د. خالد جلال

079 - 9948198

AWA2EL
LEARN 2 BE

طريق التفوق في الرياضيات

للتوجيهي (الأدبي)

2005

الوحدة الثالثة
تطبيقات التفاضل

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الدرس 1

المماس والعمودي على المماس

The Tangent and Normal

مثال 1

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ عند النقطة $(2, 12)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ عند النقطة $(3, 5)$.

مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ عندما $x = -2$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$ عندما $x = 1$.

مثال 3

1) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

2) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

مثال 4

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0, 1)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \ln x^3$ عند النقطة $(1, 0)$.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1)$

2) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x}, (1, -2)$

3) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1), (1, 0)$

4) $f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4, -5)$

5) $f(x) = x + e^x, (0, 1)$

6) $f(x) = \ln(x + e), (0, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7) $f(x) = \sqrt{x - 7}, x = 16$

8) $f(x) = (x - 1)e^x, x = 1$

9) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}, x = 4$

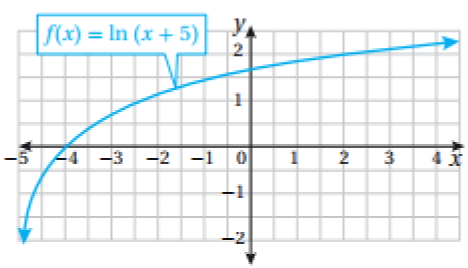
10) $f(x) = (\ln x)^2, x = e$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

11) $f(x) = (3x + 10)^2, (-3, 1)$

12) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \ln(x + 5)$:



13) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.

14) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

إذا كان: $f(x) = 4e^{2x+1}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x = -1$.

16) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

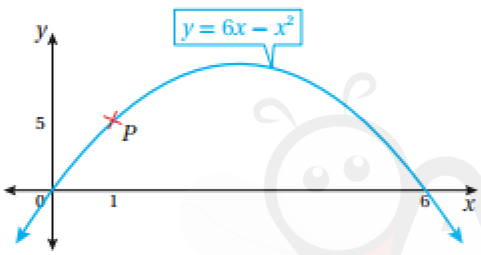
17) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

18 أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

19 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



21 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

22 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: **إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

23 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، مُبرِّرًا إجابتي.

24 نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: **إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

25 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

26 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

27 تبرير: أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنـى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكـون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم: $y = 2x - 1$.

الدرس 2
المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع
The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

مثال 1

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

2) $f(x) = \ln x + e^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

مثال 2

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

3) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

4) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

مثال 3 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1) ما سرعة أسد الجبال المتجهة بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

2) ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

3) أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.

أتحقّق من فهمي

فهد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد المتجهة بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2) $f(x) = 2e^x + x^2$

3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

5) $f(x) = x^3(x+6)^6$

6) $f(x) = x^7 \ln x$

7) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

8) $f(x) = \sin x^2$

9) $f(x) = 2x^{-3}$

10) $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

11) $f(x) = \sqrt{x}$

12) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}, x = -2$

14) $f(x) = \frac{1}{2x-4}, x = 3$

15) إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$، وكانت: $f''(2) = -1$، فأجد قيمة الثابت p.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟

17) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \frac{3t}{1+t} , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

20) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$؟

21) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

22) ما تسارع الجسم عندما $t = 4$؟

لوح تزلُّج: يتحرَّك رامي في مسـار مسـتقيم على لوح تزلُّـج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

23 ما سرعة رامي المتجهة بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

24 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

25 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

مهارات التفكير العليا

26 تبرير: إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$، فأُثبِت أنَّ: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$.

27 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسـم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

28 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسـم يتحرَّك في مسـار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د.خالد جلال
0799948198

الدرس 3

تطبيقات القِيَم القصوى

Optimization Problems

مثال 1

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

مثال 2 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي محاط به سياج من قبلُ. أجد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيط السياج بها.

أتحقَّق من فهمي

بنى نجّار سقفًا خشبيًّا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

مثال 3

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 1000 cm^3، وقاعدتها مربعة الشكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 2 m^3، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

مثال 4

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

أتحقّق من فهمي

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

مثال 5 : من الحياة

وجد خبير تسويق أنّه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإنَّ سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

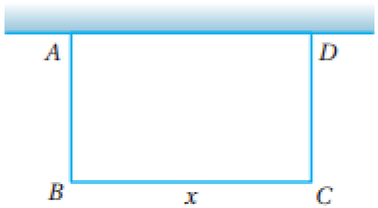
أتحقّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 5$
2. $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

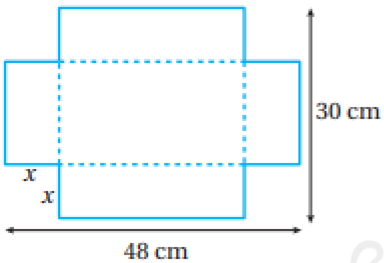


يُمثِّل الشكل المجاور مُخطَّطًا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أُنشِئت مُقابِل جدار. إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار 300 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

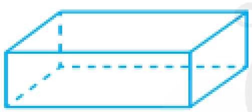
4 المقدار الجبري الذي يُمثِّل طول الضلع AB بدلالة x.

5 اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.

6 بُعْدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يُمكِن.



قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها 48 cm، وعرضها 30 cm. قُصَّ من زوايا القطعة مربعات مُتطابِقة، طول ضلع كلٍّ منها x cm كما في الشكل المجاور، ثم ثُنِيت لتشكيل عُلْبة:



7 أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم العُلْبة بدلالة x.

8 أجد قيمة x التي تجعل حجم العُلْبة أكبر ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $P(x) = 500 - 0.002x$ سعر مُنتَج لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 300 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة:

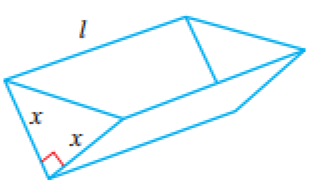
9 أجد اقتران الإيراد.

10 أجد اقتران الربح.

11 أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

12 أجد سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

مهارات التفكير العليا



13 تحدٍّ: قالَب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. إذا كان حجم القالَب $1000\ cm^3$، فأجد أبعاده التي تجعل المواد المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 4

الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة

Implicit Differentiation and Related Rates

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $2x + 3y^2 = 1$ 2) $y^3 - \sin x = 4y^2$ 3) $xy - 2y = 3e^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $5y^2 - 2e^x = 4y$ c) $xy + y^2 = 4\cos x$

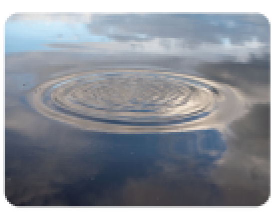
مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $y^3 + xy = 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

أتحقَّق من فهمي

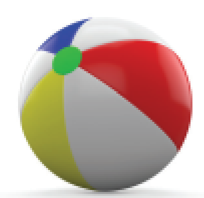
أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + 2y^3 = 6$ عند النقطة $(2, -1)$.

مثال 3 : من الحياة



عند رمي حجر في مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر دائرة يزداد بمُعدَّل 8 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 10 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

أتحقَّق من فهمي



بالونات: نفخت هديل بالونًا على شكل كرة، فازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 3 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم البالون عندما يكون نصف قُطْره 4 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2 - 2y^2 = 4$
2. $x^2 + y^3 = 2$
3. $x^2 + 2y - y^2 = 5$
4. $2xy - 3y = y^2 - 7x$
5. $y^5 = x^3$
6. $x^2 y^3 + y = 11$
7. $\sqrt{x} + \sin y = 16$
8. $e^x y = xe^y$
9. $\cos x + \ln y = 3$
10. $16 y^2 - x^2 = 16$
11. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

12. $3x^3 - y^2 = 8, (2, 4)$
13. $2x^2 - 3y^3 = 5, (-2, 1)$
14. $y^2 = \ln x, (e, 1)$
15. $(y - 3)^2 = 4x - 20, (6, 1)$

AWA2EL LEARN 2 BE

إذا كان: $2x^2 + y^2 = 34$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16. ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$.
17. معادلة المماس عند النقطة $(3, 4)$.

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 7$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18. ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.
19. معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.
20. معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3, -2)$.

21. هندسة: تتناقص أطوال أضلاع مُكعّب بمُعدَّل 6 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب عندما يكون طول ضلعه 30 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المُكعَّب (V) وطول ضلعه (x) هي: $V = x^3$.

22. فقاقيع: يزداد نصف قُطْر فُقّاعة صابون كروية الشكل بمُعدَّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفُقّاعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 3 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفُقّاعة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = 4\pi r^2$.

23 أورام: اتَّخَذ ورم شــكلًا كرويًّا تقريبًا، وقد ازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 0.13 cm لكل شــهر. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم الورم عندما يكون طول نصف قُطْره 0.45 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$، مُبرِّرًا إجابتي.

25 تحدٍّ: إذا كان: $\ln(xy) = x^2 + y^2$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$.

26 تبريــر: إذا كان المُتغيِّران u و w مرتبطين بالعلاقــة: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المُتغيِّر w تزداد بمرور الزمن t، وَفقًا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مُبرِّرًا إجابتي.

AWA2EL
LEARN 2 BE

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د. خالد جلال
0799948198

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميل المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو:

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$

c) 11 d) 8

2 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

3 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

4 ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

a) 6 b) 3

c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

5 قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

a) 2 b) -2

c) 1 d) -1

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

6 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

7 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

8 $f(x) = x^2 - 7x + 10, (2, 0)$

9 $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

10 $f(x) = \frac{2x - 1}{x}, (1, 1)$

11 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

12 $f(x) = (x - 7)(x + 4), x = 1$

13 $f(x) = \frac{x}{x + 4}, x = -5$

14 $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$

16 $f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4}, x = -2$

17 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

18 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12.

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

19 $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

20 $f(x) = \ln x - 9e^x$

21 $f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22 $f(x) = \sqrt{x}(x + 2), x = 2$

23 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$

24 نفط: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بُقْعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمُعدَّل $50\ m^2/min$. أجد سرعة تزايد نصف قُطْر البُقْعة عندما يكون طول نصف قُطْرها $20\ m$، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25 ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟

26 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

27 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

28 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

درّاجات: يُمكِن نمذجة موقع شخص يقود درّاجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29 ما سرعة الشخص المتجهة بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

30 ما تسارع الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

31 أجد قِيَم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

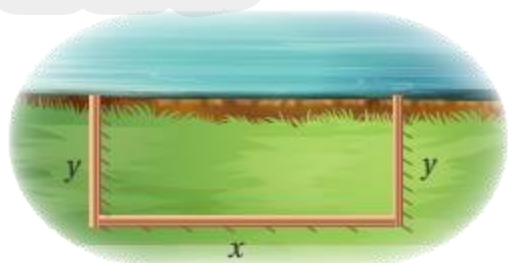
32 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

33 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

34 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

35 بالونات: نفخت ماجدة بالونًا على شكل كرة، فازداد حجمه بمُعدَّل $800\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون طول نصف قُطْره $60\ cm$، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

36 خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$؛ لتوفير كمِّية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

37 $x^2 + y^2 = y$

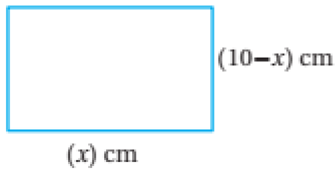
38 $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 13$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

39 ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

40 معادلة المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

41 سلك طوله $20\ cm$. إذا أُريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يُمكِن إحاطة السلك بها.



يُبيِّن الشكل الآتي صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، وطول ضلع القاعدة x cm، ومجموع أطوال أحرفه 144 cm، فأجد كُلًّا ممّا يلي:

42 الاقتران الذي يُمثِّل حجم الصندوق بدلالة x.

43 قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

44 $2x^3 + 4y^2 = -12, (-2, -1)$

45 $x^3 - x^2y^2 = -9, (3, -2)$

اجابات كتاب الطالب

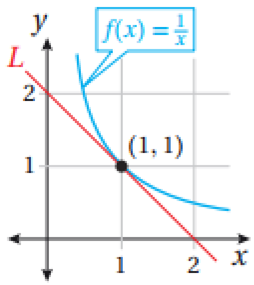
وحدة تطبيقات التفاضل

AWA2EL
LEARN 2 BE

اعداد

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس



مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$:

1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L؟

	مسألة اليوم صفحة 92
1	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ميل المنحنى عند النقطة$(1,1)$هو: $f'(1)=-\frac{1}{1}=-1$
2	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{0-2}=-1$
3	نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1,1)$ وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.
	أتحقق من فهمي صفحة 93
	$f'(x)=3x^2-6x+2$ $f'(3)=27-18+2=11$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ بتعويض $a=3$: $y-f(3)=f'(3)(x-3)$ $y-5=11(x-3)$ $y-5=11x-33$ $y=11x-28$

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 94</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \rightarrow (1,1)$
$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$
$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس:
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ بتعويض $a = 1$
$y - 1 = 1(x-1)$
$y - 1 = x - 1$
$y = x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 96</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{4}$
$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$2\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{x} = 2$
$x = 4$
$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$
نقطة التماس هي $(4, -1)$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$, $f'(x) = 0$
$f'(x) = -3x^2 + 6x$
$0 = -3x^2 + 6x$
$3x(-x + 2) = 0$
$x = 0 \quad or \quad x = 2$
$f(0) = -2$
$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$
نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 97	
	$f(x) = \ln x^3 \ , \ (1,0)$ $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$ $f'(1) = \frac{3}{1} = 3$ ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$ $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ معادلة العمودي على المماس $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ بتعويض $a = 1$ $y - 0 = -\frac{1}{3}(x-1)$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 98	
1	$f(x) = x^3 - 6x + 3 \ , \ (2,-1) \ , \ f(2) = -1$ $f'(x) = 3x^2 - 6$ $f'(2) = 12 - 6 = 6$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ $y - (-1) = 6(x-2)$ $y + 1 = 6x - 12$ $y = 6x - 13$
2	$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2 \ , \ (1,-2) \ , \ f(1) = -2$ $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f'(1) = 3 - 6 = -3$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - (-2) = -3(x-1)$ $y + 2 = -3x + 3$ $y = -3x + 1$

3	$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$, $(1,0)$, $f(1) = 0$ $f'(x) = (\sqrt{x})(2x) + (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(1) = (1)(2) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ معادلة المماس: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 0 = 2(x - 1)$ $y = 2x - 2$
4	$f(x) = x + \frac{4}{x}$, $(-4,-5)$, $f(-4) = -5$ $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ $f'(-4) = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ معادلة المماس: $y - f(-4) = f'(-4)(x - (-4))$ $y - (-5) = \frac{3}{4}(x + 4)$ $y + 5 = \frac{3}{4}x + 3$ $y = \frac{3}{4}x - 2$
5	$f(x) = x + e^x$, $(0,1)$, $f(0) = 1$ $f'(x) = 1 + e^x$ $f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ معادلة المماس: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $y - 1 = 2(x - 0)$ $y - 1 = 2x$ $y = 2x + 1$

6	$f(x)=\ln(x+e)$, $(0,1)$, $f(0)=1$ $f'(x)=\frac{1}{x+e}$ $f'(0)=\frac{1}{0+e}=\frac{1}{e}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}x$ $y=\frac{1}{e}x+1$
7	$f(x)=\sqrt{x-7}$, $x=16$ $f(16)=\sqrt{16-7}=3 \rightarrow (16,3)$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-7}}$ $f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16-7}}=\frac{1}{6}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(16)=f'(16)(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}$ $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

8	$f(x) = (x-1)e^x$, $x = 1$ $f(1) = (1-1)e^1 = 0 \rightarrow (1,0)$ $f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$ $f'(1) = 1e^1 = e$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 0 = e(x-1)$ $y = ex - e$
9	$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$, $x = 4$ $f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \rightarrow (4,7)$ $f'(x) = \frac{(x-3)(1)-(x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$ $f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(4) = f'(4)(x-4)$ $y - 7 = -6(x-4)$ $y - 7 = -6x + 24$ $y = -6x + 31$

10	$f(x) = (\ln x)^2$, $x = e$ $f(e) = (\ln e)^2 = 1 \rightarrow (e, 1)$ $f'(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$ $f'(e) = 2(\ln e)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ معادلة المماس: $y - f(e) = f'(e)(x - e)$ $y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$ $y - 1 = \frac{2}{e}x + 2$ $y = \frac{2}{e}x + 3$
11	$f(x) = (3x + 10)^2$, $(-3, 1)$ $f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$ $f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$ ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$ $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(-3) = -\frac{1}{f'(-3)}(x - (-3))$ $y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$ $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

12	$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$, $(4,1)$ $f'(x)=\frac{-3\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$ $f'(4)=\frac{-3\times\frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1}=-\frac{1}{9}$ ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9 معادلة العمودي على المماس: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y-f(4)=9(x-4)$ $y-1=9(x-4)$ $y=9x-35$
13	نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة $(-4,0)$ أي أنّ $f(-4)=0$ $f'(x)=\frac{1}{x+5}$ $f'(-4)=\frac{1}{-4+5}=1$ معادلة العمودي على المماس: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y-f(-4)=-\frac{1}{f'(-4)}(x-(-4))$ $y-0=-\frac{1}{1}(x+4)$ $y=-x-4$

14	عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون x=0 ويكون $y = \ln(0+5) = \ln 5$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, \ln 5)$ $f'(x) = \dfrac{1}{x+5}$ $f'(0) = \dfrac{1}{0+5} = \dfrac{1}{5}$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\dfrac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - \ln 5 = -5(x-0)$ $y = -5x + \ln 5$
15	$f(x) = 4e^{2x+1}$ $f(-1) = 4e^{-2+1} = \dfrac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \dfrac{4}{e}\right)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(-1) = 8e^{-2+1} = \dfrac{8}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x - -1)$ $y - \dfrac{4}{e} = \dfrac{8}{e}(x+1)$ $y - \dfrac{4}{e} = \dfrac{8}{e}x + \dfrac{8}{e}$ $y = \dfrac{8}{e}x + \dfrac{12}{e}$

16	$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \quad \rightarrow \quad (0, 4e)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, 4e)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$ $y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$ $y = -\frac{1}{8e}x + 4e$
17	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $3 = 2x - 1$ $4 = 2x$ $x = 2$ $f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$ النقطة هي $(2, -10)$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \rightarrow \quad y - (-10) = 3(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 3x - 16$
18	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $0 = 3x^2 - 8x$ $x(3x - 8) = 0$ $x = 0 \quad or \quad 3x - 8 = 0 \quad \rightarrow 3x = 8 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(2, -\frac{364}{27}\right)$

19	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$ $f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}(1)}{2x-1}$ $0=\dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}}{2x-1}$ $\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}=0$ $\frac{x}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$ $x=2x-1$ $x=1$ $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2-1}}=1$ النقطة هي $(1,1)$
20	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x)=1$ $f'(x)=10x-49$ $1=10x-49$ $10x=50$ $x=5$ $f(5)=5(5)^2-49(5)+12=125-245+12=-108$ النقطة هي $(5,-108)$
21	$f'(x)=6-2x$ $f'(1)=6-2=4$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-5=4(x-1)$ $y-5=4x-4$ $y=4x+1$

22	معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}(x-1) \rightarrow y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$
23	$f'(x) = -2x$ معادلة المماس عند النقطة $(-1,5)$: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$ $y - 5 = 2(x+1)$ $y - 5 = 2x + 2$ $y = 2x + 7$ معادلة المماس عند النقطة $(1,5)$: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 5 = -2(x-1)$ $y - 5 = -2x + 2$ $y = -2x + 7$
24	$2x + 7 = -2x + 7$ $4x = 0$ $x = 0$ $y = -2(0) + 7 = 7$ نقطة تقاطع المماسين هي: $(0,7)$
25	$f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$ معادلة المماس عند النقطة $(1,1)$: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$ $y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

26	معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$ $y - 1 = -2(x - 1)$ $y - 1 = -2x + 2$ $y = -2x + 3$
27	$f(x) = \sqrt{x} - 1$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضًا هو2، إذن: $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$ $4\sqrt{x} = 1$ $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{16}$ $f\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ النقطة هي $\left(\frac{1}{16}, -\frac{3}{4}\right)$

الدرس الثاني: المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع درّاجة نارية تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار. أجد الزمن t الذي تكون فيه السرعة المتجهة للدرّاجة $15\ m/s$.

	مسألة اليوم صفحة 100
	$v(t) = t + 15$ $t + 15 = 15 \quad \rightarrow \quad t = 0\ s$
	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$ $f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$
b	$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ $f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$ $f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$
	أتحقق من فهمي صفحة 103
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9\ m/s$
b	بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (إلى اليسار) عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12\ m/s^2$
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$

	أتحقق من فهمي صفحة 104
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0 \text{ m/s}$
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6 \text{ m/s}^2$
c	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $3t^2 - 12t + 9 = 0$ $(3t - 3)(t - 3) = 0$ $t = 1 \quad or \quad t = 3$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 104
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = 2e^x + 2x$ $f''(x) = 2e^x + 2$
3	$f'(x) = -2\sin x - 3x^2$ $f''(x) = -2\cos x - 6x$
4	$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$ $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$
5	$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$ $= (x+6)^5(9x^3 + 18x^2)$ $f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x)$ $= (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$
6	$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$ $= x^6 + (\ln x)(7x^6)$ $f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$ $= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$

7	$f'(x)=\frac{(x+2)(1)-(x)(1)}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$ $f''(x)=\frac{-2\times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4}=\frac{-4(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{-4}{(x+2)^3}$
8	$f'(x)=2x\cos x^2$ $f''(x)=(2x)(-2x\sin x^2)+(\cos x^2)(2)=-4x^2\sin x^2+2\cos x^2$
9	$f'(x)=-6x^{-4}$ $f''(x)=24x^{-5}$
10	$f(x)=x^3-\frac{5}{x}=x^3-5x^{-1}$ $f'(x)=3x^2+5x^{-2}$ $f''(x)=6x-10x^{-3}$
11	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x)=-4+2x-3x^2$ $f''(x)=2-6x$
13	$f(x)=8x^3-3x+\frac{4}{x}=8x^3-3x+4x^{-1}$ $f'(x)=24x^2-3-4x^{-2}$ $f''(x)=48x+8x^{-3}$ $f''(-2)=48(-2)+8(-2)^{-3}=-96-1=-97$
14	$f'(x)=\frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x)=\frac{2\times 2\times(2x-4)^1\times 2}{(2x-4)^4}=\frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3)=\frac{8}{(2(3)-4)^3}=\frac{8}{8}=1$
15	$f'(x)=3px^2-6px+1$ $f''(x)=6px-6p$ $f''(2)=6p(2)-6p$ $-1=12p-6p \rightarrow 6p=-1 \rightarrow p=-\frac{1}{6}$

16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 3$
18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
20	$s(t) = \frac{3t}{1+t}$ $v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12 \text{ m/s}$
21	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 4$
22	$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = -0.048 \text{ m/s}^2$
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
25	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $2t - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4$

26	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1)-(x)(6)(5-3x^2)^5(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{(5-3x^2)^5(5-3x^2+36x^2)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$
27	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
28	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون

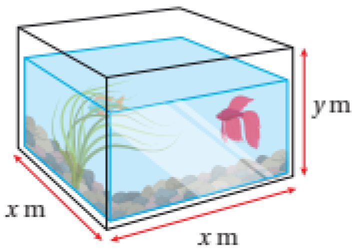
و تكلم الرياضيات بطلاقة

معي انا د. خالد جلال

0799948198

الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم أرادت إسـراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سعته $0.2\ m^3$، وأبعاده كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الحوض التي تجعل كمّية الزجاج المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.



مسألة اليوم صفحة 106

مساحة سطح الحوض المفتوح من الأعلى : $S = 4xy + x^2$

حجم الحوض : $V = x^2y$

$$0.2 = x^2y \rightarrow y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{0.2}{x^2}\right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \rightarrow x^3 = 0.4 \rightarrow x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''(\sqrt[3]{0.4}) = \frac{1.2}{(\sqrt[3]{0.4})^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،
وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4}\ \text{m}, \qquad y = \frac{0.2}{(\sqrt[3]{0.4})^2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 108

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$(3x+2)(x-2) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \quad or \quad x = 2$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$

$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

مساحة المستطيل $A = xy$

محيط المستطيل $P = 2x + 2y$

$54 = 2x + 2y$

$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$

$A = xy$

$A(x) = x(27 - x)$

$= 27x - x^2$

$A'(x) = 27 - 2x$

$27 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25\ \text{m}^2$

أتحقق من فهمي صفحة 111

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xh + 2x^2$

حجم الخزان $V = x^2h$

$$2 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = \frac{8}{x^2} \quad \rightarrow 4x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''(\sqrt[3]{2}) = \frac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2}\text{ m}, \quad w = x = \sqrt[3]{2}\text{ m}, \quad h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2}\text{ m}$$

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون

و تكلم الرياضيات بطلاقة

معي انا د.خالد جلال

0799948198

أتحقق من فهمي صفحة 113

حجم الخزان $V = x^2h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \rightarrow 4xh = 54 - x^2 \rightarrow h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{54 - x^2}{4x}\right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \rightarrow 54 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{54}{3} = 18 \rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن ان يكون سالبا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, \quad w = x = \sqrt{18}\, m, \quad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

أتحقق من فهمي صفحة 115

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$
$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$
$$P'(x) = 1732 - 4x$$
$$1732 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

1

$$f'(x) = 2x - 2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\rightarrow 2x = 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

2

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$
$$\rightarrow x = -5 \quad or \quad x = 3$$

القيم الحرجة هي: $x = 3$, $x = -5$

$$f''(x) = -2 - 2x$$
$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$
$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 - \frac{125}{3} = -\frac{365}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$

3	$f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f'(x) = 0 \ \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\rightarrow x = 0 \ , x = \pm 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0 \ , x = 1 , x = -1$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$ $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$ و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي: $f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$
4	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \dfrac{300 - x}{2} = 150 - \dfrac{1}{2}x$
5	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \dfrac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \dfrac{1}{2}x^2$
6	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$, $BC = x = 150 \text{ m}$

7	$V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x\ ,\quad 0 \le x \le 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$	حجم العلبة
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$ قيمة عظمى $V(6)$ إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$	
9	$p(x) = 500 - 0.002x$ $R(x) = (500 - 0.002x)x = 500x - 0.002x^2$	سعر المنتج الواحد هو اقتران الإيراد
10	$P(x) = R(x) - C(x)$ $= (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$ $= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.10x$ $= 498.9x - 0.002x^2 - 300$	اقتران الربح

11	$P'(x) = 498.9 - 0.004x$ $498.9 - 0.004x = 0$ $498.9 = 0.004x$ $x = \frac{498.9}{0.004} = \frac{498900}{4} = 124725$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 124725$ $P''(x) = -0.004$ $P''(124725) = -0.004 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 124725$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 124725 قطعة أكبر ربح ممكن هو: $P(124725) = 498.9(124725) - 0.002(124725)^2 - 300 = 31112351.25$
12	سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(124725) = 500 - 0.002(124725)$ $= 250.55$

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د.خالد جلال
0799948198

حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور
مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

مساحة المثلث: $A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$

حجم المنشور: $V = \frac{1}{2}x^2 l$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$
$$2000 = x^2 l$$
$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$
$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$
$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

13 $A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$
$$2x = \frac{4000}{x^2}$$
$$2x^3 = 4000$$
$$x^3 = 2000$$
$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$
$$A''(x) = 1 + \frac{8000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^3} = 1 + \frac{8000}{2000} = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$
إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}\ ,\ l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2} = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}$$

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

مسألة اليوم خزّان وقود أسطواني الشكل، وقُطْر قاعدته 2 m. إذا مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل $0.5\ m^3/min$، فأجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الوقود فيه، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزّان (V) وارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.

مسألة اليوم صفحة 117

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.5$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=1}$

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi(1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

إذن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل $0.16\ m/min$ تقريبا

أتحقق من فهمي صفحة 119

a

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

b	$10y\frac{dy}{dx} - 2e^x = 4\frac{dy}{dx}$ $10y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 2e^x$ $\frac{dy}{dx}(10y-4) = 2e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y-4}$
c	$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2y\frac{dy}{dx} = -4\sin x$ $(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = -4\sin x - y$ $\frac{dy}{dx}(x+2y) = -4\sin x - y$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+4\sin x}{x+2y}$
أتحقق من فهمي صفحة 120	
	$x^3 + 2y^3 = 6 \qquad , (2,-1)$ $3x^2 + 6y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $3(2)^2 + 6(-1)^2\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x,y) = (2,-1)$ $12 + 6\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{6} = -2$ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(2,-1)$ هو -2 معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y-(-1) = -2(x-2)$ $y+1 = -2x+4$ $y = -2x+3$

أتحقق من فهمي صفحة 121	
	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=4}$ العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(4)^2(3)$ $= 192\pi$ إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi\ cm^3/s$ عندما يكون طول نصف قطره $4\ cm$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 121	
1	$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$ $4y\frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$
2	$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $3y^2\frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$
3	$2x + 2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx}(2 - 2y) = -2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$

4	$2x\frac{dy}{dx}+2y-3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}-7$ $2x\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}(2x-3-2y)=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-7-2y}{2x-3-2y}$
5	$5y^4\frac{dy}{dx}=3x^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{5y^4}$
6	$(x^2)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+(y^3)(2x)+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}(3x^2y^2+1)=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3}{3x^2y^2+1}$
7	$\sqrt{x}+\sin y=16$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}\cos y=0$ $\frac{dy}{dx}\cos y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}$
8	$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(\frac{dy}{dx}e^y\right)+(e^y)(1)$ $e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$

9	$\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\frac{dy}{dx} = -y \sin x$
10	$32y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ $32y\frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$
11	$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 + 6\frac{dy}{dx} = 0$ $2y\frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx}(2y + 6) = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$
12	$9x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $9(2)^2 - 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$ $36 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = 36$ $\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$
13	$4x - 9y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $4(-2) - 9(1)^2\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$ $-8 - 9\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 9\frac{dy}{dx} = -8 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$

14	$2y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ بتعويض $(x,y)=(e,1)$ $2(1)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2e}$
15	$2(y-3)^1\frac{dy}{dx}=4$ بتعويض $(x,y)=(6,1)$ $2(1-3)^1\frac{dy}{dx}=4$ $-4\frac{dy}{dx}=4$ $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{-4}=-1$
16	$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$ بتعويض $(x,y)=(3,4)$ $4(3)+2(4)\frac{dy}{dx}=0$ $12+8\frac{dy}{dx}=0$ $8\frac{dy}{dx}=-12$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(3,4)$ هو $-\frac{3}{2}$
17	معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-4=-\frac{3}{2}(x-3)$ $y-4=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{17}{2}$
18	$2y\frac{dy}{dx}+(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+y+2x=0$ بتعويض $(x,y)=(3,-2)$ $2(-2)\frac{dy}{dx}+(3)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(-2)+2(3)=0$ $-4\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-2+6=0 \rightarrow -\frac{dy}{dx}=-4 \rightarrow \frac{dy}{dx}=4$ ميل المماس عند النقطة $(3,-2)$ هو 4

19	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-2) = 4(x - 3)$ $y + 2 = 4x - 12$ $y = 4x - 14$	معادلة المماس:
20	$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$ $y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$	معادلة العمودي على المماس:
21	معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = -6$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{x=30}$ العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V = x^3$ $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ $= 3(30)^2(-6)$ $= -16200$ إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200 \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول ضلعه 30 cm	
22	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=3}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(3)(0.5)$ $= 12\pi$ إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm	

23	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.13$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=0.45}$ العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(0.45)^2(0.13)$ $= 0.1053\pi$ إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi\ cm^3/s$ عندما يكون طول نصف قطره $0.13\ cm$
24	$x^2 + 6y^2 = 10$ $(2)^2 + 6y^2 = 10 \rightarrow 6y^2 = 6 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$ $2x + 12y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$ عند النقطة $(2,1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2)$ $y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ عند النقطة $(2,-1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-1) = \frac{1}{3}(x-2) \rightarrow y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

25	$\ln(xy) = x^2 + y^2$ $\dfrac{(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}$ $(x)\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2\dfrac{dy}{dx}$ $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\dfrac{dy}{dx}$ $x\dfrac{dy}{dx} - 2xy^2\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y - y$ $\dfrac{dy}{dx}(x - 2xy^2) = 2x^2y - y$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$
26	معدل التغير المطلوب $\left.\dfrac{du}{dt}\right\|_{w=64}$ العلاقة التي تربط u مع w هي: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$ $u = 150w^{\frac{2}{3}}$ $\dfrac{du}{dt} = 150 \times \dfrac{2}{3}w^{-\frac{1}{3}}\dfrac{dw}{dt}$ لكن $w = 0.05t + 8$ ، إذن: $\dfrac{dw}{dt} = 0.05$ $\left.\dfrac{du}{dt}\right\|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3}(64)^{-\frac{1}{3}}(0.05)$ $= 150 \times \frac{2}{3}\frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}}(0.05)$ $= 150 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4}(0.05) = 1.25$

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x) = x^2 - 7x + 10 \quad (2,0)$ $f'(x) = 2x - 7$ $f'(2) = 4 - 7 = -3$ $y - 0 = -3(x - 2)$ معادلة المماس:
9	$f(x) = x^2 + 6 - \frac{8}{\sqrt{x}} \quad (4,12)$ $f'(x) = 2x + \frac{8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4) = 2(4) + \frac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ معادلة المماس: $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$

10	$f(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad (1,1)$ $f'(x) = \frac{(x)(2)-(2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ $y-1 = 1(x-1)$ معادلة المماس: $y-1 = x-1$ $y = x$
11	$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} \qquad (4,1)$ $f'(x) = \frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1} = \frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ $f'(4) = \frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9}$ $y-1 = -\frac{1}{9}(x-4)$ معادلة المماس: $y-1 = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$ $y = -\frac{1}{9}x + \frac{13}{9}$
12	$f(x) = (x-7)(x+4) \qquad ,x=1$ $f(1) = (1-7)(1+4) = -30 \quad \rightarrow \quad (1,-30)$ $f'(x) = (x-7)(1) + (x+4)(1)$ $f'(1) = (1-7) + (1+4) = -1$ $y-(-30) = -1(x-1)$ معادلة المماس: $y+30 = -x+1$ $y = -x-29$

13	$f(x)=\dfrac{x}{x+4} \qquad ,x=-5$ $f(-5)=\dfrac{-5}{-5+4}=5 \qquad \to \ (-5,5)$ $f'(x)=\dfrac{(x+4)(1)-(x)(1)}{(x+4)^2}=\dfrac{4}{(x+4)^2}$ $f'(-5)=\dfrac{4}{(-5+4)^2}=4$ معادلة المماس: $y-5=4(x+5)$ $y-5=4x+20$ $y=4x+25$
14	$f(x)=2x^4+9x^3+x \qquad ,x=-2 \quad (-2,-42)$ $f(-2)=2(-2)^4+9(-2)^3+(-2)=-42$ $f'(x)=8x^3+27x^2+1$ $f'(-2)=8(-2)^3+27(-2)^2+1=45$ معادلة المماس: $y-(-42)=45(x+2)$ $y+42=45x+90$ $y=45x+48$
15	$f(x)=7x^3+6x-5 \qquad , \quad x=2$ $f(2)=7(2)^3+6(2)-5=63$ $f'(x)=21x^2+6$ $f'(2)=21(2)^2+6=90$ معادلة العمودي على المماس $y-63=-\frac{1}{90}(x-2)$ $y-63=-\dfrac{1}{90}x+\dfrac{1}{45}$ $y=-\dfrac{1}{90}x+\dfrac{2836}{45}$

16	$f(x)=\frac{6x^2-x^3}{4x^4}=\frac{3}{2}x^{-2}-\frac{1}{4}x^{-1}$, $x=-2$ $f(-2)=\frac{3}{2}(-2)^{-2}-\frac{1}{4}(-2)^{-1}=\frac{3}{2\times(-2)^2}-\frac{1}{4\times(-2)^1}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ $f'(x)=-3x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-2}$ $f'(-2)=\frac{-3}{(-2)^3}+\frac{1}{4\times(-2)^2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ معادلة العمودي على المماس $y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}(x+2)$ $y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}$ $y=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}+\frac{1}{2}$ $y=-\frac{16}{7}x-\frac{57}{14}$
17	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$ $f'(x)=4x^3-9x^2$ $4x^3-9x^2=0$ $x^2(4x-9)=0$ $x=0$ or $4x-9=0 \to 4x=9 \to x=\frac{9}{4}$ $f(0)=(0)^4-3(0)^3+1=1$ $f\left(\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^4-3\left(\frac{9}{4}\right)^3+1=-\frac{1931}{256}$ النقاط هي $(0,1),\left(2,-\frac{1931}{256}\right)$
18	ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x)=12$ $f'(x)=3x^2$ $3x^2=12$ $x^2=4\to x=2$ or $x=-2$ $f(2)=(2)^3-3=5$ $f(-2)=(-2)^3-3=-11$ النقاط هي $(2,5),(-2,-11)$

19	$f'(x) = 8x - 5$ $f''(x) = 8$
20	$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$
21	$f'(x) = 10 - \left((2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(2)\right)$ $= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$ $= 10 - 3\sqrt{x}$ $f''(x) = -3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$
22	$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
23	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad , x = 1$ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ $f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$

24	معدل التغير المعطى: $\frac{dA}{dt} = 50$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=20}$ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20)\frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0$ m/s
26	بما أن السرعة المتجهة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0$ m/s^2
28	يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرا $3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)(t-2) = 0$ $t = 2$
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8$ m/s
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4$ m/s^2
31	يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرا لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t+1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفرا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدا.

32	$f'(x) = 24 - 6x^2$ $24 - 6x^2 = 0$ $6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$ القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$ $f''(x) = -12x$ $f''(-2) = 24 > 0$ $f''(2) = -24 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$ و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$
33	$f'(x) = 3(3x-2)^2(3) - 9$ $= 9(3x-2)^2 - 9$ $9(3x-2)^2 - 9 = 0$ $(3x-2)^2 = 1 \rightarrow 3x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1 \text{ or } x = \frac{1}{3}$ القيمة الحرجة هي: $x = 1, x = \frac{1}{3}$ $f''(x) = 18(3x-2)^1(3) = 54(3x-2)$ $f''(1) = 54 > 0$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3-2)^3 - 9 = -8$ وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3(\frac{1}{3}) - 2\right)^3 - 9(\frac{1}{3}) = -4$

<table>
<tr>
<td>34</td>
<td>
$f(x) = 4x^5 - 10x^2$
$f'(x) = 20x^4 - 20x$
$20x^4 - 20x = 0$
$20\,x(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\; or \;\; x = 1$
القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$
$f''(x) = 80x^3 - 20$
$f''(0) = -20 < 0$
$f''(1) = 60 > 0$
إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$
و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>35</td>
<td>
معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 800$
معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=60}$
العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$
$800 = 2\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$
$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{7200\pi} = \frac{1}{9\pi}$
إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{9\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm
</td>
</tr>
</table>

36	طول السياج مساحة الحظيرة المستطيلة $P = x + 2y$ $A = xy$ $245000 = xy \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{245000}{x}$ $P = x + 2y$ $P(x) = x + 2\left(\dfrac{245000}{x}\right)$ $= x + \dfrac{490000}{x}$ $P'(x) = 1 - \dfrac{490000}{x^2}$ $1 - \dfrac{490000}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{490000}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 490000 \quad \rightarrow \quad x = \pm 700$ لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$ $P''(x) = \dfrac{980000}{x^3}$ $P''(700) = \dfrac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$ $P''(700) = \dfrac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$ وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي: $x = 700\text{ m}$ و $y = \dfrac{245000}{700} = 350\text{ m}$
37	$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ $2y\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy}{dx} = -2x$ $\dfrac{dy}{dx}(2y - 1) = -2x$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{2y - 1}$

38	$2x+6-8\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=0$ $-8\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=-2x-6$ $\frac{dy}{dx}(10y-8)=-2x-6$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-6}{10y-8}$
39	$2y\frac{dy}{dx}+(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2x=0$ بتعويض $(x,y)=(-4,3)$ ينتج أنَ: $2(3)\frac{dy}{dx}+(-4)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(3)(1)+2(-4)=0$ $6\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}+3-8=0$ $2\frac{dy}{dx}=5$ $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(-4,3)$ هو $\frac{5}{2}$
40	معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-3=\frac{5}{2}(x-(-4))$ $y-3=\frac{5}{2}x+10$ $y=\frac{5}{2}x+13$
41	مساحة المستطيل $A(x)=x(10-x)=10x-x^2$ $A'(x)=10-2x$ $10-2x=0 \quad \rightarrow \quad x=5$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x=5$ $A''(x)=-2$ $A''(5)=-2<0$ توجد قيمة عظمى عندما $x=5$ إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5)=10(5)-(5)^2=25\ cm^2$

42	$V = x^2y$ $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$	حجم الصندوق مجموع أطوال الأحرف حجم الصندوق بدلالة x
43	$V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0$ or $x = 12$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$	 توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
44	$6x^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$ $6(-2)^2 + 8(-1)\frac{dy}{dx} = 0$ $24 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 3$	 بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أنّ:

45	$3x^2 - (x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - (y^2)(2x) = 0$ بتعويض $(x,y) = (3,-2)$ ينتج أنّ: $3(3)^2 - (3)^2\left(2(-2)\frac{dy}{dx}\right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$ $27 + 36\frac{dy}{dx} - 24 = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د.خالد جلال
0799948198

جيل

2005

الرياضيات كما ينبغي أن تكون

AWA2EL
LEARN 2 BE

تتضمن الوحدة:

١ - الأمثلة

٢ - أتحقق من فهمي

٣ - التمارين

٤ - اختبار نهاية الوحدة

مع الاجابات الكاملة لكل منها