ط | ة | U | N

٤ ⌘ ٢

إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٣/التكميلي

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث: الرياضيات (الورقة الأولى، ف١) | رقم المبحث: 205 | مدة الامتحان: ٢ : ٣٠ (س : د)

الفرع: العلمي + الصناعي جامعات | رقم النموذج: (١) | اليوم والتاريخ: السبت ٢٠٢٣/١٢/٣٠

اسم الطالب: | رقم الجلوس:

1) إذا كان: $f(x)=e^2-e^{-x}$ ، فإن $f'(1)$ ، هي :

$$f(x)=e^2-e^{-x}$$

$$f'(x)=0-(-1\times e^{-x}) \Rightarrow f'(x)=e^{-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{e^{(1)}} \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{e}$$

a) $2e+\frac{1}{e}$ b) $2e-\frac{1}{e}$ c) $\boxed{\frac{1}{e}}$ d) $-\frac{1}{e}$

2) إذا كان $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$ ، فإن $f'(2\pi)$ هي :

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \Rightarrow f'(2\pi)=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{2}-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow f'(2\pi)=\frac{\cos(\pi)}{2}-\frac{\sin(\pi)}{2} \Rightarrow =\frac{-1}{2}-\frac{0}{2} \Rightarrow \boxed{f'(2\pi)=\frac{-1}{2}}$$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\boxed{-\frac{1}{2}}$ d) -1

3) إذا كان الاقتران: $t \geq 0\ ,\ s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2$ ، يمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فإن تسارع هذا الجسم عندما يكون في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه، هو:

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2$$

$$v(t) = t^2 - 10t + 9 \implies = t^2 - 10t + 9$$

$$\implies (t-9)(t-1) = 0 \implies t = 9 \iff \boxed{t = 1}$$ المرة الأولى

$$a(t) = 2t - 10 \implies a(1) = 2(1) - 10 \implies \boxed{a(1) = -8}$$

a) $\boxed{-8\ m/s^2}$ b) $8\ m/s^2$ c) $-16\ m/s^2$ d) $16\ m/s^2$

4) إذا كان: $f(x) = \frac{-1}{6x - x^2}$ ، فإن $f'(2)$ هي :

$$f(x) = \frac{-1}{6x - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(-1)(6-2x)}{(6x - x^2)^2} \implies f'(x) = \frac{(6-2x)}{(6x - x^2)^2}$$

$$\implies f'(2) = \frac{(6 - 2(2))}{(6(2) - 2^2)^2} \implies = \frac{2}{64} \implies \boxed{= \frac{1}{32}}$$

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\boxed{\frac{1}{32}}$

5) إذا كان: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$ ، فإن $f''(-1)$ هي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} \implies f(x) = \frac{x^2}{2x} - \frac{4}{2x} \implies f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x - 2x^{-1}$$

$$f''(x) = 0 + (-2)2x^{-3} \implies f''(x) = -4x^{-3} \implies f''(x) = \frac{-4}{x^3} \implies f''(-1) = \frac{-4}{(-1)^3} \implies \boxed{= 4}$$

a) $\boxed{4}$ b) -4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

6) إذا كان: $f(x) = (\log_e x)^5$ ، فإن $f'(x)$ هي:

$$f(x) = (\log_e x)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(\log_e x)^4\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{5(\log_e x)^4}{x}$$

a) $\frac{5\log_e x}{x}$ b) $\boxed{\frac{5(\log_e x)^4}{x}}$ c) $\frac{5(\log_e x)^4}{x\ln x}$ d) $\frac{5\log_e x}{x\ln x}$

7) إذا كان: $f(x) = 7^{(x+1)^2}$ ، فإن للاقتران f مماساً أفقياً عندما x تساوي :

$$f(x) = 7^{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 7^{(x+1)^2}(2)(x+1)\ln 7 \Rightarrow f'(x) = \left(7^{(x+1)^2}\right)(2x+2)(\ln 7) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

a) 7 b) 1 c) -2 d) $\boxed{-1}$

8) إذا كان: $5y = \log(x - x^3)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

$$5y = \log(x - x^3) \Rightarrow \quad y = \frac{\log(x-x^3)}{5}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2}{5(x - x^3)\ln 10}}$$

a) $\frac{1-3x^2}{(x-x^3)\ln 10}$ b) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)}$ c) $\boxed{\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)\ln 10}}$ d) $\frac{1-3x^2}{x-x^3}$

9) ميل المماس لمنحنى العلاقة: $(x-3)(y+2) = 5$ ، عند النقطة $(4\,,3)$ ، هو :

$$(x-3)(y+2) = 5$$

$$(x-3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y+2)(1) = 0$$

$$(4-3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3+2)(1) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -5}$$

a) $\boxed{-5}$ b) 5 c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

10) إذا كان : $x > 0$ ، $y = x^{2x}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي :

$$\ln y = \ln x^{2x} \Rightarrow \ln y = 2x \ln x \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x \times 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2 + 2\ln x \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2(1 + \ln x)$$

a) $1 + \ln x$ b) $\boxed{2(1 + \ln x)}$ c) $2(x + \ln x)$ d) $2x^{2x}(1 + \ln x)$

11) حلقت طائرة أفقياً على ارتفاع $12km$ من سطح الأرض، ومرت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار على الأرض. إذا كان معدل تغير البعد بين الطائرة وارادار $200\ km/h$ ، فإن سرعة الطائرة في اللحظة التي يكون بعدها عن الرادار يساوي $13\ km$ هي :

$L = 13 \quad , y = 12 \quad , x =$ مجهول

$\frac{dL}{dt} = 200 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 0$ لأن y ثابت

$\frac{dx}{dt} =$ المطلوب

$$L^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 13^2 = x^2 + 12^2 \Rightarrow 169 = x^2 + 144$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2(13)(200) = 2x\frac{dx}{dt} + 2(12)(0) \Rightarrow 5200 = 2(5)\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 5200 = 10\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = 520}$$

a) $260\ km/h$ b) $\boxed{520\ km/h}$ c) $1040\ km/h$ d) $1300\ km/h$

12) صفيحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متطابق الضلعين، وطول كل منهما $6\ cm$ ، إذا سخنت الصفيحة بحيث تبقى محافظة على شكلها ، وكان معدل التغير في مساحة سطحها يساوي $36\ cm^3/s$ ، فإن معدل التغير في الزاوية المحصورة بين الضلعين المتطابقين عندما يكون قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ ، هو:

$$\frac{dA}{dt} = 36\ cm^3/s \qquad , \frac{d\theta}{dt} = ? \quad , \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta \implies A = \frac{1}{2}(6)^2 \sin\theta \implies A = 18\sin\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 18\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \implies 36 = 18\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{d\theta}{dt} \implies$$

$$36 = 18\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d\theta}{dt} \implies 36 = 9\frac{d\theta}{dt} \implies \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 4\ rad/s}$$

a) $12\ rad/s$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ rad/s$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ rad/s$ d) $\boxed{4\ rad/s}$

13) إذا كان : $f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 3$ ، فإن القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ هي :

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 3 \implies f'(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}} \implies f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

2) الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً ، أو غير موجودة.

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \neq 0$$

$f'(x) =$ غير موجودة $\implies x = 0$

يوجد قيمة حرجة وحيدة في الفترة المفتوحة $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ هي $x = 0$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f(-1) = (-1)^{\frac{2}{5}} + 3 \implies = \left((-1)^5\right)^{\frac{2}{5}} + 3 \implies = (-1)^{\frac{10}{5}} + 3$$

$$\implies = (-1)^2 + 3 \implies = 1 + 3 \implies \boxed{f(-1) = 4}$$

$f(0) = (0)^{\frac{2}{5}} + 3 \quad \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow = \frac{1^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{2}{5}}} + 3 \quad \Rightarrow = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} + 3$

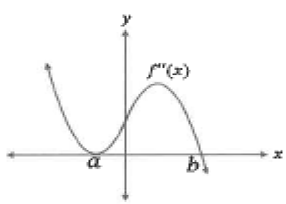
$\Rightarrow \quad = 0.76 + 3 \quad \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.76}$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(-1) = 4$

a) $\boxed{4}$ b) 3 c) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ d) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

14) إذا كان الشكل الآتي يمثل منحنى المشتقة للاقتران f ، فإن الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران f يكون مقعراً للأسفل هي :



a) $(0, \infty)$ b) $\boxed{(b, \infty)}$ c) $(-\infty, b)$ d) (a, b)

15) إذا كان الاقتران: $v(t) = 12t - 2t^2 \quad , t \in [0, 10]$ ، يمثل السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية ، و t الزمن بالثواني، فإن الفترة الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة ، هي:

إذا كانت إشارة التسارع موجبة فإن السرعة تتزايد.

إذا كانت إشارة التسارع سالبة فإن السرعة تتناقص.

$v(t) = 12t - 2t^2$

$a(t) = 12 - 4t \quad \Rightarrow \quad 12 - 4t = 0$

$\Rightarrow 4t = 12 \quad \Rightarrow \boxed{t = 3}$

الفترة التي يكون فيها التسارع يساوي صفر وهي $t = 3$

نختار الفترة أكبر من 3 وندرس الاشارة $12-4(4)=-4$ الاشارة سالبة (تتناقص)

نختار الفترة اقل من 3 وندرس الاشارة $12-4(2)=4$ الاشارة موجبة (تتزايد)

اذن الفترة هي $(3,10)$

a) $(0,3)$ b) $\boxed{(3,10)}$ c) $(0,6)$ d) $(6,10)$

16) إذا كان الاقتران: $S(x)=200-x$ يمثل سعر القطعة الواحدة من أحد المنتجات بالدينار، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج، فإن أعلى إيراد يمكن تحقيقه عندما يكون عدد القطع المبيعة ، هو:

(سعر بيع القطعة) $\times$ (عدد القطع المبيعة) = الايراد

$$R(x)=x(200-x) \implies R(x)=200x-x^2$$

$$\acute{R}(x)=200-2x$$

$$200-2x=0 \implies 2x=200 \implies \boxed{x=100}$$

a) $\boxed{100}$ b) 10000 c) 200 d) 20000

17) الإحداثي x للنقطة P التي تقع على المستقيم : $y=3-\frac{1}{2}x$ ، والتي يكون بعدها أقل ما يمكن عن نقطة الأصل ،هو:

افترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x,y) ، وأن d هي المسافة بينها وبين نقطة الأصل $(0,0)$.باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ، فإن الاقتران الذي يمثل المسافة d يكتب كما يأتي:

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \implies d=\sqrt{x^2+y^2}$$

الخطوة الاولى: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد .

بما أن النقطة (x,y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن $y=f(x)=3-\frac{1}{2}x$

اكتب الاقتران d بدلالة متغير واحد :

$$d(x)=\sqrt{x^2+\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2}$$

إذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين النقطتين هو : $d(x)=\sqrt{x^2+\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2}$.

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة .

$$\acute{d}(x)=\frac{2x+(2)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2+\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2}} \Longrightarrow =\frac{2x-\left(3-\frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2+\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2}}$$

$$\frac{2x-\left(3-\frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2+\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2}}=0 \Longrightarrow 2x-\left(3-\frac{1}{2}x\right)=0$$

$$\Longrightarrow 2x-3+\frac{1}{2}x=0 \Longrightarrow \frac{5}{2}x-3=0 \Longrightarrow \frac{5}{2}x=3 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{6}{5}}$$

a) $\boxed{\frac{6}{5}}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{5}{2}$

18) إذا كان: $\sqrt{-1}=i$ ، فإن قيمة المقدار $i^9\times\sqrt{-16}$ ، هي :

$i^9\times\sqrt{-16}$

$$i^9\times 4i = 4i^{10} \Longrightarrow = 4(i^2)^5 \Longrightarrow = 4(-1)^5 \Longrightarrow = 4(-1) \Longrightarrow \boxed{=-4}$$

a) $4i$ b) 4 c) $-4i$ d) $\boxed{-4}$

19) إذا كان: $(2a-3b)+(2b+3a)i=13$ ، فإن قيمتي $a\ ,\ b$ اللتين تحققان المعادلة على الترتيب،هما :

$$(2a-3b)+(2b+3a)i=13 \Longrightarrow (2a-3b)+(2b+3a)i=13+0i$$

$$2a-3b=13 \quad \Leftrightarrow \quad 2b+3a=0$$

$$2a-3b=13 \quad \Longrightarrow \boxed{a=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}b}$$

$$2b+3a=0 \quad \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3a}{2}}$$

$$a=\frac{13}{2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{3a}{2}\right) \Rightarrow a=\frac{13}{2}-\frac{9a}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a+\frac{9a}{4}=\frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13a}{4}=\frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{13a}{4}=\frac{13}{2}\right] \times \frac{4}{13} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$b=-\frac{3(2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=-3}$$

a) $-2\,,3$ b) $\boxed{2\,,-3}$ c) $-3\,,-2$ d) $3\,,2$

20) مقياس العدد المركب: $z=6-3i$ ، هو :

$$|z|=\sqrt{(6)^2+(-3)^2} \quad \Rightarrow =\sqrt{36+9}$$

$$\Rightarrow \ =\sqrt{45} \ \Rightarrow \ =\sqrt{9\times 5} \Rightarrow \boxed{|z|=3\sqrt{5}}$$

a) 3 b) 9 c) $\sqrt{17}$ d) $\boxed{3\sqrt{5}}$

21) ناتج: $z=\frac{1+8i}{1-2i}$ ، هو :

$$=\frac{1+8i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i} \Rightarrow \ =\frac{1+2i+8i+16i^2}{(1)^2+(2)^2}$$

$$\Rightarrow =\frac{1+2i+8i-16}{5} \ \Rightarrow \ =\frac{-15+10i}{5} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ =\frac{-15}{5}+\frac{10}{5}i \Rightarrow= \boxed{-3+2i}$$

a) $3-\frac{6}{5}i$ b) $5-2i$ c) $\frac{17}{5}+2i$ d) $\boxed{-3+2i}$

22) إذا كان: $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ، $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، فإن $\frac{z_2}{z_1}$ تساوي:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}(cos(\theta_2 - \theta_1) + i\,sin(\theta_2 - \theta_1))$$

$$\Rightarrow\; = \frac{4}{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12} - \frac{8\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12} - \frac{8\pi}{12}\right)\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{z_2}{z_1} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

a) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ b) $\boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$ c) $2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ d) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

23) إذا كان: $z_2 = 3 + 2i$ ، $z_1 = 2 - 3i$ ، فإن $Arg(z_1, z_2)$ تساوي:

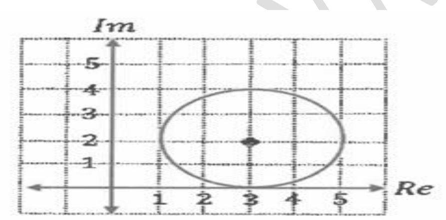
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(3 + 2i) \;\Rightarrow = (6 + 4i - 9i + 6) \;\Rightarrow = 12 - 5i$$

$$Arg(12 - 5i) = -\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

a) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ b) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) - \pi$ c) $\boxed{-\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}$ d) $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

24) إذا كان الشكل الآتي يمثل دائرة، فإن معادلة المحل الهندسي (بدلالة z) له، هي:



مركز الدائرة : $(3\,,2)$ ، نصف القطر $r = 2$

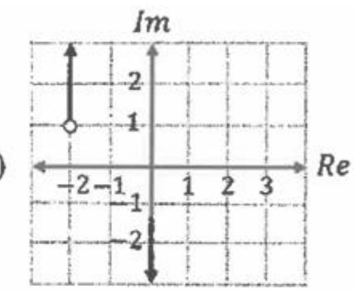
$$|z - (a + ib)| = r \;\Rightarrow\; |z - (3 + 2i)| = 2 \;\Rightarrow\; |z - 3 - 2i| = 2$$

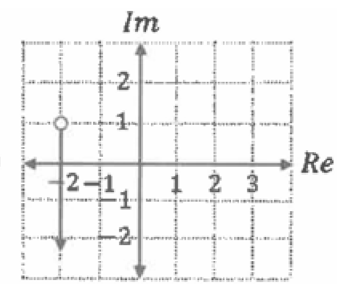
a) $|z - 3 + 2i| = 2$ b) $|z - 2 + 3i| = 2$ c) $\boxed{|z - 3 - 2i| = 2}$ d) $|z - 2 - 3i| = 2$

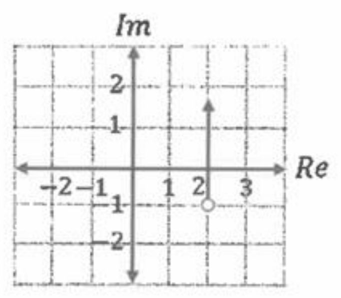
25) التمثيل البياني للمحل الهندسي الذي معادلته: $Arg(z+2-i)=-\frac{\pi}{2}$ ، هو الشكل:

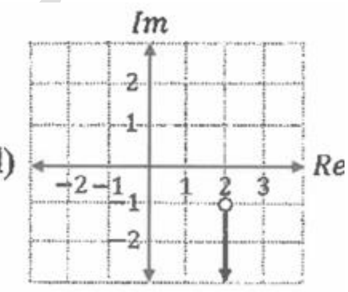
$$Arg(z+2-i)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow Arg\big(z-(-2+i)\big)=-\frac{\pi}{2}$$

النقطة هي: $(-2\,,1)$ ، الزاوية $-\frac{\pi}{2}$ سالبة اتجاه السهم للأسفل ، إذن b الإجابة الصحيحية.

a)


b)


c)


d)


السؤال الثاني: (22 علامة)

1) ابحث قابلية الاقتران: $f(x)=(2x-4)^{\frac{1}{3}}+6$ للاشتقاق عندما $z=2$ (12 علامة)

(استعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق)

$$f(x)=(2x-4)^{\frac{1}{3}}+6$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow \acute{f}(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2(2+h)-4)^{\frac{1}{3}}+6-(0+6)}{h} \Longrightarrow f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h-4)^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$\Longrightarrow f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{2}\,h^{\frac{1}{3}}}{h} \Longrightarrow f'(2)=\sqrt[3]{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)^{2}$$

$f'_{-}(2)=\lim_{h\to 0^-}\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)^{2}=\infty$ المشتقة من جهة اليسار

$f'_{+}(2)=\lim_{h\to 0^+}\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)^{2}=\infty$ المشتقة من جهة اليمين

اي ان الاقتران $f(x)$ غيرقابل للاشتقاق عندما $x=2$

2) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^5$ ، عندما $x=1$ (10 علامات)

الخطوة الأولى : إيجاد المشتقة

$$f'(x)=5\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^4\left(\frac{(x^2+1)(2x+1)-(x^2+x)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$f'(1)=5\left(\frac{(1)^2+(1)}{(1)^2+1}\right)^4\left(\frac{((1)^2+1)(2(1)+1)-\left((1)^2+(1)\right)(2(1))}{((1)^2+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=5\left(\frac{(2)(3)-(2)(2)}{(2)^2}\right) \Longrightarrow f'(1)=5\left(\frac{6-4}{4}\right) \Longrightarrow f'(1)=\frac{5}{2}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل العامودي على المماس

$$m_1=-\frac{1}{\frac{5}{2}} \Longrightarrow m_1=-\frac{2}{5}$$

السؤال الثالث: (28 علامة)

1) إذا كانت B هي نقطة تقاطع منحنى العلاقة $x^3+4xy+y^3=0$ مع المستقيم : $y=x$ في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، وكان مماس منحنى العلاقة عند النقطة B يقطع المحور y في النقطة C ، فجد مساحة المثلث OBC ، حيث O هي نقطة الأصل. (10 علامات)

النقطة O من المعطيات هي نقطة الأصل $(0,0)$

$$x^3+4xy+y^3=0 \qquad , \quad y=x$$

$$x^3+4x(x)+x^3=0 \implies x^3+4x^2+x^3=0 \implies 2x^3+4x^2=0$$

$$\implies 2x^2(x+2)=0 \implies 2x^2=0 \implies x=0 \implies y=0$$

$$x+2=0 \implies \boxed{x=-2} \implies \boxed{y=-2}$$ في الربع الثالث

النقطة B هي $(-2,-2)$

$$3x^2+4x\frac{dy}{dx}+4y+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$3(-2)^2+4(-2)\frac{dy}{dx}+4(-2)+3(-2)^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$12-8\frac{dy}{dx}-8+12\frac{dy}{dx}=0 \implies -8\frac{dy}{dx}+12\frac{dy}{dx}=-12+8$$

$$\implies 4\frac{dy}{dx}=-4 \implies \frac{dy}{dx}=-1$$

معادلة المماس عند النقطة B :

$$y-y_1=m(x-x_1) \implies y-(-2)=-1\big(x-(-2)\big)$$

$$\implies y+2=-(x+2) \implies y+2=-x-2 \implies \boxed{y=-x-4}$$

من المعطيات تقاطع مع المحور y يعني $x=0$:

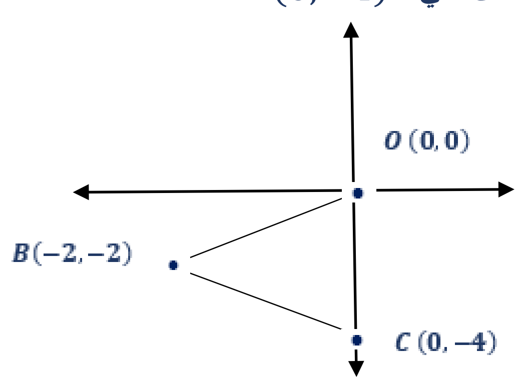
$$x=0 \implies y=-x-4 \implies y=-(0)-4 \implies \boxed{y=-4}$$

النقطة C هي $(0,-4)$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي :

$$A=\frac{1}{2}\times x\times y \implies$$

$$A=\frac{1}{2}\times|-4|\times|-2| \implies A=4$$



2) إذا كانت: $y = t^3 + 3t^2$ ، $x = 3t^2 + 1$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$
(8 علامات)

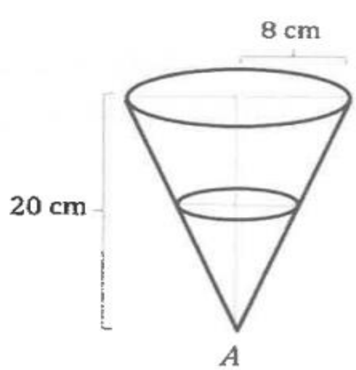
$$y = t^3 + 3t^2 \implies \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6t$$

$$x = 3t^3 + 1 \implies \frac{dx}{dt} = 6t \implies \frac{dt}{dx} = \frac{1}{6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 6t}{6t} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{3t(t+2)}{6t} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{t+2}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{dt}{dx} \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6t} \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\implies \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{1}{12(1)} \implies \boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{1}{12}}$$



3) يستعمل قمع على شكل مخروط قائم، كما في الشكل المجاور،
طول نصف قطر قاعدته $8\ cm$ وعمقه $20\ cm$ ، لصب الزيت
في محرك سيارة بمعدل $35\ cm^3/s$ ، فيخرج الزيت من رأس
القمع A إلى المحرك بمعدل $25\ cm^3/s$.
جد معدل التغير في ارتفاع سطح الزيت في القمع عند اللحظة
التي يصبح فيها نصف قطر سطح الزيت يساوي $\frac{1}{4}$ قطر القمع . (10 علامات)

الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط $r_1 = 8\ cm$ ، نصف قطر سطح الزيت $\boxed{r = 4} \Leftarrow r = \frac{1}{4}(8 \times 2)$

ارتفاع المخروط $h_1 = 20\ cm$ ، ارتفاع الزيت في المخروط h .

حجم الزيت في الخزان V

التغير في حجم الماء النقص في الزيت – الزيادة في الزيت $= \frac{dV}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = 35 - 25 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 10 \ cm^3/s$$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الزيت في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{r_1}{h_1} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{8}{20} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5r = 2h \Rightarrow \boxed{r = \frac{2}{5}h}$$

$$\frac{4}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2h = 20 \Rightarrow \boxed{h = 10}$$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\frac{4h^2}{25}h \Rightarrow V = \frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4\pi}{75}\right)3h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 10 = \left(\frac{4\pi}{25}\right)(10)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 10 = (4\pi)(4)\frac{dh}{dt} \Rightarrow 10 = 16\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{10}{16\pi}$$

إذن يتزايد ارتفاع الزيت في القمع بمعدل $\frac{10}{16\pi}\ cm/s$ **عندما يكون ارتفاع الزيت** $10\ cm$ **.**

السؤال الرابع : (22 علامة)

1) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$ **(10 علامات)**

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2} \Rightarrow f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2 - x)^{\frac{-1}{3}}(2x - 1) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2(2x - 1)}{3\sqrt[3]{x^2 - x}}$$

2) الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً ، أو غير موجودة.

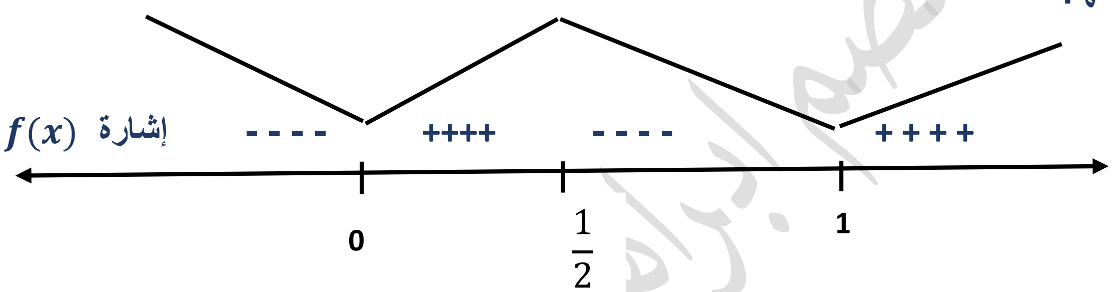
$$\acute{f}(x)=\frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-x}}=0 \implies 2(2x-1)=0 \implies 2x-1=0 \implies \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

- القيم تكون عندها $\acute{f}$ غير موجودة

$$x^2-x=0 \implies x(x-1)=0 \implies \boxed{x=0} \implies x-1=0 \implies \boxed{x=1}$$

3) الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



4) الخطوة الرابعة : أجد القيم القصوى المحلية.

$$f(0)=\sqrt[3]{(0^2-0)^2} \implies \boxed{f(0)=0}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} \implies f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

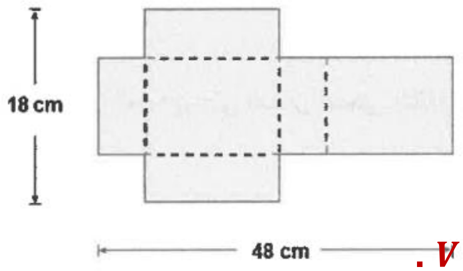
$$\implies f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{16}} \implies \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}}$$

$$f(1)=\sqrt[3]{\left((1)^2-(1)\right)^2} \implies \boxed{f(1)=0}$$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(0)=0$ عند $x=0$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(1)=0$ عند $x=1$

2) قطعة كرتون طولها $48\ cm$ ، وعرضها $18\ cm$ ، أزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيها، وتكوين صندوق له غطاء منها.



1) إذا علمت أن V هو حجم الصندوق الناتج، فحدد مجال الاقتران V .

1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق .

الارتفاع × العرض × الطول = الحجم

$$V(x) = (24 - x)(18 - 2x)x$$

$$V(x) = (24 - x)(18x - 2x^2)$$

$$V(x) = 432x - 48x^2 - 18x^2 + 2x^3$$

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

2) أحدد مجال الاقتران V .

حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة وذلك بتحقيق الشروط الثلاثة الآتية معاً :

$$x = 0 \implies \boxed{x = 0}$$

$$18 - 2x = 0 \implies 9 - x = 0 \implies \boxed{x = 9}$$

$$24 - x = 0 \implies x = 24$$

في حال وجود قيمتين ل x نأخذ القيمة الأصغر ، لأن أي قيمة أكبر من $x = 9$ سيكون الناتج سالب ، ولا يمكن أن يكون الحجم سالب .

إذن مجال الاقتران $V(x)$ هو $0 \leq x \leq 9$

2) جد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن. (12 علامات)

1) الخطوة الأولى: أجد القيم الحرجة للاقتران.

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

$$\acute{V}(x) = 6x^2 - 132x + 432 \implies \acute{V}(x) = [6x^2 - 132x + 432\,] \div 6$$

$$\acute{V}(x) = x^2 - 22x + 72 \quad \implies \quad (x-18)(x-4) = 0$$

$$x - 18 = 0 \implies x = 18 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 = 0 \implies \boxed{x = 4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0, 9)$ ، هي : $x = 4$.

2) الخطوة الثانية : اختبار المشتقة الثانية وتعويض $x = 4$

$$\acute{V}(x) = 6x^2 - 132x + 432$$
$$\acute{\acute{V}}(x) = 12x - 132 \implies \acute{\acute{V}}(4) = 12(4) - 132$$
$$\implies = 48 - 132 \implies \acute{\acute{V}}(4) = -84 < 0$$

إذن $x = 4$ قيمة عظمى .

3) الخطوة الثالثة: أجد ابعاد الصندوق .

الطول $= 24 - x \implies = 24 - 4 = \boxed{20}$

العرض $= 18 - 2x \implies = 18 - 2(4) \implies = 18 - 8 = \boxed{10}$

الارتفاع $= x \implies = \boxed{4}$

السؤال الخامس: (28 علامة)

1) اكتب العدد المركب: $z = -1 - i\sqrt{3}$ بالصورة المثلثية . (8 علامات)

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \implies |z| = \sqrt{1+3} \implies |z| = \sqrt{4} \implies |z| = 2$$

يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right) \quad \implies = -\left(\pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})\right)$$

$$\implies = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \quad \implies \quad \boxed{Arg(z) = -\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

2) إذا علمت أن $-(2+4i)$ هو أحد جذور المعادلة : $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$ ، فجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة. (10 علامات)

بما أن $-2-4i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

الجذر الأول $-2-4i$

الجذر الثاني $-2+4i$

نقوم بإيجاد المعادلة التربيعية من الجذرين أعلاه وحسب القانون :

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$$\text{مجموع الجذرين} = (-2+4i) + (-2-4i) \Rightarrow = (-2-2) + (4-4)i \Rightarrow \boxed{=-4}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (-2+4i) \times (-2-4i) \Rightarrow = (2)^2 + (4)^2 \Rightarrow = 4 + 16 \Rightarrow \boxed{=20}$$

$$z^2 - (-4)z + (20) = 0 \Rightarrow \boxed{z^2 + 4z + 20 = 0}$$

نقوم بقسمة المعادلة في السؤال على المعادلة التربيعة لنجد المعادلة التربيعية الثانية :

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 10z + 34 \\
\hline
z^2 + 4z + 20 & z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 \\
 & \underline{(-)\ z^4 + 4z^3 + 20z^2} \\
 & -10z^3 - 6z^2 - 64z + 680 \\
 & \underline{(-)\ -10z^3 - 40z^2 - 200z} \\
 & 34z^2 + 136z + 680 \\
 & \underline{34z^2 + 136z + 680} \\
 & 0
\end{array}$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية الثانية لإيجاد الجذرين التربيعين الآخرين:

$$z^2 - 10z + 34 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \qquad b = -10 \qquad c = 34$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(34)}}{2(1)}$$

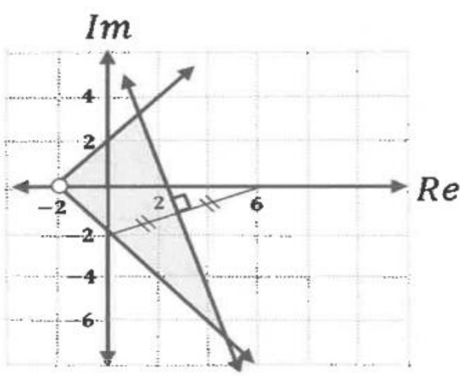
$$\Rightarrow = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 136}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow = \frac{10 \pm 6i}{2} \Rightarrow = \frac{10}{2} \pm \frac{6i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 5 + 3i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = 5 - 3i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 4 جذور هي :

$$\{z_1 = -2 - 4i \quad , z_2 = -2 + 4i \quad , z_3 = 5 + 3i \quad , z_4 = 5 - 3i \}$$



3) اكتب بدلالة z نظام متباينات للمحل الهندسي

الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل المجاور. (10 علامات)

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة

بين النقطتين $(6, 0)$ ، $(0, -2)$ ، وكونها متصل مما يدل

وجود مساواة في المتباينة .

$$|z - (0 - 2i)| = |z - (6 + 0i)| \Rightarrow |z + 2i| = |z - 6|$$

$$|z - (3)| = |z - (2 + i)|$$

$$|(x - 3) + yi| = |(x - 2) + (y - 1)i|$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$2x - 2y - 4 = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $x - y - 2 = 0$