إدارة الامتحانات والاختبارات
قســم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٤

(وثيقة محمية/محدود)

المبحـث : الرياضيات (الورقة الأولى، ف١) — رقم المبحث: 106 — مدة الامتحـان: ٢ : ٣٠ (س : د)

الفــــرع: العلمي + الصناعي جامعات — رقم النموذج: (١) — اليوم والتاريخ: السبت ٢٠٢٤/٠٦/٢٩

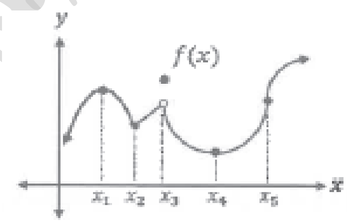
اسم الطالب: — رقـم الجلوس:

ملحوظة مهمة: أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (5)؛ بحيث تكون إجابتك عن السؤال الأول على نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي)، وتكون إجابتك عن باقي الأسئلة على دفتر الإجابة، علمًا أنّ عدد صفحات الامتحان (8).

السؤال الأول: (100 علامة)

1) معتمداً الشكل الآتي الذي يمثل منحنى الاقتران f، فإن عدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق هو:

a) 4 b) $\boxed{3}$ c) 2 d) 1



2) إذا كان $f(x) = 2\sin(x+\pi) - \frac{x^2}{\pi}$ ، فإن $\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ هي :

$$\acute{f}(x) = 2\cos(x+\pi) - \frac{2x}{\pi} \implies \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) - \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}$$

$$\implies \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \implies \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) - 1 \implies \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

a) b) 2 c) $\boxed{-1}$ d) -2

3) يمثل الاقتران: $s(t) = 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 + 4 \quad , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني، فإن سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية في اللحظة التي يعود فيها إلى موقعه الابتدائي، هي:

$$v(t) = 4t - 3 \times \frac{1}{2}t^2 \implies v(t) = 4t - \frac{3}{2}t^2$$

$$s(0) = 2(0)^2 - \frac{1}{2}(0)^3 + 4 \Rightarrow s(0) = 4$$

$$s(t) = s(0) = 4 \Rightarrow 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 + 4 = 4 \Rightarrow 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 = 4 - 4 \Rightarrow 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 = 0$$

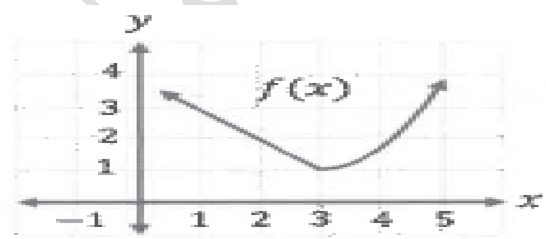
$$\Rightarrow \left[2t^2 - \frac{1}{2}t^3 = 0\right] \times 2 \Rightarrow 4t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(4 - t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = 4}$$

$$v(4) = 4(4) - \frac{3}{2}(4)^2 \Rightarrow v(4) = 16 - 24 \Rightarrow \boxed{v(4) = -8}$$

a) $\boxed{-8}$ b) -1.5 c) -2.5 d) 0

4) يمثل الشكل الآتي منحنى الاقتران f ، إذا كان: $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ ، فإن $\acute{g}(2)$ هي :



$$\acute{g}(x) = \frac{(f(x) \times 0) - \left(-1 \times \acute{f}(x)\right)}{\left(f(x)\right)^2} \Rightarrow \acute{g}(x) = \frac{\acute{f}(x)}{\left(f(x)\right)^2} \Rightarrow \acute{g}(2) = \frac{\acute{f}(2)}{\left(f(2)\right)^2}$$

- لإيجاد النقطة $\acute{f}(x)$ نجد الميل عن نقطة التماس $\acute{f}(2)$ على المستقيم: النقاط هي $(2\,,2)$ ، نختار نقطة أخرى لاستخراج الميل وهي $(1\,,3)$.

$$\acute{f}(x_1) \Rightarrow m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow = \frac{3 - 2}{1 - 2} \Rightarrow = \frac{1}{-1} \Rightarrow \boxed{= -1}$$

- نجد $f(2)$ وتساوي 2 ثم نعوض :

$$\acute{g}(2) = \frac{-1}{(2)^2} \Rightarrow \boxed{\acute{g}(2) = \frac{-1}{4}}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\boxed{-\frac{1}{4}}$ d) $-\frac{1}{2}$

5) إذا كان: $f(x) = \csc x + e^2$ ، فإن $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هي :

$$f(x) = \csc x + e^2$$

$$f'(x) = -\csc x \cot x + e^2(0) \implies f'(x) = -\csc x \cot x$$

$$f''(x) = -[(\csc x \times -\csc^2 x) + (\cot x \times -\csc x \cot x)]$$

$$f''(x) = \csc^3 x + \csc x \cot^2 x \implies f''(x) = \left(\csc\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\csc\frac{\pi}{4}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\implies f''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^3 + \left(\sqrt{2}\right)(1)^2 \implies f''(x) = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)$$

$$\implies f''(x) = 2\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right) \implies \boxed{f''(x) = 3\left(\sqrt{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + 2$ c) $3\sqrt{2} + 2$ d) $\boxed{3\sqrt{2}}$

6) إذا كان: $f(x) = e^x - 3x$ ، فإن الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته: $4x + 2y + 2 = 0$ ، هو:

الخطوة الأولى: ايجاد ميل المستقيم $y = mx + b$ حيث m الميل

$$4x + 2y + 2 = 0$$

$$[2y = -4x - 2] \quad \div 2$$

$y = -2x - 1$ ميل المستقيم $= -2$

الخطوة الثانية ايجاد الاحداثي x

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$f'(x) = e^x - 3 \implies -2 = e^x - 3 \implies e^x = 1 \implies \ln e^x = \ln 1 \implies x \ln e = \ln 1 \implies$$

$$\implies x(1) = 0 \implies x = 0$$

a) $\ln 5$ b) $\ln 7$ c) $\boxed{0}$ d) 1

7) إذا كان: $f(x) = a^{(x^2-4x)}$ ، فإن قيمة الثابت a التي تجعل $\acute{f}(4) = 4$ ، هي:

قاعدة مشتقة الثابت المرفوع لأسّ اقتران بالنسبة لـ x = (نفس الاقتران × مشتقة الاقتران × ln الاساس)

$$f(x) = a^{(x^2-4x)}$$

$$\acute{f}(x) = (2x-4)a^{(x^2-4x)} \ln a \Rightarrow \acute{f}(4) = (2(4)-4)a^{\left((4)^2-4(4)\right)} \ln a = 4$$

$$\Rightarrow 4a^{(16-16)} \ln a = 4 \Rightarrow a^0 \ln a = 1 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow e^{\ln a} = e^1 \Rightarrow a = e$$

a) $\boxed{e}$ b) e^{-1} c) e^4 d) e^{-4}

8) إذا كان: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y = \log(\tan x)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ هي :

$$y = \log(\tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\tan x \ln 10} \Rightarrow = \frac{\sec^2 x \cot x}{\ln 10}$$

a) $\frac{\sec x}{\ln 10 \tan x}$ b) $\boxed{\frac{\sec^2 x \cot x}{\ln 10}}$ c) $\frac{\sec x \cot^2 x}{\ln 10}$ d) $\frac{\csc^2 x \cot x}{\ln 10}$

9) إذا كانت: $y^2 = \ln(xy)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(e, 1)$ ، هي:

$$y^2 = \ln(xy) \Rightarrow y^2 = \ln x + \ln y$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} \Rightarrow 2(1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e} + \frac{\frac{dy}{dx}}{(1)}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e} + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}}$$

a) $\boxed{\frac{1}{e}}$ b) $\frac{1}{3e}$ c) $\frac{1+e}{2e}$ d) $\frac{1-e}{2e}$

10) إذا كانت: $x > 0$, $y = x^{\frac{1}{x}}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند أي نقطة تقع عليها ، هو :

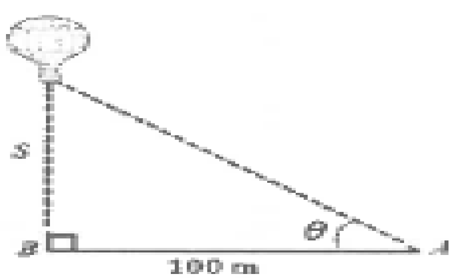
$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x\ )\left(\frac{-1}{x^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \times y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \ln x\ )}{x^2}$$

a) $1 - \ln x$ b) $\boxed{\frac{y(1-\ln x)}{x^2}}$ c) $\frac{1-\ln x}{x^2}$ d) $y(1 - \ln x)$

11) معتمداً على الشكل الآتي الذي يمثل كاميرا مثبتة عند النقطة A ترصد منطاداً يرتفع رأسياً إلى أعلى من النقطة B ، إذا أعطي ارتفاع المنطاد بالاقتران: $s(t) = 10t^2$ ، حيث s موقع المنطاد بالأمتار، و t الزمن بالدقائق، فإن معدل تغير زاوية ارتفاع المنطاد θ بعد دقيقتين من بدء ارتفاعه، هو:



- الشكل: مثلث قائم الزاوية

- نفرض s موقع الصاروخ

- نفرض θ زاوية ارتفاع الصاروخ

المطلوب: أجد معدل تغير زاوية

العلاقة : $tan\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{s}{100}$

- طول الضلع القائم الأول $x = 100\ m$ وهو ثابت يعوض بعد الاشتقاق

- طول الضلع القائم الثاني y وهو يمثل الاقتران $s(t) = 10\ t^2$ ومنها $\boxed{\frac{ds}{dt} = 20\ t}$

- الزمن $t = 2\ min$

- المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$

$$\tan\theta = \frac{s}{100}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\times\frac{ds}{dt} \quad\Longrightarrow\quad \left[\frac{1}{\cos^2}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\times\frac{ds}{dt}\right]\cos^2\theta$$

$$\Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{100}\times\frac{ds}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة التي تم اشتقاقها 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

ولكن الوتر غير موجود بالمعطيات لذلك، نستعين بعلاقة ثانوية (نظرية فيثاغورس) لإيجاد طول الضلع الثالث (الوتر).

$$z = \sqrt{y^2 + x^2} \;\Longrightarrow = \sqrt{(10\,t^2)^2 + (100)^2} \;\Longrightarrow = \sqrt{(10\,(2)^2)^2 + (100)^2}$$

$$\Longrightarrow = \sqrt{(40)^2 + (100)^2} \;\Longrightarrow = \;20\sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{100}{20\sqrt{29}} \;\Longrightarrow\; \boxed{\cos\theta \;=\; \frac{5}{\sqrt{29}}}$$

نعوض $\boxed{\cos\theta \;=\; \frac{5}{\sqrt{29}}}$ في العلاقة التي تم اشتقاقها :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2}{100}\times 20\,t \;\Longrightarrow\; = \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2}{100}\times 20\,(2)$$

$$\Longrightarrow = \frac{\frac{25}{29}}{100}\times 40 \;\Longrightarrow\; \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 0.34}$$

a) $0.25\,rad/min$ b) $\boxed{0.34\;\;rad/min}$ c) $0.86\,rad/min$ d) $0.935\,rad/min$

12) مكعب طول ضلعه $5\ cm$ ، إذا بدأ المكعب بالتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل $2\ cm/min$ ، وظل محافظاً على شكله ، فإن معدل تغير حجم المكعب بعد $1\ min$ من بدء تمدده، هو:

الشكل: مكعب

العلاقة: حجم المكعب وتساوي $V = (x)^3$

طول ضلع المكعب $x_1 = 5$ **(ثابت يعوض قبل الاشتقاق)**

الزيادة في طول ضلع المكعب $(2 \times 1) = 2 \Longleftarrow = \left(\frac{dx}{dt} \times t\right) = x$

معدل تغير طول ضلع المكعب $\frac{dx}{dt} = 2\ cm/min$ **(متغير يعوض بعد الاشتقاق)**

معدل التغير في حجم المكعب $\frac{dV}{dt} = ?\ cm^3/min$ **. (المطلوب)**

$\left(\text{طول الضلع}\right)^3 = \text{حجم المكعب}$

$$V = (x_1 + x)^3 \implies V = (5 + x)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3(5 + x)^2 \frac{dx}{dt} \implies = 3(5 + 2)^2(2) \implies = 3(49)(2) \implies \boxed{\frac{dV}{dt} = 294}$$

a) $147\ cm^3/min$ b) $216\ cm^3/min$ c) $\boxed{294\ cm^3/min}$ d) $108\ cm^3/min$

13) إذا كان : $f(x) = (x - 2)e^x$ ، فإن القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f في الفترة $[-2, 2]$ هي :

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

$$\acute{f}(x) = (x - 2)e^x + e^x(1) \implies \acute{f}(x) = (x - 2)e^x + e^x$$

$$\implies \acute{f}(x) = e^x(x - 2 + 1) \implies \boxed{\acute{f}(x) = e^x(x - 1)}$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x الحرجة :

$$\acute{f}(x) = 0$$

$e^x(x - 1) = 0 \implies$ إما $e^x \neq 0$ أو $x - 1 = 0 \implies \boxed{x = 1}$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f(-2) = (-2 - 2)e^{-2} \implies f(-2) = -4e^{-2} \implies \boxed{f(-2) = -0.54}$$

$f(1) = (1-2)e^{1} \implies f(1) = (-1)e^{1} \implies \boxed{f(1) = -e}$

$f(2) = (2-2)e^{-2} \implies \boxed{f(2) = 0}$

a) 0　　　b) $-\frac{4}{e^2}$　　　c) $-\frac{3}{e}$　　　d) $\boxed{-e}$

14) إذا كان: $x \neq 2$ ، $g(x) = 2x + \frac{2}{x-2}$ ، فإن منحنى الاقتران g يكون مقعراً للأسفل على الفترة:

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$g(x) = 2x + \frac{2}{x-2}$$

$$g'(x) = 2 + \frac{-2(1)}{(x-2)^2} \implies g'(x) = 2 - \frac{2}{(x-2)^2} \implies g'(x) = 2 - 2(x-2)^{-2}$$

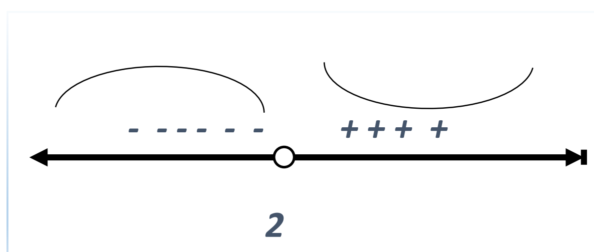
2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$g''(x) = 0 - (-2)(2)(x-2)^{-3}(1) \implies g''(x) = 4(x-2)^{-3} \implies g''(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$$

3) الخطوة الثالثة : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

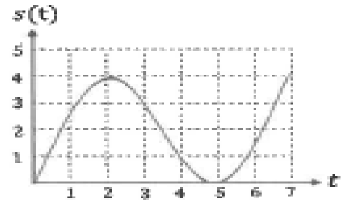
$$\frac{4}{(x-2)^3} = 0 \implies 4 \neq 0$$

$(x-2)^3 = 0 \implies \boxed{x = 2}$　　(أصفار المقام)　　غير موجودة



a) $\boxed{(-\infty, 2)}$　　　b) $(0, \infty)$　　　c) $(-2, \infty)$　　　d) $(2, \infty)$

15) يمثل المنحنى المبين في الشكل الآتي اقتران موقع $s(t)$ لجسم يتحرك في مسار مستقيم في الفترة $[0,7]$ ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني، إذا علمت أن: $v(2.2) = v(4.8) = 0\ m/s$ ، $a(3.5) = 0\ m^2/s$ ، x ، حيث v سرعة الجسم ، و a تسارعه ، فإن الفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم ، هي:



- تكون سرعة الجسم المتجهة متزايدة عندما $a(t) > 0$

- من المعطيات $a(3.5) = 0$ إذن الفترة هي $(3.5\ ,7\ )$

a) $(0\ ,2.2\ )$ b) $(0\ ,4.8\ )$ c) $\boxed{(3.5\ ,7\ )}$ d) $(2.2\ ,3.5\ )$

16) إذا كانت: $A(1,2)$ ، $B(0,-1)$ نقطتين في المستوى الإحداثي، فأن النقطة C الواقعة على المستقيم الذي معادلته : $y = x + 2$ بحيث يكون: $(AC)^2 + (BC)^2$ أقل ما يمكن هي :

من المعطيات النقاط هي : $A(1,2)\ ,\ B(0,-1)$ والنقطة المطلوبة هي C ونفرضها $C(x,y)$

$$AC = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \implies (AC)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$BC = \sqrt{(x)^2 + (y+1)^2} \implies (BC)^2 = (x)^2 + (y+1)^2$$

$$f = (AC)^2 + (BC)^2 \implies f = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x)^2 + (y+1)^2$$

من المعطيات نعوض $y = x + 2$ في العلاقة أعلاه لإيجاد قيمة x :

$$f = (x-1)^2 + (x+2-2)^2 + (x)^2 + (x+2+1)^2$$

$$f = (x-1)^2 + (x)^2 + (x)^2 + (x+3)^2 \implies f = (x-1)^2 + 2(x)^2 + (x+3)^2$$

اشتق العلاقة أعلاه:

$$\acute{f}(x) = 2(x-1) + 4x + 2(x+3)$$

$$\implies \acute{f}(x) = 2x - 2 + 4x + 2x + 6 \implies \acute{f}(x) = 8x + 4$$

نساوي المشتقة في الصفر:

$$\acute{f}(x) = 0 \implies 8x + 4 = 0 \implies 8x = -4 \implies x = -\frac{1}{2}$$

نعوض بمعادلة المستقيم من المعطيات:

$$y = -\frac{1}{2} + 2 \implies y = \frac{3}{2}$$

النقطة هي : $\left(-\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{2}\right)$

a) $(1\ ,3\ )$ b) $\left(-\frac{3}{4}\ ,\frac{5}{4}\right)$ c) $(0\ ,2\ )$ d) $\boxed{\left(-\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{2}\right)}$

17) يبيع متجر 100 طابعة شهرياً بسعر $JD\ 260$ للطابعة الواحدة، وبعد إجراء دراسة في التسويق، وجد المتجر أن عدد الطابعات المبيعة شهرياً يزداد بمقدار 10 طابعات عند كل خصم مقداره $JD\ 20$ من سعر الطابعة الواحدة، ما سعر بيع الطابعة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن وفق هذه الدراسة ؟ أتحقق من فهمي: (صفحة 125)

نفرض أنه تم إجراء خصم x مرة ، فسيكون سعر بيع الشاشة $(260-20x)$ ، وسيكون عدد الطابعات المبيعه $(100+10)$

وليكن الإيراد $R(x)$ فإن :

$$R(x)=(260-20x)(100+10x)\ ,0\le x\le 26$$

$$R(x)=26000+2600x-2000x\ -200x^2\ \Rightarrow\ R(x)=26000+600x\ -200x^2$$

$$\acute{R}(x)=600-400x$$

$$600-400x=0\ \Rightarrow\ 400x=600\ \Rightarrow\ \boxed{x=1.5}$$

ويكون سعر بيع الشاشة $260-20(1.5)\Rightarrow 260-30=\boxed{230}$.

a) $245\ JD$ b) $240\ JD$ c) $235\ JD$ d) $\boxed{230\ JD}$

ملحوظة في جميع الفقرات من 18 إلى 25 فإن ، $\sqrt{-1}=i$ حيثما وردت .

18) قيمة $i^{21}\times\sqrt{-12}$ في أبسط صورة هي:

بقسمة اس i على 4 والباقي هو الاس الجديد $\frac{21}{4}$ الباقي 1 وهو الاس الجديد لـ $i\Rightarrow i^1\Rightarrow i^{21}$

$$i^{21}\times\sqrt{-12}\ \Rightarrow=\ i\times i\times\sqrt{12}\ \Rightarrow=\ i^2\ \times\ \sqrt{4\times 3}\ \Rightarrow=\ -1\ \times\ 2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ -2\sqrt{3}$$

a) $2i\sqrt{3}$ b) $-2i\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\boxed{-2\sqrt{3}}$

19) إذا كان: $z=-1+ai$ ، حيث $|z|=2$ ، فإن القيمة الموجبة للثابت a ، هي:

$$z=-1+ai$$

$$2=\sqrt{(-1)^2+(a)^2}\ \Rightarrow\ 2=\sqrt{1+a^2}\ \Rightarrow\ 4=1+a^2\Rightarrow\ a^2=3\ \Rightarrow a=\sqrt{3}$$

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\boxed{\sqrt{3}}$ d) 3

20) إذا كان: $Arg(3+2i)=\alpha\, rad$ ، فإن $Arg(2+3i)$ ، هي:

$$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha}$$

a) $\boxed{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)rad}$ b) $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)rad$ c) $(\pi-\alpha)rad$ d) $(\alpha-\pi)rad$

21) إذا كان: $w=3-i$ ، $z=2+3i$ ، فإن قيمة المقدار z^2-w^2 ، هي:

$$(2+3i)^2-(3-i)^2\Longrightarrow=(4+12i+9i^2)-(9-6i+i^2)\Longrightarrow=$$

$$=(4+12i-9)-(9-6i-1)\Longrightarrow=(-5+12i)-(8-6i)$$

$$\Longrightarrow=-5+12i-8+6i\Longrightarrow=-13+18i$$

a) $\boxed{-13+18i}$ b) $3+22i$ c) $-5+26i$ d) $5+22i$

22) إذا كان: $\frac{a-4i}{1-2i}=b+2i$ ، حيث b ، a ثوابت حقيقية ، فإن قيمة الثابت a ، هي:

$$\frac{a-4i}{1-2i}=b+2i\Longrightarrow a-4i=(b+2i)(1-2i)\Longrightarrow a-4i$$

$$=b-2bi+2i-4i^2$$

$$\Longrightarrow a-4i=b-2bi+2i+4\Longrightarrow\Longrightarrow a-4i=b+4-2bi+2i$$

$$a=b+4$$

$$-4=-2b+2\Longrightarrow 2b=4+2\Longrightarrow 2b=6\Longrightarrow \boxed{b=3}$$

$$a=3+4\Longrightarrow a=7$$

a) 3 b) -3 c) $\boxed{7}$ d) -7

23) إذا كان: $z = 3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ، فإن صورة z^2 المثلثية ، هي:

$$z = 3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow \boxed{z^2 = 9\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

a) $9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\boxed{9\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$ c) $9\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ d) $9\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

24) إذا كان: $a > 0$ ، $a - i\sqrt{6}$ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-4 - 4i\sqrt{3}$ ، فإن قيمة الثابت الحقيقي a ، هي:

$$\sqrt{-4 - 4i\sqrt{3}} = a - i\sqrt{6} \Rightarrow -4 - 4i\sqrt{3} = \left(a - i\sqrt{6}\right)^2$$

$$-4 - 4i\sqrt{3} = a^2 + 2a\sqrt{6}i + \left(\sqrt{6}\right)^2 i^2 \Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = a^2 - 6 + 2a\sqrt{6}i$$

$$\boxed{a^2 - 6 = -4 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}}$$

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\boxed{\sqrt{2}}$

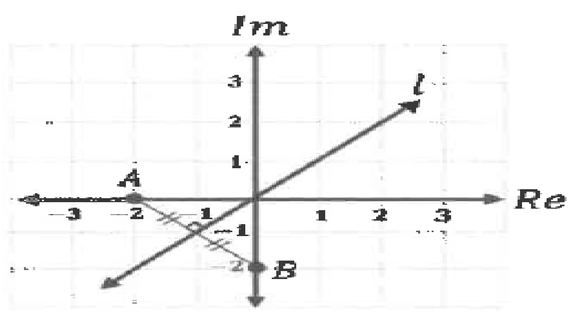
25) معتمداً الشكل الآتي، ما معادلة المستقيم l الممثل بيانياً (بدلالة z) ؟

النقاط من الشكل هي : $(-2\,,0)$ و $(0\,,-2)$

$$|z - (a - bi)| = |z - (c - di)|$$

$$\Rightarrow |z - (-2 - 0i)| = |z - (0 - (-2)i)|$$

$$\Rightarrow \boxed{|z + 2| = |z + 2i|}$$



a) $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ b) $Arg(z) = \frac{5\pi}{4}$ c) $|z - 2| = |z - 2i|$ d) $\boxed{|z + 2| = |z + 2i|}$

السؤال الثاني : (22 علامة)

a) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}}+1$ ، عند نقطة تقاطع المنحنى مع المحور.   (10 علامات)

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة (عند نقطة تقاطع المنحنى مع المحور y يعني $x=0$)

$$y=\frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}}+1$$

$$x=0\rightarrow y=\frac{\ln(2(0)+1)}{e^{((0)+1)}}+1 \Rightarrow y=\frac{\ln(1)}{e^{(1)}}+1 \Rightarrow =\frac{0}{e}+1\Rightarrow \boxed{y=1}$$

النقطة هي $(0,1)$

الخطوة الثانية: إيجاد المشتقة

$$y=\frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}}+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(e^{(x+1)}\right)\left(\frac{2}{2x+1}\right)-(\ln(2x+1))\left(e^{(x+1)}\right)}{\left(e^{(x+1)}\right)^2}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل المماس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\left(e^{(0+1)}\right)\left(\frac{2}{2(0)+1}\right)-(\ln(2(0)+1))\left(e^{(0+1)}\right)}{\left(e^{(0+1)}\right)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{(e)\,(2)-(\ln(1))(e)}{e^2}\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2e-(0)\left(e^{(1)}\right)}{e^2}\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\boxed{m=\frac{2}{e}}$$

الخطوة الرابعة: إيجاد ميل العامودي على المماس

$$m_1=-\frac{1}{m}\Rightarrow m_1=-\frac{1}{\frac{2}{e}}\Rightarrow \boxed{m_1=-\frac{e}{2}}$$

الخطوة الخامسة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y-y_1=m_1(x-x_1)\Rightarrow y-1=-\frac{e}{2}(x-0)$$

$$y=\left(-\frac{e}{2}\right)(x)+1 \Rightarrow y=-\frac{e}{2}x+1$$

b) إذا كان: $y = \cot^2\left(\cos\sqrt{e^{\pi-2x}}\right)$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$. (12 علامات)

$$y = \cot^2\left(\cos\sqrt{e^{\pi-2x}}\right) \Rightarrow y = \left(\cot\left(\cos e^{\frac{\pi}{2}-\frac{2x}{2}}\right)\right)^2 \Rightarrow y = \left(\cot\left(\cos e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\cot\left(\cos\ e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\right)\left(-\csc^2\left(\cos\ e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\right)\left(-\sin\ e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)(-1)\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

السؤال الثالث : (28 علامة)

a) إذا رسم مماسان لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 12$ ، من النقطة $C(6,0)$ ، فمسّا المنحنى عند النقطتين A, B فجد مساحة المثلث ABC . (12 علامات)

نقاط رؤوس المثلث : $A(x,y)\ \ ,B(x,y)\ \ ,C(6,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$

$$\frac{-x}{y} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \frac{-x}{y} = \frac{y-0}{x-6} \Rightarrow \frac{-x}{y} = \frac{y}{x-6}$$

$$\Rightarrow y^2 = -x(x-6) \Rightarrow \boxed{y^2 = -x^2 + 6x}$$

اعوض في المعادلة الأصلية:

$$x^2 + y^2 = 12 \Rightarrow x^2 - x^2 + 6x = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$2^2 + y^2 = 12 \Rightarrow 4 + y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{8}} \Leftrightarrow \boxed{y = -\sqrt{8}}$$

إذن نقاط رؤوس المثلث : $A(2,\sqrt{8})\ \ ,B(2,-\sqrt{8})\ \ ,C(6,0)$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

القاعدة $= \sqrt{8} - -\sqrt{8} = \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$

الارتفاع $= 6 - 2 = 4$

$$A = \frac{1}{2}x \times h \Rightarrow A = \frac{1}{2}(2\sqrt{8}) \times (4) \Rightarrow A = \sqrt{8} \times (4) \Rightarrow \boxed{A = 4\sqrt{8}}$$

b) إذا كانت: $y = t^4 + 2t^2$ ، $x = 5 - 2t$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $x = 1$. (8 علامات)

$$y = t^4 + 2t^2 \implies \boxed{\frac{dy}{dt} = 4t^3 + 4t}$$

$$x = 5 - 2t \implies \boxed{\frac{dx}{dt} = -2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 + 4t}{-2} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = -2t^3 - 2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6t^2 - 2}{-2} \implies \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 3t^2 + 1}$$

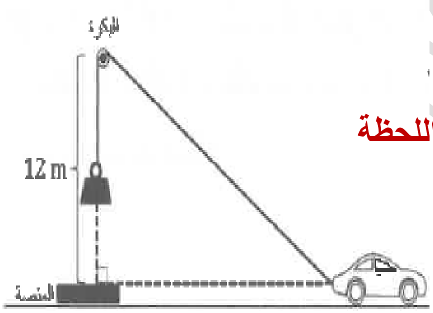
$$x = 5 - 2t \implies 1 = 5 - 2t \implies 2t = 4 \implies \boxed{t = 2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = 3t^2 + 1 \implies = 3(2)^2 + 1 \implies = 3(4) + 1 \implies = 12 + 1$$

$$\implies \boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = 13}$$

c) حبل طوله $25\ m$ يمر حول بكرة ترتفع عن منصة مسافة $12\ m$ ، مربوط بطرف الحبل ثقل وطرفه الآخر مربوط بسيارة على أرض أفقية، إذا سحبت السيارة الحبل بسرعة $0.5\ m/s$ ، فجد معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة مسافة $16\ m$ عن مسقط البكرة على المنصة .

(انظر الشكل التوضيحي) (8 علامات)



الشكل: مثلث قائم الزاوية

العلاقة الرئيسية: نظرية فيثاغورس

المسافة بين السيارة والمنصة $x = 16\ m$. (وهي متغيرة تعوض بعد الاشتقاق)

المسافة بين السيارة والبكرة $z = ?$. (وهي متغيرة تعوض بعد الاشتقاق)

المسافة بين البكرة والمنصة $L + h = 12\ m$. (وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق)

المسافة بين المنصة والثقل $h = ?$.

المسافة بين البكرة والثقل $L = 25 - z$.

معدل تغير المسافة بين السيارة والمنصة $\frac{dx}{dt} = 0.5\ m/s$

المطلوب : معدل ارتفاع الثقل $\frac{dh}{dt} = ?$

$$z^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow z^2 = 256 + 144 \Rightarrow z^2 = 400 \Rightarrow \boxed{z = 20}$$

المسافة بين البكرة والثقل $\boxed{L = 5} \Leftarrow L = 25 - 20$.

$$L + h = 12 \Rightarrow 5 + h = 12 \Rightarrow \boxed{h = 7}$$

$$z + 12 - h = 25$$

$$\boxed{z = h + 13}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + (12)^2 \Rightarrow (h + 13)^2 = x^2 + 144$$

$$2(h + 13)\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2(7 + 13)\frac{dh}{dt} = 2(16)(0.5)$$

$$\Rightarrow 40\frac{dh}{dt} = 16 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0.40\ m/s$$

السؤال الرابع : (22 علامة)

a) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$ (10 علامات)

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة.

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4} \Rightarrow f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (2)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{\frac{-1}{3}}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(x^{\frac{-1}{3}}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{1}\right) \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

2) الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً ، أو غير موجودة .

- قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً

$$\acute{f}(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\right)=0 \implies 1-\sqrt[3]{x^2}=0$$

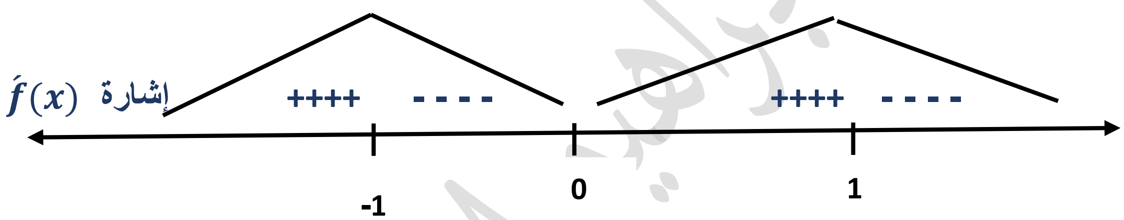
$$\implies \sqrt[3]{x^2}=1 \implies x^2=1 \implies \boxed{x=1} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$$

- قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران غير موجودة

$$\sqrt[3]{x}=0 \implies \boxed{x=0}$$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



الخطوة الرابعة : أجد القيم القصوى المحلية.

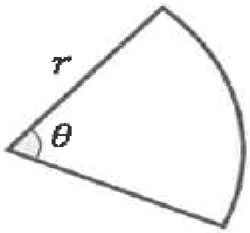
$$f(-1)=2\sqrt[3]{-1^2}-\sqrt[3]{-1^4} \implies f(-1)=2-1 \implies \boxed{f(-1)=1}$$

$$f(0)=2\sqrt[3]{0^2}-\sqrt[3]{0^4} \implies \boxed{f(0)=0}$$

$$f(1)=2\sqrt[3]{1^2}-\sqrt[3]{1^4} \implies f(1)=2-1 \implies \boxed{f(1)=1}$$

وله قيمة صغرى محلية عند 0 $f(0)=0$

وله قيمتان عظميان محليتان عند 1 $f(1)=1$ ، $f(-1)=1$



b) يراد تسييج محمية على شكل قطاع دائري زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قطرها r ، لإكثار نوع من الغزلان المهدد بالانقراض، إذا علمت أن طول السياج اللازم لعمل ذلك $100\ km$ ، فجد طول نصف القطر r الذي تكون عنده مساحة المحمية أكبر ما يمكن. (انظر الشكل التوضيحي) (12 علامة)

ليكن $P = 100$ طول قوس القطاع الدائري ، إذن :

$$100 = r + r + L \quad \Rightarrow 100 = 2r + r\theta$$

ومنها :

$$2r + r\theta = 100 \quad \Rightarrow r\theta = 100 - 2r \quad \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{100-2r}{r}}$$

لتكن L مساحة القطاع الدائري المظلل ، إذن :

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{100-2r}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}r(100-2r) \quad \Rightarrow \boxed{A = 50r - r^2}$$

$$\boxed{A'(r) = 50 - 2r}$$

$$A'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 50 - 2r = 0 \quad \Rightarrow 2r = 50 \quad \Rightarrow \boxed{r = 25}$$

$$A''(r) = -2 \quad \Rightarrow A''(25) = -2 < 0$$

تكون مساحة المحمية أكبر ما يمكن عندما $r = 25$

السؤال الخامس : (28 علامة)

a) اكتب العدد المركب: $z = 1 - i$ بالصورة المثلثية. (8 علامات)

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{1+1} \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{2}$$

يقع في الربع الرابع

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \quad \Rightarrow \quad = -\tan^{-1}(1) \quad \Rightarrow = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

b) إذا علمت أن $3+2i$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4-2z^3-3z^2+4z+104=0$

فجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة. (10 علامات)

بما أن $3+2i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

الجذر الأول $3+2i$ ، الجذر الثاني $3-2i$

نقوم بإيجاد المعادلة التربيعية من الجذرين أعلاه وحسب القانون :

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

$$\text{مجموع الجذرين}=(3+2i)+(3-2i)\ \Longrightarrow =(3+3)+(2-2)i\ \Longrightarrow \boxed{=6}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين}=(3+2i)\times(3-2i)\ \Longrightarrow =(3)^2+(2)^2\Longrightarrow =9+4\Longrightarrow \boxed{=13}$$

$$z^2-(6)z+(13)=0\ \Longrightarrow\ \boxed{z^2-6z+13=0}$$

نقوم بقسمة المعادلة في السؤال على المعادلة التربيعة لنجد المعادلة التربيعية الثانية :

$$\begin{array}{r|l} & z^2+4z+8 \\ \hline z^2-6z+13 & z^4-2z^3-3z^2+4z+104 \\ & (-)\ z^4-6z^3+13z^2 \\ \hline & 4z^3-16z^2+4z+104 \\ & (-)\ 4z^3-24z^2+52z \\ \hline & 8z^2-48z+104 \\ & 8z^2-48z+104 \\ \hline & 0 \end{array}$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة **التربيعية الثانية لإيجاد الجذرين التربيعين الآخرين:**

$$z^2+4z+8\ \Longrightarrow\ a=1\qquad b=4\qquad c=8$$

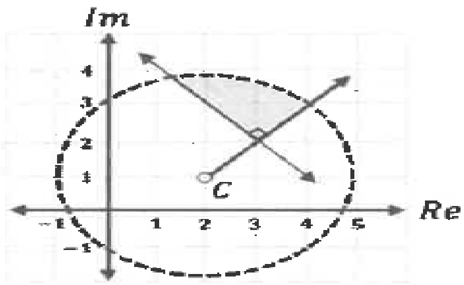
$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Longrightarrow z=\frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(8)}}{2(1)}\Longrightarrow =\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}$$

$$\Longrightarrow =\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}\Longrightarrow =\frac{-4\pm 4i}{2}\Longrightarrow =\frac{-4}{2}\pm\frac{4i}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2=-2+2i}\Leftrightarrow\boxed{z_3=-2-2i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 4 جذور هي :

$$\{z_1=3-2i\ ,\ z_2=3+2i\ ,z_3=-2+2i\ ,z_4=-2-2i\ \}$$



C) إذا كانت النقطة C تمثل مركز الدائرة في الشكل المجاور، فاكتب (بدلالة z) نظام متباينات للمحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة. (10 علامات)

مركز الدائرة : $(2\,,1)$

- نصف القطر : لايجاد نصف القطر استخدام قانون المسافة بين نقطتين (مركز الدائرة ونقطة تمر بها الدائرة) :

1) مركز الدائرة : $(2\,,1)$ ، 2) نقطة تمر بها الدائرة : $(0\,,3)$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2 \implies (0-2)^2+(3-1)^2=r^2$$

$$\implies 4+4=r^2 \implies 8=r^2 \implies r=\sqrt{8} \implies r=\sqrt{4\times 2} \implies \boxed{r=2\sqrt{2}}$$

- عندما اكتب المعادلة في صورة $|z-(a+ib)|=r$ فإن معادلة دائرة، مركزها $(2+i)$ ، وطول نصف قطرها $2\sqrt{2}$ وحدات .

$$|z-(2+i)|=2\sqrt{2} \implies |z-2-i)|=2\sqrt{2}$$

- وكونها متقطعة مما يدل على عدم وجود مساواة في المتباينة و المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هي المنطقة المظللة فتكون المتباينة هي : $|z-2-i)|<2\sqrt{2}$