المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب التمارين

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قرَّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2024/0)، تاريخ 2024/00/00 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2024/00)، تاريخ 2024/00/00 م، بدءًا من العام الدراسي 2024 / 2025 م.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1446 هـ / 2025 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم / المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 3 التفاضل وتطبيقاته

الوحدة 4 الأعداد المُركَّبة

أختبر معلوماتي بحلِّ التدريبات أوَّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

قسمة كثيرات الحدود

أجد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(3x^3 - 6x^2 + 9x - 5) \div (x - 4)$

2) $(8x^4 + 6x^2 - 11x + 7) \div (2x + 5)$

مثال: أجد ناتج القسمة والباقي في ما يأتي: $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$.

$$\begin{array}{r l}
 & 3x + 9 \\
x^2 - 3x + 1 \overline{)} & 3x^3 + 0x^2 + 9x - 5 \\
 & (-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
 & 9x^2 + 6x - 5 \\
 & (-)\ 9x^2 - 27x + 9 \\
 & 33x - 14
\end{array}$$

بقسمة $3x^3$ على x^2، وكتابة الناتج $3x$ فوق المقسوم

بضرب $3x$ في المقسوم عليه

بالطرح، وتنزيل -5، وقسمة $9x^2$ على x^2، وكتابة 9 في الناتج

بضرب 9 في المقسوم عليه

بالطرح

إذن: الناتج $(3x + 9)$، والباقي $(33x - 14)$.

تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

أُحدِّد عدد حلول كلٍّ من المعادلات الآتية:

3) $x^2 + 6x - 7 = 0$

4) $x^2 - 4x + 4 = 0$

5) $x^2 - 2x + 7 = 0$

مثال: أُحدِّد عدد حلول المعادلة الآتية:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

أُحدِّد قِيَم المعاملات، ثمَّ أُعوِّضها في صيغة المُميِّز:

$a = 1, b = 1, c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغة المُميِّز (Δ)

$= 1^2 - 4(1)(4) = -15$ بتعويض قِيَم المعاملات، والتبسيط

قيمة المُميِّز تساوي -15 (سالبة). إذن، لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية.

أتذكَّر

إذا كانت قيمة المُميِّز موجبة، فإنَّه يوجد حلّان للمعادلة التربيعية. أمّا إذا كانت قيمة المُميِّز صفرًا، فإنَّه يوجد حلٌّ واحد للمعادلة التربيعية.

- **حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر**

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

6 $x^2 - 3x = 0$

7 $8x^2 = -12x$

8 $4x^2 + 9x = 0$

9 $7x^2 = 6x$

مثال: أحُلُّ المعادلة: $6x^2 = 20x$

المعادلة المعطاة	$6x^2 = 20x$
بطرح $20x$ من طرفي المعادلة	$6x^2 - 20x = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$2x(3x - 10) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$
بحلِّ كل معادلة	$x = 0 \qquad x = \frac{10}{3}$

إذن، الجذران هما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

- **حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$**

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

10 $x^2 - 2x - 15 = 0$

11 $t^2 - 8t + 16 = 0$

12 $x^2 - 18x = -32$

13 $x^2 + 2x = 24$

14 $x^2 = 17x - 72$

15 $x^2 + 5x + 4 = 0$

16 $s^2 + 20s + 100 = 0$

17 $y^2 + 8y = 20$

18 $m^2 - 12m + 32 = 0$

مثال: أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

a) $x^2+6x+8=0$

المعادلة المعطاة	$x^2+6x+8=0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x+4)(x+2)=0$
خاصية الضرب الصفري	$x+4=0$ or $x+2=0$
بحلِّ كل معادلة	$x=-4$ $\quad x=-2$

إذن، الجذران هما: $-4, -2$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أتذكَّر

لتحليل ثلاثي حدود في صورة: x^2+bx+c، حيث b، و c عددان صحيحان، أبحث عن عددين صحيحين m و n، مجموعهما يساوي b، وحاصل ضربهما يساوي c، ثمَّ أكتب x^2+bx+c في صورة: $(x+m)(x+n)$.

b) $x^2+5x=6$

المعادلة المعطاة	$x^2+5x=6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$x^2+5x-6=0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x-1)(x+6)=0$
خاصية الضرب الصفري	$x-1=0$ or $x+6=0$
بحلِّ كل معادلة	$x=1$ $\quad x=-6$

إذن، الجذران هما: $1, -6$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

- **حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية:** $ax^2+bx+c=0$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

19) $24x^2-19x+2=0$

20) $18t^2+9t+1=0$

21) $5x^2+8x+3=0$

22) $5x^2-9x-2=0$

23) $4t^2-4t-35=0$

24) $6x^2+15x-9=0$

25) $28s^2-85s+63=0$

26) $9d^2-24d-9=0$

27) $8x(x+1)=16$

مثال: أحُلُّ المعادلة: $30x^2 - 5x = 5$

المعادلة المعطاة	$30x^2 - 5x = 5$
بطرح 5 من طرفي المعادلة	$30x^2 - 5x - 5 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$6x^2 - x - 1 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(3x + 1)(2x - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$3x+1 = 0 \quad \text{or} \quad 2x-1 = 0$
بحلِّ كل معادلة	$x = -\frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$

إذن، الجذران هما: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

أتذكَّر

لتحليل ثلاثي حدود في صورة: $ax^2 + bx + c$، حيث a، وb، وc أعداد صحيحة، أجد عددين صحيحين m و n، حاصل ضربهما يساوي (ac)، ومجموعهما يساوي b، ثمَّ أكتب $ax^2 + bx + c$ في صورة: $ax^2 + mx + nx + c$، ثمَّ أُحلِّل بتجميع الحدود.

حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

أحُلُّ المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

30) $x^2 + 2x - 5 = 0$

29) $x^2 + 4x - 1 = 0$

28) $x^2 + x - 6 = 0$

مثال: أحُلُّ المعادلة: $x^2 + 4x - 12 = 0$ باستعمال القانون العام.

لحلِّ المعادلة باستعمال القانون العام، أجد قِيَم المعاملات:

$a = 1, b = 4, c = -12$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتعويض، والتبسيط

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-4-8}{2} = -6\,, \quad x = \frac{-4+8}{2} = 2$$

إذن، حلّا المعادلة هما: $x = -6, x = 2$

تبسيط المقادير النسبية

أُبسِّط المقادير الآتية:

33 $\frac{3x}{x-1} \times \frac{x+4}{6x}$

32 $\frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+2}$

31 $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3}$

36 $\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

35 $\frac{x+4}{x^2-16}$

34 $\frac{x}{x+1} \div \frac{x+4}{2x+2}$

مثال: أُبسِّط المقدارين الآتيين:

a) $\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5}$

$$\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5} = \frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right) + \frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)} + \frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}$$ بضرب البسطين، وضرب المقامين

$$= \frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$$ بجمع بسطي الكسرين

$$= \frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{5x+8}{x^2+x-30}$$ بجمع الحدود المُتشابِهة

b) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x}$

$$\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1}$$ بتحويل القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)}$$ بضرب البسطين، وضرب المقامين

$$= \frac{5x+2}{3(x+1)}$$ بقسمة البسط والمقام على $2x$

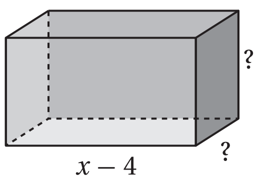
نظريتا الباقي والعوامل
Remainder and Factor Theorems

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$

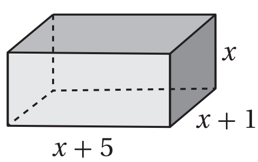
2 $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$

3 يُمثِّل الاقتران: $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور. أجد الأبعاد الأُخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x.



4 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$ على $h(x) = x + 2$ يساوي (-4)، فما قيمة a؟

5 أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه 180 cm^3



6 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 3$ على $h(x) = x - 1$ يساوي (4)، وكان $(x + 1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$، فما قيمة كلٍّ من a، وb؟

7 إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $(x - 3)$ يساوي 4، وباقي قسمته على $(x + 2)$ يساوي 9، فأجد باقي قسمة $f(x)$ على $(x - 3)(x + 2)$.

أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

8 $3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

9 $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x$

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

10 $3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$

11 $2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$

12 يزيد ارتفاع مخروط 5 cm على طول نصف قُطْر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخروط $24\pi \text{ cm}^3$، فما أبعاده؟ (حجم المخروط هو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قُطْر القاعدة، وh الارتفاع).

الدرس 2

الكسور الجزئية
Partial Fractions

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$

2) $\dfrac{3x-5}{x(x-1)^2}$

3) $\dfrac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

4) $\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3}$

5) $\dfrac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$

6) $\dfrac{36+5x}{16-x^2}$

7) $\dfrac{8x+3}{x^2-3x}$

8) $\dfrac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}$

9) $\dfrac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$

10) $\dfrac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$

11) $\dfrac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$

12) $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$

13) $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

14) $\dfrac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$

15) $\dfrac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

16) أجد الاقتران النسبي الذي يُمكِن كتابته في صورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17) $\dfrac{ax+b}{(x-c)^2}$

18) $\dfrac{1}{x^2-ax-bx+abx}$

19) $\dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$

20) أُجزِّئ المقدار: $\dfrac{2}{x(x+2)}$ ، ثمَّ أستعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

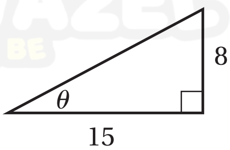
$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{11\times 13}$$

الوحدة 2: المتطابقات والمعادلات المثلثية

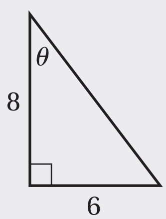
أختبر معلوماتي بحلِّ التدريبات أوَّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• الاقترانات المثلثية

1 أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



مثال: أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



الخطوة 1 أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = 6^2 + 8^2$ بتعويض $a = 6, b = 8$

$c^2 = 100$ بالتبسيط

$c = \pm\sqrt{100}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$c = 10$ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا

الخطوة 2 أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ.

$\tan\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{المجاور})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\cos\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{الوتر})} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\sin\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{الوتر})} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cot\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{المقابل})} = \frac{4}{3}$

$\sec\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المجاور})} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\csc\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المقابل})} = \frac{5}{3}$

• إيجاد قِيَم النسب المثلثية إذا عُلِمت قيمة نسبة مثلثية

أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

2 $\sin\theta = \frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$

3 $\tan\theta = 1, 180° < \theta < 270°$

مثال: أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ إذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $90° < \theta < 180°$.

متطابقة فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

بتعويض قيمة $\sin\theta$ $\cos^2\theta + (\frac{3}{5})^2 = 1$

بطرح $\frac{9}{25}$ من كلا الطرفين $\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$

بالتبسيط $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

في الربع الثاني يكون $\cos\theta$ سالبًا $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

إيجاد قيمة الاقتران المثلثي لأيِّ زاوية

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4 $\cos 135°$

5 $\cot 120°$

6 $\sin 210°$

7 $\csc(-30°)$

8 $\tan\frac{\pi}{4}$

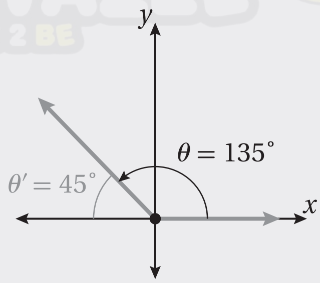
9 $\cos\frac{11\pi}{3}$

10 $\sec(-\frac{7\pi}{4})$

11 $\tan\frac{15\pi}{4}$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) tan 135°



يقع ضلع انتهاء الزاوية 135° في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$\theta' = 180° - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

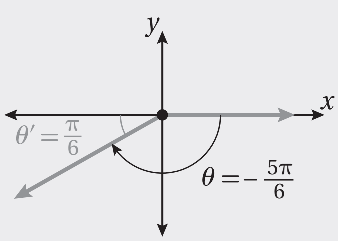
$= 180° - 135°$ $\theta = 135°$

$= 45°$

$\tan 135° = -\tan 45° = -1$ الظل سالب في الربع الثاني

2) $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

بما أنَّ الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ سالبة، فإنَّني أجد أوّلًا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



$-\frac{5\pi}{6} + 2(1)\pi = \frac{7\pi}{6}$ بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مشتركة قياسها موجب

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$\theta' = \theta - \pi$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= \frac{7\pi}{6} - \pi$ $\theta = \frac{7\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{6}$

$\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\csc\frac{\pi}{6} = -2$ قاطع التمام سالب في الربع الثالث

الجيب وجيب التمام للزوايا المتتامّة

12 إذا كان $\sin 70° = 0.9397$، فأجد $\cos 20°$.

13 إذا كان $\cos 55° = 0.57358$، فأجد $\sin 35°$.

14 إذا كان $\sin 78° = 0.9781$، فأجد $\cos 12°$، و $\sin 12°$.

مثال: إذا كان $\cos 34° = 0.829$، فأجد $\sin 56°$.

تعريف الجيب وجيب التمام للزوايا المتتامَّة $\cos A = \sin (90°-A)$

بتعويض $A = 34°$ $\cos 34° = \sin (90°-34°)$

بالتبسيط $\cos 34° = \sin 56°$

بتعويض $\cos 34° = 0.829$ $\sin 56° = 0.829$

- **معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

15) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

16) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$

17) $\sin^{-1}(-1)$

مثال: أجد قيمة $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاوية التي قيمة الجيب لها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا فإنَّ:

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

- **حلُّ المعادلات المثلثية**

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية، علمًا بأنَّ $0° \leq x \leq 360°$:

18) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

19) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

20) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21) $7 + 9\cos x = 1$

22) $2\sin x + 1 = 0$

23) $1 - 2\tan x = 5$

24) $2\sin x \tan x + \tan x = 0$

25) $\cos x + 3\sin x \cos x = 0$

26) $3(\cos x+3) = 7+ \cos x$

مثال: أحُلُّ المعادلتين الآتيتين، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

a) $2 \sin x = 1$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\qquad \sin x = \frac{1}{2}$

باستعمال الآلة الحاسبة $\qquad x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

ولأنَّ الجيب يكون أيضًا موجبًا في الربع الثاني؛ فإنَّه يوجد حلٌّ آخر للمعادلة، هو:

$$180° - 30° = 150°$$

إذن، لهذه المعادلة حلّان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: $30°$، و $150°$

b) $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذه المعادلة نسبتين مثلثيتين، ويُلاحَظ أنَّ $\sin x$ قد تكرَّر في حدَّي المعادلة؛ ما يعني أنَّها تُشبِه المعادلة: $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِن تحليلها بإخراج عامل مشترك:

بإخراج العامل المشترك $\sin x$ $\qquad \sin x\,(3 \cos x - 2) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\qquad 3 \cos x - 2 = 0\ ,\ \sin x = 0$

وبذلك أتوصَّل إلى معادلتين بسيطتين، ثمَّ أحُلُّ كلَّ معادلة على حِدَة:

المعادلة الأولى $\qquad \sin x = 0$

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة $\qquad x = 0°, x = 180°$

المعادلة الثانية $\qquad 3 \cos x - 2 = 0$

بإضافة 2 إلى الطرفين $\qquad 3 \cos x = 2$

بقسمة الطرفين على 3 $\qquad \cos x = \frac{2}{3}$

تعريف معكوس جيب التمام $\qquad x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

باستعمال الآلة الحاسبة $\qquad x = 48.2°$

ولأنَّ جيب التمام يكون أيضًا موجبًا في الربع الرابع؛ فإنَّه يوجد حلٌّ آخر للمعادلة، هو:

$$x = 360° - 48.2° = 311.8°$$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $0°, 180°, 48.2°, 311.8°$

المتطابقات المثلثية 1
Trigonometric Identities 1

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

1) $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$

2) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}$

3) $\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

4) $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

5) $\frac{1+\cos x}{1+\sec x}$

6) $\frac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

7) $\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x} = 1$

8) $\ln|1+\cos\theta| + \ln|1-\cos\theta| = 2\ln|\sin\theta|$

9) $\frac{1}{1-\sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$

10) $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11) $\sin 105°$

12) $\tan \frac{19\pi}{12}$

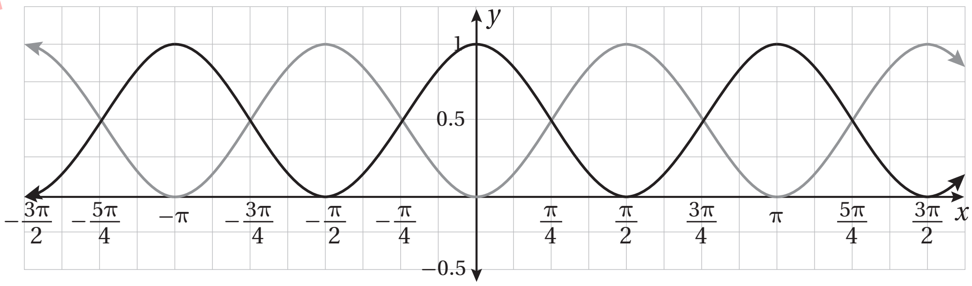
13) $\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80°$

14) إذا كان: $\sin x + \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$، فأُثبِت أنَّ: $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

15) إذا كان: $A + B = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّ: $\tan A = \frac{1-\tan B}{1+\tan B}$.

16) **تبرير:** أُثبِت صِحَّة المتطابقة: $\tan(s+t) = \frac{\sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t)}{\cos(t)\cos(s) - \sin(s)\sin(t)}$، مُبرِّرًا إجابتي.

17) **تبرير:** يُبيِّن التمثيل البياني الآتي منحنيي الاقترانين: $y = \sin^2 x$، و $y = \cos^2 x$، حيث الزوايا بالراديان. أستعمل هذا التمثيل لإثبات أنَّ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



الدرس 2

المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

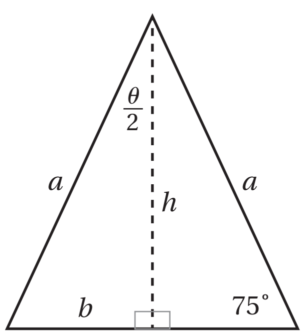
أُبسِّط كُلًّا من المتطابقات الآتية، مُستعمِلًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

1. $2\sin 3x\cos 3x$
2. $\dfrac{2\tan 7x}{1-\tan^2 7x}$
3. $\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 4x}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

4. $\dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$
5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
6. $\cos^2 37.5^\circ-\sin^2 37.5^\circ$
7. $\sin 75^\circ$
8. $\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$
9. $\tan 202.5^\circ$
10. $2\sin 52.5^\circ\sin 97.5^\circ$
11. $\sin 75^\circ\sin 15^\circ$
12. $\cos 37.5^\circ\sin 7.5^\circ$

يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما a:



13. أكتب قاعدة لمساحة المثلث بدلالة الزاوية θ.
14. أجد مساحة المثلث إذا كان طول الضلع a هو 7 cm

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15. $\cos^4 2x-\sin^4 2x=1-2\sin^2 2x$
16. $\csc 2x=\dfrac{1}{2}\csc x\sec x$
17. $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
18. $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=\cos 2\theta$
19. $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x+\sin x}=\dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$
20. $\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\tan 2x$

الدرس 3

حلُّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

1) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2) $\cot x - \csc x = \sqrt{3}$

3) $\frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x} = 2$

4) $3\cos^2 x = \sin^2 x$

5) $3\sin 3x + 4\cos 3x = 0$

6) $\sqrt{3}\tan \frac{x}{2} - 1 = 0$

7) $\cot^2 x + 5\csc x = 5$

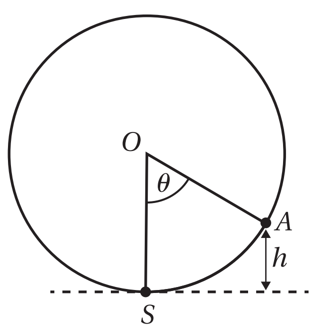
8) $4\sec^2 x - 9\sec x = -2$

9) $\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 5$

10) $\cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$

11) $4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

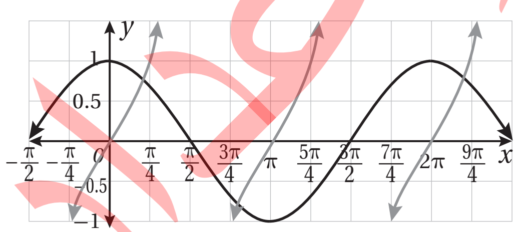
12) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$



ترفيه: يُمثِّل الشكل المجاور دولابًا دوّارًا في مدينة ألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتُمثِّل S نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن هو A، في حين تُمثِّل النقطة O مركز الدولاب. إذا دار الدولاب بزاوية θ، فإنَّ ارتفاع الراكب عن الأرض h بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 67.5 - 67.5\cos\theta$، حيث θ بالراديان:

13) أجد طول قُطْر الدولاب.

14) إذا علمْتُ أنَّ الرحلة في هذه اللعبة تُمثِّل دورة واحدة، وأنَّها تستغرق 30 دقيقة، فكم دقيقةً تَلزم للوصول إلى ارتفاع 100 متر فوق سطح الأرض؟



يُمثِّل الشكل المجاور منحنيي المعادلتين: $y = \cos x$، و $y = \tan x$:

15) كم حلًّا يوجد للمعادلة: $\cos x = \tan x$ في الفترة $[0, 2\pi)$؟

16) أجد أصغر حلٍّ موجب للمعادلة.

تبرير: إذا كان: $\sin(A+B) = 2\sin(A-B)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

17) أُثبِت أنَّ: $\tan A = 3\tan B$.

18) أَحُلُّ المعادلة: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$، حيث: $0 \le x < 2\pi$.

أختبر معلوماتي بحلِّ التدريبات أوَّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

- **إيجاد المشتقة باستعمال التعريف العام**

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العام للمشتقة:

1. $f(x) = 3x - 8$
2. $f(x) = 4x^3 + 3x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

مثال: أجد مشتقة $f(x) = \sqrt{x}$ باستعمال التعريف العام للمشتقة.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$ بالتعويض: $f(x+h) = \sqrt{x+h}\,, f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$ بضرب كلٍّ من البسط والمقام في المرافق $(\sqrt{x+h}) + \sqrt{x})$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$ بتعويض $h = 0$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ بالتبسيط

مشتقة اقتران القوَّة

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

4) $f(x) = 7x^3$

5) $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

6) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

7) $f(x) = -\dfrac{3}{x^7}$

8) $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

9) $y = \dfrac{7}{x^3} + \dfrac{3}{x} - 2$

مثال: أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2} = \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{7}{x^2}$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على x^2

$= 2x^{-1} - 7x^{-2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$f'(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة الفرق

$= -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{14}{x^3}$ تعريف الأُسِّ السالب

b) $f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$ قواعد مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$ الصورة الجذرية

مشتقة اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

10) $y=(2x-3)^6$

11) $y=\sqrt{9-3x}$

12) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$

13) $f(x)=(1-2x)^4$

14) $f(x)=(3-2x^2)^{-5}$

15) $f(x)=(x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

الصورة الأُسّية
$$y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدة السلسلة
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

باشتقاق x^2-1
$$=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\times 2x$$

الصورة الجذرية
$$=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي عند نقطة ما

إذا كان الاقتران: $f(x)=(3x+2)^2$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

16) معادلة المماس عند النقطة $(-1, 1)$.

17) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(-1, 1)$.

مثال: إذا كان الاقتران: $f(x) = x^7 - x$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الاقتران المعطى	$f(x) = x^7 - x$
مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الفرق	$f'(x) = 7x^6 - 1$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = 7(1)^6 - 1$
بالتبسيط	$= 6$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويض $x_1 = 1, y_1 = 0, m = 6$	$y - 0 = 6(x - 1)$
بالتبسيط	$y = 6x - 6$

إذن، معادلة المماس هي: $y = 6x - 6$.

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, 0)$.

ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$. ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, 0)$ هي:

$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

مشتقة اقترانات خاصة

Differentiation of Special Functions

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

2) $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

4) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

5) أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

6) أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

7) أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

8) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

9) أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم: $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

11) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2 $f(x) = -\csc x - \sin x$

3 $f(x) = \frac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

4 $f(x) = x \cot x$

5 $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6 $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7 $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x + 3}\right)$

8 $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$

9 $f(x) = (x + 1)e^x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10 $f(x)= x^2 \cos x , \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

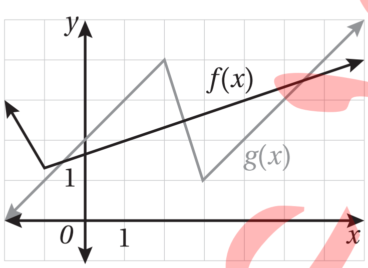
11 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12 $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$

13 $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

14 $g(x) = \frac{8(x - 2)}{e^x}$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$،
وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 $u'(1)$

16 $v'(4)$

17 إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \sec x\,(1 + x \tan x)$.

18 إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t + 15}, t \geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

19 أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.

20 أجد تسارع السيّارة عندما $t = 20$.

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

7) $f(x) = \log 2x$

8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

9) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$

11) $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \frac{\pi}{2}$

14) $f(x) = (x^2 + 2)^3,\ x = -1$

15) $f(x) = \tan 3x,\ x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16) أُثبِت أنَّ: $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17) أجد $f''(x)$.

18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون عندها ميل المماس 1

20) أُثبِت أنّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثمَّ أجد قيمة الثابت k.

21) إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22) إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ: $f''(x) = 4f(x)$.

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ: $f''(x) + 16f(x) = 0$.

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2 \theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

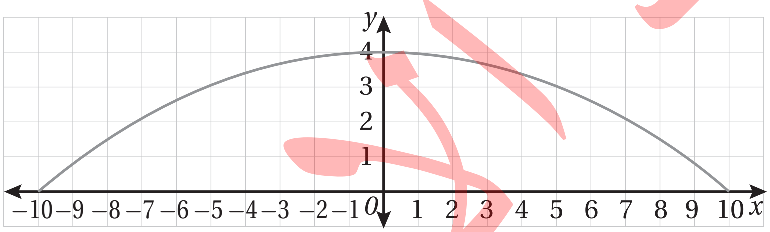
27 **سيّارة:** يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15t\,e^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيّارة تتحرَّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$

29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

مرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الطريق، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t, y = 2 + 2\cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

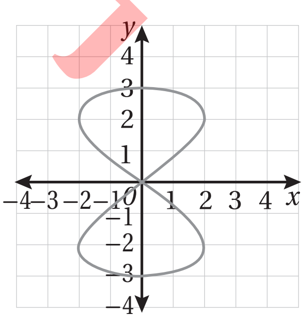
30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

32 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.



الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^3 y^3 = 144$

2 $xy = \sin(x+y)$

3 $y^4 - y^2 = 10x - 3$

4 $x \sin y - y \cos x = 1$

5 $\cot y = x - y$

6 $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$, $(2, -1)$

8 $xe^y + y \ln x = 2$, $(1, \ln 2)$

9 $4xy = 9$, $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

10 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $(1, 2)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

11 $x^2 y - 4x = 5$

12 $x^2 + y^2 = 8$

13 $y^2 = x^3$

14 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

15 أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأوّل على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون عندها ميل المماس -0.5

16 أجـد نقطتي تقاطع منحنى العلاقـة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثمَّ أُثبِت أنَّ مماســي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1 عندما يكون طول نصف قُطْره 12 cm

2 عندما يكون حجمه $36\pi\ cm^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

3 إذا مُلِئَ مدّة 33.5 s

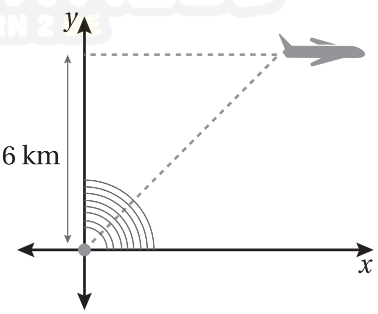
إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلٍّ منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

4 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.

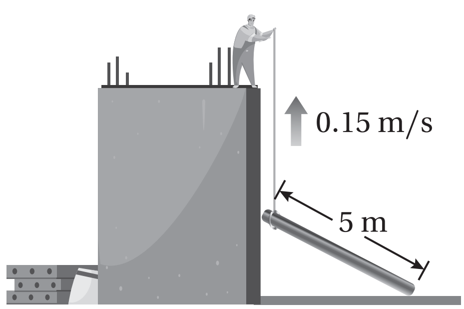
5 إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min ، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

6 يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هو 3 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$.

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

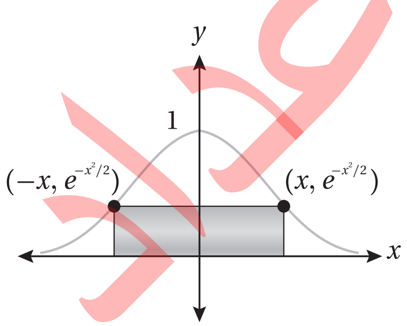


7 حلَّقت طائرة على ارتفاع 6 km، ومَرَّت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البُعْد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

8 **بناء:** يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ طرف اللوح غير المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل 0.15 m/s، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعْد 3 m من جدار المبنى؟



يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان x يتغيَّر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

10 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$ cm، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

الوحدة 4: الأعداد المُركَّبة

أختبر معلوماتي بحلِّ التدريبات أوَّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلتين الآتيتين:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2) $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$

مثال: أَحُلُّ المعادلة: $3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$

أستعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

المعادلة المعطاة	$3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$
بطرح $(5x + 24)$ من طرفي المعادلة	$3x^3 + 7x^2 - 14x - 24 = 0$
بتعويض $x = 2$	$3(2)^3 + 7(2)^2 - 14(2) - 24 \stackrel{?}{=} 0$
بالتبسيط	$0 = 0$ ✓

إذن، $x = 2$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x - 2$ هو أحد عوامل المقدار: $(3x^3 + 7x^2 - 14x - 24)$.

لإيجاد العامل الآخر، أَقسِم هذا المقدار على $(x - 2)$:

	$3x^2$	$13x$	12	
x	$3x^3$	$13x^2$	$12x$	0
-2	$-6x^2$	$-26x$	-24	

بالتحليل وَفق نتيجة القسمة	$(x-2)(3x^2 + 13x + 12) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$3x^2 + 13x + 12 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$
المعادلة التربيعية الناتجة	$3x^2 + 13x + 12 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(3x + 4)(x + 3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 3 = 0, \quad \text{or} \quad 3x + 4 = 0$
بحلِّ كلٍّ من المعادلتين	$x = -3, \quad \text{or} \quad x = \frac{-4}{3}$

إذن، يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار)، هي: $2, -3, \frac{-4}{3}$

• تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها

3 إذا كانت $A(4, 2)$، وكانت $B(2, 6)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثمَّ أجد مقداره.

4 إذا كانت $A(-2, 3)$، وكانت $B(0, 7)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثمَّ أجد مقداره.

مثال: إذا كانت $A(-5, 4)$، وكانت $B(2, 7)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثمَّ أجد مقداره.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle$	صيغة الصورة الإحداثية للمتجه
$= \langle 2-(-5), 7-4 \rangle = \langle 7, 3 \rangle$	بتعويض $A(-5, 4)$، و $B(2, 7)$، والتبسيط
$\lvert \boldsymbol{a} \rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	صيغة مقدار المتجه $\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{7^2 + 3^2}$	بتعويض $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \langle 7, 3 \rangle$
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{58}$	بالتبسيط

إذن، $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 3 \rangle$، ومقداره هو $\sqrt{58}$.

• معادلة الدائرة

5 أكتب معادلة دائرة مركزها $(-1, 8)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات.

6 أكتب معادلة دائرة مركزها $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطة $(5, 4)$.

مثال: أكتب معادلة دائرة مركزها $(3, -4)$، وتمرُّ بنقطة الأصل.

أجد طول نصف القُطْر r؛ وهو المسافة بين المركز ونقطة تمرُّ بها الدائرة:

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2}$	بتعويض $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (3, -4)$
$= \sqrt{9 + 16} = 5$	بالتبسيط
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	صيغة معادلة دائرة مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r
$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$	بتعويض $(h, k) = (3, -4)$، و $r = 5$

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1 $\sqrt{-128}$ 2 $\sqrt{-14}$ 3 $\sqrt{-81}$

4 $\sqrt{-125}$ 5 $3\sqrt{-32}$ 6 $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

7 i^{7} 8 i^{12} 9 i^{98} 10 i^{121}

11 أملأ الفراغ بما هو مُناسِب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

أُمثِّل كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية في المستوى المُركَّب المجاور:

12 5 13 -4

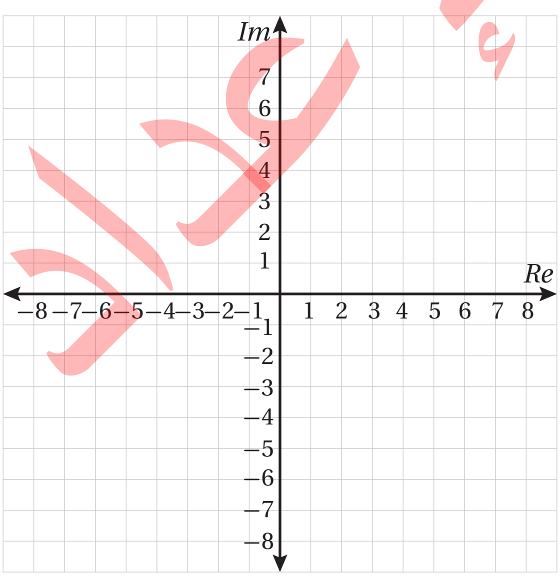
14 $4i$ 15 $-3i$

16 $4-2i$ 17 $-3+5i$

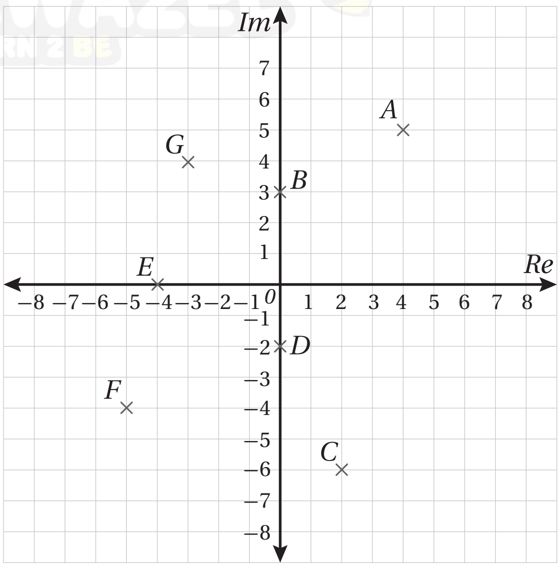
18 $-3-5i$ 19 i

20 $7-4i$ 21 $-5+4i$

22 $-7-2i$ 23 $5+5i$



الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers



24 أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة المُمثَّلة بيانيًّا في المستوى المُركَّب المجاور بالصورة القياسية، ثمَّ أجد مقياسه وسعته.

أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة ممّا يأتي صحيحة:

25 $(2x+1)+4i=7-i(y-3)$

26 $i(2x-4y)+x+3y=26+32i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة المثلثية:

27 6

28 $-5i$

29 $-2\sqrt{3}-2i$

30 $-1+i$

31 $4-2i$

32 $2+8i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة القياسية:

33 $6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

34 $12(\cos\pi+i\sin\pi)$

35 $8(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

36 $3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$

أجد مُرافِق كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثمَّ أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

37 $-1-i\sqrt{5}$

38 $9-i$

39 $2-8i$

40 $-9i$

41 12

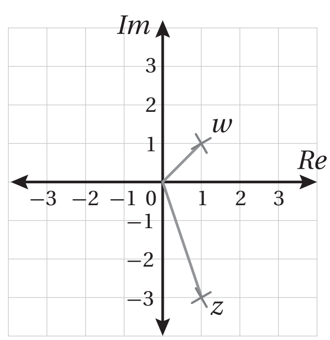
42 $i-8$

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations With Complex Numbers

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

1. $(6+8i)+(3-5i)$
2. $(-6-3i)-(-8+2i)$
3. $4i(7-3i)$
4. $(8-6i)(8+6i)$
5. $(-2+2i\sqrt{3})^3$
6. $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين z و w، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



7. أكتب كُلًّا من العددين z و w بالصورة القياسية.
8. أجد السعة والمقياس لكلٍّ من العددين المُركَّبين wz و $\frac{w}{z}$.
9. أُمثِّل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المُركَّب.

إذا كان: $z=-3+3i\sqrt{3}$، وكان: $|w|=18, \mathrm{Arg}(w)=-\frac{\pi}{6}$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

10. $\mathrm{Arg}(z)$
11. $|z|$
12. $\mathrm{Arg}(zw)$
13. $|zw|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

14. $-15+8i$
15. $-7-24i$
16. $105+88i$

17. إذا كان: $\omega = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، فأكتبه بالصورة المثلثية، مُبيِّنًا أنَّ $\omega^3=-1$.

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations With Complex Numbers

إذا كان: $z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$، وكان: $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

18 $z_1 z_2$

19 $z_1(\overline{z_1})$

20 z_2^3

21 $\frac{z_2}{z_1}$

22 إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$، فما قيمة u، علمًا بأنَّها سالبة؟

23 إذا كان: $(1+4i)$ جذرًا للمعادلة: $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

24 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $\frac{362-153i}{2-3i}$.

إذا كان: $z = 7 + 24i$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

25 أُثبِت أنَّ أحد الجذرين التربيعيين للعدد z هو $(4+3i)$، ثمَّ أجد الجذر التربيعي الآخر.

26 أُثبِت أنَّ سعة z تساوي ضعف سعة $(4+3i)$.

27 أُثبِت أنَّ مقياس z يساوي مُربَّع مقياس $(4+3i)$.

28 إذا كان: $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1 - i$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb.

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

29 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

30 $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

31 إذا كان: $(-2+i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4 + az^3 + bz^2 + 10z + 25 = 0$، فأجد قيمة a، وقيمة b، ثمَّ أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة.

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثمَّ أُمثِّله في المستوى المُركَّب، وأجد معادلته الديكارتية:

1) $|z+5i|-3=1$

2) $|z-2+8i|=13$

3) $|z+4-3i|=7$

4) $|z+3+5i|=|z-i|$

5) $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$

6) $|6-2i-z|=|z+4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثمَّ أُمثِّله في المستوى المُركَّب:

7) $\text{Arg}(z+3)=\dfrac{\pi}{4}$

8) $\text{Arg}(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3}$

9) $\text{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل متباينة ممّا يأتي:

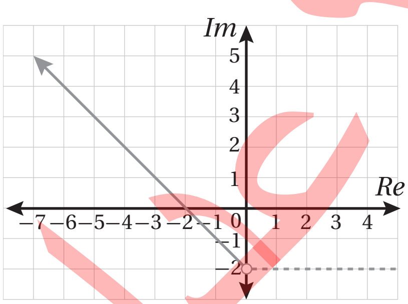
10) $0 \le \arg(z-3i) \le \dfrac{3\pi}{4}$

11) $|z-2i|>2$

12) $|z| \le 8$

13) أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-1+i| \le 1$، والمتباينة: $-\dfrac{\pi}{3} < \text{Arg}(z) < 0$

14) أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط المُمثَّلة في المستوى المُركَّب المجاور.



إذا كانت: $u=-7+7i$، وكانت: $v=7+7i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

15) أُثبِت أنَّ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين u و v هو $\dfrac{\pi}{2}$

16) أجد بصيغة: $|z-z_1|=r$ معادلة الدائرة التي تمرُّ بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تُمثِّلان العددين المُركَّبين u، و v.

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

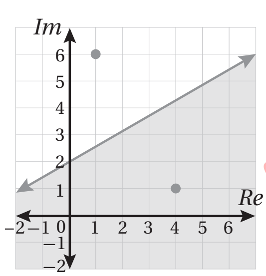
17 إذا كانت: $u = -1 - i$، فأجد u^2، ثمَّ أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z| > 2$، والمتباينة: $|z - u^2| < |z - u|$.

18 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3i| = 13$، والمعادلة: $\text{Arg}(z - 4) = \frac{\pi}{4}$، ثمَّ أجد العدد المُركَّب z الذي يُحقِّقهما معًا.

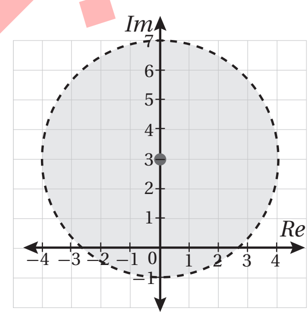
19 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3 - 2i| = 5$، والمعادلة: $|z - 6i| = |z - 7 + i|$، ثمَّ أجد العددين المُركَّبين اللذين يُحقِّقان المعادلتين معًا.

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

20



21



22 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في الشكل الآتي: