د. خالد جلال

079 - 9948198

طريق التفوق في الرياضيات للتوجيهي (العلمي) 2005

ملخص شرح وحدة التفاضل

ملخص شرح

وحدة التفاضل

(1) رموز المشتقة الاولى

$f'(x)$ ، y' ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d}{dx}[f(x)]$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، $\lim\limits_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$

ميل المماس ، ميل المنحنى ، $\tan\theta$ (حيث θ زاوية ميل المماس مع الاتجاة الموجب لمحور x)

معدل تغير y بالنسبة الى x

(2) قواعد الاشتقاق

(1) $\frac{d}{dx}[c]=0.$

(2) $\frac{d}{dx}[ax]=a$

(3) $\frac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$ = $(x^n)'=nx^{n-1}$

(4) $\frac{d}{dx}[cf(x)]=cf'(x)$ = $(af(x))'=af'(x)$

(5) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=f'(x)\pm g'(x)$ = $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

(6) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

(7) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},\quad g(x)\neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)\times f'(x)-f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$$

اللهم

اغفرلي و ارحمني

و عافني و اهدني و ارزقني

طريق التفوق في الرياضيات: د. خالد جلال 0799948198 & ا . اياد الحمد 0795604563

(8) $\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{g(x)}\right] = \frac{-a\,g'(x)}{(g(x))^2}$

$$\left(\frac{a}{g}\right)'(x) = \frac{-a\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

(9) $\frac{d}{dx}\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

(10) $\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

(11) مشتقة الاقترانات الدائرية

الحالة الاولى

$$\frac{d}{dx}\begin{array}{|l|l}
\sin x & = \cos x \\
\cos x & = -\sin x \\
\tan x & = \sec^2 x \\
\cot x & = -\csc^2 x \\
\sec x & = \sec x \tan x \\
\csc x & = -\csc x \cot x
\end{array}$$

اللهم

اغفرلي و ارحمني

و عافني و اهدني و ارزقني

الحالة الثانية

$$\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos(g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos g(x)) = -\sin(g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan g(x)) = \sec^2(g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc g(x)) = -\csc(g(x))\cot(g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec g(x)) = \sec(g(x))\tan(g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot g(x)) = -\csc^2(g(x)) \times g'(x)$$

الحالة الثالثة

$\frac{d}{dx}\sin^m g(x) =$ القوة x الاقتران الدائري $^{\text{القوة - 1}}$ x مشتقة الاقتران الدائري x مشتقة الزاوية

ملحوظة : ما ينطبق على اقتران ال $\sin^m g(x)$ ينطبق على بقية الاقترانات

(12) مشتقة الاقتران المتشعب عند النقطة $x = c$

أولا : اذا كانت $x = c$ ليست نقطة تشعب **نختار القاعدة المناسبة** ثم **نشتق** كما تعلمنا بالقواعد ال (11) السابقة

ثانيا : اذا كانت $x = c$ نقطة تشعب نبحث في اتصال الاقتران $f(x)$ فيكون الاتي :

1) الاقتران $f(x)$ **غير متصل عند** $x = c$ فإنَّ $f'(c)$ غير موجودة أو الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x = c$

2) الاقتران $f(x)$ **متصل عند** $x = c$ لذلك نجد المشتقة **بأستخدام التعريف العام** كما يلي :

$$f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad\qquad f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اذا كان $f'(c^-) \neq f'(c^+)$ فإنَّ $f'(c)$ غير موجودة:

اذا كان $f'(c^-) = f'(c^+)$ فان $f'(c)$ تكون موجودة

(13) مشتقة اقتران القيمة المطلقة عند النقطة $x = c$

نقوم باعادة تعريف أقتران القيمة المطلقة عند النقطة $x = c$ ينتج ما يلي :

1) اقتران له قاعدة واحدة نشتقه بالقواعد ال (11) كما تعلمنا سابقا

2) أو ينتج أقتران متشعب نشتقه كما تعلمنا في القاعدة رقم (12) الفقرة (2

ملحوظة مهمة :

اذا كان $f(x)$ أقتران متشعب و النقطة $x = c$ نقطة تشعب فانه :

1) اذا كان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x = c$ أو $f'(c)$ موجودة فاننا **نستفيد** ما يلي :

- الاقتران متصل عند $x = c$ (أي أن النهاية اليمنى = النهاية اليسرى)
- المشتقة اليمنى = المشتقة اليسرى

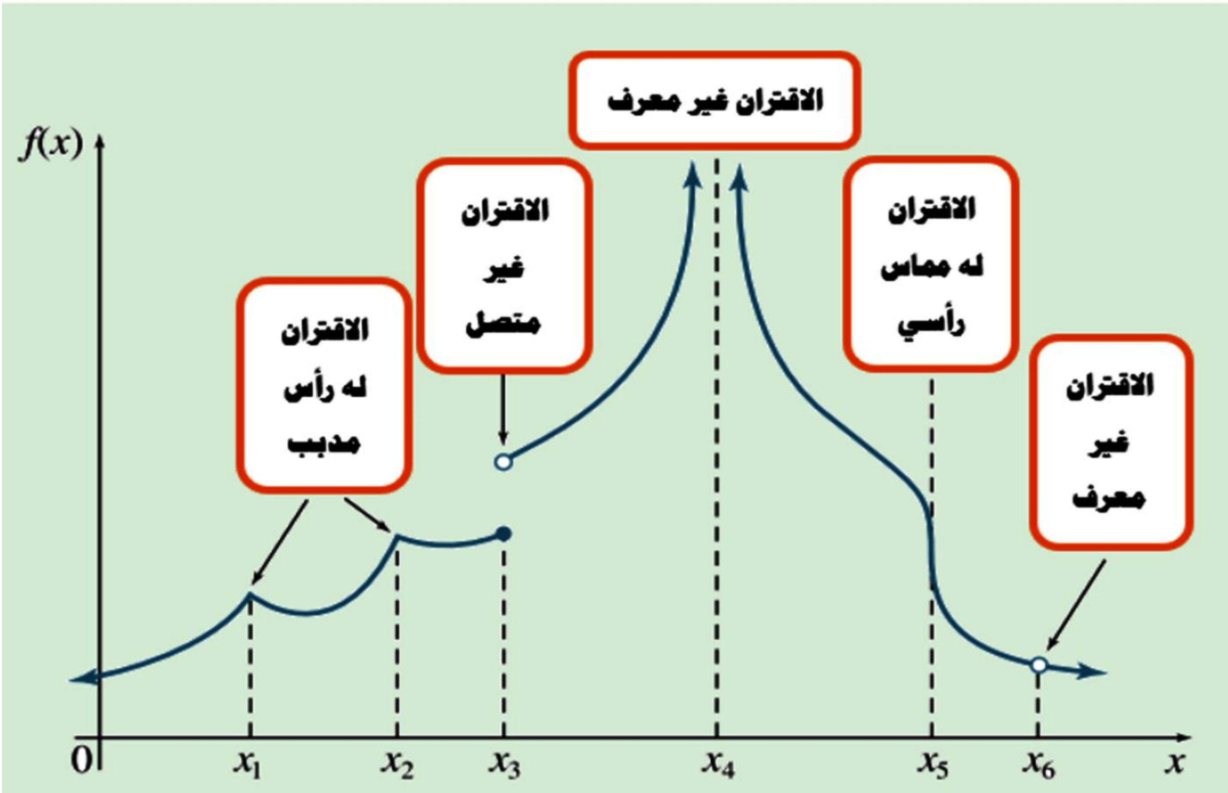
و بذلك نستطيع ايجاد قيمة ثابتين فقط

2) اذا كان $f'(c) = k$ فاننا **نستفيد** ما يلي :

- الاقتران متصل عند $x = c$ (أي أن النهاية اليمنى = النهاية اليسرى)
- المشتقة اليمنى = k ، ■ المشتقة اليسرى = k

و بذلك نستطيع ايجاد قيمة ثلاث ثوابت فقط

الحالات التي تكون فيها المشتقة غير موجودة من الرسم



الشكل السابق يمثل الحالات التي لا تكون فيها للأقتران مشتقة عند نقطة معينة و هي :

1) النقاط التي يكون فيها الأقتران غير معرف مثل x_4 و x_6

2) النقاط التي يكون فيها الأقتران غير متصل مثل x_3

3) النقاط التي يكون فيها الأقتران معرف و متصل من دون أن تكون المشتقة موجودة متل x_1 و x_2

4) النقاط التي يكون فيها لمنحنى الأقتران مماس رأسي متل x_5

اللهم
اغفرلي و ارحمني
و عافني و اهدني و ارزقني

(14) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$f(x) = \ln g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

(15) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي العادي

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

(16) مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$$

(17) مشتقة الاقتران الاسي العادي

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

(18) قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

(19) مشتقة الاقترانات الوسيطية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

(20) مشتقة الاقتران المركب

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \rightarrow \quad (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

(21) الاشتقاق الضمني

نشتق الطرف الايمن و الايسر مع مراعاة قواعد الاشتقاق

ملحوظة : قد يطلب في بعض الاسئلة استخدام الاشتقاق اللوغاريتمي فنتبع الخطوات الاتية :

- نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة
- نطبق قوانين اللوغاريتمات
- نشتق الطرفين ضمنيا بالنسبة الى x
- ضرب تبادلي
- ثم نعوض مكان y

اللهم

اغفرلي و ارحمني

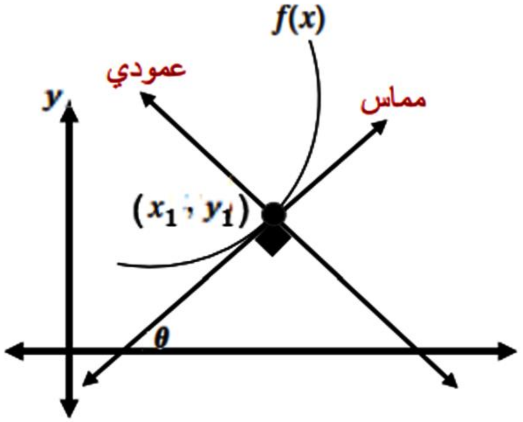
و عافني و اهدني و ارزقني

الحالات التي يستخدم فيها التعريف العام للمشتقة

1) اذا ذكر نصا في السؤال أوجد المشتقة الاولى للاقتران باستخدام التعريف العام
2) اذا طلب مشتقة أقتران متشعب عند نقطة التشعب (بشرط يكون متصل عندها)
3) اذا طلب مشتقة أقتران القيمة المطلقة عند أصفاره

(3) تطبيقات هندسية

تفسر المشتقة الأولى هندسيا بأنها ميل المنحنى
أو ميل المماس لمنحنى الأقتران $f(x)$ عند نقطة
التماس (x_1 , y_1) و يرمز للميل بالرمز m
حيث $m = f'(x) = \tan\theta$
θ زاوية ميل المماس مع الإتجاه الموجب
لمحور السينات كما بالشكل المجاور :



المطلوب بدرس التطبيقات الهندسية

1) إيجاد ميل المماس m ، و ميل العمودي على المماس
2) إيجاد قياس زاوية ميل المماس θ
3) إيجاد معادلة المماس و معادلة العمودي على المماس
4) إيجاد إحداثيات نقطة او نقط التماس (x_1 , y_1)
5) حساب الثوابت

اللهم
اغفرلي و ارحمني
و عافني و اهدني و ارزقني

(4) المشتقات العليا

اذا كان $f(x)$ اقتران مشتقته $f'(x)$ و التي تسمى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ و اذا كان $f'(x)$ قابل للاشتقاق فان مشتقته $f''(x)$ تسمى المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ وهكذا حتى المشتقة الرابعة $f^{(4)}(x)$

و يشير الرمز $f^{(n)}$ الى المشتقة رقم n و عند التعويض عن n = 1 تكون المشتقة الاولى

و عند التعويض عن n = 2 تكون المشتقة الثانية

و عند التعويض عن n = 3 تكون المشتقة الثالثة

و عند التعويض عن n = 4 تكون المشتقة الرابعة

(5) تطبيقات فيزيائية

1) يمثل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

2) و سرعته المتجهة تمثل بالاقتران $v(t)$ حيث $v(t) = s'(t)$ أما سرعته فهي $|v(t)|$

3) و تسارعه المتجهة $a(t)$ حيث $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

بعض المفاهيم

1) اذا كانت قيمة $v(t) > 0$ فان الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (الى اليمين)

2) اذا كانت قيمة $v(t) < 0$ فان الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (الى اليسار)

3) اذا كانت $v(t) = 0$ فان الجسم يكون في حالة سكون

4) يعود الجسم لموقعه الابتدائي عندما $s(t) = s(0)$

5) تسمى النقطة 0 على خط الاعداد نقطة الاصل

6) انعدام السرعة يعني $v(t) = 0$.

7) انعدام التسارع يعني $a(t) = 0$

اللهم

اغفرلي و ارحمني

و عافني و اهدني و ارزقني

(6) الحركة التوافقية البسيطة

نعلم من الفيزياء ان الحركة الدورية هي الحركة التى تكرر نفسها على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية وتتضمن

1) الحركة الاهتزازية (التذبذبية)
2) الحركة الدورانية
3) الحركة الدائرية

الحركة الاهتزازية : هي حركة دورية تكرر نفسها ذهابا و ايابا على المسار نفسه في فترات زمنية حول موقع الاتزان

موقع الاتزان : هو موقع الجسم قبل ان يتحرك و عنده تكون القوة المحصلة المؤثرة في الجسم تساوي صفر

و عند موقع الاتزان تكون ازاحة الجسم تساوي صفر

و كذلك استطالة النابض او انضغاطه تساوي صفر

عند ازاحة الجسم الى اليمين أو الى اليسار (للاسفل أو للأعلى) فان النابض يؤثر بقوة في الجسم لاعادته الى موقع الاتزان

تسمى القوة المعيدة و يكون اتجاه القوة المعيدة بعكس اتجاه الازاحة

القوة المعيدة و التسارع عند اقصى ازاحة تكونا اكبر ما يمكن و السرعة تساوي صفر

و السرعة تكون اكبر ما يمكن عند موقع الاتزان

الحركة التوافقية البسيطة : هي حركة اهتزازية تتناسب فيها القوة المعيدة طرديا مع الازاحة باتجاه معاكس لها

اذا بدأت الحركة التوافقية البسيطة من موقع الاتزان فانها تمثل بيانيا بمنحنى اقتران ال (sin t)

اذا بدأت الحركة التوافقية البسيطة من اقصى ازاحة فانها تمثل بيانيا بمنحنى اقتران ال (cos t)

اللهم
اغفرلي و ارحمني
و عافني و اهدني و ارزقني