Abdulkadir Hasanat

0785318877

الرياضيات 2022

الصف الثاني الثانوي

علمي – أدبي

مراجعة تأسيسية للتوجيهي 2005

إعداد الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 77 88 531 078

2 ∞ & >

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

1

أهم المفاهيم الأساسية قبل التوجيهي

1) الأعداد السالبة والموجبة

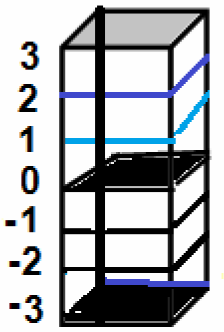
أ) الجمع والطرح : عند جمع عددين نعتبر الموجب (رصيد) أو (ربح) والسالب (دين) أو (خسارة)

مثال : (-8) + (+3) : تعني إذا كان عليك دين مقداره (8) دنانير وحصلت على رصيد لتسديد الدين مقداره (3) دنانير ، بعد التسديد ما هو وضعك المالي ؟

الجواب :يبقى عليك (5) دنانير دين ، إذاً الناتج (- 5)

أو :(- 8) + (+3) :قمتَ بعمليتين تجاريتين خسرتَ في الأولى (8) دنانير وربحتَ في الثانية (3) دنانير ماذا حدث لرأسمالك الأصلي ؟ زادَ أم نقص ؟

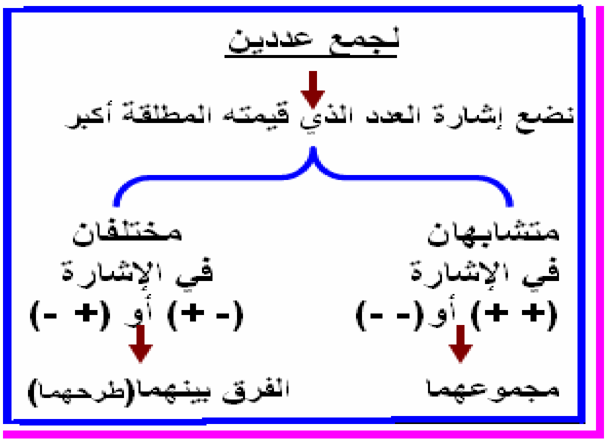
الجواب :نقصَ بمقدار (5) دنانير، إذاً الناتج (-5)



* * * كذلك يمكن أن تعتبر الموجب صعود والسالب نزول: (-3) + (+5) :
أنت في الطابق الثالث تحت الأرض (-3) وصعدت خمس طوابق ، فإلى أي طابق تصل ؟
(الطابق الثاني فوق الأرض (+2))

أيضاً : (-2) + (-3) : أنت في الطابق الثاني تحت الأرض ونزلت ثلاث طوابق فتصبح في الطابق الخامس تحت الأرض (-5)

كما يمكن استخدام القاعدة التالية:



مع ملاحظة أن (العدد الذي قيمته المطلقة أكبر) تعني العدد الأكبر بعد حذف الإشارات

مثلاً :(-5) قيمته المطلقة أكبر من (+3) لأن (5) أكبر من (3)

(-7) قيمته المطلقة أكبر من (-4) لأن (7) أكبر من (4)

مثال :

1) (-5) + (+3)= -2 أو (-5+3=-2) 5 أكبر من 3 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (-2)

2) (- 4) + (-2)=-6 أو (-4-2=-6) 4 أكبر من 2 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً ولأنهما متشابهان في الإشارة نجد المجموع (نجمع) فيكون الجواب (-6)

3) (-2) + (+6)=+4 أو (-2+6=+4) 6 أكبر من 2 وإشارتها موجبة لذلك الناتج سيكون موجباً ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (+4)

ملاحظة(1): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العدد فهو موجب : 6 + = 6

فعندما لا يكون هناك أقواس(وهذا هو الأغلب مثل : 7 +3–) نعتبر العملية التي أمام العدد هي إشارته ، فهنا 3 سالبة و 7 موجبة ، والأكبر موجب ⇐ الناتج موجب : مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح وبالتالي الناتج (+4)

2

ملاحظة(2): إذا التقت إشارتا سالب فنحولهما إلى موجب ، مثلا : 3 +=5 +2 – = 5 – – 2 –

أما إذا التقت إشارتا موجب وسالب(+ -) أو العكس (- +) فنحولهما إلى سالب

$+\ -$ ، $-\ +$ ⇐ $-$ | $-\ -$ ⇐ $+$

إشارتان مختلفتان دائماً سالب
سالب سالب تعطي موجب

مثلا: (على أساس أن 9 سالبة و 3 موجبة ⇐ نطرح)   1) -9+3=-6

(على أساس أن 7 سالبة و 2 سالبة ⇐ نجمع)   2) -7-2=-9

4) موجبة و7 سالبة وهي الأكبر ، مختلفان في الإشارة ، إذاً نطرح)   3) 4 – 7 = - 3

(كلاهما سالب ⇐ نجمع)   4) -5x – 2x= -7x

ملاحظة(3):إذا لم يكن هناك إشارة أمام العددين وكان الجواب (لا يجوز)- أي دون التعامل مع السالب-

فنقوم بتبديل مكاني العددين ونضع إشارة سالب أمام الناتج : a – b = –(b – a)

مثلاً : 2– = (6 – 8)–= 8 – 6 ، كذلك ، 3 – = 10 – 7

تمارين

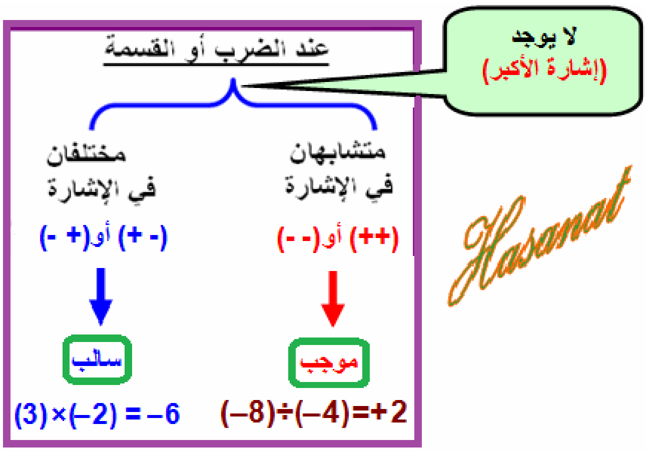
(a) 2 − 3=   (b) − 3 − 5=   (c) − 4 + 9=   (d) 1 − 5 =

(e) − 5 − 7 =   (f) − 6 + 2 =   (g) 8 − 11 =   (h) 2 − 10=

(i) −2 + 4=   (j) −3 + 9 =   (k) −7 + 10=   (l) −6 + 1=

ب) الضرب والقسمة:عند الضرب أو القسمة لا يوجد أكبر أو أصغر

(متشابهان في الإشارة الناتج موجب) ، (مختلفان في الإشارة الناتج سالب)



مثال : 1) (-5) x (+3)= -15

2) (-4) x (-2)= 8

3) (+6) x (-2)= -12

4) (-5)÷ (+5)=-1

5) (-8)÷ (-2)=4

تمارين

a) 2 × −3 =   (b) −4 × 3=   (c) −5 × 5=   (d) −7 × −2=

e) −6 × −3=   (f) 8 × −4 =   (g) −9 × 3=   (h) −5 × −8=

a) −10 ÷ 2 =   (b) −12 ÷ 3=   (c) −24 ÷ 4=   (d) −42÷ 6=

e) −10 ÷ − 5 =   (f) −15 ÷ −3=   (g) −24 ÷ −6=   (h) −42÷ −7=

3

أخطاء قاتلة : بحجة سالب وسالب = موجب (الصواب(−8) لأنه جمع وليس ضرباً) 1) – 3 – 5 = + 8

لأن إشارة الأكبر موجبة (الصواب(−15) لا يوجد أكبر عند الضرب) 2) −3×5 = +15

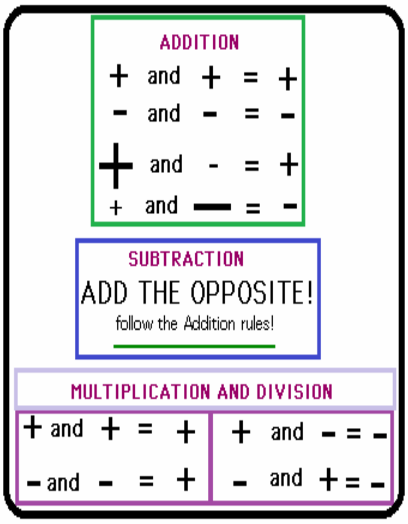
(الصواب(−8) لأن كلاهما سالب فنجمع) 3) – 4 – 4 = 0

السالب والموجب ... باختصار

يتم الحل على مرحلتين : حسب العملية

	جمع أو طرح	ضرب أو قسمة
المرحلة الأولى	نحدد إشارة الناتج من خلال (إشارة الأكبر) – 5 – 6 = – – 3 + 7 = + 4 – 9 = –	نحدد إشارة الناتج من خلال: متشابهان في الإشارة (- - أو ++) ⇐ الناتج موجب مختلفان في الإشارة (- + أو+ -) ⇐ الناتج سالب (لا يوجد إشارة الأكبر) (−2) × (−3) =+ (−6) × (+4) = – (+8) ÷ (−4) = –
المرحلة الثانية	إيجاد قيمة الناتج متشابهان في الإشارة ⇐ نجمع (- - أو ++) مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح (- + أو+ -) – 5 – 6 = –11 –3 + 7 = +4 4 – 9 = –5	إيجاد قيمة الناتج نضرب أو نقسم حسب العملية المطلوبة (−2) × (−3) = + 6 (−6) × (+4) = –24 (+8) ÷ (−4) = –2

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77



****************************** تمارين ******************************

(a) 4 + −1 =   (b) − 6 + −2 =   (c) 8 + −7 =   (d) 3 + −5 =

(e) 1 + −7 =   (f) −3 + 3=   (g) −2 + −1=   (h) −1− 1=

****

a) 2 × −3 =   (b) −4 × 3=   (c) −5 × 5=   (d) −7 × −2=

e) −6 × −3=   (f) 8 × −4 =   (g) −9 × 3=   (h) −5 × −8=

****

a) −10 ÷ 2 =   (b) −12 ÷ 3=   (c) −24 ÷ 4=   (d) −42÷ 6=

e) −10 ÷ − 5 =   (f) −15 ÷ −3=   (g) −24 ÷ −6=   (h) −42÷ −7=

4

2) الكسور العادية

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

أ) قاعدة الجمع والطرح : نضرب بسط الأول في مقام الثاني ثم(±) ثم بسط الثاني في مقام الأول ونقسم على حاصل ضرب المقامين

$$3\frac{7}{10} = \frac{(3\times 10)+7}{10}$$

$$\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{9}=\frac{9+20}{45}=\frac{29}{45}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{9}=\frac{63-40}{72}=\frac{23}{72}$$

$$\frac{6}{5}-\frac{10}{3}=\frac{6\cdot 3-10\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{18-50}{15}=\frac{-32}{15}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

ب) قاعدة الضرب:
نضرب بسط الأول في بسط الثاني مقسوما على حاصل ضرب مقام الأول في مقام الثاني

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$b \neq 0 \; ; \; c \neq 0$$

$$\frac{-2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{-2\times 1}{5\times 6}=\frac{-2}{30}$$

ج) قاعدة القسمة:نحول القسمة إلى ضرب ونقلب المقسوم عليه ثم نطبق قاعدة الضرب السابقة

$$\frac{5}{-6}\div\frac{-3}{2}=\frac{5}{-6}\times\frac{+2}{-3}=\frac{5\times 2}{-6\times(-3)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{-4}{5}\div 2=\frac{-4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-4\times 1}{5\times 2}=\frac{-2}{5}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

ملاحظة :
أي عدد أو متغير يوجد معه (3 واحدات) مخفية نُظهر منها ما يلزم للعملية الحسابية المطلوبة

$$6 = \frac{1\times 6^1}{1}$$

مثلاً:

$$7\times 7^3 = 7^1\times 7^3 = 7^{1+3} = 7^4$$

$$3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15+2}{2}=\frac{17}{5}$$

$$3\frac{1}{2}=\frac{2\times 3+1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$4x + 4 = 4x + 4(1) = 4(x+1)$$

تمارين

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$
2. $\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=$
3. $7-\frac{5}{8}$
4. $\frac{3}{4}\times\frac{6}{9}$
5. $\frac{-1}{7}\times\frac{2}{3}$
6. $9\times(-1\frac{2}{7})$
7. $(\frac{6}{8})\times(-3\frac{1}{2})$
8. $2\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{6}$
9. $11\times 1\frac{4}{5}$
10. $11\div\frac{2}{3}$
11. $\frac{4}{6}\div\frac{1}{12}$
12. $5\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$

5

4) المقادير الجبرية:

1) مفهوم (الحد) في الرياضيات :هو أي مقدار جبري لا يحتوي على جمع (+) أو طرح (–)
مثلاً : ($3xy$) حد واحد بينما ($4x + 2y – 5$) يتكون من 3 حدود

$x + x = 2x$

يتكون الحد من جزأين : عددي وحرفي ، ويسمى العددي بالمعامل
مثلاً : ($6xy$) معامله (6) كذلك ($-3x^2$) معامله (– 3)

$(x)(x) = x^2$

2) يتشابه حدان إذا كان فيهما نفس المتغيرات بنفس القوى
مثلاً : ($3x^2y$) ، ($5x^2y$) متشابهان ، بينما ($4x^2y^3$) ، ($5xy^3$) غير متشابهين

3) لا يمكن جمع أو طرح إلا الحدود الجبرية المتشابهة – عندما نجمع أو نطرح المعاملات
مثلاً : ($5xy^3 + 4xy^3 = 9xy^3$) بينما ($3xy^2 + 4xy^3 =$) لا يمكن جمعهما لأنهما غير متشابهين

4) عند الضرب أو القسمة لا يشترط التشابه حيث نضرب أو نقسم المعاملات
ونجمع الأسس عند الضرب ونطرحها عند القسمة : مثلاً : $(3x^2)(4x^3) = 12x^5$

ملاحظة : مفهوم (x) أو (y) :

يدل الرمز (x) عادة على قيمة مجهولة في مقدار جبري (لا يوجد فيه إشارة =) أو معادلة (تحتوي إشارة =)
مثلاً : ($x + 3 = 8$) وهذه معادلة تعني : ما هو العدد الذي إذا أضيف إليه (3) يعادل (8)؟ ، والجواب (5)
أما إذا أراد أحمد أن يتصدق يومياً بمبلغ من المال تبعا لتاريخ ذلك اليوم في الشهر مضافاً إلية خمسة قروش
فإن المقدار الذي سيتصدق به هو : (تاريخ اليوم المعني) + 5 أو المقدار= ($x + 5$) وهذه ليست معادلة بل مقدار

الأستاذ عبدالقادر الحسنات ٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

---

5) القوس المسبوق بإشارة سالب : نعكس جميع الإشارات داخله

مثلا: $6x^2 + 5x – 8 – (4x^2 – 3x + 1) = 6x^2 + 5x – 8 – 4x^2 + 3x – 1 = 2x^2 + 8x – 9$

---

6) الأسس (القوى) :

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

1) الضرب المكرر يتم تحويله إلى أسس مثلاً : $(5)(5)(5) = 5^3$

2) عند الضرب (وتساوي الأساسات) نجمع الأسس مثلاً : $(4^3)(4^2) = 4^{2+3} = 4^5$

$\frac{3^{11}}{3^6} = 3^{11-6} = 3^5$

3) عند القسمة (وتساوي الأساسات) نطرح الأسس مثلاً : $7^8 \div 7^2 = 7^{8-2} = 7^6$

$\frac{7^4}{7^9} = 7^{4-9} = 7^{-5} = \frac{1}{7^5}$

4) في حالة قوة القوة نضرب الأسس مثلاً : $(7^3)^2 = (7)^{3(2)} = 7^6$

- $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{m \times n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Hasanat

5) توزيع القوى ، مثلاً : $(x\,y)^2 = (x)^2\,(y)^2$ كذلك $(3x)^2 = 9x^2$

ملاحظة : $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$ ، بل $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2 - 4x + 4$$

6

6) القوة السالبة يتم تغيير مكانها من البسط إلى المقام أو العكس لتصبح موجبة :

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ أو نعكس البسط والمقام $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ $\cancel{3^{-2} = -9}$

$\frac{1}{9^{-2}} = \frac{9^2}{1} = \frac{81}{1} = 81$ $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+2} = \frac{25}{9}$

7) القوة الكسرية يتم تحويلها إلى جذر :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{\left(a^m\right)} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

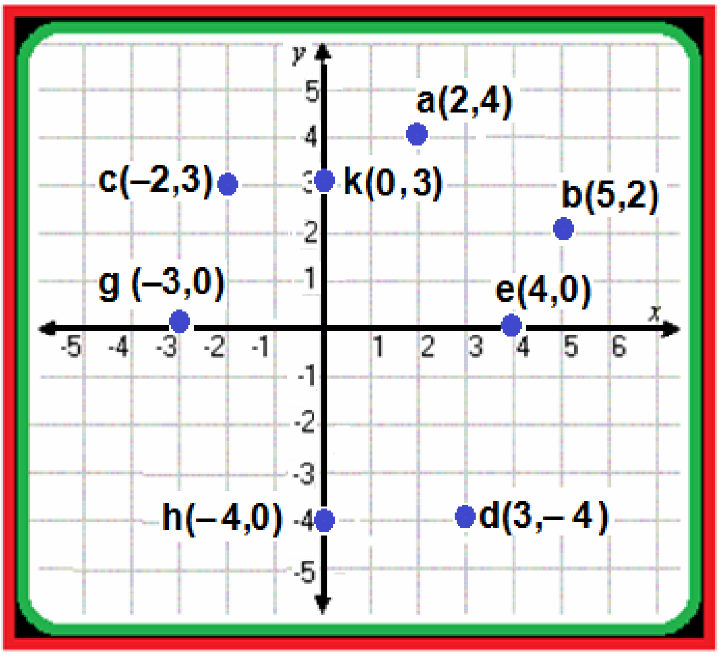
ملاحظة : أي عدد غير الصفر قوة صفر يساوي 1 ، مثلاً : $5^0 = 1$ ، $(2022)^0 = 1$ ، $(1443)^0 = 1$

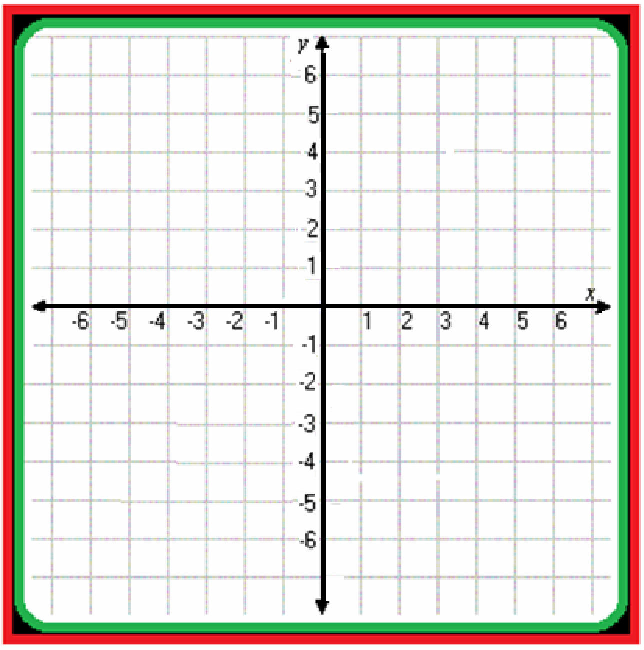
7) المستوى الديكارتي :

يتكون من مستقيمين متعامدين : الأفقي يسمى (x) ، والعمودي (y)

كل نقطة على المستوى (زوج مرتب) تتكون من جزأين : x و y ....(x ، y)

ولتحديد موقع النقطة (x ، y) ، نبدأ من نقطة الأصل ونتجه يمينا (إذا كان العدد موجبا) أو يسارا (في حالة السالب) ثم إلى الأعلى (موجب) أو الأسفل





حدد موقع النقاط الآتية على المستوى الديكارتي

a(1,4)   b(–3,3)   c(4,3)   d(2,– 5)   g(5,0)

e (–4,0)   h (0,6)   k(–5,0)   m(–2, –6)   n(–6,2)

8) الاقتران : صورة عدد ما في الاقتران هي القيمة الناتجة عن استبدال (x) بذلك العدد

مثلاً :

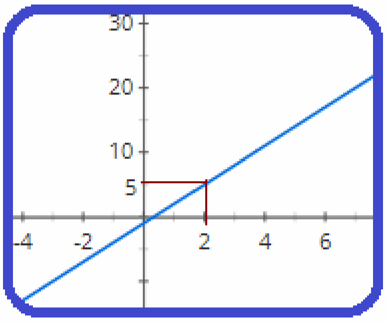
$f(x) = 3x - 1$

$f(2) = 3(2) - 1$

$= 5$

أي أن صورة العدد (2) في الاقتران f هي (5)

والزوج المرتب (2 ، 5) يقع على منحنى الاقتران f



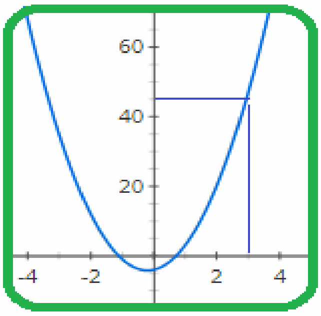
$g(x) = 5x^2 + 2x - 4$

$g(3) = 5(3)^2 + 2(3) - 4$

$= 47$

أي أن صورة العدد (3) هي (47)

والزوج المرتب (3 ، 47) يقع على منحنى الاقتران g



9) فك الأقواس : الأول × الأول + الأول × الثاني + الثاني × الأول + الثاني × الثاني

1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

2) $(3x + 1)(x - 5)= 3x^2 - 15x + x - 5 = 3x^2 - 14x - 5$

3) $(2x^2 - x)(3x^3 - 5)= 6x^5 - 10x^2 - 3x^4 + 5x$

4) $(x +5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$

$(a + b)^2 = (\ )^2 + 2(\ )(\ ) + (\ )^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

مربع الأول + 2 × الأول × الثاني + مربع الثاني

$(2x + 5)(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x + 5x^2 - 5 = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

$(a + b)^3 = (\ )^3 + 3(\ )^2(\ ) + 3(\ )(\ )^2 + (\ )^3$

مكعب الأول + 3× مربع الأول × الثاني +3×مربع الثاني × الأول + مكعب الثاني

تمارين

1) $4x(5x^2 - 7x - 3)=$

2) $6x^5 (5x^2 - 7x + 1)=$

3) $8xy(x + 8y)=$

4) $(x - 7)(3x + 1)=$

5) $(7n + 8)(8n - 3)=$

6) $(5p - 5)(7p + 6)=$

7) $(5x + 2)(7x - 2)=$

8) $(2a - 8b)(6a - 8b)=$

9) $(7x - 5y)(2x + 5y)=$

10) $(2a - 6b)(7a - 3b)=$

11) $(3m - 2)^2 =$

12) $(x^2 - 4)^2 =$

13) $(x + 6y)(5x + 7y)=$

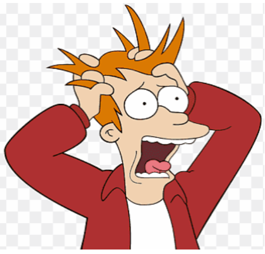
14) $(3x - y)(6x^2 + 5xy - 7y^2)=$

10) ترتيب العمليات الحسابية (الأولويات):

8

The order of operations is:
1) Brackets
2) Indices
3) Dividing and Multiplying
4) Adding and Subtracting

1) الأقواس : ( ) ، [ ] ، { }
2) الأسس والجذور
3) الضرب والقسمة
4) الجمع والطرح



$3+2 \times 4 = 5 \times 4 = 20$ ✗

$3+2\times4 = 3 + 8 = 11$ ✓

الضرب قبل الجمع

مثلا :

1) $4 + 5(2) = 4 + 10 = 14$

2) $3 - 5^2 = 3 - 25 = -22$

3) $6 + 5(3)^2 = 6 + 5(9) = 6 + 45 = 51$

4) $4 - (1 - 5)^2 + (4 - 6)^3 + 4(3)^2 = 4 - (-4)^2 + (-2)^3 + 4(9)$
$= 4 - 16 + -8 + 36$
$= -12 + 28 = 16$

1. $5(3 + 5) + 20 =$
2. $42 \div 7 + 9 \times 4 =$
3. $20 + 4^2 \times 2 =$
4. $5^2 + 3^2 \times 2 =$
5. $12(32 \div 4) + 4^2 =$
6. $4 \times 4 + 12 \times 7 =$
7. $10(4 \times 5) \times 2 =$
8. $5^2 \times 3(10 + 5) =$
9. $96 \div 12(20 - 8) \times 2 =$
10. $22 \times 2 + 18 \times 2 =$

1. $9 \times 8 + 7 \times 6 + 3^2 =$
2. $5 \times 2(6 + 6) + 4 \times 8 =$
3. $9^2 \times 2 + 2 \times 9 =$
4. $8 \times 8 + 7 \times 7 + 4^2 =$
5. $81 \div 9 \times 7 \div 7 =$
6. $5^2 \times 5 \times 2 =$
7. $54 \div 9 + 8 \times 5 =$
8. $5(5 \times 4) + 3(4 \times 2) =$
9. $18(5 - 3) \times 2 + 7^2 =$
10. $5 \times 5 + 6 \times 6 =$

9

11) التحليل إلى العوامل :

Factoring is an action in which polynomial is represented as a product of simpler polynomials that cannot be further factored

التحليل إلى العوامل في المقادير الجبرية ،هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب مجموعة من المقادير كل منها أصغر منه درجة ،ولا يمكن تحليل أيا منها

ومن طرقه (العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ...) ولتجنب الأخطاء نقوم بذلك على شكل خطوات :

أولاً:العامل المشترك : دائماً نبدأ بالسؤال التالي : هل يوجد عامل مشترك؟($5x - 10$ ،

مثلاً:

1) $5x - 10 = 5x - 5(2) = 5(x - 2)$

2) $3x^2 + 6x = 3xx + 2(3)x = 3x(x+2)$

ثانياً:الفرق بين مربعين:إذا لم يكن هناك عامل مشترك، نلاحظ فيما إذا كان المقدار فرق بين مربعين أو مكعبين :

مثلاً:

1) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x-3)(x+3)$

2) $x^2 + 4 = (b^2 - 4ac$ (المميز) لا يمكن تحليلها لأن المميز سالب

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

3) $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4) $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ثالثاً: إذا لم يكن كذلك نلاحظ فيما إذا كان ثلاثي حدود : $ax^2 + bx + c$

تحليل ثلاثي الحدود : $x^2 + bx + c$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)

1) $x^2 + 2x - 15$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (-15) ومجموعهما (2)

وهما (–2 ، 5) لذلك :

$x^2 + 2x - 15 = (x-2)(x+5)$

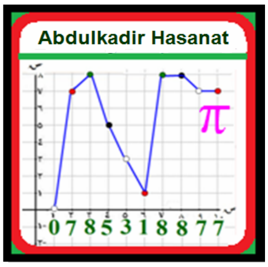
وهذا يعني أن الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 15$ يقطع محور السينات عند النقطتين (x=2)،(x= – 5)

2) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

3) $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$

4) $x^2 - 8x - 20 = (x-10)(x+2)$

5) $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$



ويمكن استخدام القانون العام

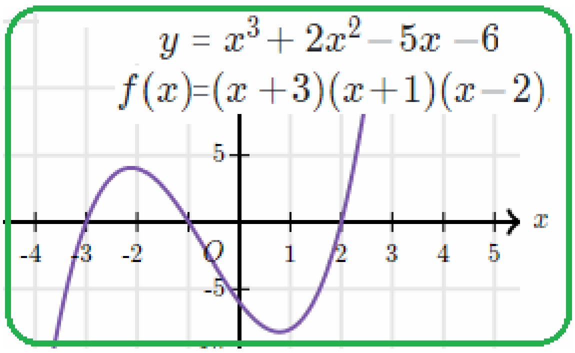
$x^2 + 12x + 32 = 0$ $\boxed{a=1 \quad b=12 \quad c=32}$

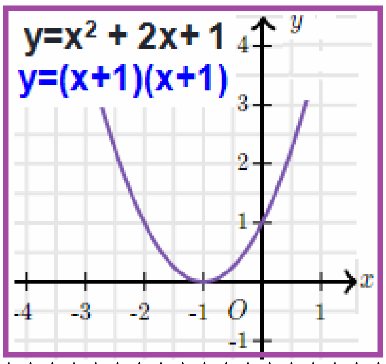
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(32)}}{2(1)}$

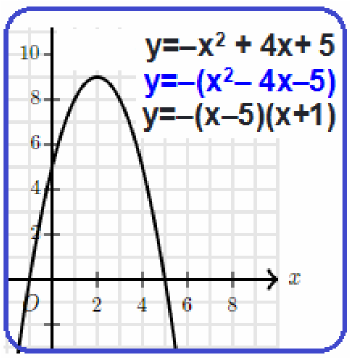
$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2}$

$= \frac{-12+4}{2}$ $\boxed{x=-4}$ $= \frac{-12-4}{2}$ $\boxed{x=-8}$

يمكن ملاحظة مفهوم التحليل إلى العوامل من خلال التمثيل البياني للاقتران المرافق وعلاقته بالمقطع من المحور (x)







1) $x^2 + 8x + 12 = (x \qquad)(x \qquad)$

2) $x^2 - 4x - 32 = (x \qquad)(x \qquad)$

3) $x^2 - 11x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

4) $x^2 + x - 2 = (x \qquad)(x \qquad)$

5) $x^2 + 10x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

6) $x^2 + 12x + 35 = (x \qquad)(x \qquad)$

7) $x^2 - 3x - 40 = (x \qquad)(x \qquad)$

8) $x^2 + 3x - 4 = (x \qquad)(x \qquad)$

9) $x^2 + 4x - 12 = (x \qquad)(x \qquad)$

10) $x^2 - 14x + 45 = (x \qquad)(x \qquad)$

11) $x^2 + 5x - 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

12) $x^2 - 4 = (x \qquad)(x \qquad)$

13) $x^2 - 6x - 7 = (x \qquad)(x \qquad)$

14) $x^2 + 6x - 16 = (x \qquad)(x \qquad)$

15) $x^2 + 11x + 28 = (x \qquad)(x \qquad)$

16) $x^2 + 10x + 16 = (x \qquad)(x \qquad)$

17) $x^2 - 25x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

18) $x^2 + 12x + 27 = (x \qquad)(x \qquad)$

19) $x^2 - 13x + 36 = (x \qquad)(x \qquad)$

20) $x^2 + 5x - 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

21) $x^2 - 5x - 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

22) $x^2 - 5x + 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

23) $x^2 - 13x + 30 = (x \qquad)(x \qquad)$

24) $x^2 - 13x - 30 = (x \qquad)(x \qquad)$

ملاحظة: هناك حالات لا نجد فيها عددين صحيحين يحققان الشرطين السابقين عندها نستخدم المميز والقانون العام

هناك أكثر من طريقة $2x^2 + x - 6 =$

$(2x \qquad)(x \qquad)$

القريبان

البعيدان

$(2x - 3)(x + 2)$

حاصل ضرب القريبين : $-3x$

حاصل ضرب البعيدين : $4x$

المجموعة = x = الحد الأوسط

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أو عن طريق القانون العام :

$a=2 \,,\, b=1 \,,\, c=-6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \mp \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \mp 5}{4}$$

$x = \frac{-3}{2} \qquad x = 2$

$y = ax^2 + bx + c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad \boxed{a = 2 \,/\, b = 5 \,/\, c = -3}$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5+7}{4} \text{ or } \frac{-5-7}{4} = \frac{2}{4} \text{ or } \frac{-12}{4} = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

الأستاذ

عبدالقادر الحسنات

٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

11

طريقة التجميع المناسب أو التجزئة :

1) $2x^2 + 5x - 3$ نجد حاصل ضرب (الثابت × المعامل الرئيس = 2(-3) =-6)

نكتب الحد الأوسط كمجموع الناتج (5x=6x-x): $=2x^2 + 6x - x - 3 = 2x(x+3) - 1(x+3) = (x+3)(2x-1)$

2) $4x^2 + 12x + 5 = 4x^2 + 10x + 2x + 5 = 2x(2x+5) + 2x+5 = (2x+1)(2x+5)$

3) $9x^2 - 15x + 4 = 9x^2 - 12x - 3x + 4 = (3x-1)(3x-4)$

4) $6x^2 + 11x - 10 = 6x^2 + 15x - 4x - 10 = (2x+5)(3x-2)$

تمارين

1) $6x^2 - 8x - 8 =$ $=(3x+2)(2x-4)$

2) $30x^2 - 8x - 6 =$ $=(5x-3)(6x+2)$

3) $2x^2 - 13x + 15 =$ $=(2x-3)(x-5)$

4) $3x^2 + 13x + 4 =$ $=(3x+1)(x+4)$

5) $2x^2 - x - 6 =$ $=(2x+3)(x-3)$

6) $2x^2 + 11x + 12 =$ $=(x+4)(2x+3)$

$$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + b^2 = - - - - - - -$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

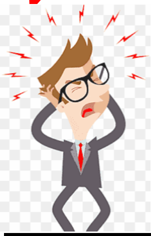
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + x^1 y^{n-2} + x^0 y^{n-1})$$

رابعاً : إذا لم يكن المقدار أياً مما سبق وكان من الدرجة الثالثة أو أكثر نحلل حده الثابت ونحاول الحصول على صفر (جذر) له مثل (a) ثم نستخدم القسمة التركيبية (أو الخوارزمية) ونقسمه على (x –a)



مثلاً: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

نبحث عوامل الحد الثابت (12) وهي: (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12)
نعوض هذه العوامل بسالبها وموجبها في الاقتران إلى أن نحصل على (صفر) ونجده هنا $f(-4)=0$
نستخدم القسمة الخوارزمية لقسمة $f(x)$ على $(x + 4)$ ويجب أن يكون الباقي صفرا
وبالتالي : الاقتران = الناتج × العامل $(x+ 4)$
ثم نحلل الناتج (التربيعي) بالطرق السابقة $f(x) = (x +4)(x^2 - 2x - 3)$
$f(x) = (x +4)(x- 3)(x +1)$

الناتج: $x^2 - 2x - 3$

المقسوم عليه: $x + 4$ ، المقسوم: $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

$$
\begin{array}{r}
x^3 + 4x^2 \\
\hline
-2x^2 - 11x \\
-2x^2 - 8x \\
\hline
-3x - 12 \\
-3x - 12 \\
\hline
0
\end{array}
$$

الباقي: 0

$(4x^2 - 5x - 21) = (x - 3)(\quad)$
$= (x - 3)(4x+7)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 7 \\
\hline
x - 3 & 4x^2 - 5x - 21 \\
 & +4x^2 - 12x \\
 & -\quad\quad + \\
\hline
 & +7x - 21 \\
 & \overset{-}{+}7x \overset{+}{-} 21 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

	x^3	x^2	x	x^0
-4	1	2	-11	-12
		-4	8	$+12$
	1	-2	-3	0

$x^2 \quad \times \quad x^0$

القسمة التركيبية : $f(x) = x^3+2x^2 - 11x - 12$
$f(x) = (x +4)(x- 3)(x +1)$

$x^3 + x^2 - 14x - 24$

-2	1	1	-14	-24
	0	-2	2	24
	1	-1	-12	0

$(x + 2)(x^2 - x - 12)$.
$= (x + 2)(x + 3)(x - 4)$.

$-7x + 3 + 4x^3 = 4x^3 + 0x^2 - 7x + 3$

1	4	0	-7	3
	0	4	4	-3
	4	4	-3	0

$(x - 1)(4x^2 + 4x - 3)$
$= (x - 1)(2x - 1)(2x + 3)$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

	x^3	x^2	x	x^0
-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0

$x^2 \quad \times \quad x^0$

$f(x) = (x +1)(2x^2 - 5x + 2)$
$f(x) = (x +1)(2x- 1)(x -2)$

تمارين

1) $(3x^2 - 5x + 4)$
2) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6)$
3) $(x^2 + 5x - 1)$
4) $(2x^2 - 9x - 5)$
5) $(3x^2 + 23x + 14)$
6) $(4x^2 - 10x + 6)$

11) حل المعادلات: هناك نوعان من المعادلات الجبرية بمتغير واحد ، وهما : الخطية وغير الخطية

أ) الخطية : وهي على الصورة : $\underbrace{ax+b}_{\text{طرف المتغيرات (المجاهيل)}} = \underbrace{c}_{\text{طرف الأعداد (الثوابت)}}$ ، نتعامل معها مثل الميزان ذو الكفتين

طريقة الحل : يجب تجميع الحدود المحتوية على (x) في أحد طرفي المعادلة ثم القسمة على معامل (x)

1) $2x + 5 = 9$

$2x + 5 - 5 = 9 - 5$

$2x = 4$

$2x \div 2 = 4 \div 2$

$x = 2$

2) $3x - 8 = 7x + 1$

$3x - 7x = 1 + 8$

$-4x = 9$

$x = \dfrac{9}{-4} = \dfrac{-9}{4}$

Hasanat

ملاحظة : تكافؤ الكسور :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c \qquad b \neq 0,\ d \neq 0$$

تمارين

1) $2x + 1 = 11$

2) $x - 4 = 8$

3) $x - 1 = -6$

4) $x + 4 = -1$

5) $5x = 20$

6) $3x = -21$

7) $4x + 2 = 10$

8) $2x - 3 = 11$

9) $4x - 5 = -15$

10) $9x - 3 = 5x + 8$

11) $3x + 1 = 7x + 4$

12) $x - 4 = 5x - 12$

1. $2(5x+14) = 6$
2. $3(4-x) = 33$
3. $\frac{2}{3}(x-8) = 7$
4. $\frac{4x-1}{7} = 5$
5. $2(3x-4) = 4x+17$
6. $\frac{x+4}{5} = 9 - 7x$

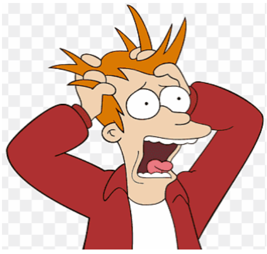
ب) التربيعية : صورتها العامة : $ax^2 + bx + c = 0$:

طريقة الحل : يجب أن نجعل الطرف الأيمن صفراً ،ثم نقوم بتحليل الطرف الأيسر وكتابته على شكل حاصل ضرب عدة مقادير لكي نستخدم القاعدة ($a\,b = 0 \longrightarrow a = 0$ or $b = 0$) ثم حل المعادلات الناتجة

1) $x^2 - x = 6 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 3)(x + 2) = 0$

إما $(x - 3 = 0)$ أو $(x + 2 = 0)$ ومنها $\quad x = 3\,,\ x = -2$

2) $x^3 + 2x^2 = 11x + 12 \quad \rightarrow \quad x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$



$(x + 4)(x - 3)(x + 1) = 0$

إما $(x + 4 = 0)$ أو $(x - 3 = 0)$ أو $(x + 2 = 0)$

ومنها $\quad x = -4 \quad , \quad x = 3 \quad , \quad x = -2$

3) $x^2 - 4x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(x - 4) = 0 \longrightarrow \quad x = 0\,,\ x = 4$

ملاحظة(1): للمعادلة التربيعية على الأكثر حلان (جذران) : فقد لا يكون لها حل في ح

مثل : $x^2 + 4 = 0$ أو $x^2 + 3x + 4 = 0$

ملاحظة(2): يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

القانون العام :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المميز = $b^2 - 4\,a\,c$

ولا يوجد حل للمعادلة في R إذا كان المميز سالباً (وتكون أولية)

$$4x^2 + 6x - 18 = 0$$
$$2(2x^2 + 3x - 9) = 0$$
$$2(2x - 3)(x + 3) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$$
$$2x = 3 \qquad x = -3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 11x = -30$$
$$x^2 - 11x + 30 = 0$$
$$(x - 6)(x - 5) = 0$$
$$x - 6 = 0 \qquad x - 5 = 0$$
$$x = 6 \qquad x = 5$$

$$15x^2 + 1 = 8x$$
$$15x^2 - 8x + 1 = 0$$
$$(15x - 5)(15x - 3) = 0$$
$$(3x - 1)(5x - 1) = 0$$
$$3x - 1 = 0 \qquad 5x - 1 = 0$$
$$3x = 1 \qquad 5x = 1$$
$$x = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{5}$$

1) $x^2 - 14x + 24 = 0$ 2) $x^2 + 8x + 12 = 0$ 3) $x^2 - 4x = 32$

4) $x^2 + 12x + 30 = 2x + 6$ 5) $x^2 - 11x = x - 35$ 6) $x^3 - 8 = 0$

7) $2x^2 - 3x = 3$ 8) $5x^2 = 5x + 1$ 9) $2x^4 - 32 = 0$

12) إذا كان المعامل الرئيس غير العدد (1) :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\boxed{}\times\boxed{}=ac$$

$$\boxed{}+\boxed{}=b$$

$$\frac{1}{a}(ax+\boxed{})(ax+\boxed{})=0$$

$$8x^2+2x-3=0$$

$$\boxed{6}\times\boxed{-4}=-24$$

$$\boxed{6}+\boxed{-4}=2$$

$$\frac{1}{8}(8x+\boxed{6})(8x+\boxed{-4})=0$$

$$\frac{1}{8}(2)(4x+3)(4)(2x-1)=0$$

$$(4x+3)(2x-1)=0$$

$$(4x+3)=0 \qquad (2x-1)=0$$

$$x=-\frac{3}{4} \qquad x=\frac{1}{2}$$

$$3x^2+8x+4=0$$

$$\boxed{3}\times\boxed{4}=12$$

$$\boxed{6}+\boxed{2}=8$$

$$\frac{1}{3}(3x+\boxed{6})(3x+\boxed{2})=0$$

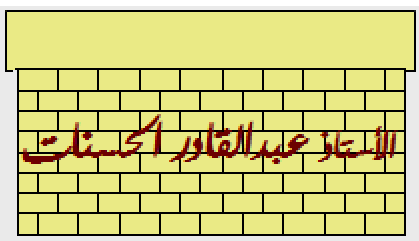
$$\frac{1}{3}(3)(x+2)(3x+2)=0$$

$$(x+2)(3x+2)=0$$

$$(x+2)=0 \qquad (3x+2)=0$$

$$x=-2 \qquad x=-\frac{2}{3}$$

الطريقة الهندية لحل المعادلات :



ملخص الطريقة الهندية لحل المعادلات التربيعية

حيث المعامل الرئيس $\neq 1$

نضرب (a) في (c) ونحل المعادلة الناتجة

ثم نقسم قيم (x) الناتجة على (a)

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x^2+bx+ac=0$$

$$2x^2+7x-4=0 \rightarrow x^2+7x-8=0$$

$$\rightarrow (x+8)(x-1)=0$$

Hasanat

$$x=-8 \quad , \quad x=1$$

$$\rightarrow x=-8\div 2=-4$$

$$\rightarrow x=1\div 2=\frac{1}{2}$$

1) $3x^2-5x+2=0$

2) $4x^2=4x-1$

3) $3x^2+2x=5$

4) $3x^2-5x-2=0$

5) $4x^2+x-3=0$

6) $5x^2+3x-2=0$

16

14) أنظمة المعادلات

هناك طريقتان لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين (أي إيجاد زوجاً مرتباً يحقق المعادلتين في نفس الوقت)

وهما : 1) طريقة الحذف elimination

أساسها : التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين ثم إيجاد قيمة المتغير الآخر

$$x + 2y = 6$$
$$x - y = 3$$

نضرب المعادلة الثانية في (2)

$$x + 2y = 6$$
$$2x - 2y = 6$$

نجمع $3x = 12$

$x = 4$

وبالتالي $y = 1$

2) طريقة التعويض substitution

ملخصها :جعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون في إحدى المعالتين وتعويض قيمته في الأخرى لحلها

$$x + 2y = 6$$
$$x - y = 3$$

نجعل (x) موضوعا للقانون في المعادلة الثانية

$x = 3 + y$

نعوض القيمة في الأولى $3 + y + 2y = 6$

$3 + 3y = 6$

$3y = 3$ ومنها $y = 1$

$x = 4$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 2x - \cancel{y} = 2 \\ +\ 2x + \cancel{y} = 6 \\ \hline 4x \quad = 8 \\ \boxed{x = 2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x + y = 6 \\ 2(2) + y = 6 \\ 4 + y = 6 \\ \boxed{y = 2} \end{array}$$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

$$\begin{cases} y - 3x = -1 \rightarrow y = 3x - 1 \\ 4x + y = -8 \end{cases}$$
$$4x + (3x - 1) = -8$$
$$7x = -7 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -4$$

تمارين

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y = -5 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$$

الأنظمة غير الخطية

$$\begin{cases} 3xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \qquad y = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 + 4 = 5x^2$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = x^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = -1, y = -2 \\ x = 2, y = 1 \\ x = -2, y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ 4x^2 - 3y^2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 - 8y^2 = -36 \\ 4x^2 - 3y^2 = -8 \end{cases}$$
$$-11y^2 = -44$$

$$y^2 = \frac{-44}{-11} = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x^2 + 8 = 9 \Rightarrow x^2 = 1$$

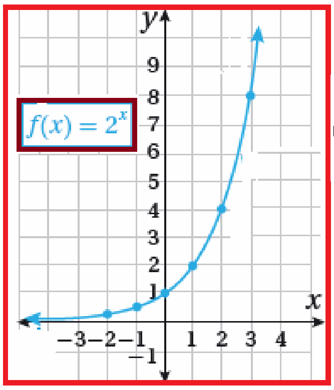
$$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = 1, y = -2 \\ x = -1, y = 2 \\ x = -1, y = -2 \end{cases}$$

15) الاقترانات الأسية

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الاقتران الأسّي (exponential function) اقتران على الصورة $f(x) = ab^x$

حيث a, b عددان حقيقيان، و $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$: $f(x)=4(3^x)$



$f(x) = e^x$

$e^0 = 1$

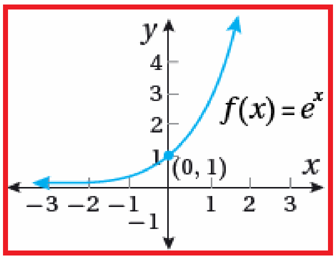
$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

*** إذا كان أساس الاقتران هو العدد النيبيري (e)
فإن الاقتران $f(x)= e^x$ يسمى الاقتران <u>الأسي الطبيعي</u>
حيث (e) عدد غير نسبي يساوي تقريباً (2.7)
وله نفس خصائص التمثيل البياني للاقتران($f(x) = a^x$)



16) الاقترانات اللوغاريتمية

ما هو اللوغاريتم؟ وماذا يعني ؟

لتبسيط ذلك : $\sqrt{9}$ = ? : يعني ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه يكون الناتج 9 ؟ الجواب : 3 أو -3

كذلك: ?= $\log_2 8$: تعني كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج 8 ؟ أو (2) أس كم =8 ؟ الجواب 3

لذلك

$\log_2 0.25 = -2$ $\log_3 81 = 4$ $\log_2 32 = 5$

$\log_2 (-8)$ = غير معرفة $\log_7 1 = 0$ $\log_5 25 = 2$

$36^{\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

Hasanat

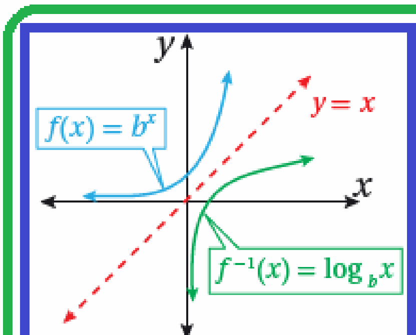
ملاحظة : الاقتران اللوغاريتمي والأسي متعاكسان :كل منهما يلغي الآخر

$4^2 = 16 \Rightarrow \cancel{\log_4} 4^2 = \log_4 16 \Rightarrow 2 = \log_4 16$

$\log_3 9 = x \Rightarrow \cancel{3}^{\cancel{\log_3} 9} = 3^x \Rightarrow 9 = 3^x \Rightarrow x = 2$

الاقتران اللوغاريتمي

يُسمّى الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي $f(x) = b^x$
الاقتران اللوغاريتمي للأساس b ويُرمز له بـ $\log_b x$
إذا كان $f(x) = b^x$ فإنّ $f^{-1}(x) = \log_b x$
حيث $b > 0, b \neq 1, x > 0$



الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

اللوغاريتم الاعتيادي: يُسمّى اللوغاريتم للأساس (10) اللوغاريتم الاعتيادي ، ويُكتب عادة من دون أساس.

أي أن $\log(1000)=3$

اللوغاريتم الطبيعي : يُسمّى اللوغاريتم للأساس (e) اللوغاريتم الطبيعي الاعتيادي ، ويُرمز له (Ln)

أي أن $\ln e = 1$

$$10^y = x \Longleftrightarrow y=\log x \quad , x>0$$

$$e^y = x \Longleftrightarrow y=\ln x \quad , x>0$$

قوانين اللوغاريتمات

$b>0, b\neq 1$ و $x>0$

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$
- $b^{\log_b x} = x$

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث $b\neq 1$ فإنّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوّة: $\log_b x^p = p\log_b x$

$$a^{\log_a x} = x$$

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b\neq 1, a\neq 1$ فإنّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية :

إذا كان $a^x = a^y$ فإنّ $x=y$ حيث $a>0, a\neq 1$

إذا كانَ $b>1$ حيث $b\neq 1, x>0, y>0$ فإنّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا و فقط إذا $x=y$

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2$$

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2$$

$$\log_{\sqrt{2}} x(x-1) = 2$$

$$x^2 - x = (\sqrt{2}) = (2^{\frac{1}{2}})^2 = 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$x=2$ $\quad$ $\boxed{x=-1}$ ✗

$$6^{x-3} = 2$$

$$\log(6^{x-3}) = \log 2$$

$$(x-3)\log 6 = \log 2$$

$$x-3 = \frac{\log 2}{\log 6}$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 6} + 3$$

$$3^x = 12$$

$$\log 3^x = \log 12$$

$$x\log 3 = \log 12$$

$$x = \frac{\log 12}{\log 3}$$

$$x = 2.26$$

قف

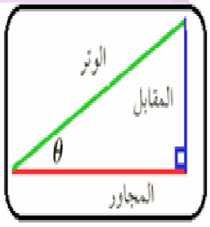
مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

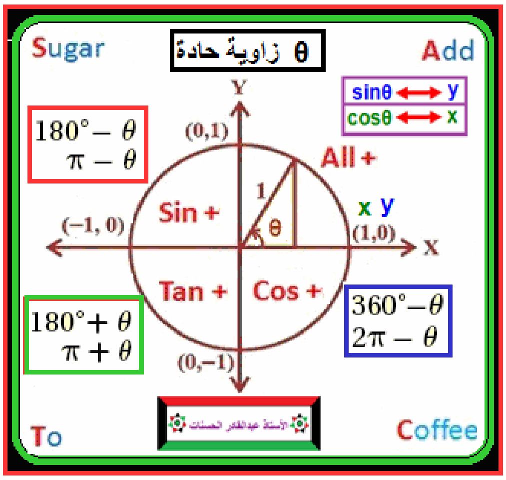
17) الاقترانات المثلثية

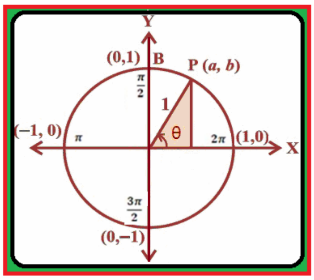
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

θ	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



الجيب $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ (cosecant) قاطع التمام	القتا $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	
الجتا $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ (secant) القاطع	القاطع $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	
الظل $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ (cotangent) ظل التمام	القتا $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	نظرية فيثاغورس مربع الوتر=مربع الاول+مربع الثاني





y يرتبط مع sinθ

x يرتبط مع cosθ

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: (+)	$\sin\theta, \csc\theta$: (+)
$\cos\theta, \sec\theta$: (–)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (–)	$\tan\theta, \cot\theta$: (+)
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: (–)	$\sin\theta, \csc\theta$: (–)
$\cos\theta, \sec\theta$: (–)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (+)	$\tan\theta, \cot\theta$: (–)

1- أي زاوية أكبر من (360) نطرح منها دورات كاملة حتى تصبح بين (0) و (360) ثم نجد قيم جيبها و(جتاها)

2- إذا كانت الزاوية في الربع الثاني : نكتبها على الصورة (180 – θ) وتكون قيم الاقترانات المثلثية لها نفس قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الحادة (θ) والإشارة موجبة في حالتي (sinθ ، cscθ)والباقي سالب

Sin150 = sin(180 – 30) = sin30 = 0.5
cos120 = cos(180 – 60)= – cos60 = – 0.5

3- إذا كانت الزاوية في الربع الثالث : نكتبها على الصورة (180+ θ) وتكون قيم الاقترانات المثلثية لها نفس قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الحادة (θ) والإشارة موجبة في حالتي (cot θ ، tan θ)والباقي سالب

Sin 210 = sin(180 + 30)= – sin30 = – 0.5
Tan225 = tan(180 + 45)= Tan45 = 1

4- إذا كانت الزاوية في الربع الرابع : نكتبها على الصورة (360–θ) وتكون قيم الاقترانات المثلثية لها نفس قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الحادة (θ) والإشارة موجبة في حالتي (cos θ ، sec θ)والباقي سالب

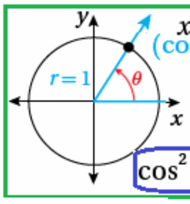
Sin 690 = sin(330)= sin(360 – 30)= –sin30 = – 0.5
Sec315 = sec(360 – 45)= sec 45 =1.4

5- إذا كانت الزاوية سالبة: نتعامل معها كأنها في الربع الرابع، فتكون موجبة في حالتي(cosθ،secθ) والباقي سالب

Sin(– 750) =– sin(750)= – sin(30)= – 0.5
Tan(– 300) = – Tan(300) = –Tan(360 – 60) = – (– Tan(60)=1.7
Cos(– 135) = Cos(135)= cos(180 – 45)= – cos(45)= – 0.7
Cot (– 210) = – cot (210) = – cot (180+ 30)= – cot (30) = –1.7

المتطابقات المثلثية

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad$ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\quad$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$



$x^2 + y^2 = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \longrightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \longrightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\quad$ بعد قسمة كل حد على ($\cos^2\theta$)

$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$

3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ $\quad$ بعد قسمة كل حد على ($\sin^2\theta$)

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\quad$ (جيب) الزاوية يساوي (جتا) متممتها والعكس

5) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\quad$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\quad$ (الجتا) لا يتأثر بالسالب

6)
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
(الجيب) الاقترانان مختلفان في كل حد
وإشارتا الجمع أو الطرح متشابهتان

7)
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
(الجتا) الاقترانان متشابهان في كل حد
وإشارتا الجمع أو الطرح متعاكستان

8)
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$
(الظل) في البسط نفس الإشارة وفي المقام عكسها

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

9) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\quad$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

10) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ $\quad$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

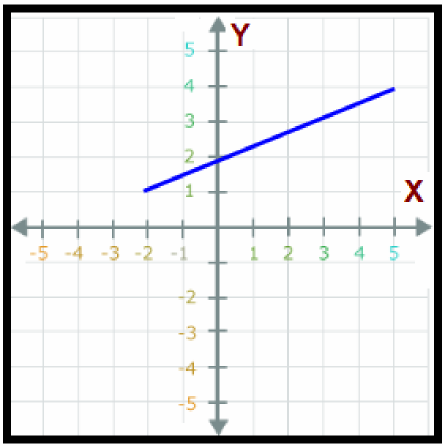
11) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ $\quad$ $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ $\quad$ $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

12)
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

13)
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

21

قوانين مهمة



المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$

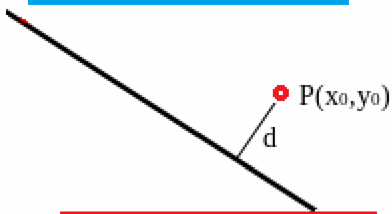
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة

$$M:\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ميل المستقيم : $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$ax+by+c=0$



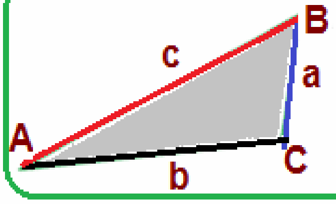
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بعد نقطة عن مستقيم

معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1\,(x_1, y_1)$، وميله m : $y-y_1=m(x-x_1)$

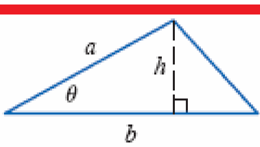
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

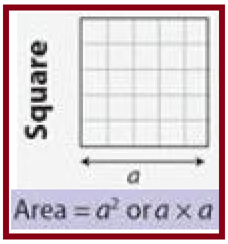
قانون الجيوب $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$



جيوب التمام $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

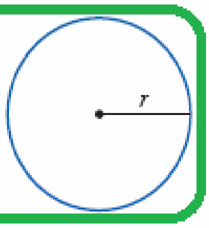
$$A=\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$





المساحة $A=\pi r^2$

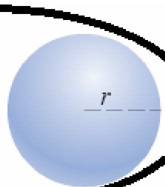
المحيط $C=2\pi r$

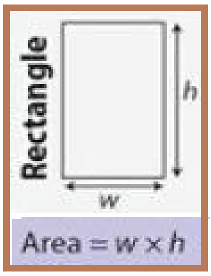


الكرة

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$A=4\pi r^2$

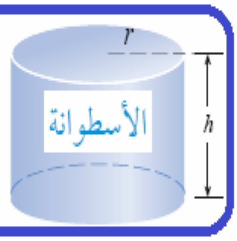




الأسطوانة

$V=\pi r^3 h$

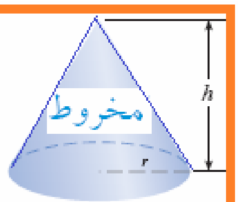
$A=2\pi rh+2\pi r^2$

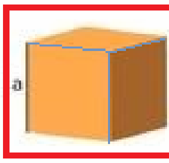


مخروط

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$





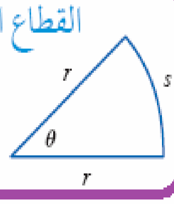
$A=6a^2$

$V=a^3$

القطاع الدائري

$A=\frac{1}{2}r^2\theta$

$s=r\theta$ (θ radian)



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات