المرجع في الرياضيات
0790264376 أ.معتصم ابراهيم

المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب+ كتاب التمارين

الفصل الأول/ الوحدة الثانية

الدرس الثالث

(تطبيقات القيم القصوى)

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

طبعة السنة 2025/2024

ولا تنسونا من دعائكم

المرجع في الرياضيات
0790264376 أ.معتصم ابراهيم

المرجع في الرياضيات
0790264376 أ.معتصم ابراهيم

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

مخطط الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

- **إيجاد أكبر حجم ممكن**
  - ايجاد أكبر حجم لصندوق
  - إيجاد أبعاد (أضلاع) الصندوق (الأكبر حجماً)
- **إيجاد أقل طول ممكن**
  - موقع تثبيت وتد أو عمود
  - سياج لإحاطة مكان
- **إيجاد أقرب مسافة**
  - اقرب مسافة بين شخصين
  - اقرب مسافة بين وسلتي نقل أو جسمين
- **تطبيقات اقتصادية**
  - ايجاد أكبر ربح
  - ايجاد أقل تكلفة
  - ايجاد أعلى سعر
  - ايجاد عدد الوحدات الواجب بيعها أو إنتاجها
- **إيجاد أكبر زاوية**
  - البعد اللازم لتكون زاوية التقاط صورة اكبر ما يمكن
  - البعد اللازم لتكون زاوية النظر اكبر ما يمكن
- **تطبيقات في المستوى الإحداثي**
  - أقرب نقطة على منحنى اقتران من نقطة معلومة
  - ايجاد اكبر مساحة ممكنة لشكل مرسوم داخل منحنى اقتران

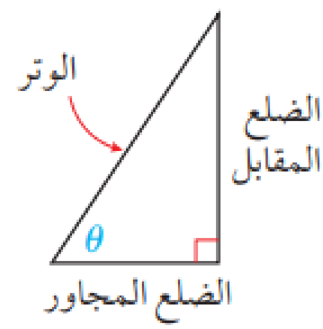
تأسيس الدرس الثالث أو المعرفة المفترضة (Assumed knowledge):

1) الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية:

1) $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ 2) $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

3) $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ 4) $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

5) $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ 6) $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

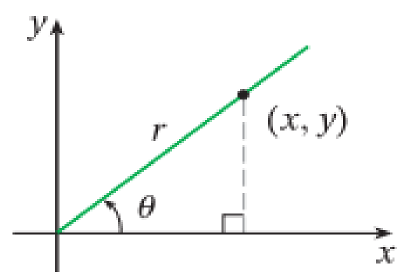


2) الاقترانات المثلثية لأي زاوية:

1) $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 2) $\csc\theta = \frac{r}{y}$

3) $\cos\theta = \frac{x}{r}$ 4) $\sec\theta = \frac{r}{x}$

5) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 6) $\cot\theta = \frac{x}{y}$

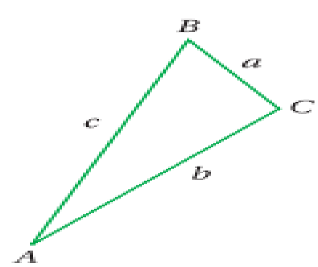


3) قوانين جيوب التمام:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



4) المسافة بين نقطتين:

النقطة الأولى : $P_1(x_1, y_1)$ النقطة الثانية : $P_1(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5) إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1P_2}$:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

6) ميل المستقيم المار بنقطتين:

النقطة الأولى : $P_1(x_1,y_1)$ النقطة الثانية : $P_1(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

7) معادلة المستقيم المار بالنقطة $P_1(x_1,y_1)$:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

8) ميل المستقيم في المستوى الإحداثي ويصنع زاوية مع محور x الموجب:

$m=\tan\theta$ حيث $0<\theta<\pi$

9) معادلة الدائرة التي مركزها (h,k) ونصف قطرها r :

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

10) المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

1) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

2) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

3) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

4) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

5) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

6) $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

11) متطابقات الزاويتين المتتامتين:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

4) $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

5) $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$

6) $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$

مقدمة درس تطبيقات القيم القصوى :

يعد تحديد القيمة الصغرى والقيمة العظمى المطلقة من أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالاً في التطبيقات الحياتية والعلمية، ومن أمثلتها:

1) تحديد أكبر ربح ممكن.

2) أقل تكلفة ممكنة.

3) إيجاد أقل جهد.

4) إيجاد أكبر مسافة.

ملاحظة مهمة:

خطوات حل مسائل القيم القصوى:

1) أقرأ المسألة جيداً، ثم أحدد المعلومات اللازمة لحل المسألة.

2) ارسم مخططاً يمثل المسألة، وأختار رموزاً للمتغيرات.

3) استعمل المتغيرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.

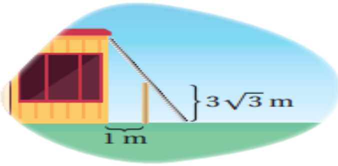
4) أحدد مجال الاقتران أن أمكن للحكم على منطقية قيم المتغير الناتجة ضمن معطيات المسألة.

5) أجد قيم الاقتران الحرجة (القيم التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً أو غير موجودة) وقيمتيه عند طرفي الفترة.

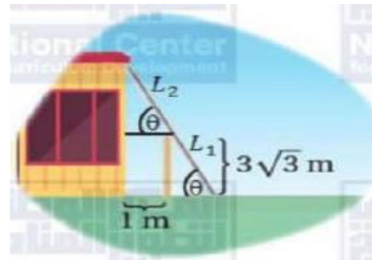
6) أجد القيمة القصوى المطلوبة (القيم الصغرى المطلقة أو القيم العظمى المطلقة) باستعمال إحدى الطرق التي تعلمناها في الدرس السابق.

مسألة اليوم: (صفحة 116)

يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ بمبنى، ويبعد عنه مسافة $1m$ كما في الشكل المجاور، أجد طول أقصر سلم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمر فوق السياج ملامساً له.



ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والأرض ، L طول السلم، كما في الشكل:



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} \qquad ,0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{L_2} \Rightarrow L_2 = \frac{1}{\cos\theta} \qquad ,0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 \Rightarrow L = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{(-1)\,-\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \Rightarrow -3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta = 0$$

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{3\sqrt{3}\cos^3\theta}{\cos^3\theta} \Rightarrow \tan^3\theta = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[3]{\tan^3\theta} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3^{\frac{1}{3}}\,3^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \tan\theta = 3^{\frac{3}{6}} \Rightarrow \tan\theta = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة ،نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{d\theta}$:

للاقتران L قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} \Rightarrow L = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$L = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2 \Rightarrow L = 6 + 2 \Rightarrow L = 8\,m$$

إذن أقل طول ممكن للسلم هو $8\,m$.

إيجاد أكبر حجم ممكن :

ملاحظة مهمة:

صناديق التخزين: يعد إيجاد أكبر حجم ممكن لصناديق التخزين أحد التطبيقات الحياتية المهمة على القيم القصوى، فهو يساعد المصانع والمتاجر على الاستفادة من المساحات المتوافرة في تخزين البضائع بصورة أمثل مما يقلل من مقدار التكلفة.

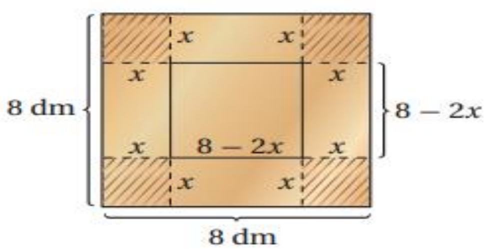
ملاحظة مهمة:

الديسيمتر (dm): هو وحدة لقياس الطول، يرمز إليها بالرمز (dm) ، وترتبط بوحدة السنتيمتر عن طريق العلاقة: $1\ dm = 10\ cm$.

مثال 1: (صفحة 117)

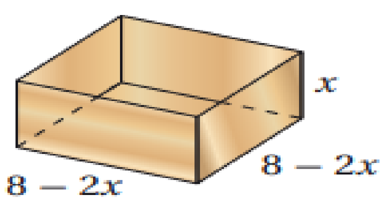
صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، صنع من قطعة كرتون رقيقة ، مربعة الشكل ، طولها $8dm$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها ، وطي الجوانب إلى الأعلى . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن.

الخطوة الأولى: أرسم مخططاً وأحدد رموز وقيم المتغيرات.



افترض أن x هو طول كل مربع قطع من زوايا قطعة الكرتون الأصلية، وبما أن طول القطعة $8\ dm$ ، فإن طول كل جانب من جوانبها بعد قطع المربعات الصغيرة منها هو $(8-2x)dm$ كما يظهر في المخطط.

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.



يبين الشكل المجاور أبعاد الصندوق بعد إزالة المربعات الأربعة الصغيرة وطي الجوانب.

أجد حجم هذا الصندوق:

الشكل: متوازي مستطيلات قاعدته مربعة:

قانون الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$V = l \times w \times h$

نعوض $(h = x)$ ، $(w = 8-2x)$ ، $(l = 8-2x)$

$V(x) = (8-2x) \times (8-2x) \times x$

$V(x) = (8 \times 8) + \big(8 \times (-2x)\big) + (-2x \times 8) + ((-2x) \times (-2x)) \times x$

$V(x) = (64) + (-16x) + (-16x) + (4x^2) \times x$

$V(x) = (64 - 32x + 4x^2).x \implies V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$

إذن الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق هو : $V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$ ،

ومجاله هو : $0 \le x \le 4$

ملاحظة: لماذا يكون مجال $V(x)$ في هذه المسألة هو $0 \le x \le 4$ ؟

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$$

إذن مجال $V(x)$ في هذه المسألة هو $0 \le x \le 4$

الخطوة الثالثة: أجد القيم الحرجة للاقتران.

$$V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

$$12x^2 - 64x + 64 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$(3x-4)(x-4) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}} \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0, 4)$ ، هي : $x = \frac{4}{3}$ ، وهذا يعني وجود 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

الخطوة الرابعة: أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

$$V(0) = 4(0)^3 - 32(0)^2 + 64(0) \Rightarrow \boxed{V(0) = 0}$$

$$V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27}$$

$$V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} - \frac{512}{9} + \frac{256}{3} \Rightarrow V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} - \frac{1536}{27} + \frac{2304}{27} \Rightarrow \boxed{V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27}}$$

$$V(4) = 4(4)^3 - 32(4)^2 + 64(4) \Rightarrow V(4) = 256 - 512 + 256 \Rightarrow \boxed{V(4) = 0}$$

إذن أكبر حجم للصندوق هو عند قطع 4 مربعات متطابقة من زواياه ، طول كل منها $\frac{4}{3}dm$.

ومن ثم، فإن أبعاد الصندوق هي:

$$l = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm \ , w = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm \ , h = \frac{4}{3}dm$$

طريقة بديلة:

يمكنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \frac{4}{3}$.

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

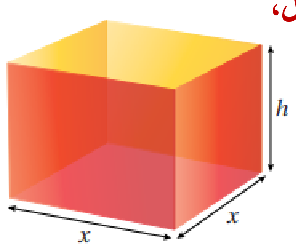
$$V''(x) = 24x - 64$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 64 = -32 < 0$$

ملاحظة: قد لا يكون سهلاً إيجاد المشتقة الثانية لبعض الاقترانات، لذا أختار الطريقة المناسبة لتحديد نوع القيمة القصوى بحسب الاقتران.

أتحقق من فهمي: (صفحة 118)

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080cm^2$ كما في الشكل المجاور ، أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن.



الخطوة الأولى: أرسم مخططاً وأحدد رموز وقيم المتغيرات.

ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

مساحة متوازي المستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى=(محيط القاعدة× الارتفاع)+مساحة القاعدة

$$A = 4xh + x^2 \quad \Longrightarrow \quad 1080 = 4xh + x^2$$

$$4xh = 1080 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4xh}{4x} = \frac{1080 - x^2}{4x} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

حجم متوازي المستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى= مساحة القاعدة× الارتفاع

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right) \quad \Longrightarrow \quad V(x) = x\left(\frac{1080 - x^2}{4}\right)$$

$$V(x) = \frac{1080x - x^3}{4} \quad \Longrightarrow \quad V(x) = \frac{1}{4}(1080x - x^3)$$

إذن الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق هو : $V(x) = x^2\left(\frac{1080-x^2}{4x}\right)$ ،

ومجاله هو : $0 \le x \le \sqrt{1080}$

ملاحظة: لماذا يكون مجال $V(x)$ في هذه المسألة هو $0 \le x \le \sqrt{1080}$ ؟

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{1080-x^2}{4x} = 0 \Rightarrow 1080 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1080}$$

إذن مجال $V(x)$ في هذه المسألة هو $0 \le x \le \sqrt{1080}$

الخطوة الثالثة: أجد القيم الحرجة.

$$V(\acute{x}) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2) \implies \acute{V}(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$\acute{V}(x) = 0 \to \frac{1}{4}(1080 - 3x^2) = 0 \implies \frac{1}{4}(1080 - 3x^2) = 0$$

$$1080 - 3x^2 = 0 \implies 3x^2 = 1080 \implies x^2 = 360 \implies \boxed{x = \sqrt{360}}$$

القيمة الحرجة هي $x = \sqrt{360}$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = \frac{1}{4}(1080(0) - (0)^3) \implies \boxed{V(0) = 0}$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}\left(1080\sqrt{360} - (\sqrt{360})^3\right) \implies V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360})$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(720\sqrt{360}) \implies V(\sqrt{360}) = 180\sqrt{360}$$

$$V(\sqrt{360}) = 180\sqrt{36 \times 10} \implies V(\sqrt{360}) = 6 \times 180\sqrt{10} \implies \boxed{V(\sqrt{360}) = 1080\sqrt{10}}$$

$$V(\sqrt{1080}) = \frac{1}{4}\left(1080(\sqrt{1080}) - (\sqrt{1080})^3\right) \implies \boxed{V(\sqrt{1080}) = 0}$$

إذن أكبر حجم للصندوق هو عند طول كل منها $x = 6\sqrt{10}\ cm \impliedby \sqrt{360}$.

$$h = \frac{1080 - x^2}{4x} \implies h = \frac{1080 - (\sqrt{360})^2}{4\sqrt{360}} \implies h = \frac{1080 - 360}{24\sqrt{10}}$$

$$h = \frac{720}{24\sqrt{10}} \implies h = \frac{30}{\sqrt{10}} \implies h = \frac{30 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} \implies h = \frac{30\sqrt{10}}{10} \implies h = 3\sqrt{10}$$

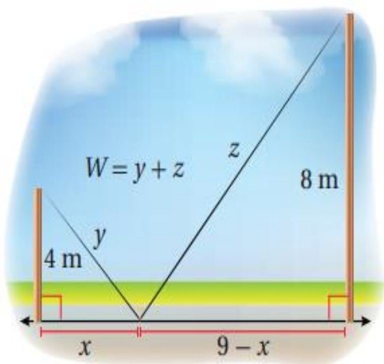
إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}cm$ ، وعندما يكون الارتفاع $h = 3\sqrt{10}cm$

إيجاد أقل طول ممكن:

إحاطة حديقة أو تثبيت أعمدة: من التطبيقات الحياتية المهمة التي يمكن استعمال القيم القصوى لإيجادها.

مثال 2: (صفحة 119)

عمودان طول أحدهما $8m$ ، وطول الآخر $4m$ ، والمسافة بينهما $9m$ ، وهما مثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور، أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يمكن.



الخطوة الأولى: أرسم مخططاً.

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

بما أن المسافة بين العمودين هي $9m$ ، فإن بعد الوتد عن أحدهما (الأصغر مثلاً) هو x ، وبعده عن العمود الآخر هو $9-x$.

اكتب الاقتران W بدلالة متغير واحد :

$$y^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2+16} \Rightarrow z^2 = \sqrt{(9-x)^2+64}$$

$$W = y + z \Rightarrow W(x) = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{(9-x)^2+64}$$

إذن الاقتران الذي يمثل طول السلك هو : $W(x) = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{(9-x)^2+64}$

ومجاله هو : $0 \le x \le 9$

ملاحظة: لماذا يكون المجال في هذه المسألة هو $0 \le x \le 9$ ؟

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

إذن المجال في هذه المسألة هو $0 \le x \le 9$

ملاحظة: مجال الاقتران مهم معرفته لأنه يمثل طرفي الفترة.

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران:

$$W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9-x)^2 + 64}$$

$$\acute{W}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}} = 0$$

$$x\sqrt{(9-x)^2+64} = (9-x)\sqrt{x^2+16} \Rightarrow x^2((9-x)^2+64) = (9-x)^2(x^2-16)$$

$$x^2((9-x)^2 + 64x^2 = x^2(9-x)^2 + 16(9-x)^2$$

$$4x^2 = (9-x)^2 \Rightarrow 4x^2 = 81 - 18x + x^2 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x-3)(x+9) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow x + 9 = 0 \rightarrow \boxed{x = -9}$$

بما أن $x = -9$ خارج المجال ، فإنها تهمل . القيمة الحرجة هي $x = 3$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

بناء على ذلك ، توجد 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

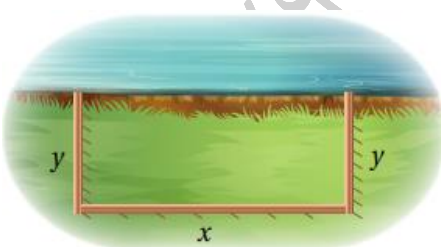
$$W(0) = \sqrt{(0)^2+16} + \sqrt{(9-(0))^2+64} \Rightarrow \boxed{W(0) \approx 16}$$

$$W(3) = \sqrt{(3)^2+16} + \sqrt{(9-(3))^2+64} \Rightarrow \boxed{W(0) \approx 15}$$

$$W(0) = \sqrt{(9)^2+16} + \sqrt{(9-(9))^2+64} \Rightarrow \boxed{W(0) \approx 17.8}$$

إذن يجب تثبيت الوتد على بعد $3m$ من العمود الأقصر ، ليكون طول السلك المستعمل لتثبيت العمودين أقل ما يمكن وهو $15m$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 121)



خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور ، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000m^2$ ، لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

مساحة الحظيرة مستطيلة الشكل= الطول ×العرض

$$A = xy \implies 245000 = xy \implies y = \frac{245000}{x}$$

محيط الحظيرة مستطيلة الشكل من ثلاث جهات= الطول + (2 × العرض)

$$L = x + 2y \implies L(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right) \implies L(x) = x + \frac{490000}{x}$$

$$\acute{L}(x) = 1 - \frac{490000}{x^2} \implies 1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \implies \frac{490000}{x^2} = 1 \implies x^2 = 490000 \implies \boxed{x = 700}$$

$$y = \frac{245000}{700} \implies \boxed{y = 350}$$

قيمة x الحرجة هي $x = 700$

$$\acute{\acute{L}}(x) = (2)\frac{490000}{x^3} \implies \acute{\acute{L}}(x) = \frac{980000}{x^3} \implies \acute{\acute{L}}(700) = \frac{980000}{(700)^3}$$

$$\acute{\acute{L}}(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

إذن يكون طول السياج أقل ما يمكن عندما $x = 700\ m$ و $y = 350\ m$

$$y = \frac{245000}{700} \implies \boxed{y = 350}$$

إيجاد أقرب مسافة:

سيتم تطبيق مفاهيم السرعة، والمسافة والزمن، لأجد أقرب مسافة بين شخصين.

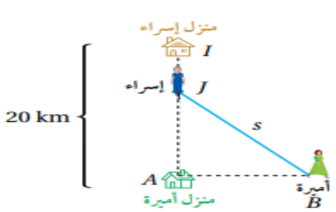
مثال 3: من الحياة: (صفحة 121)

تتدرب إسراء وأميرة يومياً استعداداً لسباق العدو (المارثون) ، في أحد الأيام ، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بعد $20km$ شمال منزل أميرة الساعة $9:00am$ ، واتجهت جنوبا بسرعة $8km/h$. وفي الوقت نفسه ، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة $6km/h$. في أي ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما ، علماً بأن كلا منهما ركضت مدة $2.5h$ ؟

الخطوة الأولى: أرسم مخططاً وأحدد الرموز.

افترض أن اسراء بدأت الركض من النقطة I ،

ووصلت إلى النقطة J بعد t ساعة ، وأن أميرة انطلقت في الوقت نفسه



من النقطة A ، ووصلت إلى النقطة B بعد t ساعة ، وبذلك فإن بعد إسراء عن أميرة بعد t ساعة هو : $s = JB$.

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإن:

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + JB^2}$$

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

أكتب اقتران المسافة بين إسراء وأميرة بدلالة الزمن t :

$$JA = 20 - 8t$$

$$AB = 6t$$

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + JB^2} \Rightarrow s(t) = \sqrt{(20-8t)^2 + (6t)^2} \Rightarrow s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

إذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين إسراء وأميرة هو : $s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$
ومجاله هو : $0 \le t \le 2.5$.

ملاحظة: مجال اقتران أقرب مسافة تكون: $\boxed{0 \le t \le \text{المدة الزمنية للمسافة المقطوعة}}$

ملاحظة: مجال الاقتران مهم معرفته لأنه يمثل طرفي الفترة.

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران:

$$\acute{s}(t) = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} \Rightarrow \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} = 0$$

$$100t - 160 = 0 \Rightarrow 100t = 160 \Rightarrow \boxed{t = 1.6}$$

توجد 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

الخطوة الرابعة: أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

$$s(0) = \sqrt{100(0)^2 - 320(0) + 400} \Rightarrow s(0) = 20$$

$$s(1.6) = \sqrt{100(1.6)^2 - 320(1.6) + 400} \Rightarrow \boxed{s(1.6) = 12}$$

$$s(2.5) = \sqrt{100(2.5)^2 - 320(2.5) + 400} \Rightarrow s(2.5) = 15$$

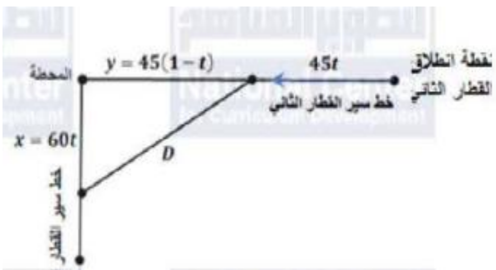
إذن تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما بعد 1.6 ساعة من بدء كل منهما بالركض ، أي الساعة $10{:}36\ am$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 123)

انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة $10:00am$ ،

وتحرك في اتجاه الجنوب بسرعة $60km/h$ ، وفي الوقت نفسه

انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة $45km/h$ ، ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة $11:00am$. في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما؟



الخطوة الأولى: أرسم مخططاً وأحدد الرموز.

نفرض x بعد القطار الأول عن المحطة

نفرض y بعد القطار الثاني عن المحطة

نفرض D البعد بين القطارين.

استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة، إذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلو متراً عنها.

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

بعد t ساعة من انطلاقها يكون : $x = 60t$ ويكون $\boxed{y = 45(1-t)} \leftarrow y = 45 - 45t$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + (45(1-t))^2}$$

$$D(t) = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2} \quad , \quad \boxed{0 \le t \le 1 \ \text{مجال الاقتران}}$$

ملاحظة: مجال اقتران أقرب مسافة تكون: $\boxed{0 \le t \le \text{المدة الزمنية للمسافة المقطوعة}}$

ملاحظة: مجال الاقتران مهم معرفته لأنه يمثل طرفي الفترة.

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران:

$$\acute{D}(t) = \frac{7200t + 4050(1-t)(-1)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} \Rightarrow \acute{D}(t) = \frac{7200t - (4050 - 4050t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\acute{D}(t) = \frac{7200t - 4050 + 4050t}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} \Rightarrow \acute{D}(t) = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = 0 \Rightarrow 11250t - 4050 = 0 \Rightarrow 11250t = 4050 \Rightarrow t = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي $t = \frac{9}{25}$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال .

$$D(t)=\sqrt{3600t^2+2025(1-t)^2} \Rightarrow D(0)=\sqrt{3600(0)^2+2025(1-0)^2} \Rightarrow D(0)=0$$

$$D(1)=\sqrt{3600(1)^2+2025(1-1)^2} \Rightarrow D(1)=\sqrt{3600} \Rightarrow D(1)=60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2+2025(1-\frac{9}{25})^2} \Rightarrow D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2+2025\left(\frac{16}{25}\right)^2}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{3600\left(\frac{81}{625}\right)+2025\left(\frac{256}{625}\right)} \Rightarrow D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{466.56+829.44}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{1296} \Rightarrow D\left(\frac{9}{25}\right)=36$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t=\frac{9}{25}h$ أي بعد 21 دقيقة و 36 ثانية .

وتكون الساعة حينئذ $10:21:36$

تطبيقات اقتصادية:

يعد إيجاد أعلى ربح، أو أعلى إيراد، أو أقل تكلفة لمنتج معين أحد التطبيقات الاقتصادية المهمة على القيم القصوى.

اقتران التكلفة $C(x)$: الاقتران الذي يمثل تكلفة إنتاج x قطعة من منتج معين .

التكلفة الحدية $\acute{C}(x)$: هي معدل التغير في (التكلفة) C بالنسبة (عدد القطع) إلى x .

اقتران الإيراد $R(x)$: الاقتران الذي يمثل إيراد بيع x وحدة من منتج معين .

الإيراد الحدي $\acute{R}(x)$: هي معدل التغير في (الإيراد) R بالنسبة إلى (عدد القطع) x .

اقتران الربح $P(x)$: الاقتران الذي يمثل ربح بيع x قطعة من منتج معين .

الربح الحدي $\acute{P}(x)$: هي معدل التغير في (الربح) P بالنسبة إلى (عدد القطع المباعة) x .

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

مثال 4: من الحياة: (صفحة 124)

لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة $26\,JD$ ، وأن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم من سعر التذكرة . إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص $4\,JD$ على الخدمات داخل المسرح ، فما سعر بيع التذكرة الذي يحقق للمسرح أعلى إيراد ؟

الخطوة الأولى: أجد اقتران الإيراد.

أفترض أولاً أن x هو المبلغ الذي خصمته إدارة المسرح من سعر التذكرة الأصلي . وبما أن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم ، فإن عدد الحضور يزيد بمقدار $50x$ مقابل كل x دينار :

R(x) = (الإيراد من التذاكر) + (الايراد من إنفاق كل شخص)

R(x) = (سعر التذكرة × عدد الأشخاص) + (4 × عدد الأشخاص)

$$R(x) = (1000 + 50x)(26 - x) + (1000 + 50x) \times 4$$

$$R(x) = 26000 - 1000x + 1300x - 50x^2 + 4000 + 200x$$

$$R(x) = 30000 + 500x - 50x^2$$

$$R(x) = -50x^2 + 500x + 30000$$

إذن الاقتران الذي يمثل الإيراد هو : $R(x) = -50x^2 + 500x + 30000$

الخطوة الثانية : أجد قيمة x التي يكون عندها الإيراد أعلى ما يمكن .

أجد الإيراد الحدي $R'(x)$ ، ثم أجد القيمة الحرجة للاقتران $R(x)$ عندما $R'(x) = 0$:

$$R'(x) = -100x + 500 \implies 100x + 500 = 0 \implies \boxed{x = 5}$$

استعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 5$:

ملاحظة: من الأسهل في هذه الأسئلة تحديد نوع القيمة الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الأولى، أو اختبار المشتقة الثانية.

$$R''(x) = -100$$

$$R''(5) = -100 < 0$$

ألاحظ أنه توجد قيمة عظمى مطلقة عندما $x = 5$.

إذن ، يحقق المسرح أعلى إيراد إذا خفض سعر التذكرة بمقدار $5\,JD$ ، أي إذا أصبح سعرها $21\,JD$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 125)

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهرياً بسعر $350\ JD$ للشاشة الواحدة ، وقد أشار مسح للسوق أعده خبير التسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المبيعة شهرياً يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره $10\ JD$ من سعر الشاشة الواحدة ، أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن .

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم هو x دينار .

أي أن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $(350 - x)$ دينار.

وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها:

$$\frac{20}{10}(350 - x) = 700 - 2x$$

إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون:

$$= 200 + 700 - 2x \implies = 900 - 2x$$

الايراد = (عدد الشاشات المبيعة) × (سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم)

$$R(x) = (900 - 2x)x \implies R(x) = 900x - 2x^2$$

$$R'(x) = 900 - 4x \implies 900 - 4x = 0 \implies 4x = 900 \implies x = 225$$

القيمة الحرجة هي $x = 225$

$$R''(x) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x = 225$

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 ديناراً .

حل أخر: نفرض أنه تم إجراء خصم x مرة ، فسيكون سعر بيع الشاشة $(350 - 10x)$ ، وسيكون عدد الشاشات المبيعة $(200 + 20x)$

وليكن الإيراد $R(x)$ فإن :

$$R(x) = (350 - 10x)(200 + 20x)\ , 0 \le x \le 35$$

$$R(x) = 70000 + 5000x - 200x^2$$

$$R'(x) = 5000 - 400x \implies 5000 - 400x = 0 \implies 400x = 5000 \implies x = 12.5$$

قيمة x الحرجة هي 12.5 ولإيجاد السعر الذي يحقق أعلى إيراد نقارن قيمة الإيراد عند القيمة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال .

$$R(x) = 70000 + 5000x - 200x^2$$

$$R(0) = 70000 + 5000(0) - 200(0)^2 \Rightarrow R(0) = 70000$$

$$R(12.5) = 70000 + 5000(12.5) - 200(12.5)^2$$

$$R(12.5) = 70000 + 62500 - 31250 \Rightarrow R(12.5) = 101250$$

إذن يكون الإيراد اعلى ما يمكن عندما $x = 12.5$

ويكون سعر بيع الشاشة $(350 - 10(12.5) = 225)$ أي 225 ديناراً .

إيجاد أكبر زاوية:

ملاحظات مهمة:

يتوفر من خلال معطيات السؤال ثلاث زوايا وهي:

1) **الزاوية الأكبر:** وترمز لها θ (وهي تشمل زاوية مدى الرؤية (اللوحة+ المسافة بين استقامة مستوى الرؤية وبداية الجسم المرئي).

$$\theta = \alpha + \beta$$

2) **الزاوية الوسط:** وترمز لها β (وهي تمثل زاوية الجسم المرئي (من بداية اللوحة إلى نهايتها)).

$$\beta = \theta - \alpha$$

3) **الزاوية الأصغر:** وترمز لها α (وهي تمثل الزاوية بين استقامة مستوى الرؤية وبداية الجسم المرئي).

$$\alpha = \theta - \beta$$

ملاحظات مهمة:

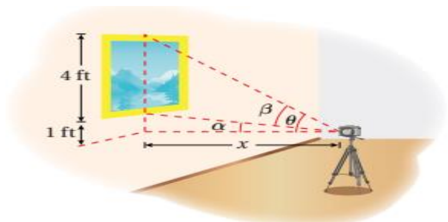
1) نستخدم متطابقة الفرق بين زاويتين عندما نريد تقسيم زاوية أكبر إلى زاويتين أصغر.

2) نستطيع إيجاد قيمة ظل الزاوية الوسط والتي يرمز لها β ؛ من خلال المعطيات المتوفرة عن الزاويتين θ و α .

ملاحظات مهمة:

متطابقة ظل الفرق بين زاويتين:

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$$



مثال 5: من الحياة :(صفحة 125)

يريد مصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها $4\ ft$ ،

وهي معلقة في معرض فني، إذا كانت عدسة الكاميرا

تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار $1\ ft$ ، كما يظهر في الشكل المجاور ، فأجد بعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها (β) أكبر ما يمكن .

الخطوة الأولى: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

يظهر من الشكل أن ظل الزاوية β التي يراد إيجاد أكبر قيمة لها يعطى بالمعادلة الآتية :

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha)$$

اكتب ظل الزاوية β بدلالة المتغير x الذي يمثل بعد العدسة عن اللوحة :

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha)$$

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x} \times \frac{1}{x}} \Rightarrow = \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} \Rightarrow = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}} \Rightarrow = \frac{\frac{4}{x} \times \frac{x^2}{1}}{x^2+5} \Rightarrow = \frac{4x}{x^2+5}$$

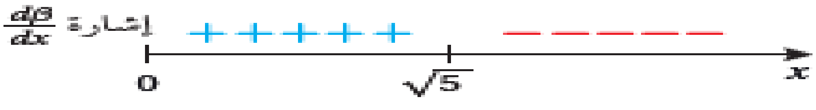
اذن $\tan\beta = \frac{4x}{x^2+5}$.

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة، محدداً نوعها.

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{(x^2+5)(4) - (4x)(2x)}{(x^2+5)^2} \Rightarrow = \frac{(4x^2+20) - (8x^2)}{(x^2+5)^2} \Rightarrow = \frac{20 - 4x^2}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{20 - 4x^2}{(x^2+5)^2} = 0 \Rightarrow 20 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{5}}$$

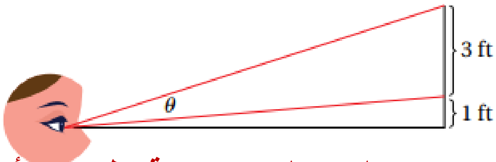
استعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع القيمة الحرجة :



الاحظ من اختبار المشتقة الأولى وجود قيمة عظمى مطلقة عندما $x = \sqrt{5}$

إذن يجب أن يكون بعد الكاميرا عن اللوحة $\sqrt{5}\ ft$ ، لكي تكون زاوية تصوير عدستها أكبر ما يمكن .

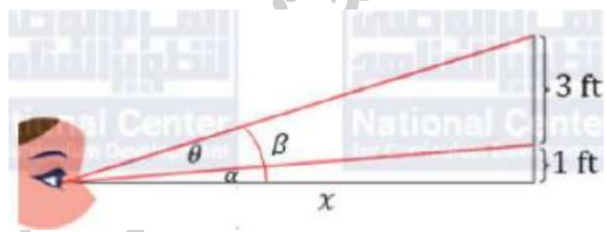
أتحقق من فهمي: (صفحة 126)



نظرت ساره إلى لوحة معلقة على حائط في منزلها، ارتفاعها 3 ft متراً ، وارتفاع حافتها السفلية 1 ft متراً فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم قدماً يجب أن تبتعد ساره عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن ؟

الخطوة الأولى: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

نسمى الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}\times\frac{1}{x}}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} \Rightarrow = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x^2+4}{x^2}} \Rightarrow = \frac{3}{x}\times\frac{x^2}{x^2+4} \Rightarrow = \frac{3x^2}{x^3+4x} \Rightarrow = \frac{3x}{x^2+4}$$

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة، محدداً نوعها.

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+4)(3)-(3x)(2x)}{(x^2+4)^2} \Rightarrow = \frac{(3x^2+12)-(6x^2)}{(x^2+4)^2} \Rightarrow = \frac{3x^2+12-6x^2}{(x^2+4)^2}$$

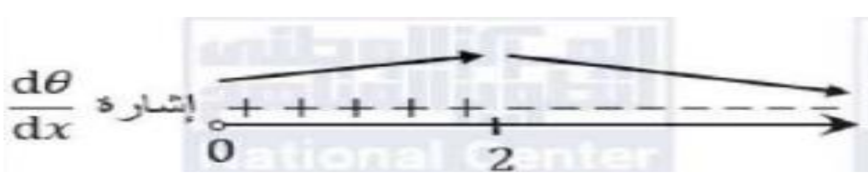
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}\cos^2\theta$$

$$-3x^2+12=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$$

لكن $\cos^2\theta \neq 0$ لأن $\theta < \frac{\pi}{2}$

إذن يوجد قيمة حرجة وحيدة هي $x=2$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى ، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة 2 ft لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن .

تطبيقات في المستوى الإحداثي:

امثلة على تطبيقات القيم القصوى في المستوى الإحداثي:

1) إيجاد أقرب نقطة على منحنى اقتران من نقطة معلومة.

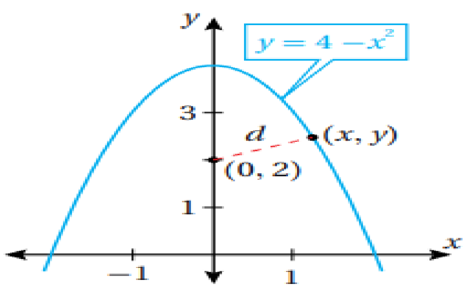
2) إيجاد أكبر مساحة ممكنة لشكل مرسوم داخل منحنى اقتران.

ملاحظة مهمة جداً : قانون المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 6: (صفحة 127)

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 4 - x^2$ ، التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0, 2)$.



الخطوة الأولى: ارسم مخططا.

افترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x, y) ،

وأن d هي المسافة بينها وبين النقطة $(0, 2)$.باستعمال قانون المسافة

بين نقطتين ، فإن الاقتران الذي يمثل المسافة d يكتب كما يأتي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \implies d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$$

الخطوة الثانية: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

بما أن النقطة (x, y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن $y = f(x) = 4 - x^2$

اكتب الاقتران d بدلالة متغير واحد :

$$d = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \implies d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} \implies d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$

إذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين النقطتين هو : $d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$.

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة، محدداً نوعها.

$$\acute{d}(x) = \frac{2x + 2(2 - x^2)(-2x)}{2\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}}$$

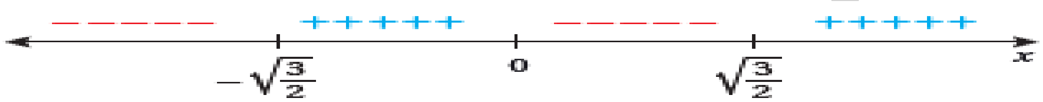
$$\acute{d}(x) = \frac{2x - 4x(2 - x^2)}{2\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}} \Rightarrow = \frac{x - 2x(2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}}$$

$$\frac{x - 2x(2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}} = 0 \Rightarrow x - 2x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x - 4x + 2x^3 = 0$$

$$-3x + 2x^3 = 0 \Rightarrow x(-3 + 2x^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$-3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

استعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل قيمة حرجة:



توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وتوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ، و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \Rightarrow = 4 - \frac{3}{2} \Rightarrow = \frac{5}{2}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 4 - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \Rightarrow = 4 - \frac{3}{2} \Rightarrow = \frac{5}{2}$$

إذن أقرب نقطتين إلى النقطة $(0, 2)$ هما : $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ ، $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 128)

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x)=\sqrt{8x}$ ، والتي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(4,2)$.

لتكن النقطة $(0,2)$ على منحنى $f(x)=\sqrt{8x}$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4,2)$ هي L حيث :

$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

$$L=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow L=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{8x}-2)^2}$$

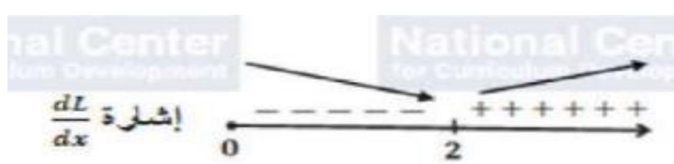
$$\frac{dL}{dx}=\frac{2(x-4)+2(\sqrt{8x}-2)\left(\frac{8}{2\sqrt{8x}}\right)}{2\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{8x}-2)^2}} \Rightarrow =\frac{(x-4)+(\sqrt{8x}-2)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\Rightarrow =\frac{(x-4)+\left(4-\frac{8}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}} \Rightarrow =\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}=0 \Rightarrow x-\frac{8}{\sqrt{8x}}=0 \Rightarrow x=\frac{8}{\sqrt{8x}}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{8x}=8 \Rightarrow x^2\times 8x=64 \Rightarrow 8x^3=64 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

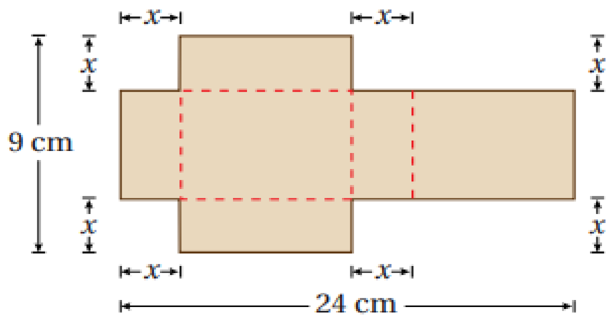
نستخدم إشارة المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



$$f(x)=\sqrt{8x} \Rightarrow f(2)=\sqrt{8(2)} \Rightarrow f(2)=\sqrt{16} \Rightarrow f(2)=4$$

إذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى x للنقطة $(4,2)$ هي : $(2,4)$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 128)



قطعة كرتون طولها $24cm$، وعرضها $9cm$ ،

أزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان

كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيها،

وتكوين صندوق له غطاء منها:

1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق .

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

الحجم $= l \times w \times h$

الطول $\Longrightarrow 2x + 2l = 24 \Longrightarrow 2l = 24 - 2x \Longrightarrow \boxed{l = 12 - x}$

العرض $\Longrightarrow \boxed{w = 9 - 2x}$

الارتفاع $\Longrightarrow \boxed{h = x}$

$$V(x) = (12 - x)(9 - 2x)x \Longrightarrow = (12 - x)(9x - 2x^2)$$

$$\Longrightarrow = 108x - 24x^3 - 9x^2 + 2x^3 \Longrightarrow = 2x^3 - 33x^2 + 108x$$

2) أحدد مجال الاقتران V .

حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة وذلك بتحقيق الشروط الثلاثة الآتية معاً :

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0$$

$$12 - x > 0 \Longrightarrow x < 12$$

$$9 - 2x > 0 \Longrightarrow x < \frac{9}{2}$$

أصفار الاقتران $V(x)$ هي : $x = 12$ ، $x = \frac{9}{2}$ ، $x = 0$

أي أن مجال الاقتران $V(x)$ هو قيم x التي تجعل $V(x) > 0$.

ومجال هذا الاقتران هنا هو: $0 \le x \le \frac{9}{2}$

لأنه عندما يكون $\frac{9}{2} < x < 12$ ، تكون $V(x) < 0$

3) أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن.

$V(x) = 2x^3 - 33x^2 + 108x$

$\acute{V}(x) = 6x^2 - 66x + 108 \implies 6x^2 - 66x + 108 = 0$

$x^2 - 11x + 18 = 0 \implies (x-9)(x-2) = 0$

$x - 9 = 0 \implies \boxed{x = 9} \implies x - 2 = 0 \implies \boxed{x = 2}$

القيمة 9 خارج المجال ، إذن تهمل ، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x = 2$.

$\acute{\acute{V}}(x) = 12x - 66$

$\acute{\acute{V}}(2) = 12(2) - 66 \implies = 24 - 66 \implies = -42 < 0$

$l = 12 - x \implies l = 12 - 2 \implies \boxed{l = 10}$

$w = 9 - 2x \implies w = 9 - 2(2) \implies \boxed{w = 5}$

$h = x \implies \boxed{h = 2}$

وعليه يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده : $2\ m , 5\ m , 10\ m$

ويكون حجمه عندئذ $V(2) = 100\ m^3$

الحجم $= l \times w \times h \implies 10 \times 5 \times 2 \implies$ $\boxed{\text{الحجم} = 100\ m^3}$

4) أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة : $4x^2 + y^2 = 4$ ، والتي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0,1)$.

لتكن النقطة (x,y) على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0,1)$ هي L حيث :

$$4x^2 + y^2 = 4 \implies 4x^2 = 4 - y^2 \implies x^2 = \frac{4 - y^2}{4} \implies x = \pm\sqrt{\frac{4 - y^2}{4}}$$

$$L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \implies L = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$L = \sqrt{\frac{4 - y^2}{4} + y^2 - 2y + 1} \implies L = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$$

$$L = \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2} \implies \frac{dL}{dy} = \frac{(2)\frac{3}{4}y - 2}{2\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}} \qquad , \boxed{y \in [-2,2]}$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}} = 0 \implies \frac{3}{4}y - 1 = 0 \implies \frac{3}{4}y = 1 \implies y = \frac{4}{3}$$

إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ وهي $y = \frac{4}{3}$

وبمقارنة $L(\frac{4}{3})$ ، مع $L(-2)$ و $L(2)$ ، نجد أن $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لأن :

$$L(2)=\sqrt{\frac{3}{4}(2)^2-2(2)+2} \Rightarrow L(2)=\sqrt{3-4+2} \Rightarrow L(2)=\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{L(2)=1}$$

$$L(-2)=\sqrt{\frac{3}{4}(-2)^2-2(-2)+2} \Rightarrow L(-2)=\sqrt{3+4+2} \Rightarrow L(-2)=\sqrt{9} \Rightarrow \boxed{L(-2)=3}$$

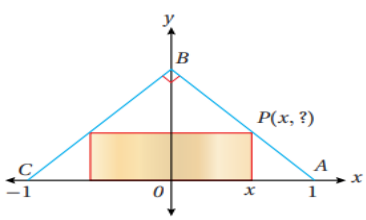
$$L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\left(\frac{4}{3}\right)+2} \Rightarrow L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\left(\frac{4}{3}\right)+2} \Rightarrow L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{16}{9}\right)-2\left(\frac{4}{3}\right)+2}$$

$$L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}} \Rightarrow L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{L\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0.82}$$

تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y=\frac{4}{3}$ ، وتكون x

$$x=\pm\sqrt{\frac{4-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4}} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4-\left(\frac{16}{9}\right)}{4}} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\frac{20}{9}}{4}} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{20}{36}} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0,1)$ هما : $\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$ و $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$



يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً داخل مثلث قائم الزاوية.

وهو متطابق الضلعين ، وطول قاعدته 2 وحدة طول :

5) أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x .

- المثلث قائم ومتطابق الضلعين وزاوية رأس المثلث تساوي (90°) أي $\frac{\pi}{2}$ ، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته (45°) أي $\frac{\pi}{4}$ لأن مجموع زوايا المثلث 180°.

- نطبق قانون الميل باستخدام ظل الزاوية : الميل يساوي ظل الزاوية المحصورة بين الخط المستقيم ومحور السينات الموجب x . $m=\tan\theta$

- الزاوية المحصورة بين الخط المستقيم تساوي متممة الزاوية $\frac{\pi}{4}$ وتساوي $180^\circ-45^\circ=135^\circ$ وتساوي $\frac{3\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي :

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-0=-1(x-1) \rightarrow y=1-x$$

إذن الإحداثي y للنقطة P هو $1-x$

6) أكتب مساحة المستطيل بدلالة x .

مساحة المستطيل = طوله × عرضه

$$A = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2 \quad , 0 \leq x \leq 1$$

7) أجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.

$$A = 2x - 2x^2$$

$$\acute{A}(x) = 2 - 4x$$

$$\acute{A}(x) = 2 - 4x \Rightarrow 2 - 4x = 0 \Rightarrow 2 = 4x \Rightarrow x = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = 2(0) - 2(0)^2 \quad \Rightarrow = 0$$

$$A(1) = 2(1) - 2(1)^2 \quad \Rightarrow = 0$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad = 1 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = 0 \quad , A(1) = 0 \, , \quad \boxed{A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي : $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة .

8) أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.

الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي:

الطول $2x \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{1}$ ، والعرض : $y = 1 - x \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

يمثل الاقتران $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حددته إحدى الشركات ، حيث x عدد البدلات المبيعة . ويمثل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة انتاج x بدلة .

9) أجد اقتران الإيراد.

$$R(x) = x \times s(x)$$

$$R(x) = x(150 - 0.5x)$$

$$R(x) = 150x - 0.5x^2$$

10) أجد اقتران الربح.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 150x - 0.5x^2 - (4000 + 0.25x^2) \implies = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$$

$$P(x) = 150x - 0.75x^2 - 4000$$

11) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P'(x) = 150 - 1.5x$$

$$P'(x) = 0 \to 150 - 1.5x = 0 \implies 1.5x = 150 \implies x = 100$$

$$P''(x) = -1.5$$

$$P''(100) = -1.5 < 0$$

إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدله ، وتكون قيمة الربح :

$$P(100) = 150(100) - 0.75(100)^2 - 4000$$

$$P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 100\,JD$$

$$P(100) = 15000 - 11500 = \boxed{3500\,JD}$$

12) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

$$P(100) = 150 - 0.5(100) = 100\,JD$$

13) تنتج مزرعة للتفاح 30 صندوقاً من الشجرة الواحدة تقريباً عند زراعة 20 شجرة في كل فدان (للعلم:الفدان يساوي 400 متر مربع) من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيق أكبر إنتاج ممكن؟

- نفرض أن زراعة x إضافية في كل فدان ، فسيكون عدد الأشجار في الفدان $(20 + x)$ شجرة.

- بالتالي يصبح انتاج كل شجرة $(30 - x)$ صندوقاً .

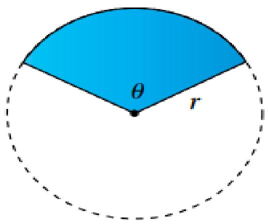
- ليكن $T(x)$ اقتران الإنتاج الذي يساوي عدد الأشجار مضروباً في إنتاج كل شجرة، فإن:

$$T(x) = (20 + x) \times (30 - x) \implies = 600 - 20x + 30x - x^2 \implies = 600 + 10x - x^2$$

$$T'(x) = 10 - 2x \implies 10 - 2x = 0 \implies 2x = 10 \implies \boxed{x = 5}$$

$$T''(x) = -2 \implies T''(5) = -2 < 0$$

- إذن، يكون الإنتاج أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الشجرات الإضافية في الفدان 5 شجرات، أي عند زراعة 25 شجرة في كل فدان.



لدى مزارع P متراً طولياً من سياج ، يرغب في استعماله كاملاً لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان ، في دائرة نصف قطرها r متراً كما في الشكل المجاور :

14) أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو : $P = r(\theta + 2)$.

ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل ، إذن :

محيط القطاع الدائري = نق + نق + طول القوس $\Rightarrow P = r + r + L$

طول القوس = نق $\times\, \theta \Rightarrow L = r \times \theta \;\Rightarrow L = r\theta$

$$P = r + r + r\theta \Rightarrow P = 2r + r\theta \Rightarrow P = r(2 + \theta)$$

15) أثبت أن مساحة القطاع هي : $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

لتكن L مساحة القطاع الدائري المظلل ، إذن : $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2r}{r} = \theta = \frac{P}{r} - \frac{2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \;\Rightarrow\; = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) \;\Rightarrow\; = \frac{1}{2}(Pr - 2r^2) \;\Rightarrow\; = \frac{1}{2}Pr - r^2$$

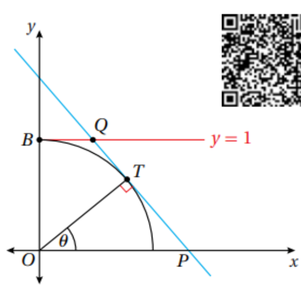
16) أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن .

$$\acute{A}(r) = \frac{1}{2}P - 2r$$

$$\acute{A}(r) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}P - 2r = 0 \;\Rightarrow 2r = \frac{1}{2}P \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{4}P$$

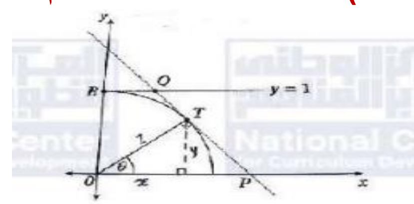
$$\acute{\acute{A}}(r) = -2 \;\Rightarrow\; \acute{\acute{A}}\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$$

تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$



تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها : $x^2 + y^2 = 1$ ، حيث تصنع القطعة المستقيمة OT الزاوية θ مع محور x الموجب و : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور :

17) أثبت أن معادلة المستقيم PT هي :



$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$

$\sin\theta = \frac{y}{1}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{1} \Longrightarrow T(\cos\theta, \sin\theta)$

ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله θ، ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-1}{\tan\theta}$ لأنه يعامد OT

معادلة PT :

$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta) \Longrightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$

$y\sin\theta + x\cos\theta = 1$

18) أثبت أن مساحة شبه المنحرف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي :

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$

لإيجاد OP نضع $y = 0$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن :

$0 + x\cos\theta = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$

لإيجاد BQ نضع $y = 1$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن :

$\sin\theta + x\cos\theta = 1 \Longrightarrow x = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = BQ$

ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

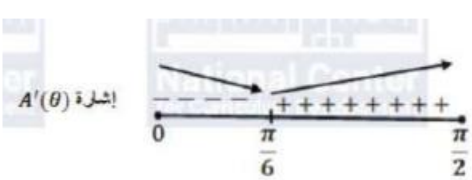
$A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB) \Longrightarrow = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) \Longrightarrow = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$

19) أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن .

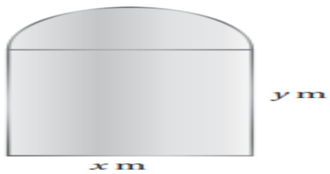
$\acute{A}(\theta) = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2 - \sin\theta) - (-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta}$

$\acute{A}(\theta) = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$

$\acute{A}(\theta) = 0 \rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0 \Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$



تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$



20) يبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين،

أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها xm ،

والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه xm وارتفاعه ym .

صنع الجزء العلوي من زجاج ملون يسمح بمرور 1 وحدات من ضوء لكل متر مربع ، وصنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع ، أجد قيمة كل من x و y التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن ، علماً بأن $10m$ من المعدن الرقيق استعمل في تشكيل إطار النافذة كاملاً ، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين .

لتكن كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة Q

$$Q = 3xy + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \; = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L

$$L = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

ومنه فإن كمية الضوء تصبح:

$$Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 \Rightarrow = 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$\acute{Q}(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x = 0 \Rightarrow 15 - 6x - \frac{5\pi}{4}x = 0 \Rightarrow 6x + \frac{5\pi}{4}x = 15$$

$$\Rightarrow x\left(6 + \frac{5\pi}{4}\right) = 15 \Rightarrow x\left(\frac{24 + 5\pi}{4}\right) = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{24 + 5\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{60}{24 + 5\pi}}$$

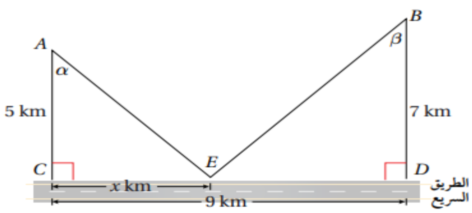
$$y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{60}{24 + 5\pi}\right) \Rightarrow 5 + \frac{-(4 + \pi)}{4}\left(\frac{60}{24 + 5\pi}\right) \Rightarrow = 5 + (-4 - \pi)\left(\frac{15}{24 + 5\pi}\right)$$

$$y = 5 + \left(\frac{-60}{24 + 5\pi} - \frac{15\pi}{24 + 5\pi}\right) \Rightarrow = 5 + \left(\frac{-60 - 15\pi}{24 + 5\pi}\right) \Rightarrow = \frac{120 + 25\pi}{24 + 5\pi} + \frac{-60 - 15\pi}{24 + 5\pi}$$

$$y = \frac{120 + 25\pi - 60 - 15\pi}{24 + 5\pi} \Rightarrow \boxed{y = \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}}$$

إذن تكون كمية الضوء المار خلال أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{60}{24 + 5\pi}, \qquad y = \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}$$



يمارس يوسف هواية ركوب الدراجات، وفي أحد الأيام، انطلق على دراجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B ، ماراً بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

21) إذا كان الاقتران L يمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة ، فأكتب L بدلالة x.

$$L = AE + EB$$

$$L = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(9-x)^2+49} \quad , 0 \le x \le 9$$

22) أثبت أنه إذا كان : $\frac{dL}{dx} = 0$ ، فإن : $\sin\alpha = \sin\beta$.

$$\frac{dL}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+25}} + \frac{-2(9-x)}{2\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

23) أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن .

من الفرع السابق ، بما ان $\sin\alpha = \sin\beta$ والزاويتان α و β حادتان ، إذن $\alpha = \beta$

ومنه فإن $\tan\alpha = \tan\beta$ أي :

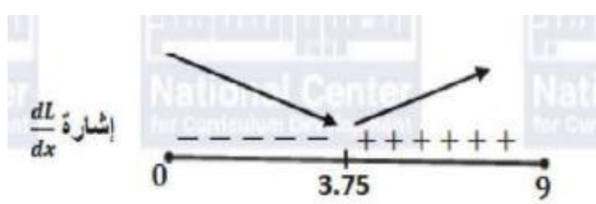
$$\frac{x}{5} = \frac{9-x}{7}$$

$$7x = 45 - 5x$$

$$12x = 45$$

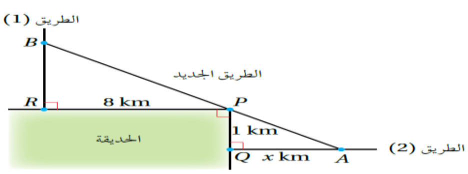
$$x = \frac{15}{4}$$

$$x = 3.75$$



إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي $3.75\ km$

24) يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة،



أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين ، ويمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة ، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين القديمين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن ، علماً بأن النقطة A تقع على بعد xkm من النقطة Q . أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن .

ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة ، إذن المثلثان القائمان PRB و AQP متشابهان ، ينتج عن ذلك : $\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \to BR = \frac{8}{x}$

$$L = AB + PB$$

$$L = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64 + \left(\frac{8}{x}\right)^2} \Rightarrow = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64 + \frac{64}{x^2}} \Rightarrow = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

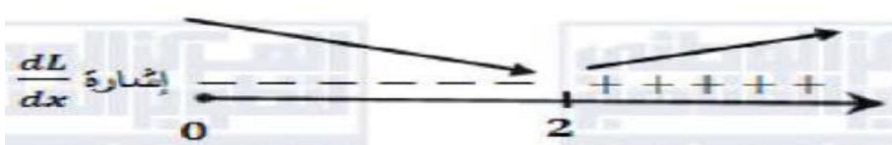
$$\Rightarrow = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{64(x^2+1)}{x^2}} \Rightarrow = \sqrt{1+x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \boxed{= \sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right)} \ , x > 0$$

$$\frac{dL}{dx} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow = \left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = \left(-\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{8}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow = -\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$-\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$8x^2 + x^3 = 8(1+x^2) \Rightarrow 8x^2 + x^3 = 8 + 8x^2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

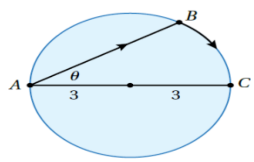


إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي : $x = 2km$

مهارات التفكير العليا: صفحة 131

25) تبرير : يقف رجل عند النقطة A على شاطىء بحيرة دائرية نصف قطرها $3km$ ، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماماً للنقطة A ، على الجانب الآخر من البحيرة في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور . يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة $3km/h$ ، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة $6km/h$ ،

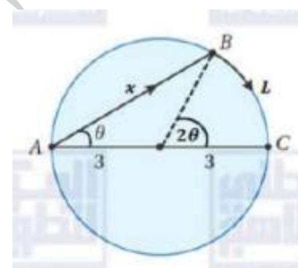
أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي.



المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر، ومنه فإن : $\cos\theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي 2θ لانها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه .

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T



$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} \Rightarrow = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$T = \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6} \Rightarrow = 2\cos\theta + \theta \quad , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 2(-\sin\theta) + 1 \Rightarrow = -2\sin\theta + 1$$

$$1 - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow 2\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

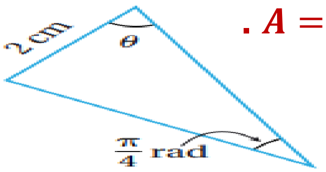
$$T(0) = 2\cos(0) + (0) \Rightarrow = 2(1) \Rightarrow \boxed{T(0) = 2\ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow = \sqrt{3} + \left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.25\ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow = 2(0) + \left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.57\ h}$$

إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\widehat{AB}$ كاملاً راكضاً على اليابسة دون تجديف في الماء .

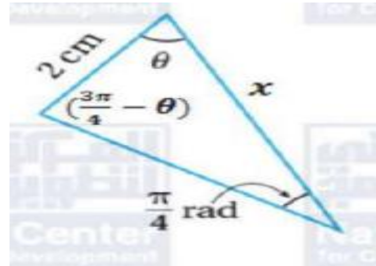
تحد : يبين الشكل المجاور مثلثاً ، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4} rad$ ، ومقابلها ضلع طوله $2cm$:



26) أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران : $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

ليكن طول الضلع الاخر من ضلعي الزاوية θ هو x ،

فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو



$$\pi - \theta - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} - \theta$$

ولتكن مساحة هذا المثلث A فإن :

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \Rightarrow \quad \text{الوتر} = \frac{\text{المقابل}}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$\sin\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \Rightarrow \quad \text{الوتر} = \frac{\text{المقابل}}{\sin\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)} \quad \Rightarrow \quad = \frac{x}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)} \quad \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} x = 2\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} x = 2\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right) \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

وحسب المتطابقة المثلثية:

$$\boxed{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$$

$$x = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right) \Rightarrow = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \Rightarrow = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta \quad \Rightarrow \quad = 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$A = (2\cos\theta + 2\sin\theta) \times \sin\theta \quad \Rightarrow \quad = 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

$$A = 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta \Rightarrow 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

$$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

إذن مساحة المثلث المعطى هي : $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

27) أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي : $(1+\sqrt{2})cm^2$.

$A(\theta) = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

$\acute{A}(\theta) = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta$

$2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$

$\Rightarrow \frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta} = \frac{-2\cos 2\theta}{2\cos 2\theta} \Rightarrow \tan 2\theta = -1$

$2\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow = \left[2\theta = \frac{3\pi}{4}\right] \times \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن الاقتران هي : $\theta = \frac{3\pi}{8}$

لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$A(\theta) = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

$A(0) = \sin 2(0) - \cos 2(0) + 1 \Rightarrow = \sin 0 - \cos 0 + 1$

$\Rightarrow = 0 - 1 + 1 \Rightarrow \boxed{A(0) = 0}$

$A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin 2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cos 2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 1 \Rightarrow = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1$

$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$\Rightarrow = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \boxed{\approx 2.41}$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 \Rightarrow = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1$

$\Rightarrow = -1 - 0 + 1 \Rightarrow \boxed{= 0}$

إذن أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي : $A(\frac{3\pi}{8}) = (1+\sqrt{2})cm^2$

اختبار نهاية الوحدة: (صفحة 132)

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) مثلث قائم الزاوية ، ساقاه x و y ، ووتره z إذا كان: $\boxed{\frac{dz}{dt}=1}$ ، وكان $\boxed{\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}}$ ، فإن $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=4$ و $y=3$ هي :

$$z^2=x^2+y^2 \Longrightarrow z^2=(4)^2+(3)^2 \Longrightarrow z^2=16+9 \Longrightarrow =25 \Longrightarrow z=5$$

$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt} \Longrightarrow 2(5)(1)=2(4)(3)\frac{dy}{dt}+2(3)\frac{dy}{dt}$$

$$\Longrightarrow 10=24\frac{dy}{dt}+6\frac{dy}{dt} \Longrightarrow 10=30\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt}=3\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}=1}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\boxed{1}$ c) 2 d) 5

2) القيمة العظمى المطلقة للاقتران : $f(x)=4x-x^2+6$ في الفترة $[0,4]$ هي :

$$f(x)=4x-x^2+6$$

$$\acute{f}(x)=4-2x \Longrightarrow 4-2x=0 \Longrightarrow 2x=4 \Longrightarrow x=2$$

$$f(2)=4(2)-(2)^2+6 \Longrightarrow =8-4+6 \Longrightarrow \boxed{f(2)=10}$$

$$f(0)=4(0)-(0)^2+6 \Longrightarrow =0-0+6 \Longrightarrow \boxed{f(0)=6}$$

$$f(4)=4(4)-(4)^2+6 \Longrightarrow =16-16+6 \Longrightarrow \boxed{f(4)=6}$$

a) 6 b) 2 c) $\boxed{10}$ d) 12

3) الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران : $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$ هو :

$$f(x)=x^5-5x^4+3x+7 \Longrightarrow \acute{f}(x)=5x^4-20x^3+3$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=20x^3-60x^2 \Longrightarrow 20x^3-60x^2=0 \Longrightarrow x^3-3x^2=0$$

$$x^2(x-3)=0 \Longrightarrow x-3=0 \Longrightarrow \boxed{x=3}$$

a) 0 b) 1 c) $\boxed{3}$ d) -1

4) قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هي :

$f(x)=(x-2)(x-3)^2$

$\acute{f}(x)=\big((x-2)2(x-3)(1)\big)+\big((x-3)^2(1)\big) \Rightarrow =(x-2)(2x-6)+(x-3)^2$

$\Rightarrow =(2x^2-6x-4x+12)+(x^2-6x+9) \Rightarrow = 2x^2-6x-4x+12+x^2-6x+9$

$\Rightarrow = 2x^2-6x-4x+12+x^2-6x+9 \Rightarrow =3x^2-16x+21$

$3x^2-16x+21=0 \Rightarrow (3x-7)(x-3)=0$

$(3x-7)(x-3)=0 \Rightarrow 3x-7=0 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{3}} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}-2\right)\left(\frac{7}{3}-3\right)^2 \Rightarrow =\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow =\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{27}}$

$f(3)=(3-2)(3-3)^2 \Rightarrow =(3-2)(3-3)^2 \Rightarrow \boxed{f(3)=0}$

a) 3 *b)* $-\frac{7}{3}$ *c)* $\frac{5}{3}$ *d)* $\boxed{\frac{7}{3}}$

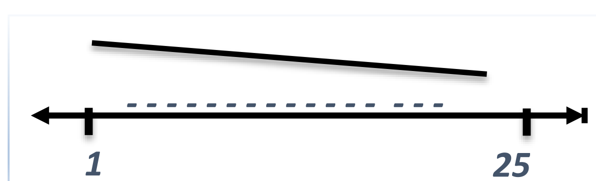
5) إذا كانت $[1,25]$ هي مجال الاقتران المتصل f ، الذي مداه $[3,30]$ وكان : $\acute{f}(x)=x<0$ لجميع قيم 1 بين 25 و $f(25)$ تساوي :

مجال الاقتران $[1,25]$ ، مدى الاقتران $[3,30]$

المشتقة سالبة لجميع الأعداد الحقيقية $\acute{f}(x)=x<0$ ، إذن الاقتران متناقص

$f(25)=3$

$f(1)=30$



a) 1 *b)* $\boxed{3}$ *c)* 25 *d)* 30

6)القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات هي:

الشكل: مثلث ، العلاقة: مساحة مثلث قائم الزاوية $A = \frac{1}{2}xy$ ، طول وتره $z = 10$

$$10^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$A = \frac{1}{2}xy \Rightarrow A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left((x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)(1)\right) \Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)\right) \Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \frac{100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) \Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}\right)$$

$$\acute{A} = \frac{-2x^2 + 100}{2\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50}$$

$$y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} \Rightarrow = \sqrt{100 - 50} \Rightarrow \sqrt{50}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{50} \times \sqrt{50} \Rightarrow = \frac{1}{2} \times 50 \Rightarrow \boxed{A = 25}$$

a) 24 *b)* $\boxed{25}$ *c)* 48 *d)* 50

7) إذا زاد حجم مكعب بمعدل $24cm^3/min$، وزادت مساحة سطحه بمعدل $12cm^2/min$ ، فإن طول ضلعه في تلك اللحظة هو :

الشكل: مكعب

العلاقة: حجم المكعب وتساوي $V = (x)^3$

العلاقة: المساحة السطحية للمكعب $A = 6x^2$

معدل التغير في حجم المكعب $\frac{dV}{dt} = 24cm^3/min$.

معدل التغير في مساحة سطح المكعب $\frac{dA}{dt} = 12cm^2/min$.

طول الضلع $x = ?$

$\left(\text{طول الضلع}\right)^3 = \text{حجم المكعب}$

$V = (x)^3$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} \Longrightarrow 12 = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

عدد المجاهيل في المشتقة 2، لذلك نحتاج علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

نستفيد من العلاقة الثانوية وهي مساحة المكعب

$A = 6x^2$

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

$$12 = 12x\frac{dx}{dt} \Longrightarrow x\frac{dx}{dt} = 1 \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}}$$

$$24 = 3x^2\frac{1}{x} \Longrightarrow 24 = 3x \Longrightarrow \boxed{x = 8\ cm}$$

a) $2\ cm$ *b)* $2\sqrt{2}cm$ *c)* $4\ cm$ *d)* $\boxed{8\ cm}$

8) عدد النقاط الحرجة للاقتران : $f(x) = (x-2)^5(x+3)^4$ هو :

$$\acute{f}(x) = (x-2)^5 4(x+3)^3(1) + (x+3)^4 5(x-2)^4(1)$$

$$\acute{f}(x) = (x-2)^5 4(x+3)^3 + (x+3)^4 5(x-2)^4 \Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3(4(x-2)+5(x+3))$$

$$\Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3\big(4(x-2)+5(x+3)\big) \Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3((4x-8)+(5x+15))$$

$$\Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3\big((4x-8)+(5x+15)\big) \Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3(4x-8+5x+15)$$

$$\Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3(4x-8+5x+15) \Longrightarrow = (x-2)^4(x+3)^3(9x+7) = 0$$

$$(x-2)^4 = 0 \Longrightarrow x-2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$(x+3)^3 = 0 \Longrightarrow x+3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -3}$$

$$(9x+7) = 0 \Longrightarrow 9x = -7 \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{7}{9}}$$

a) 1 *b)* 2 *c)* $\boxed{3}$ *d)* 5

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

9) $f(x) = 3x^2 - 2x^3,\ [-5, 1]$

$\acute{f}(x) = 6x - 6x^2 \Rightarrow 6x - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x(1-x) = 0$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

مجموعة قيم x الحرجة ضمن الفترة $(-5, 1)$ هي : $x = 0$

نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي الفترة:

$f(0) = 3(0)^2 - 2(0)^3 \Rightarrow f(0) = 0$

$f(1) = 3(1)^2 - 2(1)^3 \Rightarrow f(1) = 3 - 2 \Rightarrow f(1) = 1$

$f(-5) = 3(-5)^2 - 2(-5)^3 \Rightarrow f(-5) = 75 + 250 \Rightarrow f(-5) = 325$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(-5) = 325$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0) = 0$

10) $f(x) = \frac{x}{x+3},\ [-1, 6]$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x+3)(1) - (x)(1)}{(x+3)^2} \Rightarrow = \frac{(x+3-x)}{(x+3)^2} \Rightarrow = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$\acute{f}(x) > 0$ لجميع قيم x ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد على مجاله .

ولا يوجد له قيم حرجة ضمن $(-1, 6)$ ، قيمة القصوى تكون عند طرفي مجاله .

$$f(-1) = \frac{-1}{-1+3} \Rightarrow = -\frac{1}{2}$$

$$f(6) = \frac{6}{6+3} \Rightarrow = \frac{6}{9} \Rightarrow = \frac{2}{3}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(6) = \frac{2}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = -\frac{1}{2}$

11) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}},\ [-3, 1]$

$$\acute{f}(x) = (x)\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right) + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)(1) \Rightarrow = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2$$

للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = -2$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(-3) = -3e^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow = \frac{-3}{\sqrt{e^3}} \Rightarrow = \frac{-3}{4.48} \Rightarrow \boxed{f(-3) \approx -0.669}$$

$$f(-2) = -2e^{\frac{-2}{2}} \Rightarrow = -2e^{-1} \Rightarrow = \frac{-2}{e} \Rightarrow \boxed{f(-2) \approx -0.735}$$

$$f(1) = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{f(1) \approx 1.648}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(1) = 1.648$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2) = -0.735$

12) $f(x) = 3\cos x,\ [0, 2\pi]$

$$\acute{f}(x) = -3\sin x \Rightarrow -3\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pi}\ ,\boxed{x = 2\pi}$$

للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = \pi$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(0) = 3\cos 0 \Rightarrow = 3(1) \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

$$f(\pi) = 3\cos \pi \Rightarrow = 3(-1) \Rightarrow \boxed{f(\pi) = -3}$$

$$f(2\pi) = 3\cos 2\pi \Rightarrow = 3(1) \Rightarrow \boxed{f(2\pi) = 3}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي 3 $f(2\pi) = f(\pi) =$

وقيمة صغرى مطلقة هي $f(\pi) = -3$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران:

13) $f(x) = x^5 + x^3$

$\acute{f}(x) = 5x^4 + 3x^2 \implies 5x^4 + 3x^2 = 0 \implies x^2(5x^2 + 3) = 0$

$5x^2 + 3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \implies \boxed{x = 0}$

الاقتران f متزايد على R وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة .

14) $f(x) = x^4e^{-x}$

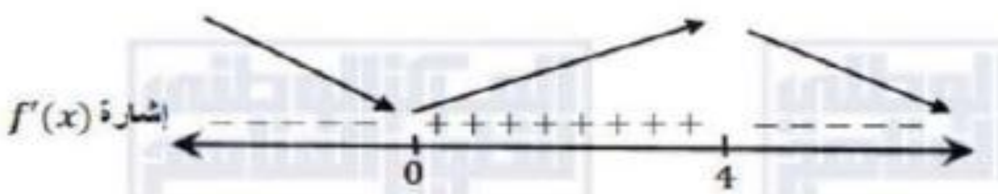
$\acute{f}(x) = (x^4)(-e^{-x}) + (e^{-x})(4x^3) \implies = -x^4e^{-x} + 4x^3e^{-x} \implies = e^{-x}x^3(4 - x)$

$\acute{f}(x) = 0 \implies e^{-x}x^3(4 - x) = 0 \implies e^{-x}x^3 = 0 \implies \boxed{x = 0}$

$4 - x = 0 \implies \boxed{x = 4}$

$f(4) = 4^4e^{-4} \implies = \dfrac{256}{e^4}$

$f(0) = 0^4e^{-0} \implies = 0$



الاقتران f متزايد على $(0,4)$ ومتناقص على $(-\infty,0)$ و $(4,\infty)$

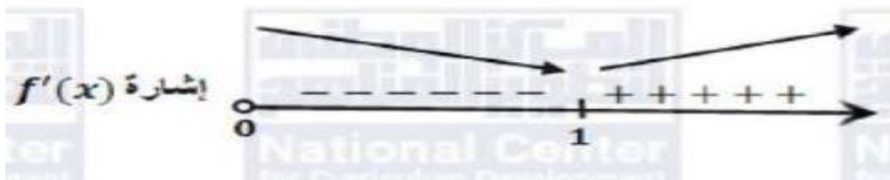
إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(4) = \frac{256}{e^4}$ وقيمة صغرى محلية و مطلقة هي $f(0) = 0$

15) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\ln x$

$$\acute{f}(x)=3\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{x}\ \Rightarrow =x^2-\frac{1}{x}$$

$$\acute{f}(x)=0\rightarrow x^2-\frac{1}{x}=0\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ x^3=1\ \Rightarrow\ \boxed{x=1}$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3}-\ln 1\ \Rightarrow =\frac{1}{3}-0\ \ \Rightarrow =\frac{1}{3}$$



الاقتران f متزايد على $(1,\infty)$ ومتناقص على $(0,1)$

وله قيمه صغرى محلية ومطلقة هي $f(1)=\frac{1}{3}$

أجد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

16) $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

$$\acute{f}(x)=3x^2-6x-9\ \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x)=6x-6\Rightarrow \acute{\acute{f}}(x)=0\rightarrow 6x-6=0\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$f(1)=1^3-3(1)^2-9(1)+4\ \Rightarrow\ =1-3-9+4\ \Rightarrow\ \boxed{f(1)=-7}$$

الاقتران مقعر للأعلى في $(1,\infty)$ ومقعر للأسفل $(-\infty,1)$ ، وله نقطة انعطاف هي : $(1,-7)$

17) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

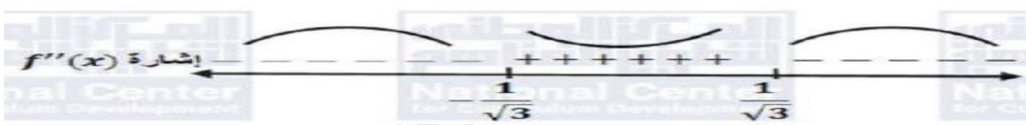
$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - (2x)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow = \frac{(x^2+1)(2) - (2x)(2)(2x)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right) + 1} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right) + 1} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}}$$



الاقتران مقعر للأعلى في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعر للأسفل $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$.

وله نقطة انعطاف هي : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$.

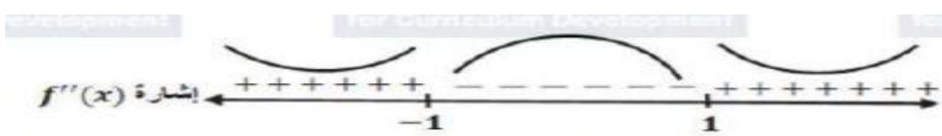
18) $f(x) = (3 - x^2)^2$

$$f'(x) = 2(3 - x^2)(-2x) \Rightarrow = (-4x)(3 - x^2) \Rightarrow = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

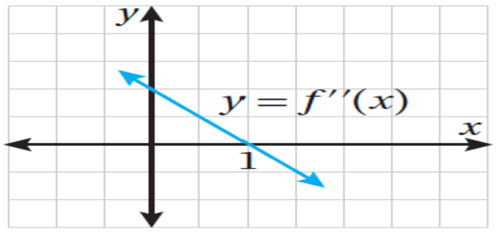
$$f(1) = (3 - 1^2)^2 \Rightarrow = (3 - 1)^2 \Rightarrow = (2)^2 \Rightarrow \boxed{f(1) = 4}$$

$$f(-1) = (3 - (-1)^2)^2 \Rightarrow = (3 - 1)^2 \Rightarrow = (2)^2 \Rightarrow \boxed{f(-1) = 4}$$



الاقتران مقعر للأسفل في $(-1, 1)$ ومقعر للأعلى $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$ ، وله نقطة انعطاف هي : $(1, 4)$ $(-1, 4)$

استعمل التمثيل البياني المجاور



لمنحنى $\acute{f}(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :

19) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

نلاحظ من الشكل أن إشارة الاقتران $\acute{f}(x)$ كالاتي :

إذن منحنى f مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty, 1)$ ومقعر للأسفل في الفترة $(1, \infty)$

20) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

للاقتران f نقطة انعطاف عند $x = 1$

يمثل الاقتران : $s(x) = 5.00 - 0.002x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات ، حيث x عدد القطع من المنتج ، ويمثل الاقتران : $C(x) = 3.00 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة (بالدينار) من المنتج :

21) أجد اقتران الإيراد.

سعر المنتج الواحد هو : $s(x) = 5.00 - 0.002x$ ، عدد القطع هي : x

الايراد $=$ عدد القطع $\times$ سعر المنتج الواحد

اقتران الايراد $\boxed{R(x) = 5x - 0.002x^2} \Leftarrow R(x) = x \times s(x) \Rightarrow = x \times 5.00 - 0.002x$

22) أجد اقتران الربح.

الربح $=$ الايراد الكلي $-$ التكلفة الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = 5x - 0.002x^2 - (3.00 + 1.10x)$$

$$\Rightarrow = 5x - 0.002x^2 - 3.00 - 1.10x \Rightarrow \boxed{P(x) = 3.9x - 0.002x^2 - 3.00}$$

23) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P(x) = 3.9x - 0.002x^2 - 3.00 \Rightarrow \acute{P}(x) = 3.9 - 0.004x \Rightarrow$$

$$3.9 - 0.004x = 0 \Rightarrow 3.9 = 0.004x \Rightarrow x = \frac{3.9}{0.004} \Rightarrow \boxed{x = 975}$$

$$\acute{\acute{P}}(x) = -0.004 < 0$$

إذن أكبر ربح ممكن يتحقق عند انتاج وبيع 975 قطعة

$$P(975) = 3.9(975) - 0.002(975)^2 - 3.00$$

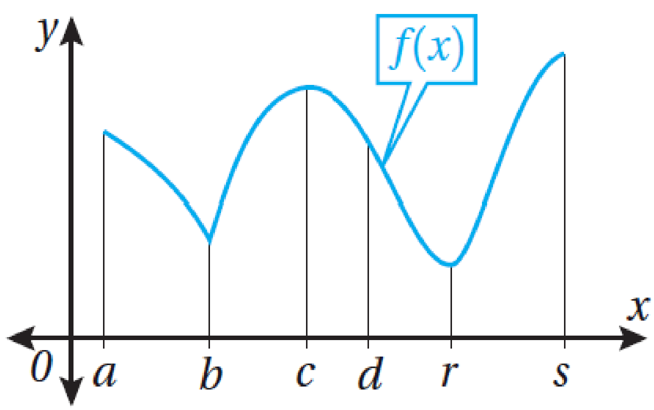
$$P(975) = 3802.25 - 1901.25 - 3.00 \Rightarrow \boxed{P(975) = 1898.25\,JD}$$ أكبر ربح يساوي

24) أجد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

$$s(x) = 5.00 - 0.002x$$

$$s(975) = 5.00 - 0.002(975) \Rightarrow = 5.00 - 1.95 \Rightarrow \boxed{s(975) = 3.05\ JD}$$

25) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيهما تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة؟ أبرر إجابتي.



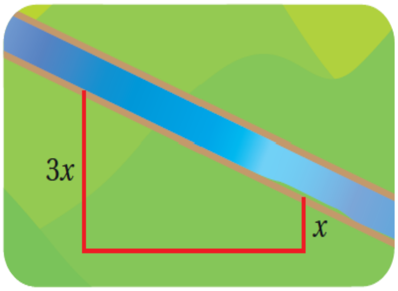
نقطة قيمة صغرى محلية $(b\,, f(b))$

نقطة قيمة عظمى محلية $(c\,, f(c))$

نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة $(r\,, f(r))$

نقطة قيمة عظمى مطلقة $(s\,, f(s))$

26) لدى مزارع $400\ m$ من السياج ، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف ، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي ، إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الأخر ، فأجد أكبر مساحه يمكن للمزارع أن يحيطها بهذا السياج ، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج .



طول الضلع المتوازي الأول $x = 3$

طول الضلع المتوازي الثاني $z = 3x$

طول الضلع الثالث $y = 3x$

محيط الحقل المراد تسييجه $P = 400\ m$

العلاقة الرئيسية قانون مساحة شبه المنحرف

مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع ضلعيه المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما

$$A = \frac{1}{2}(x+z)y \Rightarrow \frac{1}{2}(x+3x)y \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}(4x)y}$$

نستفيد من علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل قبل الاشتقاق وهو قانون محيط شبه المنحرف لإيجاد قيمة y بدلالة x . ليتم تعويضه في قانون العلاقة الرئيسة.

محيط شبه المنحرف يساوي مجموع أطوال أضلاعه ويساوي

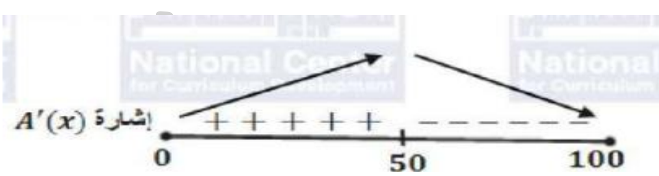
$$P = x + z + y \Rightarrow 400 = x + 3x + y \Rightarrow 400 = 4x + y \Rightarrow \boxed{y = 400 - 4x}$$

يتم تعويض قيمة y في العلاقة الرئيسية

$$A = \frac{1}{2}(4x)(400 - 4x)$$

$$A(x) = (2x)(400 - 4x) \Rightarrow A(x) = 800x - 8x^2$$

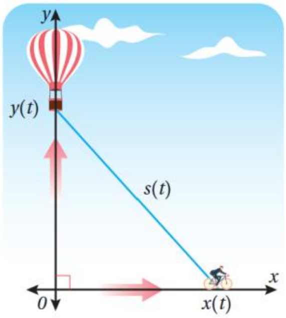
$$\acute{A}(x) = 800 - 16x \Rightarrow 800 - 16x = 0 \Rightarrow x = 50$$



إذن أكبر مساحة ممكنة هي : $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2 \Rightarrow) = 40000 - 20000 \Rightarrow = 20000\ m^2$$

27) يرتفع بالون رأسياً فوق مستوى طريق مستقيم بمعدل $1\ ft/s$ ، وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع $65\ ft$ فوق سطح الأرض ، مرت أسفله دراجة تتحرك بسرعة $17\ ft/s$ كما في الشكل التالي ، أجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة .



الشكل: مثلث قائم الزاوية

المسافة بين سطح الأرض والبالون بعد t ثانية $y = 65 + t$.

المسافة التي قطعتها الدراجة خلال t ثانية $x = 17t$.

معدل سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1\ ft$.

معدل سرعة الدراجة $\frac{dx}{dt} = 17\ ft$.

المطلوب : $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$.

العلاقة الرئيسة التي تربط المتغيرات هي فيثاغورس

$$s^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow = (17t)^2 + (65+t)^2 \Longrightarrow s = \sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65+t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}} \Longrightarrow = \frac{(17t)(17) + (65+t)}{\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}} \Longrightarrow = \frac{290t + 65}{\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{290(3) + 65}{\sqrt{(17(3))^2 + (65+3)^2}} \Longrightarrow = \frac{870 + 65}{\sqrt{(51)^2 + (68)^2}} \Longrightarrow = \frac{935}{\sqrt{2601 + 4624}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{935}{\sqrt{7225}} \Longrightarrow = \frac{935}{85} \Longrightarrow \boxed{\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = 11\ ft/s}$$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدماً في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثواني من لحظة مرور الدراجة تحت البالون .

كتاب التمارين

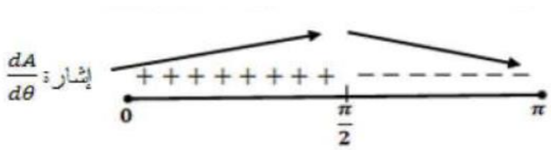
الدرس الثالث / تطبيقات القيم القصوى

1) إذا كان $a\ cm$ و $b\ cm$ هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث ، وكانت الزاوية بينهما θ ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta \quad ,0 < \theta < \pi$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta \implies \frac{1}{2}ab\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

إذن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$



2) ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات ، حجمه $500\ m^3$ ، وقاعدته مربعة الشكل ، ومفتوح من الأعلى . أجد الأبعاد التي تكون فيها مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.

حجم متوازي مستطيلات قاعدته مربعة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2h \implies x^2h = 500 \implies h = \frac{500}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي مستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى = (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة القاعدة

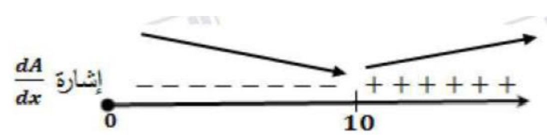
$$A = x^2 + 4xh \implies A = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2}$$

$$\implies A = x^2 + \frac{2000}{x} \implies A = x^2 + 2000x^{-1}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2000}{x^2} \implies 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \implies \left[2x = \frac{2000}{x^2}\right] \times x^2$$

$$2x^3 = 2000 \implies x^3 = 1000 \implies \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{1000} \implies \boxed{x = 10}$$

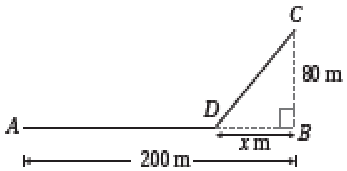
$$h = \frac{500}{(10)^2} \implies h = \frac{500}{100} \implies \boxed{h = 5}$$



إذن تكون مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي:

$$x = 10\ m\ ,\ \ h = 5\ m$$

يمتد مسار للركض شرقاً من النقطة A إلى النقطة B مسافة $200\ m$ ، وتقع النقطة C على بعد $80\ m$ شمال النقطة B .



انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة $10\ m/s$ ، حيث تقع النقطة D على بعد x متراً غرب النقطة B ، ثم سار في طريق مستقيم وعر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة $6\ m/s$.

3) أجد اقتراناً بدلالة x يمثل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C .

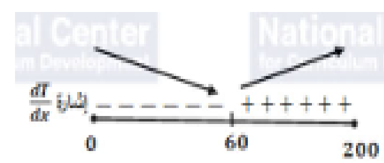
ليكن الزمن اللازم للوصول من A إلى D هو T_{AD} ، والزمن اللازم للوصول من D إلى C هو T_{DC} ، فإن الزمن الكلي $T(x)$ هو:

$$T(x) = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200 - x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+6400}}{6}$$

4) بافتراض أن x قيمة متغيرة ، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+6400}$$



$$\Rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+6400} \Rightarrow (10x)^2 = \left(6\sqrt{x^2+6400}\right)^2$$

$$\Rightarrow 100x^2 = 36(x^2+6400) \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 230400$$

$$\Rightarrow 100x^2 - 36x^2 = 230400 \Rightarrow 64x^2 = 230400 \Rightarrow x^2 = 3600 \Rightarrow x = 60$$

إذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي : $x = 60\ m$

سلك يبلغ طوله $24\ cm$ ، ويراد قصة إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع :

5) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن.

ليكن x الجزء الذي تصنع منه الدائرة $x\ cm$ ، فإن :

$$x = 2\pi r \quad \text{محيط الدائرة} \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \quad \text{مساحة الدائرة}}$$

ليكن x الجزء الذي يصنع منه المربع $x\ cm$ ، فإن :

$P = 4l$ محيط المربع

$$24 - x = 4l \Rightarrow l = 6 - \frac{x}{4}$$

$$A = x^2 \Rightarrow \boxed{A = \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2 \quad \text{مساحة المربع}}$$

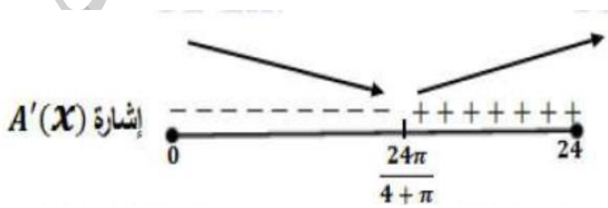
$$\boxed{\text{مجموع المساحتين} = \text{مساحة الدائرة} + \text{مساحة المربع} \Rightarrow A = \pi r^2 + l^2}$$

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow = \pi\frac{x^2}{4\pi^2} + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow = \frac{x^2}{4\pi} + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$$

$$\acute{A}(x) = \frac{2x}{4\pi} + 2\left(6 - \frac{x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \frac{x}{\pi} = 6 - \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{\pi} + \frac{x}{4} = 6 \Rightarrow x\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) = 6$$

$$x = 6\left(\frac{4\pi}{4 + \pi}\right) \Rightarrow \boxed{= \frac{24\pi}{4 + \pi}}$$



إذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع اصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولاً مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}\,cm$

6) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يمكن.

للحصول على أكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$

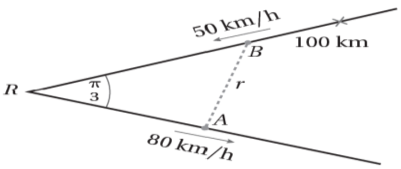
$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$$

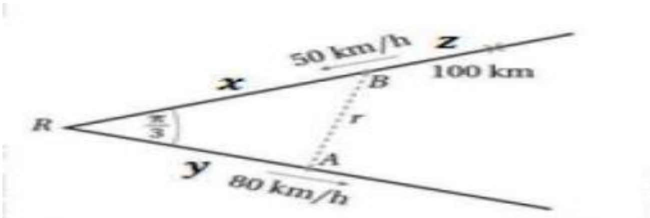
$$A(0) = \pi\left(\frac{0}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{0}{4}\right)^2 = 36\ cm^2$$

$$A(24) = \pi\left(\frac{24}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{24}{4}\right)^2 \Rightarrow = \pi\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 + 0 \Rightarrow = \pi\left(\frac{144}{\pi^2}\right) = \frac{144}{\pi} \approx 45.8\ cm^2$$

إذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة، ولا نقطع للمربع شيئاً منه.

7) يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة $80\ km/h$. وفي الوقت نفسه ، انطلقت السيارة B بسرعة $40\ km/h$ على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة $140\ km$ ، أجد أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين .





لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:

بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون :

$$y = 80t\ ,\ \ z = 40t\ \ \Rightarrow\ \ x = 140 - 40t$$

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 - xy$$

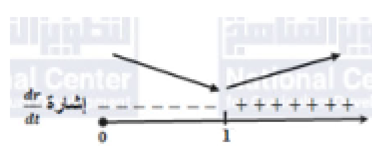
$$r^2 = (140 - 40t\ \ )^2 + (80t)^2 - (140 - 40t)(80t)$$

$$r^2 = 19600 - 11200t + 1600t^2 + 6400t^2 - 11200t + 3200t^2$$

$$r^2 = 19600 - 22400t + 11200t^2$$

$$2r\frac{dr}{dt} = -22400 + 22400t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-22400 + 22400t}{2r}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow -22400 + 22400t\ = 0\ \Rightarrow\ \frac{22400t}{22400} = \frac{22400}{22400}\ \Rightarrow\ t = 1\ \ h$$



أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي:

$$r^2 = 10000 - 18000t + 12900t^2$$

$$r = \sqrt{10000 - 18000\left(\frac{90}{129}\right) + 12900\left(\frac{90}{129}\right)^2}$$

$$r \approx 61\ km$$