المرجع في الرياضيات المتقدم

الصف الثاني عشر الأكاديمي

كتاب الطالب

الفصل الأول/ الوحدة الثانية

(المتطابقات والمعادلات المثلثية)

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0786667808

الدرس الأول: المتطابقات المثلثية 1

مخطط الدرس الأول

المتطابقات المثلثية

- المتطابقات المثلثية الاساسية
- تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها
- إثبات صحة متطابقة مثلثية
- متطابقات المجموع والفرق

تأسيس الدرس الأول: (مهم جداً)

قوانين النسب المثلثية: (مهمة جداً حفظ)

قوانين نصف الزاوية			
قانون نصف الزاوية لجيب التمام	قانون نصف الزاوية لجيب التمام	قانون نصف الزاوية لجيب التمام	قانون نصف الزاوية للجيب
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$	$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$	$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$	$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$
$\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$	$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$	$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$

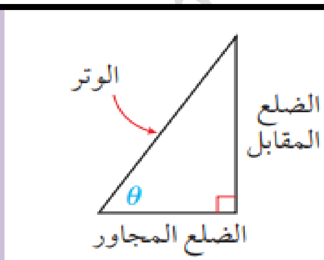
قوانين ضعف الزاوية	
قوانين جيب التمام	**قوانين الجيب**
$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
$\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$	$\sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$
$\cos^2 3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$	$\sin^2 3x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x$

متطابقات المقلوب		
$\tan x = \frac{1}{\cot x}$	$\cos x = \frac{1}{\sec x}$	$\sin x = \frac{1}{\csc x}$
$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

المتطابقات النسبية	
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

متطابقات الزاوية السالبة		
$\tan(-x) = -\tan x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$

متطابقات فيثاغورس		
القاعدة البرونزية وأخواتها	القاعدة الفضية وأخواتها	القاعدة الذهبية وأخواتها
$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$	$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$



قوانين النسب المثلثية لمثلث قائم الزاوية	
$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{r}{y}$	$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$
$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{r}{x}$	$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$
$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{x}{y}$	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x}$

10) المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

نوع المتطابقة	المتطابقات المثلثية للمجموع	المتطابقات المثلثية للفرق
متطابقة الجيب	$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$	$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
متطابقة جيب التمام	$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
متطابقة الظل	$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$	$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

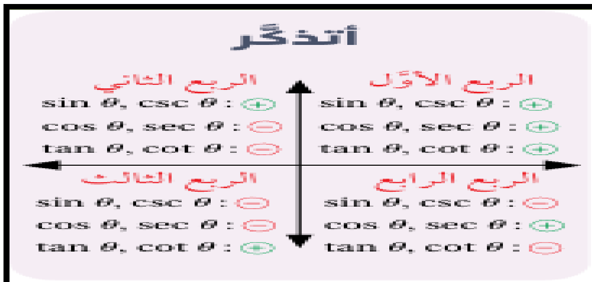
11) متطابقات الزاويتين المتتامتين:

متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$	$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$

جدول قياسات الزوايا الخاصة: (مهم حفظ)

القياس الدائري	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
القياس الستيني	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

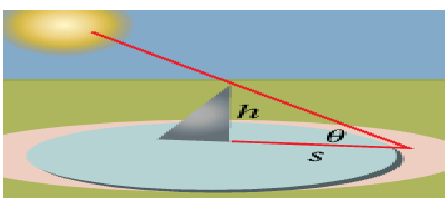
12) تحديد الإشارات في كل ربع في دائرة الوحدة :



الإشارات في للنسب الدائرية في دائرة الوحدة

الربع الرابع	الربع الثالث	الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta$ سالبة	$\sin\theta$ سالبة	$\sin\theta$ موجبة	$\sin\theta$ موجبة
$\cos\theta$ موجبة	$\cos\theta$ سالبة	$\cos\theta$ سالبة	$\cos\theta$ موجبة
$\tan\theta$ سالبة	$\tan\theta$ موجبة	$\tan\theta$ سالبة	$\tan\theta$ موجبة

مسألة اليوم: (صفحة 38)



تعد المزولة الشمسية أول ساعة اخترعها الانسان، وقد استعملها المسلمون لتحديد أوقات الصلاة، يبين الشكل المجاور مزولة شمسية ارتفاعها h وحدة، وتمثل المعادلة: $s = \frac{h\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\theta}$ طول ظل المزولة عندما يكون قياس زاوية سقوط أشعة الشمس θ ، هل يمكن كتابة معادلة طول الظل بصورة أبسط؟

حسب متطابقة الزاويتين المتتامتين $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ ومنها :

$$s = \frac{h\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}$$

حسب تحويلات الاقترانات المثلثية $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ومنها :

$$s = \frac{h\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta} = h\cot\theta$$

المتطابقات المثلثية الأساسية:

ملاحظات مهمة:

- دائرة الوحدة: دائرة نصف قطرها 1 ومركزها نقطة الأصل $(0,0)$ في نظام الإحداثيات .

- مع أي زاوية θ تخرج شعاعًا من الأصل ويلتقي بالدائرة في نقطة $P(x,y)$ ، تكون إحداثياتها هي $P(\sin x, \cos x)$

- بما أن طول الوتر $= 1$ (نصف قطر الدائرة) ، فإن الضلع الأفقي $= \cos x$ ، والضلع الرأسي $= \sin x$.

- وبحسب نظرية فيثاغورس يكون $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

مثال 1: (صفحة 39)

أجد قيمة $\sec\theta$ إذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{5} \text{ (الربع الثاني سالب)}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{4}{5}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 40)

أجد قيمة $\tan\theta$ إذا كان: $\sec\theta = -\frac{3}{2}$ ، $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

$$\sec\theta = -\frac{3}{2}\ , \quad \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta > 0$$

الزاوية في الربع الثالث إذن $\tan\theta$ موجبة .

حسب متطابقة فيثاغورس: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow \sqrt{\tan^2 x} = \sqrt{\sec^2 x - 1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\sec^2 x - 1} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{9}{4} - 1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها:

مثال 2: (صفحة 40)

أبسط كلاً من المقادير المثلثية الآتية:

1) $\sin x\cos^2 x-\sin x$

$\sin x\cos^2 x-\sin x \Rightarrow =\sin x\,(\cos^2 x-1)$

$\Rightarrow =-\sin x\,(-\cos^2 x+1) \Rightarrow =-\sin x\,(1-\cos^2 x)$

حسب متطابقة فيثاغورس: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$\Rightarrow =-\sin x\ \sin^2 x \Rightarrow =-\sin^3 x$

2) $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} \Rightarrow =\dfrac{\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$

حسب متطابقة فيثاغورس: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\Rightarrow =\dfrac{\sin x+1}{\cos x\,(1+\sin x)} \Rightarrow =\dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow =\sec x$

3) $\cos x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cot x$

متطابقات الزاويتين المتتامتين: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\cos x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cot x \Rightarrow =\ \sin x\ \cot x \Rightarrow =\ \sin x\ \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) \Rightarrow =\cos x$

أتحقق من فهمي: (صفحة 41)

أبسط كلاً من المقادير المثلثية الآتية:

1) $\sin x\,(\csc x-\sin x)$

$\sin x\,(\csc x-\sin x) \Rightarrow =\sin\ x\csc x-\sin^2 x$

$$\Rightarrow = \sin x\left(\frac{1}{\sin x}\right) - \sin^2 x \;\Rightarrow = 1 - \sin^2 x \;\Rightarrow = \cos^2 x$$

$$2)\ 1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \Rightarrow = \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)} + \frac{\sin x\,(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)} + \frac{\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)} + \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} + \frac{\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x\,(1+\sin x) + \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x\,(1+\sin x) + \sin x + 1}{\cos x\,(1+\sin x)} \;\Rightarrow = \frac{(1+\sin x)(\cos x + 1)}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x + 1}{\cos x} \;\Rightarrow = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow = 1 + \sec x$$

$$3)\ \sin x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sec x$$

$$\sin x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sec x \;\Rightarrow = \cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \;\Rightarrow = 1$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة الزاويتين المتتامتين: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

مثال 3: (صفحة 41)

أعيد كتابة $\frac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسراً.

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \;\Rightarrow = \frac{1-\sin x}{1+\sin^2 x} \;\Rightarrow = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \;\Rightarrow = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow = \sec^2 x - \tan x\ \sec x$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 41)

أعيد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسراً.

$$\frac{1}{1+\cos x} \Rightarrow = \frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x} \Rightarrow = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow = \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}\right) \Rightarrow = \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\Rightarrow = \csc^2 x - \cot x \csc x$$

إثبات صحة متطابقة مثلثية:

مثال 4: (صفحة 42)

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

$$1)\ \sin x \tan x = \sec x - \cos x$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\sin x \tan x = \sin x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \Rightarrow = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\cos x} - \cos x \Rightarrow = \sec x - \cos x \quad \checkmark$$

$$2)\ \sec x + \tan x = \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \Rightarrow = \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x} \Rightarrow = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow = \sec x + \tan x \quad \checkmark$$

$$3)\ \frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=2\cos x$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$\Rightarrow=\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}\Rightarrow=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$\Rightarrow=\frac{1+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\Rightarrow=\frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\Rightarrow=\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$\Rightarrow=\frac{2}{\sin x}\quad\Rightarrow=2\frac{1}{\sin x}\quad\Rightarrow=2\csc x\quad\checkmark$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 44)

أثبت صحة كل من المتطابقات مما يأتي:

$$1)\ \cot x\cos x=\csc x-\sin x$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\cot x\cos x\quad\Rightarrow=\frac{\cos x}{\sin x}\times\cos x\quad\Rightarrow=\frac{\cos^2 x}{\sin x}\quad\Rightarrow=\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow=\frac{1}{\sin x}-\frac{\sin^2 x}{\sin x}\Rightarrow=\frac{1}{\sin x}-\sin x\Rightarrow\boxed{=\csc x-\sin x}$$

$$2)\ \frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\quad\Rightarrow=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$

$$\Rightarrow=\frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}\quad\Rightarrow\boxed{=\frac{\sin x}{1+\cos x}}$$

3) $\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x} \Rightarrow =\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{1-\cos^2 x} \Rightarrow =\frac{2}{\sin^2 x} \Rightarrow =2\times\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \boxed{=2\csc^2 x}$$

مثال 5: (صفحة 44)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1+\cos x}{\cos x}=\frac{\tan^2 x}{\sec x-1}$

ألاحظ أن طرفي المعادلة معقدان، لذا أحول كلاً الطرفين إلى مقدار مثلثي وسيط، بدءاً بالطرف الأيسر:

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} \Rightarrow =\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x} \Rightarrow =\sec x+1$$

الآن، أحول الطرف الأيمن إلى المقدار المثلثي الوسيط $\sec x+1$:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x-1} \Rightarrow =\frac{\sec^2 x-1}{\sec x-1} \Rightarrow =\frac{(\sec x-1)(\sec x+1)}{\sec x-1}$$

$$\Rightarrow =\sec x+1 \checkmark$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.

أتحقق من فهمي: (صفحة 44)

أثبت صحة المتطابقة: $(\tan x+\cot x)^2=\sec^2 x+\csc^2 x$

$(\tan x+\cot x)^2=\sec^2 x+\csc^2 x$

ألاحظ أن طرفي المعادلة معقدان، لذا أحول كلاً الطرفين إلى مقدار مثلثي وسيط، بدءاً بالطرف الأيسر:

$$(\tan x+\cot x)^2 \Rightarrow =\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \Rightarrow =\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}\right)^2$$

$$\Rightarrow =\left(\frac{1}{\cos x\sin x}\right)^2 \Rightarrow \boxed{=\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}}$$

$$\sec^2 x+\csc^2 x \Rightarrow =\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow =\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \boxed{=\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.

متطابقات المجموع والفرق:

ملاحظة (1): متطابقات المجموع:

نوع المتطابقة	المتطابقات المثلثية للمجموع	المتطابقات المثلثية للفرق
متطابقة الجيب	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$	$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
متطابقة جيب التمام	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
متطابقة الظل	$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

مثال 6: (صفحة 45)

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

$1)\ \sin 15^\circ$

$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)$$

$$\Longrightarrow=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$\Longrightarrow=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad\Longrightarrow=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad\Longrightarrow=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$2)\ \tan\frac{5\pi}{12}$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\quad\Longrightarrow=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\,\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$\Longrightarrow=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\quad\Longrightarrow=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}\quad\Longrightarrow=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$3)\ \cos 20^\circ\cos 40^\circ-\sin 20^\circ\sin 40^\circ$

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\sin 20^\circ\sin 40^\circ\quad\Longrightarrow=\cos(20^\circ+40^\circ)$$

$$\Rightarrow = \cos(60^\circ) \Rightarrow = \frac{1}{2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 46)

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

$1)\ \cos 75^\circ$

متطابقة المجموع: $\boxed{\cos(a+b) \Rightarrow = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$

$$\cos 75^\circ \Rightarrow = \cos(45^\circ + 30^\circ) \Rightarrow = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$2)\ \tan\frac{\pi}{12}$

متطابقة الفرق: $\boxed{\tan(a-b) \Rightarrow = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}}$

$$\tan\frac{\pi}{12} \Rightarrow = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$3)\ \sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

متطابقة الفرق: $\boxed{\sin(a-b) \Rightarrow = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$

$$\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ \Rightarrow = \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 7: (صفحة 46)

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

$$1)\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow = (0)\cos x + (1)\sin x \Rightarrow = \sin x$$

$$2)\ \frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

ألاحظ أن طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\Longrightarrow=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 47)

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

$$1)\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$$

متطابقات الفرق:

$$\sin(a-b)\ \Longrightarrow\ =\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a-b)\ \Longrightarrow\ =\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x\Longrightarrow=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\Longrightarrow=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\sin x}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin x}$$

$$\Longrightarrow=\frac{(1)(\cos x)-(0)(\sin x)}{(0)(\cos x)-(1)(\sin x)}\Longrightarrow=\frac{\cos x}{\sin x}\Longrightarrow=\cot x$$

$$2)\ \frac{\tan x-1}{\tan x+1}=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

متطابقة الفرق: $\boxed{\tan(a-b)\Longrightarrow=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ \Longrightarrow=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\ \tan\frac{\pi}{4}}\Longrightarrow=\frac{\tan x-1}{1+\tan x}$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 47)

أجد قيمة كل من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة:

$$1)\ \cot\theta\ ,\ \sin\theta=\frac{1}{3}\quad ,0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

الزاوية في الربع الأول $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ، فإن جميع النسب المثلثية موجبة.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta} \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \cot\theta=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \cot\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 3 \Rightarrow \boxed{\cot\theta=2\sqrt{2}}$$

$$2)\ \sec\theta\ ,\tan\ \theta=-\frac{3}{7}\quad ,\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

الزاوية في الربع الثاني $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ، فإن $\sin\theta$ موجبة ، $\cos\theta$ سالبة ، $\tan\ \theta$ سالبة

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta=1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta=1+\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow \sec^2\theta=1+\frac{9}{49} \Rightarrow \sec^2\theta=\frac{58}{49}$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta=\frac{58}{49} \Rightarrow \sec\theta=-\sqrt{\frac{58}{49}} \Rightarrow \boxed{\sec\theta=-\frac{\sqrt{58}}{7}}$$

$3)\ \tan\theta\ ,\csc\theta = -\frac{5}{3} \quad ,\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

الزاوية في الربع الثالث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فإن $\sin\theta$ سالبة ، $\cos\theta$ سالبة ، $\tan\ \theta$ موجبة

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \implies \sin\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\implies \frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1 \implies \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} \implies \cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\implies \boxed{\cos\theta = -\frac{4}{5}}$$

$4)\ \sin\theta\ ,\sec\theta = \frac{9}{4} \quad ,\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

الزاوية في الربع الرابع $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ، فإن $\sin\theta$ سالبة ، $\cos\theta$ موجبة ، $\tan\ \theta$ سالبة

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \implies \cos\theta = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \sin^2\theta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = 1 \implies \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{81} \implies \sin\theta = -\sqrt{\frac{65}{81}} \implies \boxed{\sin\theta = -\frac{\sqrt{65}}{9}}$$

أبسط كلاً من العبارات المثلثية الآتية:

5) $\cos x \tan x$

$$\cos x \tan x \Rightarrow = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow = \sin x$$

6) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sin x}$

$$\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\Rightarrow = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \Rightarrow = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} \Rightarrow = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow = \tan x$$

7) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\csc x} + \cos^2 x$

متطابقات الزاويتين المتتامتين: $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta}$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\csc x} + \cos^2 x \Rightarrow = \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + \cos^2 x \Rightarrow = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow = 1$$

8) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow = \frac{\sin x}{\cos x} - 1 + \frac{\cos x}{\sin x} - 1 \Rightarrow = \tan x - 1 + \cot x - 1 \Rightarrow = \tan x + \cot x$$

9) $\dfrac{(\sin x + \cos\ x)^2 - 1}{\sin x \cos\ x}$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos\ x} \Rightarrow = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos\ x + \cos^2 x - 1}{\sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\sin x \cos\ x + 1 - 1}{\sin x \cos x} \Rightarrow = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} \Rightarrow = 2$$

10) $\dfrac{\sec x - \cos\ x}{\tan x}$

$$\frac{\sec x - \cos\ x}{\tan x} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos\ x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Rightarrow = \frac{\frac{1 - \cos^2\ x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\Rightarrow = \frac{1 - \cos^2\ x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{1 - \cos^2\ x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{\sin^2 x}{\sin x} \Rightarrow = \sin x$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

11) $\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

$$\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) \Rightarrow = -\cot x\ \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow = -\frac{\cos x}{\sin x} \times \cos x - \sin x \Rightarrow = \frac{-\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \Rightarrow = \frac{-\cos^2 x}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{-1}{\sin x} \Rightarrow = -\csc x$$

12) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

$$(\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow = \sin^2 x + 2\sin x + \cos x + \cos^2 x \Rightarrow = 1 + 2\sin x + \cos x$$

$$13)\ \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}\ \Longrightarrow\ =\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}\ \Longrightarrow =\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}$$

$$\Longrightarrow =\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}\times\frac{(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)}\ \Longrightarrow\ =\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$14)\ \frac{1-\sin x}{1+\sin x}=(\sec x-\tan x)^2$$

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\ \Longrightarrow =\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}$$

$$\Longrightarrow =\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2\ \Longrightarrow =\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\ \Longrightarrow = (\sec x-\tan x)^2$$

$$15)\ \sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$\sin^4 x-\cos^4 x\ \Longrightarrow\ =(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$\Longrightarrow\ =(\sin^2 x-\cos^2 x)(1)\ \Longrightarrow\ =\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$16)\ \frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}=2\sec x\ \tan x$$

$$\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\Longrightarrow =\frac{1+\sin x-1+\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$\Longrightarrow =\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\ \Longrightarrow = 2\times\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}\Longrightarrow = 2\tan x\sec x$$

$$17)\ \ln|\tan\theta|=\ln|\sin\ \theta|-\ln|\cos\theta|$$

$$\ln|\tan\theta|\Longrightarrow =\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\ \Longrightarrow =\ln\frac{|\sin x|}{|\cos x|}\ \Longrightarrow =\ln|\sin x|-\ln|\cos x|$$

18) $\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\ln|\sec\theta-\tan\theta|=0$

$\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\ln|\sec\theta-\tan\theta| \Rightarrow = \ln|\sec\theta+\tan\theta|\,|\sec\theta-\tan\theta|$

$\Rightarrow = \ln(\sec\theta+\tan\theta)\,(\sec\theta-\tan\theta) \quad \Rightarrow = \ln|\sec^2\theta-\tan^2\theta|$

$\Rightarrow = \ln 1 \;\Rightarrow = 0$

19) $\sin 165^\circ$

$\sin 165^\circ \Rightarrow = \sin(180^\circ-165^\circ) \;\Rightarrow = \sin 15^\circ \;\Rightarrow = \sin(45^\circ-30^\circ)$

$\Rightarrow = \sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ \quad \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow = \frac{\sqrt3}{2\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2} \quad \Rightarrow = \frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

20) $\tan 195^\circ$

$\tan 195^\circ \Rightarrow = \tan(195^\circ-180^\circ) \;\Rightarrow = \tan 15^\circ \;\Rightarrow = \tan(60^\circ-45^\circ)$

$\Rightarrow = \frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ} \quad \Rightarrow = \frac{\sqrt3-1}{1+\sqrt3}$

21) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right) \;\Rightarrow = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} \;\Rightarrow = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}} \quad \Rightarrow = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow = \frac{1}{\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}+\frac{1}{2\sqrt2}} \quad \Rightarrow = \frac{1}{\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}} \quad \Rightarrow = \frac{2\sqrt2}{\sqrt3+1}$

22) $\sin \frac{17\pi}{12}$

$$\sin \frac{17\pi}{12} \Longrightarrow = \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) \Longrightarrow = -\sin \frac{5\pi}{12} \Longrightarrow = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow = -\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

23) $\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18}$

$$\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \Longrightarrow = \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{18}\right)$$

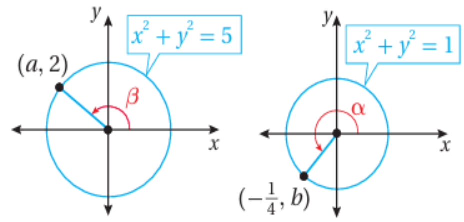
$$\Longrightarrow = \sin \frac{6\pi}{18} \Longrightarrow = \sin \frac{\pi}{3} \Longrightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

24) $\frac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 40^\circ \tan 10^\circ}$

$$\frac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 40^\circ \tan 10^\circ} \Longrightarrow = \tan(40^\circ - 10^\circ) \Longrightarrow = \tan 30^\circ \Longrightarrow = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كل من الاقترانات الآتية، علماً بأن:

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$



25) $f(\alpha + \beta)$

$a^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow a^2 + 4 = 5$ لأن النقطة في الربع الثاني

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{16}$$

$\Rightarrow b^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ لأن النقطة في الربع الثالث

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \tan\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{15}$$

$$\sin\beta = \frac{2}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{5}, \quad \tan\beta = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}} \Rightarrow \tan\alpha = -2$$

$$f(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{20} - \frac{2}{20} = \frac{\sqrt{15}-2}{20}$$

26) $g(\alpha - \beta)$

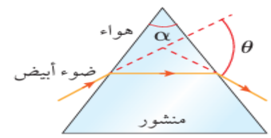
$$g(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{1-2\sqrt{15}}{20}$$

27) $h(\alpha + \beta)$

$$h(\alpha+\beta) = \tan(\alpha+\beta) \Rightarrow = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \Rightarrow = \frac{\sqrt{15}-2}{20}$$

28) منشور: يمكن قياس معامل انكسار الضوء الأبيض في المنشور باستعمال المعادلة الآتية:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$



إذا كانت $\alpha = 60^{\circ}$ ، فأثبت أن معادلة الانكسار تكتب في صورة:

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + 30^{\circ}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos 30^{\circ} + \cos\frac{\theta}{2}\cos 30^{\circ}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

29) إذا كان: $g(x) = \cos x$، فأثبت أن:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$\Rightarrow = \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h} \Rightarrow = \frac{\cos x \cosh - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sinh}{h}$$

$$\Rightarrow = -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

30) إذا كان: $\sin x\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a\sin x + b\cos x$ ، فأجد قيمة كل من: a، و b .

$$\sin x\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x\,\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\,\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b = \frac{1}{2}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

$31)\ \sin(A+B)\sin(A-B) = 2\sin A\ \cos B$

$\sin(A+B)\sin(A-B)$

$\Longrightarrow = \ \sin A\ \cos B + \cos A\ \sin B + \sin A\ \cos B - \cos A\ \sin B \Longrightarrow = 2\sin A\ \cos B$

$32)\ \sin A + \cos B = \sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right) \ \Longrightarrow = \ \sqrt{2}\ \left(\sin A\cos\frac{\pi}{4} + \cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Longrightarrow = \ \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right) \ \Longrightarrow \ = \sin A + \cos A$

$33)\ \frac{\sin(A-B)}{\sin A\cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\sin B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

$= \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B} + \frac{\sin B\cos C - \cos B\sin C}{\cos B\cos C} + \frac{\sin C\cos A - \cos C\sin A}{\cos C\cos A}$

$= \frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B} + \frac{\sin B\cos C}{\cos B\cos C} - \frac{\cos B\sin C}{\cos B\cos C} + \frac{\sin C\cos A}{\cos C\cos A} - \frac{\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$

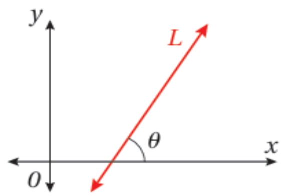
$= \tan A - \tan B + \tan B - \tan C + \tan C - \tan A = 0$

$34)\ \cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2\ x - \sin^2\ y$

$\cos(x+y)\cos(x-y) \Longrightarrow = (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y)$

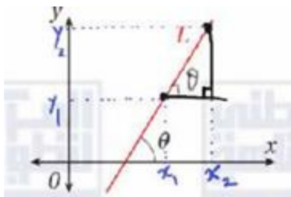
$\Longrightarrow = \cos^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\sin^2 x \ \Longrightarrow = \cos^2 x\,(1-\sin^2 y) - (1-\cos^2 y)\sin^2 x$

$\Longrightarrow = \cos^2 x - \cos^2 x\sin^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x\sin^2 x \ \Longrightarrow = \cos^2 x - \sin^2 x$



35) زاوية الميل: إذا كان A مستقيماً في المستوى الإحداثي، و θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب، فإن الزاوية θ تسمى زاوية ميل المستقيم L، أثبت أن ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$ ، حيث: $0 < \theta < \pi$.

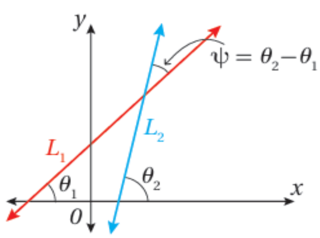
نفرض نقطتين على المستقيم L إحداثيهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ كما هو موضح بالشكل،



ميل المستقيم L يساوي: $L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وظل الزاوية θ يساوي: $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

إذن ميل المستقيم يساوي ظل زاوية ميله، أي: $m = \tan\theta$



36) إذا كان L_1 و L_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الإحداثي، وميل كل منهما m_1 و m_2 على الترتيب، وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فأستعمل النتيجة من السؤال السابق لإثبات أن:

$$\tan\psi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

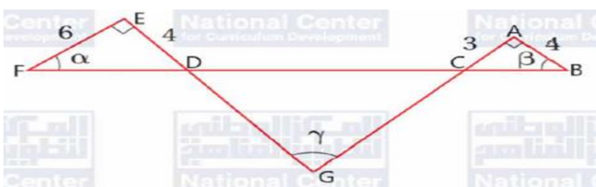
ملحوظة: الرمز ψ هو حرف يوناني يقرأ (بساي).

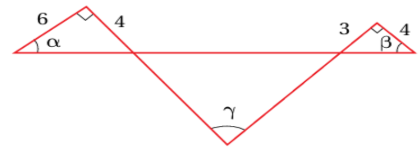
$$\psi = \theta_2 - \theta_1$$

$$\tan\psi = \tan(\theta_2 - \theta_1) \quad \Rightarrow = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} \quad \Rightarrow = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

مهارات التفكير العليا: (صفحة 49)

37) تحد: اعتماداً على الشكل الآتي، أثبت أن $\cos(\alpha-\beta)=x^2$ ، مبرراً إجابتي.





الزاوية ACB والزاوية DOG متقابلتان بالرأس، فهما متساويتان في القياس، وكذلك الزاويتان EDF و CDG ، إذن :

قياس الزاوية DOG يساوي $90^0-\beta$ وقياس الزاوية CDG يساوي $90^0-\alpha$

$$\gamma+90^0-\beta-90^0-\alpha=180^0 \quad \Rightarrow \gamma=\alpha+\beta$$

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta) \;\Rightarrow = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \;\Rightarrow = \frac{\frac{4}{6}+\frac{3}{4}}{1-\frac{4}{6}\times\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow = \frac{17}{6}$$

38) تبرير: إذا كان: $\tan\alpha=x+1$ ، و $\tan\beta=x+1$ ، فأثبت أن: $2\cos(\alpha-\beta)=x^2$ ، مبرراً إجابتي.

$$2\cot(\alpha-\beta)=\frac{2}{\tan(\alpha-\beta)} \quad \Rightarrow = \frac{2(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\big(1+(x+1)(x-1)\big)}{(x+1)-(x-1)} \quad \Rightarrow = \frac{2(1+x^2-1)}{2} \quad \Rightarrow = x^2$$

39) تبرير: أجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ، مبرراً إجابتي.

$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;\Rightarrow = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

40) اكتشف الخطأ: اكتشف الخطأ في المسألة الآتية، ثم أصححه.

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x \quad ✗$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \Rightarrow =\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$

الخطأ منذ بداية الحل، وذلك في تطبيق القانون:

الحل الصحيح:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}$$

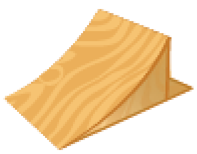
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \Rightarrow =\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$$

الدرس الثاني

المتطابقات المثلثية

مسألة اليوم: (صفحة 50)

يختلف ميل منحدرات التزلج المصممة للمنافسة باختلاف مستوى مهارة المتسابقين، فميل المنحدر للمتسابقين المحترفين هو $\tan\theta = \frac{5}{3}$ ، حيث θ الزاوية التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض، أما المتسابقون المبتدئون فتميل منحدراتهم بزاوية قياسها نصف قياس الزاوية θ ، ما ميل المنحدر للمتسابقين المبتدئين؟



ميل المنحدر للمتسابقين المحترفين هو $\tan\theta = \frac{5}{3}$

ميل المنحدر للمتسابقين المبتدئين هو $\tan\theta = \frac{\theta}{2}$

نستخدم متطابقة نصف الزاوية للظل: $\tan\frac{x}{2} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

الزاوية في الربع الأو لذلك فهي موجبة.

متطابقة فيثاغورس لإيجاد الوتر $r = \sqrt{3^2+5^2} \Rightarrow r = \sqrt{34}$

$$\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\tan\frac{x}{2} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{\sqrt{34}}}{1+\frac{3}{\sqrt{34}}}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{34}-3}{\sqrt{34}}}{\frac{\sqrt{34}+3}{\sqrt{34}}}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{\sqrt{34}+3}}$$

المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية:

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظل
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 1: (صفحة 50)

إذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

1) $\sin 2\theta$

بما ان $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وقيمة $\sin\theta$ معلومة ، إذن أجد أولاً قيمة $\cos\theta$.

الخطوة الأولى: أجد قيمة $\cos\theta$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{4}{5}$$

بما أن جيب التمام في الربع الثاني سالب، إذن $\boxed{\cos\theta = -\frac{4}{5}}$

الخطوة الثانية: أجد قيمة $\sin 2\theta$.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = -\frac{24}{25}}$$

2) $\cos 2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ متطابقة ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 \Rightarrow = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 \Rightarrow = \frac{32}{25} - 1 \Rightarrow \boxed{= \frac{7}{25}}$$

3) $\tan 2\theta$

$$\tan\theta \Rightarrow = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow = \frac{3}{5} \times -\frac{5}{4} \Rightarrow = -\frac{3}{4}$$

$$\tan 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \Rightarrow = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} \Rightarrow = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{7} \Rightarrow = -\frac{24}{7}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 52)

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ ، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

1) $\sin 2\theta$

الخطوة الأولى: أجد قيمة $\cos\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

بما أن الجيب في الربع الثاني موجب، إذن $\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}}$

الخطوة الثانية: أجد قيمة $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}}$$

2) $\cos 2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ متطابقة ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \Rightarrow = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 \Rightarrow = \frac{8}{9} - 1 \Rightarrow = \frac{8}{9} - \frac{9}{9} \Rightarrow \boxed{\cos 2\theta = -\frac{1}{9}}$$

3) $\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \Rightarrow = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}} \Rightarrow = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \times -9 \Rightarrow \boxed{\tan 2\theta = 4\sqrt{5}}$$

طريقة حل ثانية:

$$\tan\theta \Rightarrow = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{5}}{3} \times -\frac{3}{2} \Rightarrow = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \Rightarrow = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{5}{4}} \Rightarrow = \frac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow = -\sqrt{5} \times -4 \Rightarrow \boxed{\tan 2\theta = 4\sqrt{5}}$$

مثال 2: (صفحة 52)

اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$.

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta)$$

$$\Longrightarrow = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$$

$$\Longrightarrow = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$

$$\Longrightarrow = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\Longrightarrow = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$\Longrightarrow = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$$

$$\Longrightarrow = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 52)

اكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

$$\sin 3\theta \Longrightarrow = \sin(2\theta+\theta) \Longrightarrow = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$$

$$\Longrightarrow = (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$\Longrightarrow = 2\sin\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta$$

$$\Longrightarrow = 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta$$

ملاحظة1): تم استخدام متطابقة جمع الزوايا للجيب: $\boxed{\sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}$

ملاحظة2): تم استخدام متطابقة ضعف الزواية للجيب: $\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$

ملاحظة3): تم استخدام متطابقة ضعف الزواية لجيب التمام : $\boxed{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لتقليص القوة

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

مثال 3: (صفحة 53)

أعيد كتابة $\sin^2 x\ \cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام.

$$\sin^2 x\ \cos^2 x \Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \Rightarrow = \frac{1-\cos^2 2x}{4}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \Rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) \Rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \Rightarrow = \frac{1}{8} - (1-\cos 4x)$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 53)

أعيد كتابة $\sin^4 x\ \cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام.

$$\sin^4 x\ \cos^2 x \Rightarrow = (\sin^2 x)^2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{2}{8} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right) \Rightarrow = \frac{1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x}{16}$$

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال 4: (صفحة 54)

أجد قيمة $\sin 22.5^\circ$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

بما أن 22.5° هي نصف 45° فإنه يمكنني استعمال متطابقة جيب نصف الزاوية، حيث $x = 45^\circ$ ،
وبما أن ضلع انتهاء الزاوية 22.5° يقع في الربع الاول، فإنني أختار الإشارة الموجبة للمتطابقة:

$$\sin\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} \Rightarrow= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \Rightarrow= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \quad \Rightarrow = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

تم استخدام متطابقة نصف الزاوية للجيب: $\sin\frac{x}{2} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 54)

أجد قيمة $\cos\ 112.5^\circ$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

الزاوية 112.5° تقع في الربع الثاني ومنها $\cos\ \theta$ في الربع الثاني سالب

$$\cos\ 112.5^\circ = \cos\frac{225^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 225^\circ}{2}}$$

$$\Rightarrow= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \quad \Rightarrow = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

تم استخدام متطابقة نصف الزاوية لجيب التمام : $\cos\frac{x}{2} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$

مثال 5: (صفحة 54)

إذا كان: $\cos x = -\frac{3}{5}$ ، حيث: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

1) $\sin \frac{x}{2}$

بما أن $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ، فإن $\frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ ، وهذا يعني أن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني:

$$\sin \frac{x}{2} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \Rightarrow = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2) $\cos \frac{x}{2}$

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \Rightarrow = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3) $\tan \frac{x}{2}$

$$\tan \frac{x}{2} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}}$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{8}{5} \times \frac{5}{2}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{4}{1} \times \frac{1}{1}} \Rightarrow = -\sqrt{4} \Rightarrow = -2$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 55)

إذا كان: $\sin x = \frac{2}{5}$ ، حيث: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

- بما أن $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، فإن $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ ، وهذا يعني أن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الأول.

1) $\sin \frac{x}{2}$

- نقوم بإيجاد $\cos x$ من خلال القاعدة الذهبية:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

تكون $\cos x$ سالبة لأن x من السؤال تقع في الربع الثاني.

$$\Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \Rightarrow = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{21}{25}} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{5 + \sqrt{21}}{5}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{10}}$$

2) $\cos \frac{x}{2}$

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{5 - \sqrt{21}}{5}}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{10}}$$

4) $\tan \frac{x}{2}$

$$\tan \frac{x}{2} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{21}}{5}}{1 - \frac{\sqrt{21}}{5}}}$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{\frac{\frac{5 + \sqrt{21}}{5}}{\frac{5 - \sqrt{21}}{5}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{5 - \sqrt{21}}}$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

مثال 6: (صفحة 56)

أعيد كتابة $\sin 3x\ \sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق.

$$\sin 3x\ \sin 5x=\frac{1}{2}[\cos(3x-5x)-\cos(3x+5x)]$$
$$\Rightarrow=\frac{1}{2}[\cos(-2x)-\cos(8x)]\ \Rightarrow=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x$$

ملاحظة: دالة الجيب التمام $\cos x$ هي زوجية، يعني إذا غيرنا إشارة الزاوية لا تتغير القيمة.

القاعدة $\cos(x)=\cos(-x)$

أتحقق من فهمي: (صفحة 56)

أعيد كتابة $\sin 7x\ \cos x$ في صورة مجموع أو فرق.

$$\sin 7x\ \cos x=\frac{1}{2}[\sin(7x-x)+\sin(7x+x)]$$
$$\Rightarrow=\frac{1}{2}[\sin(6x)+\sin(8x)]\ \Rightarrow=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 8x$$

متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

مثال 7: (صفحة 57)

أعيد كتابة $\sin 5x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

$$\sin 5x - \sin 3x \Rightarrow = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = 2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right) \Rightarrow = 2\cos 4x \sin x$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 57)

أعيد كتابة $\cos 3x + \cos 2x$ في صورة ضرب.

$$\cos 3x + \cos 2x \Rightarrow = 2\cos\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

مثال 8: (صفحة 57)

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

1) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x\cos x} = 4\cos x - \sec x$

لاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x\cos x} \Rightarrow = \frac{\sin(x+2x)}{\sin x\cos x} \Rightarrow = \frac{\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x}{\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{\sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2\sin x\cos x)}{\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{\sin x(2\cos^2 x - 1)}{\sin x\cos x} + \frac{\cos x(2\sin x\cos x)}{\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x \Rightarrow = \frac{2\cos^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$$

$$\Rightarrow = 2\cos x - \sec x + 2\cos x \Rightarrow = 4\cos x - \sec x$$

$$2)\ \frac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\tan x$$

الاحظ أن طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيداً ، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}\ \Longrightarrow = \frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow = \frac{2\cos 2x\sin x}{2\cos x\cos x}\ \Longrightarrow = \frac{\sin x}{\cos x}\ \Longrightarrow = \tan x$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 58)

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

$$1)\ \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\sin 2x$$

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\ \Longrightarrow = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\ \Longrightarrow = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{2\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\ \Longrightarrow = \frac{2\sin x}{1}\times\frac{\cos x}{1}\ \Longrightarrow = 2\sin x\cos x$$

$$\Longrightarrow = 2\sin x\cos x\ \Longrightarrow = \sin 2x$$

$$2)\ \frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}\ \Longrightarrow = \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\ \Longrightarrow = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 58)

أجد قيمة كل من: $\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \sin 2\theta, \cos 2\theta$ للزاوية θ في الفترة المعطاة:

1) $\sin\theta = \frac{5}{13} \quad , 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{119}{169}} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - 2\left(\frac{25}{169}\right) \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - \frac{50}{169} \Rightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{119}{169}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin 2\theta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) \Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{120}{169}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1}{26}} \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{25}{26}} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}}$$

2) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad , \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Longrightarrow \;= 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 \Longrightarrow = \frac{12}{9} - 1 \Longrightarrow = \frac{3}{9} \Longrightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Longrightarrow = 2(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$$

3) $\tan\theta = \frac{1}{2} \quad , \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{6}{9}} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{9}} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Longrightarrow \;= 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 \Longrightarrow = \frac{12}{9} - 1 \Longrightarrow = \frac{3}{9} \Longrightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Longrightarrow = 2(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$$

$$4)\ \csc\theta = -\sqrt{5} \quad ,\cos\theta < 0$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{6}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \ = 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 \Rightarrow = \frac{12}{9} - 1 \Rightarrow = \frac{3}{9} \Rightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow = 2(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$$

$$5)\ \cot\theta = \frac{2}{3} \quad ,\sin\theta < 0$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{6}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{9}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \ = 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 \Rightarrow = \frac{12}{9} - 1 \Rightarrow = \frac{3}{9} \Rightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Longrightarrow = 2(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$$

6) $\sec\theta = 3 \quad , \sin\theta > 0$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{6}{9}} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{9}} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Longrightarrow = 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 \Longrightarrow = \frac{12}{9} - 1 \Longrightarrow = \frac{3}{9} \Longrightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Longrightarrow = 2(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{2}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$$

استعمل المتطابقات المثلثية لتقليص القوة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوة الأولى لجيب التمام.

7) $\sin^4 x$

$$\sin^4 x \Rightarrow (\sin^2 x)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 \Rightarrow= \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$\Rightarrow= \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \Rightarrow= \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$\Rightarrow= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right) \Rightarrow= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

8) $\cos^4 x$

$$\cos^4 x \Rightarrow (\cos^2 x)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 \Rightarrow= \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$\Rightarrow= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \Rightarrow= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$\Rightarrow= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right) \Rightarrow= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

9) $\cos^4 x\ \sin^2 x$

$$\cos^4 x\ \sin^2 x \Rightarrow= (\cos^2 x)^2 \sin^2 x \Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos^2 2x}{4}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1+\cos 4x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{\cos 4x}{8}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{2}{8}-\frac{1}{8}-\frac{\cos 4x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{8}-\frac{\cos 4x}{8}\right) \Rightarrow = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{16}\,(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x\cos 4x)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x+\cos 2x-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{16}-\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x$$

أجد قيمة كل مما يأتي:

10) $\cos 22.5^\circ$

$$\cos 22.5^\circ \Rightarrow \ = \cos\frac{45^\circ}{2} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

11) $\sin 195^\circ$

الزاوية المرجعية في الربع الثالث $195^\circ - 180^\circ = 15^\circ$

الزاوية في الربع الثالث إذن $\sin\theta$ سالبة ومنها $\theta = -15^\circ$

$$-\sin 15^\circ \Rightarrow -\sin\frac{30^\circ}{2} \quad \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} \quad \Rightarrow = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

12) $\tan \dfrac{7\pi}{8}^{\circ}$

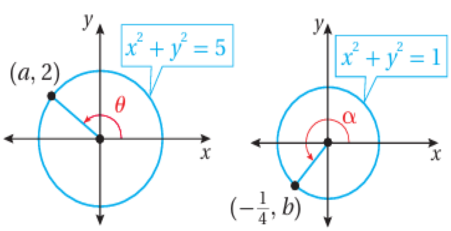
$$\tan \frac{7\pi}{8}^{\circ} \Rightarrow -\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}} \Rightarrow = -\sqrt{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow = 1-\sqrt{2}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كل من الاقترانات الآتية، علماً بأن:



$$f(x) = \sin x \;, g(x) = \cos x \;, h(x) = \tan x$$

$x^2 + y^2 = 1$, $\left(-\frac{1}{4}, b\right)$

$x^2 + y^2 = 1$, $(a, 2)$

13) $g(2\theta)$

$a^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow a^2 + 4 = 5 \Rightarrow a^2 = 5 - 4 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$ ربع ثاني

$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$ ربع ثالث

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\tan\alpha = \sqrt{15}$

$\sin\theta = \frac{2}{5}$, $\cos\theta = \frac{-1}{5}$, $\tan\theta = -2$

$$g(2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{25}\right) - 1 = -\frac{23}{25}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

14) $g(\frac{\theta}{2})$

$$g\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{4}{10}} \Rightarrow = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

15) $f(2\alpha)$

$$f(2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$h\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

أعيد كتابة كل مقدار مما يأتي في صورة مجموع أو فرق:

17) $\sin 2x \cos 3x$

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(2x+3x) + \sin(2x-3x))$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}(\sin(5x) + \sin(-x)) \Rightarrow = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$$

18) $\sin x \sin 5x$

$$\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos(x-5x) - \cos(x+5x))$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos(6x)) \Rightarrow = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة تحويل حاصل الضرب إلى الفرق

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

ملاحظة: دالة جيب التمام $\cos x$ هي زوجية، يعني إذا غيرنا إشارة الزاوية لا تتغير القيمة.

القاعدة $\cos(x) = \cos(-x)$

19) $3\cos 4x \cos 7x$

$$3\cos 4x\cos 7x \implies = \frac{3}{2}\big(\cos(4x-7x)+\cos(4x+7x)\big)$$

$$\implies = \frac{3}{2}\big(\cos(-3x)+\cos(11x)\big) \implies = \frac{3}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A-B))$$

أعيد كتابة كل مقدار مما يأتي في صورة ضرب:

20) $\sin x - \sin 4x$

$$\sin x - \sin 4x \implies = 2\cos\frac{x+4x}{2}\sin\frac{x-4x}{2} \implies = 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{-3x}{2}$$

$$\implies = -2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة تحويل الفرق إلى ضرب

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

21) $\cos 9x - \cos 2x$

$$\cos 9x - \cos 2x \implies = -2\sin\left(\frac{9x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{9x-2x}{2}\right) \implies = -2\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\sin\left(\frac{7x}{2}\right)$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة تحويل الفرق إلى ضرب

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

22) $\sin 3x + \sin 4x$

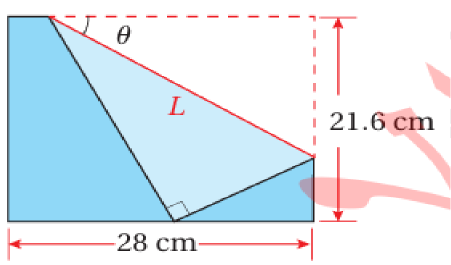
$$\sin 3x + \sin 4x \Rightarrow = 2\sin\left(\frac{3x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-4x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{-x}{2}\right) \Rightarrow = 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة تحويل المجموع إلى ضرب

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

الاوريغامي: يقوم فن الأوريغاني (فن طي الورق) الياباني على طي قطعة واحدة من الورق بصورة متكررة لصنع أشكال فنية، فعند طي الجزء الأيمن إلى الأسفل من ورقة مستطيلة، بعداها: $21.6\ cm$ و $28\ cm$، كما في الشكل المجاور، فإن طول خط الطي L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة: $L = \frac{10.8}{\sin\theta\ \cos^2\theta}$



23) أثبت أن علاقة طول خط الطي تكافئ العلاقة: $L = \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$

$$L = \frac{10.8}{\sin\theta\ \cos^2\theta} \Rightarrow = 10.8 \times \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta\ \cos\theta} \Rightarrow = \frac{10.8\sec\theta}{\sin\theta\ \cos\theta}$$

$$\Rightarrow = \frac{2}{2} \times \frac{10.8\sec\theta}{\sin\theta\ \cos\theta} \Rightarrow = \frac{21.6\sec\theta}{2\sin\theta\ \cos\theta} \Rightarrow = \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

24) أجد طول خط الطي L إذا كانت $\theta = 30^\circ$

$$L = \frac{10.8}{\sin 30^\circ \cos^2 30^\circ} \Rightarrow = \frac{10.8}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow = \frac{10.8}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} \Rightarrow = \frac{10.8}{\frac{3}{8}} \Rightarrow = \frac{86.4}{3} \Rightarrow L = 28.8\ cm$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

25) $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

$$\cos 10x \Rightarrow = \cos 2(5x) \Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

26) $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

$$\frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x) \Rightarrow = \frac{1}{2}(2\sin^2 x \cos x + 2\cos^3 x)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} \times 2 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow = \frac{1}{2} \times 2 \cos x (1) \Rightarrow = \cos x$$

ملاحظة1) : تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

ملاحظة 2) : تم استخدام متطابقة فيثاغورس $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

27) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$

$$\cos 2x + 2\cos x + 1 \Rightarrow = 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1 \Rightarrow = 2\cos^2 x + 2\cos x$$

$$\Rightarrow = 2\cos x(\cos x + 1)$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

28) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^2 x$

$$\sin 3x \Rightarrow = \sin(3x + x) \Rightarrow = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$
$$\Rightarrow = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \Rightarrow = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$$
$$\Rightarrow = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$$
$$\Rightarrow = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \Rightarrow = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$29)\ \tan 3x = \frac{3\tan\ x - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\tan 3x \Longrightarrow= \tan(2x + x) \Longrightarrow= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} \Longrightarrow= \frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\tan x}$$

$$\Longrightarrow= \frac{\frac{2\tan x + \tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}}{\frac{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} \Longrightarrow= \frac{\frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x}}{\frac{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}}$$

$$\Longrightarrow= \frac{2\tan x + \tan x\ - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} \Longrightarrow= \frac{3\tan x\ - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة جمع الزاوية للظل $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للظل $\tan 2x = \frac{\tan 2x}{1-\tan^2 x}$

$$30)\ \sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

$$\sin x \Longrightarrow= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow= 2\left(2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow= 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$

31) $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

$$\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x \Longrightarrow = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Longrightarrow = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Longrightarrow = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Longrightarrow = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Longrightarrow = 1$$

ملاحظة 1): تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

ملاحظة 2): تم استخدام قاعدة الظل $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

ملاحظة 3): تم استخدام متطابقة فيثاغورس $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

32) $\cos^2 2x = 4\cos^2 x - 4\cos^2 x + 1$

$$\cos^2 2x \Longrightarrow = (\cos 2x)^2 \Longrightarrow = (2\cos^2 x - 1)^2 \Longrightarrow = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$$

ملاحظة 1): تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

33) $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

$$\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} \Longrightarrow = \frac{2}{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)}$$

$$\Longrightarrow = \frac{2}{(\tan x + \cot x)} \Longrightarrow = \frac{2}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)} \Longrightarrow = \frac{2}{\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)}$$

$$\Longrightarrow = \frac{2}{\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)} \Longrightarrow = 2\sin x \cos x \Longrightarrow = \sin 2x$$

ملاحظة1) : تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$34)\ \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\ \Rightarrow=\tan^2\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow=\frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow=\frac{1-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)}{1+\left(\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)}\Rightarrow=\frac{1-\left(\cos x\,(0)-\sin x\,(1)\right)}{1+\left(\cos x\,(0)-\sin x\,(1)\right)}$$

$$\Rightarrow=\frac{1-(-\sin x)}{1+(-\sin x)}\ \Rightarrow=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

ملاحظة1): تم استخدام متطابقة نصف الزاوية للظل $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

ملاحظة 2): تم استخدام متطابقة مجموع الزوايا لجيب التمام $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$$35)\ \cot^2\frac{x}{2}=\frac{\sec x+1}{\sec x-1}$$

$$\cot^2\frac{x}{2}\ \Rightarrow=\frac{\sec x+1}{\sec x-1}\ \Rightarrow=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}\Rightarrow=\frac{\sec x+1}{\sec x-1}$$

ملاحظة1): تم استخدام متطابقة نصف الزاوية للظل $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$$36)\ \ln|\sin x|=\frac{1}{2}\left(\ln|1-\cos^2 2x|-\ln 2\right)$$

$$\frac{1}{2}(\ln|1-\cos 2x|-\ln 2)\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right|-\frac{\ln 2}{2}\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right|-0$$

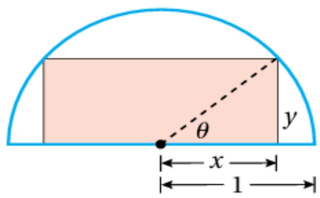
$$\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right|\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x|\quad\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln|\sin x|^2$$

$$\Rightarrow=2\times\frac{1}{2}\ln|\sin x|\Rightarrow=\ln|\sin x|$$

ملاحظة: تم استخدام قاعدة نصف الزاوية للجيب $\sin^2 2x=1-\cos 2x$

مهارات التفكير العليا: (صفحة 60)

تبرير: يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً في نصف دائرة، طول نصف قطرها وحدة واحدة:



37) أعبر باقتران بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل الموضح في الشكل المجاور، مبرراً إجابتي:

مساحة المستطيل = الطول × العرض

الطول $= 2x \;\Rightarrow\; \cos\theta = \dfrac{x}{1} = x \Rightarrow = 2\cos\theta$

العرض $= y \;\Rightarrow\; \sin\theta = \dfrac{y}{1} = y \;\Rightarrow = \sin\theta$

$A =$ الطول × العرض $\Rightarrow\; A = \sin\theta \times 2\cos\theta \Rightarrow A = 2\sin\theta\cos\theta \;\Rightarrow = \sin 2\theta$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

38) أثبت أن: $A(\theta) = \sin 2\theta$ ، ثم أبرر إجابتي:

$A(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \;\Rightarrow\; A(\theta) = \sin 2\theta$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

تحد: أثبت صحة كل مما يأتي:

39) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x \;\Rightarrow = 1 - 2(2\sin x\cos x)^2$

$\Rightarrow = 1 - 2(4\sin^2 x\cos^2 x) \Rightarrow = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

ملاحظة1) : تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

ملاحظة2) : تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$40)\ \cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$$

$$\cos^4 x \Longrightarrow = (\cos^2 x)^2 \Longrightarrow = \left(\frac{1 + 2\cos x}{2}\right)^2 \Longrightarrow = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$$

$$\Longrightarrow = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \Longrightarrow = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) \Longrightarrow = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

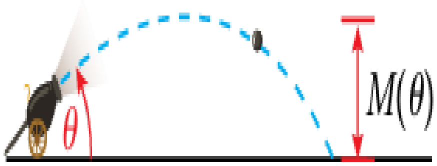
$$\Longrightarrow = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \Longrightarrow = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\Longrightarrow = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

ملاحظة1): تم استخدام متطابقة نصف الزاوية لجيب التمام $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$

حل المعادلات المثلثية

مسألة اليوم: يطلق مدفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها x قدماً لكل ثانية، وزاوية مقدارها x ، ويستعمل الاقتران: x لإيجاد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة بالأقدام، إذا افترضت أن x ، فأجد قياس الزاوية x ، علماً بان أقصى ارتفاع القذيفة هو x .



$$x(\theta)=\frac{v^2\sin^2\theta}{64}\Longrightarrow=\frac{160000\sin^2\theta}{64}\Longrightarrow=625$$

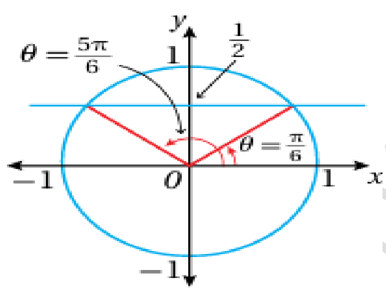
$$\sin^2\theta=\frac{1}{4}\Longrightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=30^{\circ}$$

مثال 1: (صفحة 61)

أحل كل معادلة مما يأتي:

$$\mathbf{1)}\ \sin x=\frac{1}{2}$$

الخطوة الأولى: أجد الحل ضمن دورة واحدة.



بما أن طول دورة اقتران الجيب 2π ، فإنني أبدأ أولاً بإيجاد حل المعادلة ضمن الفترة $[0,2\pi)$ وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أن $\sin x=\frac{1}{2}$ في الربعين: الأول والثاني، حيث يكون اقتران الجيب موجباً.

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0,2\pi)$ هما : $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{6}$

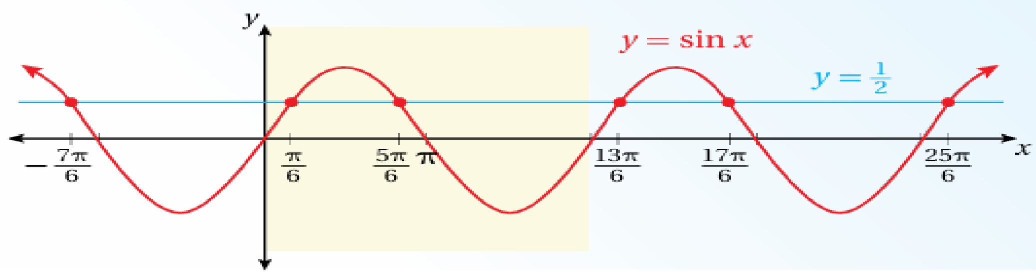
الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران الجيب تتكرر كل 2π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كل من الحلين السابقين على النحو الآتي:

حيث k عدد صحيح $$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad , \quad x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

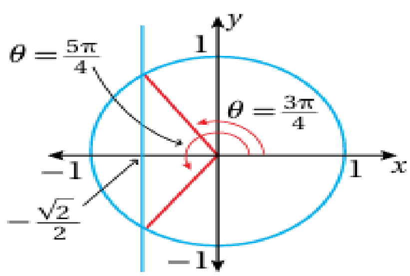
الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:



2) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الخطوة الأولى: أجد الحل ضمن دورة واحدة.



بما أن طول دورة اقتران جيب التمام 2π ، فإنني أبدأ أولاً بإيجاد حل المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$ وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أن $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ في الربعين: الثاني والثالث، حيث يكون اقتران جيب التمام سالباً.

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما : $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

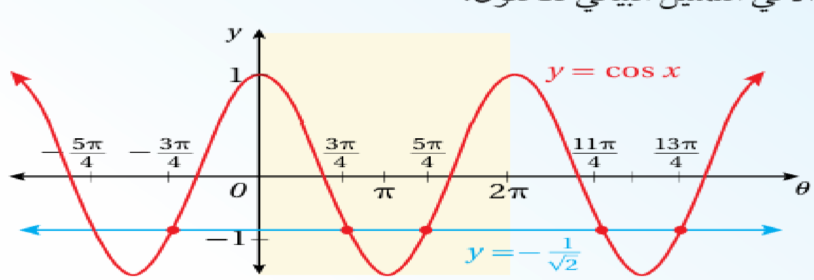
الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران جيب التمام تتكرر كل 2π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كل من الحلين السابقين على النحو الآتي:

حيث k عدد صحيح $\qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:



أتحقق من فهمي: (صفحة 63)

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- الزاوية المرجعية الموجبة هي $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = 60^\circ$.

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع.

الربع الثالث:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

الربع الرابع:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

2) $\cos x = \frac{1}{2}$

- الزاوية المرجعية الموجبة هي $\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 60^\circ$.

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع.

الربع الثالث:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

الربع الرابع:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

مثال 2: (صفحة 63)

أحل كل معادلة مما يأتي:

$1)\ \cos\ x = 0.65$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\cos\ x = 0.65 \quad \Rightarrow x = \cos^{-1}(0.65) \quad \Rightarrow\ x \approx 0.86$$

بما أن طول دورة اقتران جيب التمام هو 2π ، فإنني أبدأ أولاً بإيجاد حل المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$ ، وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أن $\cos\ x = 0.65$ في الربعين: الأول والرابع.

$$x \approx 0.86 \quad , x \approx 5.42$$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران جيب التمام تتكرر كل 2π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كل من الحلين السابقين على النحو الآتي:

$x \approx 0.86 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 5.42 + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

$2)\ \tan\ x = -2$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\tan\ x = -2 \quad \Rightarrow x = \tan^{-1}(-2) \quad \Rightarrow\ x \approx -1.11$$

بما أن طول دورة اقتران الظل تتكرر كل π ، فإنني أجد حل المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

للمعادلة حل وحيد ضمن هذه الفترة هو: $x \approx -1.11$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران الظل تتكرر كل π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحل السابق على النحو الآتي:

$x \approx -1.11 + k\pi$ حيث k عدد صحيح

أتحقق من فهمي: (صفحة 64)

أحل كل معادلة مما يأتي:

1) $\sin x = 0.23$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\sin x = 0.23 \quad \Longrightarrow x = \sin^{-1}(0.23) \quad \Longrightarrow \quad x \approx 13.4$ موجبة

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني.

في الربع الأول:

$x = 0.23$

في الربع الثاني:

$x = \pi - 0.23 \quad \Rightarrow \quad x = 3.14 - 0.23 \Longrightarrow \quad x = 2.91$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

$x = 0.23 + 2k\pi \qquad , \quad x \approx 2.91 + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

2) $\tan\ x = -10$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\tan\ x = -10 \quad \Longrightarrow x = \tan^{-1}(-10) \quad \Longrightarrow \quad x \approx -1.47$

$x = \pi - 1.47 \quad \Rightarrow \quad x = 3.14 - 1.47 \quad \Rightarrow \quad x \approx 1.67$

بما أن قيم اقتران الظل تتكرر كل π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحل السابق على النحو الآتي:

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

$x \approx 1.67 + k\pi \qquad , \quad x \approx -1.47 + k\pi$ حيث k عدد صحيح

حل معادلات مثلثية تحوي اقترانا ً مثلثيا ًواحدا ً:

مثال 3: (صفحة 65)

أحل كل معادلة مما يأتي:

$$1)\ \ 3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$$

الخطوة الأولى: افصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

$$3\sin x - 2 = 5\sin x - 1 \ \ \Rightarrow\ \ -2\sin x - 2 = -1$$

$$\Rightarrow\ \ -2\sin x = 1\ \ \Rightarrow\ \ \sin x = -\frac{1}{2}$$

الخطوة الثانية: أجد الحل ضمن دورة واحدة.

بما أن طول دورة اقتران الجيب هو 2π ، فإنني أبدأ أولاً بإيجاد حل المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$

وبالرجوع إلى دائرة الوحدة ، أجد أن $\sin x = -\frac{1}{2}$ في الربعين الثالث والرابع.

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{7\pi}{6} \qquad , \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

الخطوة الثالثة: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران الظل تتكرر كل 2π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كل من الحلين السابقين على النحو الآتي:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \qquad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث k عدد صحيح

$$2)\ \ \tan^2 x - 3 = 0$$

الخطوة الأولى: افصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

$$\tan^2 x - 3 = 0 \quad \Rightarrow\quad \tan^2 x = 3 \quad \Rightarrow\ \tan x = \pm\sqrt{3}$$

الخطوة الثانية: أجد الحل ضمن دورة واحدة.

بما أن طول دورة اقتران الظل هو π ، فإنني أجدل حل المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة هما:

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad , \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

الخطوة الثالثة: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران الظل تتكرر كل π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى كل من الحلين السابقين على النحو الآتي:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

أتحقق من فهمي: (صفحة 66)

أحل كل معادلة مما يأتي:

$$1)\ 5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$$

$$5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 5\sin x - 3\sin x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin x \quad \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ موجبة

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني.

في الربع الأول:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

في الربع الثاني:

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

$2)\ \ 2\cos^2 x - 1 = 0$

حل المعادلات المثلثية بالتحليل:

مثال 4: (صفحة 67)

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

$1)\ 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \implies (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$\implies\ 2\sin x - 1 = 0 \implies\ 2\sin x = 1 \implies \sin x = \dfrac{1}{2} \ \implies x = \dfrac{\pi}{6}\ , x = \dfrac{5\pi}{6}$

$\implies \sin x - 1 = 0 \implies\ \sin x = 1 \ \implies x = \dfrac{\pi}{2}$

إذن حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{\pi}{6}\ ,\ \ x = \frac{5\pi}{6}\ \ ,\ x = \frac{\pi}{2}$

$2)\ \ \cos x \sin x = 3\cos x$

$\cos x \sin x = 3\cos x \ \implies\ \cos x \sin x - 3\cos x = 0$

$\implies\ \cos x\,(\sin x - 3) = 0 \implies\ \cos x = 0 \implies x = \dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{3\pi}{2}$

$\sin x - 3 = 0 \implies \sin x = 3\ \ ,$ لا يوجد حل للمعادلة لأن $-1 \le \sin x \le 1$

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{\pi}{2}\ ,\ \ x = \frac{3\pi}{2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 67)

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \implies (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\implies 2\sin x + 1 = 0 \implies 2\sin x = -1 \implies \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \sin x - 1 = 0 \implies \sin x = 1$$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والرابع.

الربع الثالث:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} \implies\implies x = \frac{7\pi}{6}$$

الربع الرابع:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \implies x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{11\pi}{6}$$

- على المحور $x = \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2) $\sin x \cos x = 2\sin x$

$$\sin x \cos x = 2\sin x \implies \sin x \cos x - 2\sin x = 0 \implies \sin x(\cos x - 2) = 0$$

$\cos x - 2 = 0 \implies \cos x = 2$ ليست حلاً $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\implies \sin x = 0 \implies x = 0 \quad , \quad x = \pi$$

$$x = 0 + 2k\pi \quad , \quad x = \pi + 2k\pi$$

حل المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية:

مثال 5: (صفحة 66)

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $(0, 2\pi)$:

$1)\ 2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

$2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \implies 2(1-\sin^2 x) + 3\sin x = 0$

$\implies 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \implies -2 + 2\sin^2 x - 3\sin x = 0$

$\implies 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \implies (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$\implies 2\sin x + 1 = 0 \implies 2\sin x = -1 \implies \sin x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin x - 2 = 0 \implies \sin x = 2$ لا يوجد حل للمعادلة لأن $-1 \le \sin x \le 1$

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{7\pi}{6}\ ,\ x = \frac{11\pi}{6}$

$2)\ \sin 2x - \cos x = 0$

$\sin 2x - \cos x = 0 \implies 2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\implies \cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\implies \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$2\sin x - 1 = 0 \implies 2\sin x = 1 \implies \sin x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

إذن حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = \frac{5\pi}{6}\ ,\ x = \frac{\pi}{2}\ ,\ x = \frac{3\pi}{2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 69)

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0,2\pi)$:

1) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

$2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow 2\cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ لا يوجد حل للمعادلة لأن $-1 \le \cos x \le 1$

2) $2\sin 2x - 3\sin x = 0$

$2\sin 2x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 2(2\sin x\cos x) - 3\sin x = 0$

$\Rightarrow 4\sin x\cos x - 3\sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - 3) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$

$x = 0 + 2k\pi \quad , \quad x = \pi + 2k\pi$

مثال 6: (صفحة 69)

أحل المعادلة: $\cos x + 1 = \sin x$ في الفترة $[0,2\pi)$:

$\cos x + 1 = \sin x \Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin^2 x$

$\Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

أتحقق من فهمي: (صفحة 70)

أحل المعادلة: $\cos x - \sin x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$:

$$\cos x - \sin x = 1 \implies (\cos x - \sin x)^2 = 1^2$$

$$\implies \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x = 1 \implies 1 - 2\sin x \cos x = 1$$

$$\implies -2\sin x \cos x = 0 \implies \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0$$

x	$\cos x$	$\sin x$	$\cos x - \sin x = 1$	النتيجة
0	1	0	1	يحقق ✓
$\frac{\pi}{2}$	0	1	-1	لا يحقق ✗
π	-1	0	-1	لا يحقق ✗
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	1	يحقق ✓

$x = 0 \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2}$ بقية الحلول لا تحقق المعادلة الأصلية

حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية:

مثال 7: (صفحة 70)

أحل المعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$:

$$\cos x \sin x = -\frac{1}{2} \implies 2\cos x \sin x = -1 \implies \sin 2x = -1$$

بما أن الحل الوحيد للمعادلة $\sin\theta = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ هو: $\frac{3\pi}{2}$ ، فإن $2x = \frac{3\pi}{2}$ ، ومنه فإن

جميع حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ تكتب في صورة:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \implies x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

يمكن إيجاد حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ على النحو الآتي:

$$x = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi \;\Rightarrow\; = x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{3\pi}{4} + \pi \;\Rightarrow\; = x = \frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \;\Rightarrow\; = x = \frac{11\pi}{4}$$

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{3\pi}{4}\,,\; x = \frac{7\pi}{4}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 71)

أحل المعادلة: $2\cos\, 2x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$:

$$2\cos\, 2x = 1 \;\Rightarrow\; \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$,2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + (0)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + (1)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{7\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi \;\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + (0)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi \;\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + (1)\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{11\pi}{6}$$

حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية:

مثال 8: (صفحة 71)

أحل المعادلة: $2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$:

$$2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0 \implies 2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3} \implies \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن حلي المعادلة $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ هما: $\frac{\pi}{3}$ ، و $\frac{2\pi}{3}$ ،:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

ومنه فإن جميع حلول المعادلة: $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكتب في صورة:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

$$x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$$ حيث k عدد صحيح

ألاحظ أنه عند تعويض $k = 0$ في المعادلتين: $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \,, x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ ، فإن الناتج هو $x = \frac{4\pi}{3} \,, x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ على الترتيب، ضمن الفترة $[0, 2\pi)$، أما عند تعويض قيم أخرى فإن الناتج يكون خارج الفترة.

إذن يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي : $x = \frac{4\pi}{3} \,, \; x = \frac{2\pi}{3}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 72)

أحل المعادلة: $2\cos\frac{x}{2}-1=0$ في الفترة $[0,2\pi)$:

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0 \Rightarrow 2\cos\frac{x}{2}=1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

تكون $\cos\theta$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع.

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=2\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+4(0)\pi \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

$$x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi \Rightarrow x=\frac{10\pi}{3}+4(0)\pi \Rightarrow x=\frac{10\pi}{3}$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 72)

أحل كلاً من المعادلات الآتية لقيم x جميعها:

1) $2\sin x+3=2$

$$2\sin x+3=2 \Rightarrow 2\sin x=-1 \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{6}$

في الربع الثالث:

$$x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

في الربع الرابع:

$$x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad , \quad x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ حيث k عدد صحيح

$2)\ 1-\cos\ x=\dfrac{1}{2}$

$$1-\cos\ x=\frac{1}{2}\Longrightarrow \cos\ x=1-\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ \cos\ x=\frac{1}{2}$$

- تكون $\cos\ x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع، الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{3}$

في الربع الأول:

$$x=\frac{\pi}{3}$$

في الربع الرابع:

$$x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

$x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad , \quad x=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$ حيث k عدد صحيح

$3)\ \sin 2x=-0.3$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\sin x=-0.3\Longrightarrow x=\sin^{-1}(0.3)\quad\Longrightarrow\ x\approx -0.305$ سالبة

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع.

في الربع الثالث:

$$x=\pi+0.305\ \Longrightarrow\quad x=3.14+0.305\Longrightarrow x=3.45$$

في الربع الرابع:

$$x=2\pi-0.305\quad\Longrightarrow\quad x=6.28-0.305\ \Longrightarrow\quad x=5.98$$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

$x=3.45+2k\pi \quad , \quad x\approx 5.98+2k\pi$ حيث k عدد صحيح

$4)\ \cos x = 0.32$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\cos x = 0.32 \quad \Rightarrow x = \cos^{-1}(0.32) \quad \Rightarrow x \approx 1.247$$

الخطوة الثانية: نحدد الأرباع.

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع.

الخطوة الثالثة: نوجد الزوايا.

في الربع الأول:

$$x = 1.247$$

في الربع الرابع:

$$x = 2\pi - 1.247 \quad \Rightarrow \quad x = 6.282 - 1.247 \quad \Rightarrow \quad x \approx 5.035$$

الخطوة الرابعة: أجد جميع حلول المعادلة.

$x \approx 1.247 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 5.035 + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

$5)\ \tan x = 5$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\tan x = 5 \quad \Rightarrow x = \tan^{-1}(5) \quad \Rightarrow x \approx 1.373$$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

$x \approx 1.373 + k\pi \quad , \quad x \approx -1.373 + k\pi$ حيث k عدد صحيح

$6)\ \sec^2 x - 2 = 0$

$$\sec^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \sec^2 x = 2 \Rightarrow \sec x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$$

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع.

في الربع الأول $x = \frac{\pi}{4}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

- تكون $\cos\ x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث.

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

الخطوة الرابعة: أجد جميع حلول المعادلة.

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \ ,\ \ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ \ ,x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ \ ,x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

7) $\cot x + 1 = 0$

$\cot x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \cot x = -1 \ \Rightarrow \ \tan x = -1$

- تكون $\tan x$ سالبة في الربع الثاني والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: أجد الزاوية المرجعية.

- تكون $\tan x$ سالبة في الربع الثاني والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{4}$

بما أن طول دورة اقتران الظل تتكرر كل π ، فإنني أجد حل المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

للمعادلة حل وحيد ضمن هذه الفترة هو: $x = -\frac{\pi}{4}$

الخطوة الثانية: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أن قيم اقتران الظل تتكرر كل π وحدة، فإنني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحل السابق على النحو الآتي:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$ حيث k عدد صحيح

8) $\csc^2 x - 4 = 0$

$$\csc^2 x = 4 \implies \csc^2 x = 4 \quad \csc x = \pm 2 \implies \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{6}$

في الربع الأول $x = \frac{\pi}{6}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{5\pi}{6}$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{1}{2}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{7\pi}{6}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{11\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad , x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

9) $3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

$$3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1 \implies 3\sqrt{2}\cos x = -3 \implies \cos x = \frac{-3}{3\sqrt{2}} \implies \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- تكون $\cos x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{4}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{4} \implies x = \frac{3\pi}{4}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{4} \implies x = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

أحل كلاً من المعادلات الآتية في الفترة $(0, 2\pi)$:

10) $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \implies 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$\implies -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \implies 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\implies 2\sin^2 x - 2\sin x + \sin x - 1 = 0 \implies (2\sin^2 x - 2\sin x) + (\sin x - 1) = 0$

$\implies 2\sin x(\sin x - 1) + 1(\sin x - 1) = 0 \implies (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\implies 2\sin x + 1 = 0 \implies 2\sin x = 1 \implies \sin x = -\dfrac{1}{2}$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{6}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{7\pi}{6}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \implies x = \frac{11\pi}{6}$

$\sin x - 1 = 0 \implies \sin x = 1$

- تكون $\sin x$ موجبة وقيمتها تساوي 1 ، على المحور y الموجب والزاوية تساوي $\frac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{6} \quad , x = \dfrac{11\pi}{6} \quad , x = \dfrac{\pi}{2}$

11) $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$

$3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0 \implies 3\sin^2 x - 6\sin x - \sin x + 2 = 0$

$\implies (3\sin^2 x - 6\sin x) + (-\sin x + 2) = 0$

$\implies 3\sin x(\sin x - 2) - (\sin x - 2) = 0 \implies (3\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$

$\implies 3\sin x - 1 = 0 \implies \sin x = \dfrac{1}{3} \implies x = 0.34$ بالآلة الحاسبة

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني

في الربع الأول $x = 0.34$

في الربع الثاني $x = \pi - 0.34 \implies x = 3.14 - 0.34 \implies x = 2.8$

$x = 0.34 \quad , x = 2.8$

12) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

$2\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$

- تكون $\cos x$ تساوي صفر على المحور y الموجب والسالب والزاوية تساوي 0 ومنها :

$\cos x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2} \, , \; x = \frac{3\pi}{2}$

$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \, , \quad x = \frac{2\pi}{3} \, , \; x = \frac{4\pi}{3}$

- تكون $\cos x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$

$\cos x = -\frac{1}{2} \, , \quad x = \frac{2\pi}{3} \, , \; x = \frac{4\pi}{3}$

13) $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$

$\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0 \Rightarrow (\tan^2 x - 9)(\tan^2 x - 4) = 0$

$\Rightarrow \tan^2 x = 9 \Rightarrow \tan x = \pm 3$

$\tan x = 3 \Rightarrow x = 1.25 \quad , x = 4.39$

$\tan x = -3 \Rightarrow x = 1.89 \quad , x = 5.03$

$\Rightarrow \tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan x = \pm 2$

$\tan x = 2 \Rightarrow x = 1.11 \quad , x = 4.25$

$\tan x = -2 \Rightarrow x = 5.18 \quad , x = 2.03$

14) $\sin x + 2\sin x\cos x = 0$

$\sin x + 2\sin x\cos x = 0 \implies \sin x\,(1 + 2\cos x) = 0$

$\implies \sin x = 0 \implies x = 0 \;, x = \pi$

$\implies 1 + 2\cos x = 0 \implies \cos x = -\dfrac{1}{2}$

- تكون $\cos x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{3} \implies x = \frac{2\pi}{3}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{3} \implies x = \frac{4\pi}{3}$

15) $\tan^2 x\cos x = \tan^2 x$

$\tan^2 x\cos x = \tan^2 x \implies \tan^2 x\cos x - \tan^2 x = 0$

$\implies \tan^2 x\,(\cos x - 1) = 0$

$\tan^2 x = 0 \implies \tan x = 0 \implies\implies x = 0$

$\cos x - 1 = 0 \implies \cos x = 1 \implies x = \pi$

أحل كلاً من المعادلات الآتية في الفترة $(0, 2\pi)$:

16) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

$2\cos^2 x + \sin x = 1 \implies 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$
$\implies 2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \implies -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\implies 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \implies 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\implies 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \implies (\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x - 1 = 0 \implies \sin x = 1 \implies x = \dfrac{\pi}{2}$

$2\sin x + 1 = 0 \implies 2\sin x = -1 \implies \sin x = -\dfrac{1}{2} \implies x = \dfrac{7\pi}{6}, x = \dfrac{11\pi}{6}$

ملاحظة) تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود معامل x^2 فيها اكبر من 1:

$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \implies (\sin x - 2)(\sin x + 1) = 0$

$\implies \left(\sin x - \dfrac{2}{2}\right)\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right) = 0 \implies (\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

17) $\tan^2 x - 2\sec x = 2$

$\tan^2 x - 2\sec x = 2 \implies \tan^2 x - 2\sec x - 2 = 0$

$\implies \sec^2 x - 1 - 2\sec x - 2 = 0 \implies \sec^2 x - 2\sec x - 3 = 0$

$\implies (\sec x - 3)(\sec x + 1) = 0$

$\sec x - 3 = 0 \implies \sec x = 3 \implies \cos x = \frac{1}{3}$

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع.

في الربع الأول $x = 1.23$

في الربع الرابع $x = 2\pi - 1.23 \implies x = 6.28 - 1.23 \implies x = 5.05$

$\sec x + 1 = 0 \implies \sec x = -1 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi$

$x = 1.23 \qquad , x = 5.05 \qquad , x = \pi$

18) $\csc^2 x = \cot x + 3$

$\csc^2 x = \cot x + 3 \implies \csc^2 x - \cot x - 3 = 0$

$\implies \cot^2 x + 1 - \cot x - 3 = 0 \implies \cot^2 x - \cot x - 2 = 0$

$\implies (\cot x - 2)(\cot x + 1) = 0$

$\implies \cot x - 2 = 0 \implies \cot x = 2 \implies \tan x = \frac{1}{2}$

$\cot x + 1 = 0 \implies \cot x = -1 \implies \tan x = -1$

19) $\sin 2x = 3\cos 2x$

$\sin 2x = 3\cos 2x \implies \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 3\frac{\cos 2x}{\cos 2x} \implies \tan 2x = 3$

$\implies 2x = 1.25 \implies x_1 = 0.62$

$\implies x_2 = \frac{\pi}{2} + 0.62 \implies x = 2.19$

$\implies x_3 = \pi + 0.62 \implies x = 3.76$

$\implies x_4 = \frac{3\pi}{2} + 0.62 \implies x = 5.33$

$x = 0.6 \qquad , x = 2.19 \qquad , x = 3.76 \qquad , x = 5.33$

20) $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$\Longrightarrow 2\sin x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$

$\Longrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\Longrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Longrightarrow 2\sin x = 1 \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{6}$

في الربع الأول $x = \frac{\pi}{6}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

$2\cos x + 1 = 0 \Longrightarrow 2\cos x = -1 \Longrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

- تكون $\cos x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6}\ ,\quad x = \frac{5\pi}{6}\ ,\ x = \frac{2\pi}{3}\quad ,\ x = \frac{4\pi}{3}$

أطوار القمر: عندما يدور القمر حول الأرض، فإن الجانب المواجه للأرض في الغالب مضاء جزئياً بواسطة الشمس، تصف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقة: $F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ ، حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $0^{\circ} \le \theta \le 360$ ، أجد قياس الزاوية θ لكل طور مما يأتي:

21) القمر الجديد $(F = 0)$

$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\ ,\qquad 0^{\circ} \le \theta \le 360$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ (1 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow\ \cos\theta = 1 \Rightarrow\ \theta = 0^{\circ}$$

22) الهلال $(F = 0.25)$

$$F = 0.25\ \Rightarrow \frac{1}{2}\ (1 - \cos\theta) = 0.25 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\ (1 - \cos\theta) = 0.25\right] \times 2$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta = 0.50 \Rightarrow\ \cos\theta = 0.50 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow\ \theta = 60^{\circ}$$

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع والزاوية المرجعية تساوي 60°

في الربع الأول $x = 60^{\circ}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - 60^{\circ} \Rightarrow x = 360^{\circ} - 60^{\circ} \Rightarrow x = 300^{\circ}$

23) القمر المكتمل $(F = 1)$

$$F = 1\ \Rightarrow \frac{1}{2}\ (1 - \cos\theta) = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\ (1 - \cos\theta) = 1\right] \times 2$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta = 2 \Rightarrow\ \cos\theta = -1 \Rightarrow\ \theta = 180^{\circ}$$

24) زنبرك: تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة: $y = 4\,e^{-3t}\sin 2\pi t$ ، ما الأوقات قيم t التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $y = 0$ ؟

$$y = 4\,e^{-3t}\sin 2\pi t$$

$$y = 0 \Rightarrow 4\,e^{-3t}\sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \sin 2\pi t = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi t = 0 + 2k\pi \quad \Rightarrow t = k$$

$$2\pi t = \pi + 2k\pi\ \Rightarrow \frac{2\pi t}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{2k\pi}{2\pi} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2} + k$$

$$\Rightarrow t = k \quad , \quad t = \frac{1}{2} + k$$ حيث k عدد صحيح

أحل كلاً من المعادلات الآتية في الفترة $(0,2\pi)$:

25) $\sin 2x + \cos x = 0$

$\sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\dfrac{\pi}{6}$

في الربع الثالث $x = \pi + \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{6}$

$x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, $x = \dfrac{7\pi}{6}$, $x = \dfrac{11\pi}{6}$

26) $\tan\dfrac{x}{2} - \sin x = 0$

$\tan\dfrac{x}{2} - \sin x = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0\right] \times \cos\dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow \sin\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\dfrac{x}{2}\left(1 - 2\cos^2\dfrac{x}{2}\right) = 0$

إما $\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

أو $1 - 2\cos^2\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

27) $2\sin^2 x = 2 + \cos 2x$

$2\sin^2 x = 2 + \cos 2x \Rightarrow 2\sin^2 x = 2 + 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + 2\sin^2 x = 3 - 2\sin^2 x \Rightarrow 4\sin^2 x = 3$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

- تكون $\sin x$ موجبة في الربع الأول والربع الثاني ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الأول $x = \frac{\pi}{3}$

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

- تكون $\sin x$ سالبة في الربع الثالث والربع الرابع ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$

في الربع الرابع $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} \quad , x = \frac{2\pi}{3} \quad , x = \frac{4\pi}{3} \quad , x = \frac{5\pi}{3}$

28) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

$2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right) - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow -2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} - 2 = 0 \Rightarrow \left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos\frac{x}{2} + 2\right) = 0$

$\Rightarrow 2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

- تكون $\cos x$ موجبة في الربع الأول والربع الرابع والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الأول $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

في الربع الرابع $\frac{x}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{10\pi}{3}$

ملاحظة: تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود معامل x^2 فيها اكبر من 1:

$$2\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}-2=0 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}-4=0 \Rightarrow \left(\cos\frac{x}{2}+4\right)\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{x}{2}+\frac{4}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{x}{2}+2\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

29) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\sqrt{3}\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x=\sqrt{3}$$

- تكون $\tan x$ موجبة في الربع الأول والربع الثالث والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الأول $x=\frac{\pi}{3}$

في الربع الثالث $x=\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

30) $\cos 2x=\cos x$

$$\cos 2x=\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x-1=\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

ملاحظة: تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود معامل x^2 فيها اكبر من 1:

$$2\cos^2 x-\cos x-1 \Rightarrow \cos^2 x-\cos x-2 \Rightarrow (\cos x-2)(\cos x+1)$$

$$\Rightarrow \left(\cos x-\frac{2}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow (\cos x-1)(2\cos x+1)=0$$

إما $2\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$

- تكون $\cos x$ سالبة في الربع الثاني والربع الثالث ، والزاوية المرجعية تساوي $\frac{\pi}{3}$

في الربع الثاني $x=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

في الربع الثالث $x=\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

أو $\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=0$

$x=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{4\pi}{3}$

مهارات التفكير العليا: (صفحة 73)

تبرير: إذا كان: $\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$ ، حيث k ثابت، فأجيب عما يلي:

31) أثبت عدم وجود حل للمعادلة عندما $k > 1$ ، مبرراً إجابتي.

$$\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2 \Rightarrow \left[\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2\right] \times \tan x \Rightarrow \tan^2 x + k = 2\tan x$$

$$\tan^2 x - 2\tan x + k = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(k) \quad \Rightarrow \Delta = 4 - 4k$$

نفترض $k = 2$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 4(2) \Rightarrow \Delta = 4 - 8 \Rightarrow \Delta = -4$$

إذا كان $k > 1$ فإن المميز يكون سالباً ، والمعادلة لا حل لها.

32) أحل المعادلة عندما $k = -8$ ، حيث: $-\pi < x < \pi$ ، ثم أبرر خطوات الحل.

$$\tan^2 x - 2\tan x - 8 = 0 \Rightarrow (\tan x - 4)(\tan x + 2) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $\tan x - 4 = 0 \Rightarrow \tan x = 4 \quad \Rightarrow x = 1.33 \quad , x = -1.82$

$\Rightarrow$ أو $\tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = -2 \quad \Rightarrow x = -1.11 \quad , x = 2.03$

33) تبرير: أجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة: $\sin(\cos x) = 0$ ، ثم أبرر إجابتي:

$\sin(\cos x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0$ أو $\cos x = \pi$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

لا يوجد حل للمعادلة $\cos x = \pi$ لأن القيمة العظمى لـ $\cos x$ هي 1 .

34) تحد: أحل المعادلة: $\tan x + \cot x = 5$ ، حيث $0 \le x < 2\pi$.

$$\tan x + \cot x = 5 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} - 5 = 0 \Rightarrow \left[\tan x + \frac{1}{\tan x} - 5 = 0\right] \times \tan x$$

$$\Rightarrow \tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} \Rightarrow = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\tan x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = 4.79$$

- تكون $\tan x$ موجبة في الربع الأول والربع الثالث.

في الربع الأول $x = 1.36$

في الربع الثالث $x = \pi + 1.36 \Rightarrow x = 3.14 + 1.36 \Rightarrow x = 4.50$

$$\tan x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = 0.21$$

- تكون $\tan x$ موجبة في الربع الأول والربع الثالث.

في الربع الأول $x = 0.21$

في الربع الثالث $x = \pi + 0.21 \Rightarrow x = 3.14 + 0.21 \Rightarrow x = 3.35$

$x = 1.36 \quad ,x = 4.50 \quad ,x = 0.21 \quad ,x = 3.35$

اختبار نهاية الوحدة: (صفحة 74)

1) إذا كان $\cot\theta = 1$ ، فإن $\tan\theta$ تساوي:

$a) -1$ $\boxed{b)\ 1}$ $c)\ 0$ $d)\ 3$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta = 1$$

2) إذا كان $\cos x = -0.45$ ، فإن قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ هي:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\theta = -0.45$$

$a) -0.55$ $\boxed{b)\ -0.45}$ $c)\ 0.45$ $d)\ 0.55$

3) المعادلة غير الصحيحية مما يأتي هي:

$a)\ \tan(-x) = -\tan x$ $b)\ \tan(-x) = \dfrac{1}{\cot(-x)}$

$c)\ \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$ $\boxed{d)\ \tan(-x) + 1 = \sec(-x)}$

4) أحد الآتية مكافئ للمقدار: $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} \times \tan x$.

$$\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} \times \tan x \Longrightarrow = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow = \cot x$$

$a)\ \tan x$ $b)\ \sin x$ $\boxed{c)\ \cot x}$ $d)\ \cos x$

5) أحد الآتية لا يكافئ $\cos x$ ، حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\tan x \csc x \Longrightarrow = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x} \Longrightarrow = \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow = \sec x$$

$a)\ \dfrac{\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ $b)\ \cot x \sin x$

$c)\ \dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ $\boxed{d)\ \tan x \csc x}$

6) أحد الآتية يكافئ: $\sin x + \cot x \ \cos x$:

$$\sin x + \cot x \ \cos x \ \Rightarrow = \sin x + \frac{\cos x}{\sin \ x} \cos x \Rightarrow = \sin x + \left(\frac{\cos x}{\sin \ x}\right) \cos x$$

$$\Rightarrow = \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin \ x} \ \Rightarrow = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin \ x} \ \Rightarrow \ = \frac{1}{\sin \ x}$$

$a)\ 2 \ \sin x$ $\boxed{b)\ \frac{1}{\sin x}}$ $c)\ \cos^2 x$ $d)\ \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}$

7) أحد الآتية لا يعد حلاً للمعادلة: $\sin x + \cos x \ \tan^2 x = 0$

$a)\ \frac{3\pi}{4}$ $b)\ \frac{7\pi}{4}$ $c)\ 2\pi$ $\boxed{d)\ \frac{5\pi}{2}}$

$$\sin x + \cos x \ \tan^2 x = 0 \ \Rightarrow \ \sin x + \cos x \ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow \ \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0 \ \Rightarrow \frac{\cos x \sin x + \sin^2 x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \,(\cos x + \sin x)}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x \,(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\boxed{\sin x = 0} \quad \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \ \sin x = -\cos x \Rightarrow \boxed{\tan x = -1}$$

8) أحد الآتية يعد حلاً للمعادلة: $2 \cos x = 1$

$$2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

للتحقق من الخيارات:

1) يقبل القسمة على المقام بدون باقي.

2) العدد الناتج من القسمة يجب أن يكون زوجي حتى يهمل.

$$x = \frac{13\pi}{3} \ \Rightarrow x = \frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow \ x = 4\pi + \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow \ \ x = \frac{\pi}{3}$$

$a)\ \frac{8\pi}{3}$ $\boxed{b)\ \frac{13\pi}{3}}$ $c)\ \frac{10\pi}{3}$ $d)\ \frac{15\pi}{3}$

9) أحد الآتية مكافئ للمقدار: $\frac{\cos x(\cot^2 x+1)}{\csc x}$:

$$\frac{\cos x\,(\cot^2 x+1)}{\csc x} \Longrightarrow = \frac{\cos x\,(\csc^2 x)}{\csc x} \quad \Leftrightarrow \text{متطابقة}\ \ \csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

$$\Longrightarrow = \cos x\ \csc x \ \Longrightarrow = \cos x\ \frac{1}{\sin x} \ \Longrightarrow = \frac{\cos x}{\sin x} \ \Longrightarrow = \cot x$$

$a)\ \tan x$ $\quad$ $\boxed{b)\ \cot x}$ $\quad$ c) $\sec x$ $\quad$ d) $\csc x$

10) أحد المقادير الآتية يمكن استعماله لتكوين متطابقة مع المقدار $\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}$ حيث: $\tan x \neq 1$:

$$\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} \Longrightarrow= \frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$$

$$\Longrightarrow= \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \Longrightarrow = \frac{1}{\sin x} \Longrightarrow = \csc x$$

$a)\ \sin x$ $\quad$ b) $\cos x$ $\quad$ c) $\tan x$ $\quad$ $\boxed{d)\ \csc x}$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11) $3\cos 37.5^\circ \sin 37.5^\circ$

$$3\cos 37.5^\circ \sin 37.5^\circ \Longrightarrow = 3\times\frac{1}{2}\sin(2\times 37.5^\circ) \Longrightarrow = \frac{3}{2}\sin(75^\circ)$$

$$\Longrightarrow = \frac{3}{2}\sin(45^\circ+30^\circ) \Longrightarrow = \frac{3}{2}(\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ)$$

$$\Longrightarrow = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8}$$

$12)\ \cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$

$$\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12} \Longrightarrow= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow= 2\cos\left(\frac{\frac{6\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{-\frac{4\pi}{12}}{2}\right) \Longrightarrow= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Longrightarrow= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

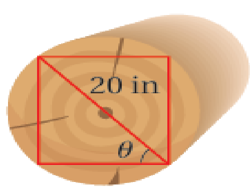
$13)\ \cos 255^{\circ}-\cos 195^{\circ}$

$$\cos 255^{\circ}-\cos 195^{\circ} \Longrightarrow=-2\sin\left(\frac{255^{\circ}+195^{\circ}}{2}\right)\sin\left(\frac{255^{\circ}-195^{\circ}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow=-2\sin(225^{\circ})\sin(30^{\circ}) \Longrightarrow=-2\sin(225^{\circ})\sin(30^{\circ})$$

$$\Longrightarrow=-2\times-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} \Longrightarrow=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

14) عارضة خشبية: يراد قص قطعة خشبية على شكل منشور قاعدته مستطيلة من قطعة خشب على شكل أسطوانة، طول قطرها $20\ in$ كما هو مبين في الشكل المجاور، أثبت أن يمكن تمثيل مساحة المقطع العرضي للقطعة الخشبية باستعمال العلاقة: $A(\theta)=200\sin 2\theta$



- نجد أبعاد المستطيل داخل الدائرة:

$$\sin\theta=\frac{y}{20} \Longrightarrow y=20\ \sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{x}{20} \Longrightarrow x=20\ \cos\theta$$

- مساحة المستطيل داخل الدائرة:

$$A(\theta)=x.y \Longrightarrow A(\theta)=(20\ \cos\theta)(20\ \sin\theta) \Longrightarrow A(\theta)=400\sin\theta\ \cos\theta$$

$$\Longrightarrow A(\theta)=200(2\sin\theta\ \cos\theta) \Longrightarrow A(\theta)\ =200\sin 2\theta$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

$$15)\quad \tan y=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$$\tan y=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} \Rightarrow \tan y=\frac{2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan y=\frac{2\cos x\ \sin y}{2\cos x\cos y}=\tan y$$

$$16)\quad 4(\sin^6 x+\cos^6 x)=4-3\sin^2 2x$$

$$17)\quad \ln|\cos x|=\frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x|-\ln 2)$$

$$\frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x|-\ln 2)\quad \Rightarrow=\frac{1}{2}\ln\frac{|1+\cos 2x|}{2}$$

$$\Rightarrow=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\cos^2 x}{2}\right| \Rightarrow=\frac{1}{2}\ln|\cos^2 x| \quad \Rightarrow=\frac{1}{2}\times 2\ln|\cos x| \Rightarrow=\ln|\cos x|$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$$\ln(a^2)=2\ln|a|$$

$$18)\quad \sec 2x=\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x}$$

$$\sec 2x=\frac{1}{\cos 2x} \Rightarrow=\frac{1}{2\cos^2 x-1} \Rightarrow=\frac{1}{2\cos^2 x-1}\times\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}} \Rightarrow=\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x}$$

$$19)\quad \tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$$

$$\csc x - \cot x \Rightarrow = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{1-\cos x}{\sin x} \Rightarrow = \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow = \tan\frac{x}{2}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة نصف الزاوية $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

20) إذا كانت θ زاوية حادة، وكان $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ، فأثبت أن: $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$$\cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{16}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{3}{5}}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow = \cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow = \frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow = \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}} \Rightarrow = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow = \frac{1}{5\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

21) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \sin^2 x$

$$\frac{\sec x - \cos x}{\sec x} \Longrightarrow = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{1}{\cos x}} \Longrightarrow = \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} \Longrightarrow = 1 - \cos^2 x \Longrightarrow = \sin^2 x$$

22) $(\sin x + \cos x)^4 = (1 + 2\sin x \cos x)^2$

$$(\sin x + \cos x)^4 \Longrightarrow = ((\sin x + \cos x)^2)^2$$

$$\Longrightarrow = (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)^2 \Longrightarrow = (1 + 2\sin x \cos x)^2$$

23) $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

$$\frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \Longrightarrow = \frac{\frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\tan y} - 1}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} \Longrightarrow = \frac{\frac{1}{\tan x \tan y} - \frac{\tan x \tan y}{\tan x \tan y}}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} \Longrightarrow = \frac{\frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x \tan y}}{\frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} \Longrightarrow = \frac{1}{\tan(x+y)} \Longrightarrow = \cot(x+y)$$

تم استخدام متطابقة مجموع زاويتين الظل $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

24) $\dfrac{\sin x \sec x}{\tan x} = 1$

$$\frac{\sin x \sec x}{\tan x} \Longrightarrow = \frac{\sin x \times \frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Longrightarrow = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Longrightarrow = \frac{\sin x}{\sin x} \Longrightarrow = 1$$

25) $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

$$\ln|\sec\theta| \Longrightarrow = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| \Longrightarrow = \ln|1| - \ln|\cos x| \Longrightarrow = 0 - \ln|\cos x| \Longrightarrow = -\ln|\cos x|$$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

26) $\tan(-15^\circ)$

$$\tan(-15^\circ) \Rightarrow = -\tan 15^\circ \Rightarrow = -\tan\frac{1}{2}(30^\circ) \Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow = -2+\sqrt{3}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة نصف الزاوية $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

27) $\sin\frac{7\pi}{12}$

$$\sin\frac{7\pi}{12} \Rightarrow = \sin\frac{1}{2}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} \Rightarrow = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة نصف الزاوية للجيب $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

ملاحظة: الزاوية تساوي (210°) في الربع الثالث سالبة $\cos\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow = \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

28) $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

$$= \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Rightarrow = \tan(20^\circ + 25^\circ) \Rightarrow = \tan 45^\circ \Rightarrow = 1$$

تم استخدام متطابقة مجموع زاويتين الظل $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$

29) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

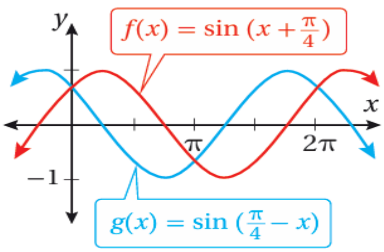
$$\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} \Rightarrow =\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow =\cos\pi \Rightarrow =-1$$

تم استخدام متطابقة مجموع زاويتين جيب التمام $\cos(x+y)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

المعتصم، المتطابقة اللي استخدمناها هنا هي متطابقة مجموع الزوايا للجيب التمام

$$\boxed{\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

30) أحل المعادلة الآتية، وأستعين بالشكل التالي في عملية الحل: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$، حيث $0\le x\le 2\pi$



الزاويتان متطابقتان بالنسبة إلى $\frac{\pi}{2}$: $A=B+2k\pi$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$x+\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{4}-x+2k\pi \Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi$$

$k=0 \Rightarrow x=(0)\pi \Rightarrow x=0$

$k=1 \Rightarrow x=(1)\pi \Rightarrow x=\pi$

$k=2 \Rightarrow x=(2)\pi \Rightarrow x=2\pi$

$k=3 \Rightarrow x=(3)\pi \Rightarrow x=3\pi$ خارج المجال

حلول هذه المعادلة هي الإحداثيات لنقاط تقاطع منحني الاقترانين في الشكل المرفق

$x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$

تم استخدام متطابقة تساوي الجيوب $\sin A=\sin B$ عند زاويتين مختلفتين $A=B+2k\pi$

أبسط كلاً من المقادير الآتية، مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

31) $\cos^2 5x - \sin^2 5x$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x \Rightarrow = \cos 2(5x) \Rightarrow = \cos 10x$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

32) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Rightarrow = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow = \sin x$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta$

33) $\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{2}}$

$$\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{2}} \Rightarrow = \sin\frac{1}{2}(8x) \Rightarrow = \sin 4x$$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة نصف الزاوية للجيب $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

أحل كلاً من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

34) $4\sin x - 3 = 0$

$$4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow = 4\sin x = 3 \Rightarrow = \sin x = \frac{3}{4} = 0.75$$

الجيب موجب إذن الزاوية في الربع الأول والربع الثاني

الربع الأول $\Rightarrow \sin^{-1} 0.75 \approx 0.85 \Rightarrow x \approx 0.85$

الربع الثاني $\Rightarrow \pi - 0.85 = 2.29 \Rightarrow x \approx 2.29$

$35)\ \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=3$

$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=3 \Rightarrow 1-\cos x=3(1+\cos x) \Rightarrow 1-\cos x=3+3\cos x$

$\Rightarrow 4\cos x=-2 \Rightarrow \cos x=\dfrac{-2}{4} \Rightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}$

الزاوية المرجعية $\cos\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^{\circ} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$

جيب التمام سالب إذن الزاوية في الربع الثاني والربع الثالث

الربع الثاني $\Rightarrow =\pi-\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}$

الربع الثالث $\Rightarrow \pi+\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x=\dfrac{4\pi}{3}$

$36)\ \cos x\sin x-\sin x=0$

$\cos x\sin x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(\cos x-1)=0$

إما $\sin x=0 \Rightarrow x=0$

ملاحظة: $x=2\pi$ ليست من ضمن الحل لأن الفترة مفتوحة من جهتها كما ورد في السؤال الفترة $[0,2\pi)$

الفترة المغلقة [ ] أن الحدود مشمولة ضمن الفترة.

الفترة المفتوحة( ) تعني أن الحدود غير مشمول ضمن الفترة.

أو $\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=\pi$

$37)\ \sin x-2\sin^2 x=0$

$\sin x-2\sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x(1-2\sin x)=0$

إما $\sin x=0 \Rightarrow x=0 \ ,\ x=\pi$

أو $1-2\sin x=0 \Rightarrow 2\sin x=1 \Rightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}\ ,x=\dfrac{5\pi}{6}$

38) $\sin x - \cos x - \tan x = -1$

$\sin x - \cos x - \tan x = -1 \implies \sin x - \cos x - \tan x + 1 = 0$

$\implies \sin x - \cos x - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0 \implies \cos x \sin x - \cos^2 x - \sin x + \cos x = 0$

$\implies (\cos x \sin x - \sin x) + \left(-\cos^2 x + \cos x\right) = 0 \implies \sin x\,(\cos x - 1) - \cos x\,(\cos x - 1) = 0$

$\implies (\cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$

إما $\cos x = 1 \implies x = 0$

أو $\sin x - \cos x = 0 \implies \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos x} \implies \tan x = 1 \implies x = \dfrac{\pi}{4}\ , x = \dfrac{5\pi}{4}$

$x = 0 \quad , \quad x = \dfrac{\pi}{4} \quad , x = \dfrac{5\pi}{4}$

39) $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2} \implies (\sin x - \cos x)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \implies = (\sin x - \cos x)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\implies = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \implies = 1 - 2\sin x \cos x = \dfrac{1}{4}$

$\implies = 1 - \sin 2x = \dfrac{1}{4} \implies = \sin 2x = 1 - \dfrac{1}{4} \implies = \sin 2x = \dfrac{3}{4}$

$2x = 0.85 + 2k\pi \quad , 2x = 2.29 + 2k\pi \implies x = 3.57$

$x = 0.425 + k\pi \quad , x = 1.145 + k\pi \implies x = 1.15$

ملاحظة: تم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للجيب $\sin 2\theta = 2\sin 2\theta \cos\theta$

40) $\tan 3x + 1 = \sec 3x$

$\tan 3x + 1 = \sec 3x \implies (\tan 3x + 1)^2 = \sec^2 3x$

$\implies \tan^2 3x + 2\tan 3x + 1 = \sec^2 3x \implies \sec^2 3x + 2\tan 3x + 1 = \sec^2 3x$

$\implies \sec^2 3x + 2\tan 3x = \sec^2 3x \implies 2\tan 3x = 0 \implies \tan 3x = 0$

$\implies 3x = k\pi \implies x = \dfrac{k\pi}{3} \implies x = 0\ , x = \dfrac{2\pi}{3}\ , x = \dfrac{4\pi}{3}$