحِظ أنَّ عدد الإصابات بهذا المرض في كل أسبوع يساوي ثلاثة أمثال عددها في الأسبوع السابق. أكتب اقترانًا يُمثِّل عدد الإصابات بهذا المرض بعد t أسبوعًا من اكتشاف حالات الإصابة الأولى.

البوصلة طريقك نحو التميز

الدرس الثالث : الاقترانات اللوغاريتمية

الاقتران اللوغاريتمي، والعبارات اللوغاريتمية

(مفهوم أساسي)

العلاقة بين الصورة الأُسّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان: $b > 0, b \neq 1, x > 0$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسّية
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$

الأُس، الأساس (للصورة اللوغاريتمية)

الأساس، الأُس (للصورة الأُسّية)

مثال 1

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسّية:

① $\log_2 8 = 3$

② $\log_{23} 23 = 1$

③ $\log_{10} \left(\frac{1}{100}\right) = -2$

④ $\log_7 1 = 0$

⑤ $\log_2 16 = 4$

⑥ $\log_7 7 = 1$

⑦ $\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5$

⑧ $\log_9 1 = 0$

⑨ $\log_3 729 = 6$

⑩ $\log_{64} 8 = 0.5$

⑪ $\log_5 625 = 4$

⑫ $\log_7 1 = 0$

⑬ $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

⑭ $\log_{43} 43 = 1$

مثال 2

أكتب كل معادلة أُسّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

① $8^3 = 512$

② $25^{\frac{1}{2}} = 5$

③ $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

④ $27^0 = 1$

⑤ $7^3 = 343$

⑥ $49^{\frac{1}{2}} = 7$

⑦ $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

⑧ $17^0 = 1$

⑨ $4^5 = 1024$

⑩ $5^{-2} = 0.04$

⑪ $3^{-4} = \frac{1}{81}$

⑫ $(32)^1 = 32$

⑬ $7^3 = 343$

⑭ $8^0 = 1$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية

مثال 3

جد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

① $\log_2 64$

② $\log_{13} \sqrt{13}$

⑫ $\log_b \sqrt[7]{b}$

⑬ $\log_{81} 9$

⑭ $(10)^{\log_{10} \frac{1}{9}}$

⑮ $\log_{10}(1 \times 10^{-5})$

⑯ $\log_2 32$

⑰ $\log_{10} 0.0001$

⑱ $\log_{\frac{5}{3}} 1$

⑲ $\log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$

⑳ $4^{\log_4 3}$

③ $\log_{36} 6$

④ $\log_{10} 0.1$

⑤ $\log_5 25$

⑥ $\log_8 \sqrt{8}$

⑦ $\log_{21} 9$

⑧ $\log_3 \frac{1}{27}$

⑨ $\log_2 64$

⑩ $\log_{25} 125$

⑪ $\log_{\frac{1}{6}} 6$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان: $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

مثال 4

جد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

① $\log_3 1$

② $\log_{17} \sqrt{17}$

③ $\log_5 5$

④ $7^{\log_7 5}$

⑤ $\log_2 1$

⑥ $\log_{32} \sqrt{32}$

⑦ $\log_9 9$

⑧ $8^{\log_8 13}$

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًّا

مثال 5

مثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

① $f(x) = \log_2 x$

② $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

③ $f(x) = \log_3 x$

④ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

⑤ $f(x) = \log_8 x$

⑥ $r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

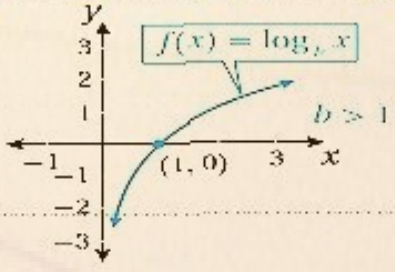
⑦ $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

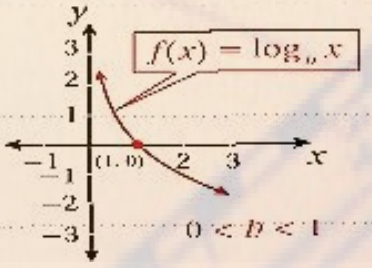
خصائص الاقتران اللوغاريتمي

يُبيِّن الشكل البياني السابق الاقتران اللوغاريتمي الذي يكون في صورة: $f(x) = \log_b x$،

حيث: b عدد حقيقي، $b > 0, b \neq 1$، وتتمثل خصائصه في ما يأتي:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- الاقتران يتزايد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران يتناقص إذا كان $0 < b < 1$.
- وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y.
- الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.





مجال الاقتران اللوغاريتمي في صورة: $f(x) = \log_b g(x)$

مثال 6

جد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

① $f(x) = \log_4 (x + 3)$

⑧ $f(x) = \log_9 x$

⑨ $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

⑩ $g(x) = \log_{11} x$

② $f(x) = \log_5 (8 - 2x)$

③ $f(x) = \log_7 (5 - x)$

④ $f(x) = \log_5 (9 + 3x)$

⑤ $f(x) = \log_2 (x + 3)$

⑥ $f(x) = 7 + 2\log_5 (x - 2)$

⑦ $f(x) = -5\log_7 (-x)$

مثال 7

تُمثِّل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شِدَّة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات.

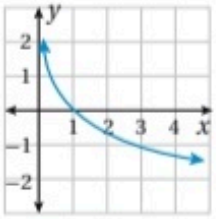
كم تبلغ شِدَّة الضوء عند عمق 10 m؟

مهارات التفكير العليا

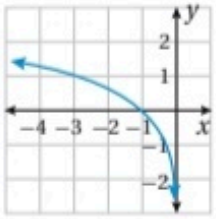
تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّرًا إجابتي:

38 $f(x) = \log_3 (x)$ **39** $f(x) = \log_3 (-x)$ **40** $g(x) = -\log_3 x$

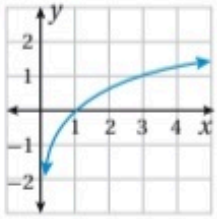
a)



b)



c)



تحدَّ: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي، مُحدِّدًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

41 $f(x) = \log_3 (x^2)$ **42** $f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

43 **أكتشف الخطأ:** كتبت منى المعادلة الأُسّية: $\frac{1}{64} = 4^{-3}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

$\log_4 (-3) = \frac{1}{64}$ ✗

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أُصحّحه.

الدرس الرابع : قوانين اللوغاريتمات

قوانين اللوغاريتمات

(مفهوم أساسي)

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

مثال 1

إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$، وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$، جد ما يأتي:

① $\log_a 15$

② $\log_a \frac{3}{5}$

③ $\log_a 125$

④ $\log_a \frac{1}{9}$

مثال 2

إذا كان: $\log_a 7 \approx 0.936$، وكان: $\log_a 3 \approx 0.528$، جد ما يأتي:

① $\log_a \frac{3}{7}$

② $\log_a (7a^2)$

③ $\log_a \frac{1}{7}$

④ $\log_a 21$

⑤ $\log_a \frac{49}{27}$

⑥ $\log_a 441$

⑦ $\log_a \sqrt[4]{81}$

⑧ $\dfrac{\log_a 3}{\log_a 7}$

⑨ $(\log_a 3)(\log_a 7)$

مثال 3

إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، جد ما يأتي:

① $\log_b 14$

② $\log_b \dfrac{2}{7}$

③ $\log_b 32$

④ $\log_b \dfrac{1}{49}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

مثال 4

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

① $\log_5 x^7 y^2$

② $\log_2 a^2 b^9$

③ $\log_7 \dfrac{(5x+3)^2}{4}$

④ $\log_4 \dfrac{xy^3}{z^2}$

⑤ $\log_a \sqrt{\dfrac{x^2 y^3}{a^5}}$

مثال 5

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

① $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

② $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

③ $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

④ $\log_a \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$

⑤ $\log_a (x-y+z)^9, y-x<z$

⑥ $\log_a x^7$

⑦ $\log_a \left(\frac{ac}{b}\right)$

⑧ $\log_a (\sqrt{x})$

⑨ $\log_a \frac{(x^5 y^{-2})^4}{(x^5 y^{-2})^3}$

⑩ $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$

⑪ $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$

⑫ $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

مثال 6

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

① $3\log_2 x + 4\log_2 y$

② $5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

③ $\log_5 a + 3\log_5 b$

④ $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

⑤ $\log_a x - \log_a y$

⑥ $\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑦ $3\log_b 1 - \log_b b$

⑧ $\log_b (b-1) + 2\log_b b, b > 1$

⑨ $8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z$

⑩ $\log_a (x^2 - 25) - \log_a (x+5), x > 5$

مثال 7

في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادَّة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافِئة لهذا الاختبار على مدار مُدَد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران:

$$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1).$$

جد النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ، مُقرِّبًا إلى أقرب عدد صحيح.

البوصلة طريقك نحو التميز

مثال 8

يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. جد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10} 3 \approx 0.4771$، مُقرِّبًا إلى أقرب عدد صحيح.

مثال 9

يُمثِّل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و $a \geq 0$. وتعني القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 17700 من بيع المُنتَج. جد قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

مهارات التفكير العليا

26 تحدٍّ: أُثبِت أنَّ $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$.

27 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$

✗

28 تبرير: أُثبِت أنَّ $\log_b (b-3) + \log_b (b^2 + 3b) - \log_b (b^2 - 9) = 1$، حيث: $b > 3$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس الخامس : المعادلات الأسية

اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي

مثال 1

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

① $\log 2.7$

② $\log (1.3 \times 10^5)$

③ $\ln 17$

④ $\log 13$

⑤ $\log (3.1 \times 10^4)$

⑥ $\ln 0.25$

⑦ $\log 17$

⑧ $\log_2 15$

⑨ $\log (1.5 \times 10^{-4})$

⑩ $\log_5 e^7$

⑪ $\ln 2.3$

⑫ $\ln 7$

تغيير الأساس

(مفهوم أساسي)

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقيةً موجبةً، حيث: $a \neq 1, b \neq 1$، فإنَّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

مثال 2

جد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

① $\log_3 16$

② $\log_{\frac{1}{2}} 10$

③ $\log_3 51$

④ $\log_{\frac{1}{2}} 13$

⑤ $\log_5 27$

مثال 3

حُلَّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:

① $2^x = 13$

② $5e^{3x} = 125$

③ $2^{x+4} = 5^{3x}$

④ $9^x + 3^x - 30 = 0$

⑥ $\log_8 \frac{1}{8}$

⑦ $\log_{\frac{1}{4}} 19$

⑧ $\log 10000$

⑨ $\log_7 8$

⑩ $\log_3 18$

المعادلات الأُسّية

خاصية المساواة اللوغاريتمية (مفهوم أساسي)

إذا كان $b > 0$، حيث: $b \neq 1, x > 0, y > 0$، فإنَّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

مثال 4

حُلَّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إلى أقرب 4 منازل عشرية:

① $7^x = 9$

② $2e^{5x} = 64$

③ $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

④ $4^x + 2^x - 12 = 0$

⑤ $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$

⑥ $5^x = 120$

⑦ $-4e^{4x} = -64$

⑧ $7(4)^x = 49$

⑨ $3^{2x+1} = 7^{5x}$

⑩ $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

مثال 5 قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثَّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م. بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة؟

مثال 6

اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 9 مليارات نسمة؟

مثال 7

توصَّلت دراسة إلى أنَّ عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران: $N(t)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$ ، حيث

N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

1. جد عدد الأرانب في المحمية عند بَدْء الدراسة.
2. بعد كم سنةً يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

مثال 8

يُمثِّل الاقتران: $P(t)=200e^{t}$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بَدْء دراسة مُعيَّنة عليها:

1. جد عدد أسماك السلمون في النهر عند بَدْء الدراسة.
2. بعد كم سنةً يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: أجد قيمة كلٍّ من k، وh إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 تحدٍّ: أحُلُّ المعادلة: $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$ b) $y = 3$

c) $y = 1$ d) $y = 0$

2 حَلُّ المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0 b) $\frac{1}{e}$

c) 1 d) e

3 قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

a) -2 b) -1

c) 1 d) 2

4 أحد الآتية يُكافِئ المقدار:

$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$ d) $\log_a 27$

5 أحد الآتية يُكافِئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5 \log_a x - 3 \log_a y + 1$

b) $a \log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a \log_a x - 3 \log_a y$

d) $1 - 5 \log_a x - 3 \log_a y$

6 حَلُّ المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2 b) 3

c) 4 d) 8

7 قيمة $\log 10$ هي:

a) $2 \log 5$ b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$ d) 0

8 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإنَّ قيمة x هي:

a) 0 b) 1

c) 2 d) 4

9 الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة:

$f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي،

و $b \neq 1, b > 0$، تمرُّ جميع منحنياتها بالنقطة:

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$ d) $(0, 0)$

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة k:

10 $\log_5 16$

11 $\log_5 256$

البوصلة طريقك نحو التميز

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

12 $f(x) = 6^x$

13 $g(x) = (0.4)^x$

14 $h(x) = \log_7 x$

15 $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أحُلُّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16 $8^x = 2$

17 $-3e^{4x+1} = -96$

18 $11^{2x+3} = 5^x$

19 $49^x + 7^x - 72 = 0$

20 استثمر سليمان مبلغ JD 2500 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريًّا. أجد جُمْلة المبلغ بعد 15 سنة.

21 أودع سعيد مبلغ JD 800 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.5%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

22 فيروس: انتشر فيروس في شبكة حواسيب وَفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، وt الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بعد t يومًا:

23 أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيِّنة.

24 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 أيام.

25 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 1400 خلية؟

26 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة ضعف العدد الأصلي؟

يقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى هيكتوباسكال (hPa)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر 1000 hPa، ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

27 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

28 عند أيِّ ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

29 إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و$x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 400000 من بيع المُنتَج. أجد $S(10)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.