الوحدة الثانية

الحركةُ الدورانيّة

Rotational Motion

مقدمة : الراديان

الدرس الأول : العزم والاتزان السكوني

1. **العزم**

أ. إيجاد العزم المحصّل   ب. الازدواج

2. **الاتزان**
3. **مركز الكتلة**

حل (مراجعة الدرس ، كتاب الأنشطة ، أسئلة إضافية)

الدرس الثاني : ديناميكا الحركة الدورانية

1. **وصفُ الحركة الدورانيّة**

أ. الإزاحة الزاويّة   ب . السرعة الزاويّة   ج. التسارع الزاويّ

2. **عزم القُصور الذاتيّ والقانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية**

حل (مراجعة الدرس ، كتاب الأنشطة ، أسئلة إضافية)

الدرس الثالث : الزخم الزاوي

1. **الطاقة الحركيّة الدورانيّة**
2. **الزخَم الزاويّ وحفظهُ**

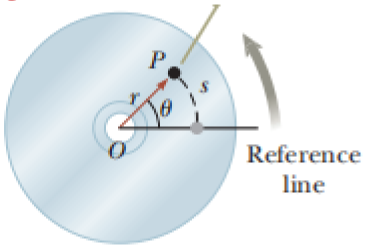
أ. الزخَم الزاويّ   ب. حفظُ الزخَم الزاويّ

الإثراء والتوسع : اتزان الجسور

حل (مراجعة الدرس ، كتاب الأنشطة ، أسئلة إضافية ، أسئلة الوحدة)

الراديان: radians

الزاوية نصف القطرية (الراديان أو التقدير الدائري) : وتعرف بأنها الزاوية المركزية الموضوعة على مركز الدائرة والتي تحدد قوساً طوله مساوي لنصف قطر الدائرة.
يعادل الراديان الواحد (57.3°).



عند يتحرك جسم حركة دورانية حول محور ثابت عمودي عليه؛ كما في الشكل المجاور الذي يمثل حركة جسم على بعد (r) عن محور الدوران باستخدام الإحداثيات القطبية (r , θ) ،حيث (θ) هي الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم الواصل بين الجسم ومحور الدوران مع الخط المرجعي (محور $+x$) مقاسة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ويشكل قوس دائري طوله (s) وعند حساب طول القوس بدلالة نصف القطر (r) وزاوية الدوران (θ) باستخدام العلاقة ($s = r\,\theta$) فان:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

وعند دوران الجسم دورة كاملة يمسح زاوية مقدارها (360°) ، وبما أن محيط الدائرة يساوي ($2\pi r$)؛ فإن مقدار هذه الزاوية بالرادين يُساوي:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

إذا افترضنا أن طول القوس (s) يساوي طول نصف القطر (r) فان ($s = r$) فيكون ناتج قسمة طول القوس على نصف قطر الدائرة يمثّل الزاوية المركزية ومقدارها $1\ rad$

وهو يساوي مقدار الزاوية المقابلة لقوس طوله يساوي قطر الدائرة التي يشكّل القوس جزءًا منها. ويكون قياس الزاوية بوحدة الدرجات مساوي (57.3°) تقريبا حيث :

$$1\text{rad} = \frac{360}{2\pi} \approx 57.3°$$

للتحويل بين الراديان والدرجات نستخدم العلاقة:

$$\theta\ (\text{rad}) = \frac{\pi}{180}\,\theta\ (\text{deg})$$

لماذا نستخدم الراديان بدل الدرجات في وصف الحركة الدورانية؟

يعتبر الراديان أكثر حيوية في العمليات الرياضية من الدرجات، إذ يعبر الراديان عن طول القوس المقابل للزاوية بالنسبة لنصف القطر، بينما الدرجات لا تعطي أي فكرة عن طول القوس أو نصف القطر، لذلك يستخدم الراديان لوصف الحركة الدورانية.

1. كم درجة في واحد راد؟
2. كم راد في درجة واحدة؟

الحل:

1. كم درجة في واحد راد.

$$\theta\ (\text{rad}) = \frac{\pi}{180}\ \theta\ (\text{deg})$$

$$\theta\ (\text{deg})\ 1 = \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{1}{\pi/180} \approx 57.3° = \theta\ (\text{deg}) \ \rightarrow$$

2. كم راد في درجة واحدة؟

$$\theta\ (\text{rad}) = \frac{\pi}{180}\ \theta\ (\text{deg})$$

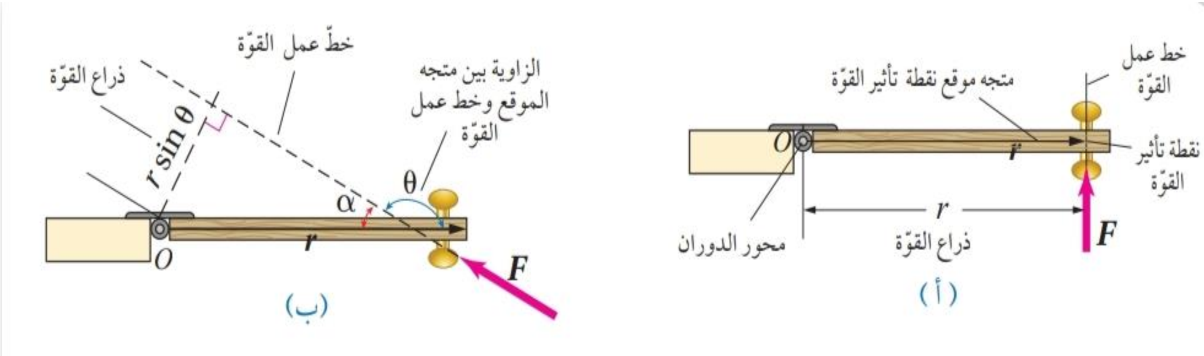
$$= \quad \frac{\pi}{180}\ (1) = 0.0174\ \text{rad}$$

الدرس الأول : العزم والاتزان السكوني

العزم

العزم Torque : هو مقياس لمقدرة القوة على إحداث دوران لجسم، وهو كمية متجهة، رمزه τ ويعرف رياضيا بأنه يساوي ناتج الضرب المتجهي لمتجه القوة (F) ومتجه موقع نقطة تأثير القوة (r) الذي يبدأ من نقطة على محور الدوران وينتهي عند نقطة تأثير القوة. ويقاس العزم بوحدة N.m حسب النظام الدولي للوحدات.

لحساب العزم مستعينا بالشكل أدناه الذي يمثل مسقط علوي لباب.



الشكل (3):
(أ) طول ذراع القوّة عند تأثير قوّة عموديًا على مستوى سطح الباب،
(ب) وعند تأثيرها بشكلٍ مائل.
(جـ) تأثير ثلاث قوًى متساوية في المقدار في الموقع نفسه.

في الشكل (أ) قوة عمودية على متجه موقع نقطة التأثير فيكون ذراع القوة (r)

في الشكل (ب) قوة مائلة بزاوية (θ) مع محور ($+x$) فيكون ذراع القوة ($r \sin\theta$)

$$r \sin\theta = r \sin\alpha$$

لان مجموع الزاويتان 180 من حساب المثلثات ، لكن يجب التعامل مع θ لأنها تعبر عن الزاوية التي أثرت بها القوة.

في الشكل (ج) القوة (F_3) منطبقة على متجه موقع نقطة التأثير فيكون ذراع القوة صفرا .

ولحساب العزم الناتج من قوة على جسم نستخدم المعادلة التالية :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r \times F \sin\theta$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين ($\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$)

- محور الدوران : خط وهمي رأسي يمر عبر مركز الحركة الدورانية .

لاحظ محور الدوران عند النقطة (0)عمودي على مستوى الصفحة .

- متجه موقع نقطة التأثير القوة ($\mathbf{r}$) يبدأ من نقطة على محور الدوران وينتهي عند نقطة تأثير القوة .
- خط عمل القوة هو امتداد متجه القوة .
- ذراع القوة هو البعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران .

على ماذا يعتمد العزم ؟

1. على مقدار القوة F تناسب طردي .
2. على ذراع القوة $r\,sin\,\theta$ تناسب طردي .

متي ينعدم عزم القوة ؟

1. عندما ينطبق متجه القوة مع متجه موقع نقطة التأثير ويحدث ذلك عندما تكون $(\theta=0)$ أو $(\theta= 180)$
2. عندما تؤثر القوة على محور الدوران($r = \mathbf{0}$)

متى يكون العزم اعلى ما يمكن ؟

1. كلما ابتعدنا عن محور الدوران يزداد ذراع القوة ويزداد العزم .
2. عندما تكون القوة عمودية .

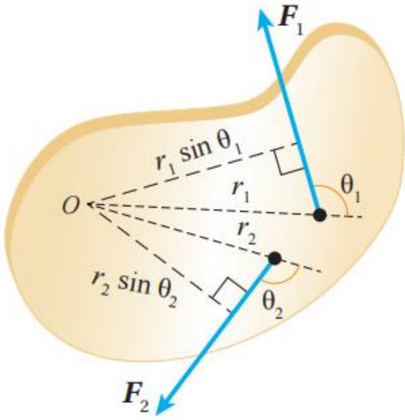
متي يصبح ذراع القوة مساوي لمتجه موقع نقطة التأثير ؟

عندما تكون القوة عمودية ($\theta = 90$) تصبح ($\mathbf{r} = r$) .

- العزم كمية متجهة فيكون موجب عندما يكون الدوران مع عكس عقارب الساعة .

ويكون سالب عندما يكون الدوران مع عقارب الساعة .

إيجاد العزم المحصل



في الشكل المجاور قوتان تؤثران على جسم قابل للدوران حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة عند النقطة (0) ، لإيجاد العزم المحصل المؤثر على الجسم نجمع عزم القوتان مع مراعاة الإشارة كما يلي :

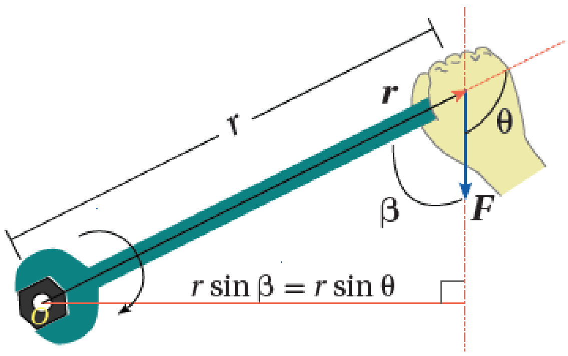
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$= F_1 r_1 \sin\theta_1 + (- F_2 r_2 \sin\theta_2)$$

$$= F_1 r_1 \sin\theta_1 - F_2 r_2 \sin\theta_2$$

إذا كان هناك أكثر من قوة مؤثره على جسم قابل للدوران حول محور، نجد العزم المحصل النهائي بجمع عزم كل قوة على حده ثم جمعها مع مراعاة اتجاه كل قوة، فاذا كانت النتيجة النهائية سالبة فيكون اتجاه الحركة مع عقارب الساعة، وإذا موجبة يكون اتجاه الحركة مع عكس عقارب الساعة.

مثال 1 : كتاب



يستخدمُ زيد مفتاح شدٍّ طوله (25.0 cm) لشد صامولة في درّاجة، حيث أثّر بقوةٍ مقدارُها (1.6×10^2N) في طرف مفتاح الشدِّ في الاتّجاه الموضح في الشكل المجاور فإذا علمت أن مقدار الزاوية (β) يساوي (75°)؛ أحسبُ مقدارَ العزم المؤثّر في المفتاح وأُحدّد اتّجاهه؟

المعطيات:

$r = 25.0\ cm = 0.250\ m,\quad F = 1.60 \times 10^2\ \text{N}, \beta = 75°$

المطلوب: $\tau = ?$

الحلّ:

أستخدم علاقة العزم لحساب عزم قوّة زيدٍ حول محور الدوران المارّ بالنقطة (O)، علمًا أنّ:

(β + θ =180°) فتكون θ = 105° ، و (sin 105° = sin 75°) . أضعُ إشارة السالب لأنّ قوّة زيدٍ تعمل على تدوير مفتاح الشدِّ باتّجاه حركة عقارب الساعة.

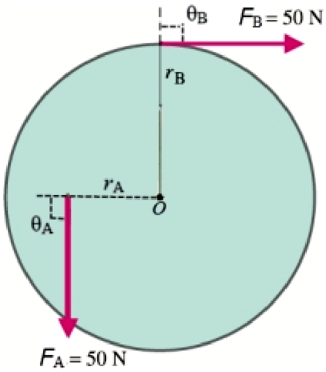
$$\tau = - F r \sin\theta$$

$$= - 1.60 \times 10^2 \times 0.250 \times \sin 105°$$

$$= -38.6\ \text{N.m}$$

مثال 2 : كتاب

بكره مصمتة قطرها (r_B)، يمر في مركزها (0) محور دوران عمودي على مستوى الصفحة، كما هو موضح في الشكل. إذا علمت أن القوة (F_A) تؤثر في البكرة على بعد $(r_A = 30.0cm)$ من محور الدوران، وتؤثر القوة (F_B) عند حافة البكرة حيث $(r_B = 50.0cm)$، واعتماداً على المعلومات المثبتة في الشكل، أحسب مقدار العزم المحصل المؤثر في البكرة، وأحدد اتجاهه؟



المعطيات : $F_A = F_B = 50.0$ N, $r_A = 30.0$ cm = 0.30 m, $r_B = 50.0$ cm = 0.50 m, $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$

المطلوب : $\Sigma\tau = ?$

الحلّ:

تعملُ القوّة (F_A) على تدوير البكرة بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة حول محور دورانها الذي يمر بالنقطة (0) ؛ لذا يكون عزمها موجبًا، أمّا القوّة (F_B) فتعمل على تدويرها باتجاه حركة عقارب الساعة حول محور الدوران نفسه؛ لذا يكون عزمها سالبًا. يصنع (r_A) زاويةً مقدارُها ($90°$) مع خطّ عمل القوّة(F_A) ، ويصنع (r_B) زاويةً مقدارُها $(90°)$ مع خطّ عمل القوّة (F_B) ،

أجد العزم المُحصّل حول محور دوران البكرة كما يأتي:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$= F_A r_A \sin\theta_A - F_B r_B \sin\theta_B$$

$$= 50.0 \times 0.30 \sin 90^\circ - 50.0 \times 0.50 \sin 90^\circ$$

$$= -10.0 \text{ N.m}$$

بما أنّ العزم المحصّل سالبٌ فإنّه يعمل على تدوير البكرة باتّجاه حركة عقارب الساعة حول محور دورانها.

تمرين 1: كتاب

يدفع عامل عربةً كما هو موضّحٌ في الشكل، عن طريق التأثير في مقبضي ذراعيها بقوتين مجموعهما ($F = 1.80 \times 10^2$ N) رأسيًّا إلى أعلى لرفعهما إلى أعلى بزاوية ($25°$) بالنسبة لمحور $+x$ إذا علمتُ أن بُعد كُلّ من مقبضي العربة عن محور الدوران (0) يساوي(1.50 m) ؛ أحسبُ مقدار عزم القوّة (F) المؤثرفي العربة حول محور الدوران، وأُحدّد اتجاهه؟

الحلّ:

الزاوية بين متجه القوة ومتجه موقع نقطة تأثير القوة تساوي($65°$)، و ($\sin65^\circ=0.9$) .

أستخدم علاقة العزم لحساب عزم قوة العامل.

$\boldsymbol{\tau} = Fr\sin\theta$

$= 1.80 \times 10^2 \times 1.5 \times \sin 65^\circ$

$= 245$ N.m

العزم موجب؛ لأن قوة العامل تعمل على تدوير العربة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول محور دورانها.

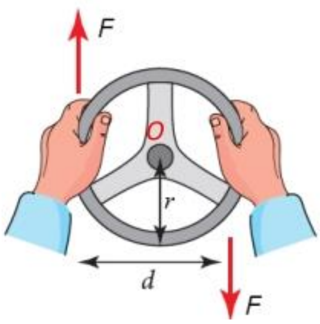
الازدواج Couples

ما المقصود بعزم الازدواج ؟

عزم الازدواج $(\boldsymbol{\tau}_{copuel})$: هو العزم الناتج عن تأثير قوتين متساويتين مقدارا ومتعاكستين اتجاهًا وخطّي عملهما غير متطابقين.

على ماذا يعتمد عزم الازدواج ؟

1. مقدار إحدى القوّتين المتساويتين.
2. والبُعد العمودي بينهما.



نستطيع التعامل مع عزم الازدواج من خلال فهمنا لإيجاد العزم المحصل فهو حالة خاصة عندما تكون القوتان متساويتان ومتعاكستان وغير متطابقتين، فاذا فقدنا أي من الشروط السابقة فلا يسمى ازدواجا، ونتعامل معه كعزم محصل. ولتوضيح عزم الازدواج انظر الي الشكل المجاور. الذي يمثل مقود سيارة تؤثر علية قوتان متساويتان مقدارا و متعاكستان، كل منهما (F) واليد اليمني واليسرى توثران الي أسفل والى الأعلى على بعد(r) من محور الدوران الذي يمر بالنقطة (0) فيكون عزم الازدواج الناتج كما يلي:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$$

$$= -Fr - Fr$$

$$= -F(2r)$$

وبما أن $(d = 2r)$

$$\sum \boldsymbol{\tau} = -Fd$$

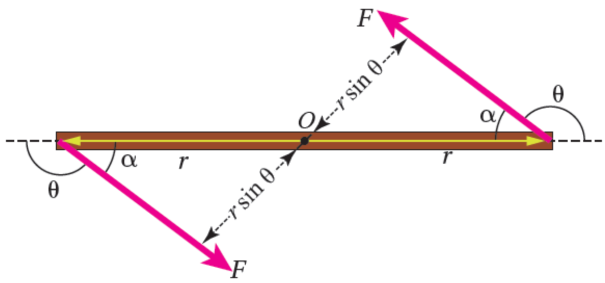
$$\boldsymbol{\tau}_{copuel} = -Fd$$

حيث (d) البُعد العموديُّ بين خطّيّ عمل القوّتين.

يجب ملاحظة أن النتيجة السابقة خاصة بالشكل الذي بنيت علية أي عندما يكون التدوير مع عقارب الساعة، وعندما يكون التدوير عكس اتجاه عقارب الساعة تصبح:

$$\boldsymbol{\tau}_{copuel} = Fd$$

عندما تصنعُ قوتا الازدواج زاوية غير قائمةٍ مع المُتّجه($\boldsymbol{r}$) ، كما هو موضّحٌ في الشكل ، نجد العزم المحصل كما يلي :

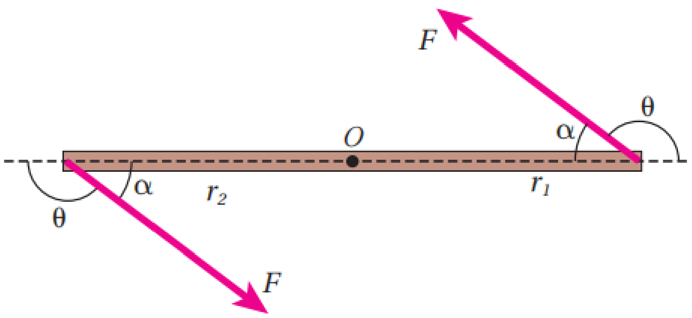


$$\sum \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$$
$$= Fr\sin\theta + Fr\sin\theta$$
$$= 2Fr\sin\theta$$
$$= F(2r\sin\theta)$$
$$= Fd$$

$$\boldsymbol{\tau}_{copuel} = Fd$$

ويعمل عزم الازدواج في الشكل على تدوير القضيب الفلزيّ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة حول محورٍ ثابتٍ عموديٍّ على مستوى الصفحة، يمرُّ بالنقطة (0).

مثال 3: كتاب
مسطرةٌ متريّةٌ فلزيّةٌ قابلةٌ للدوران حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ في منتصفها عند النقطة (0) عموديٍّ على مستوى الصفحة، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور، أثّر فيها قوتان شكّلتا ازدواجًا، فإذا علمتُ أنّ مقدار كلٍّ من القوتين (80.0 N)، ومقدار الزاوية (θ) يساوي (143°)؛ أحسبُ مقدار عزم الازدواج المؤثّر في المسطرة، وأحدّد اتجاه ؟



المعطيات:
$F_1 = F_2 = F = 80.0\ \mathrm{N},\ r_1 = r_2 = \mathrm{r} = 0.50\ \mathrm{m},\ \theta_1 = \theta_2 = 143^\circ$

المطلوب:
$\boldsymbol{\tau}_{copuel} = ?$

الحلّ:

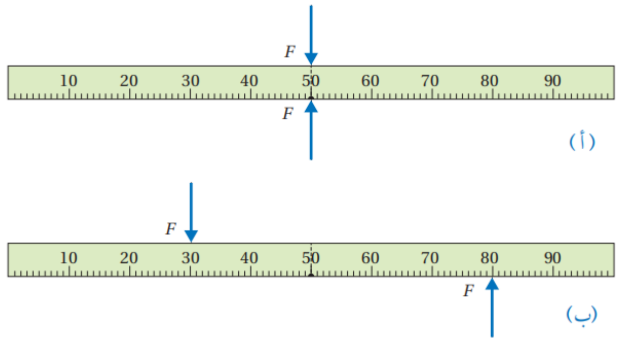
تشكّل القوتان ازدواجًا يعمل على تدوير المسطرة بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ بالنقطة (0). والزاوية (θ)؛ بين مُتّجه القوّة ومُتّجه موقع نقطة تأثير القوّة تساوي (143°) ($\sin 143^\circ = \sin 37^\circ = 0.60$) وأحسبُ مقدار عزم الازدواج كما يأتي:

$$\boldsymbol{\tau}_{copuel} = 2\,Fr\sin\theta$$
$$= 2 \times 80.0 \times 0.50 \sin 143^\circ$$
$$= 48\ \mathrm{N.m}$$

الاتزان Equilibrium

الاتزان : حالة يكون فيها الجسم واقع تحت تأثير عدة قوى محصلتها صفر وعزمها المحصل صفر .

في الشكل أدناه مسطرة متريه اثر عليها قوتين بطريقتين مختلفتين كما يلي:



(أ) خطّا عمل القوتين المؤثّرتين في المسطرة متطابقان،

(ب) خطا عمل القوتين المؤثرتين غير متطابقين.

في الشكل (أ) مسطرةً متريّةً موضوعةً على سطح طاولة؛ وتؤثّر فيها قوتان متساويتان مقدارًا ومتعاكستان اتّجاهًا في الموقع نفسه، حيث تكون المسطرة في حالة اتزان سكوني، لأنّ القّوة المُحصّلة المؤثّرة فيها تساوي صفرًا.

في الشكل (ب) فيوضّح المسطرة نفسَها عند تأثير القوّتين نفسيهما فيها في موقعين مختلفين. هنا لا تكون المسطرة في حالة اتزان بالرغم من أنّ القوّة المحصلة المؤثّرة فيها تساوي صفرًا. وفي هذه الحالة تتحرّك المسطرة حركةً دورانيّة؛ لأنّ خَطَّي عمل القوتين المؤثرتين فيها غير متطابقين، فيكون العزم المُحصّل المؤثر فيها لا يساوي صفرًا.

إذًا؛ لا بُدّ من توفر شرطٍ ثانٍ يُحقّق الاتّزان الدورانيّ للجسم، وهذا الشرط مرتبطٌ بالعزم.

ما أنواع الاتزان ؟

1. اتزان سكوني : الجسم ساكن ،بحيث لا يمتلك حركة انتقالية أي تكون السرعة صفر ويكون مجموع القوى المؤثرة فيه تساوي صفر.
2. اتزان انتقالي : الجسم متحرك بسرعة ثابتة وبخط مستقيم ، ويكون مجموع القوى المؤثرة فيه تساوي صفر.
3. اتزان دوراني : الجسم لا يمتلك حركة دورانية أو يدور بسرعة منتظمة ويكون مجموع العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفرا.

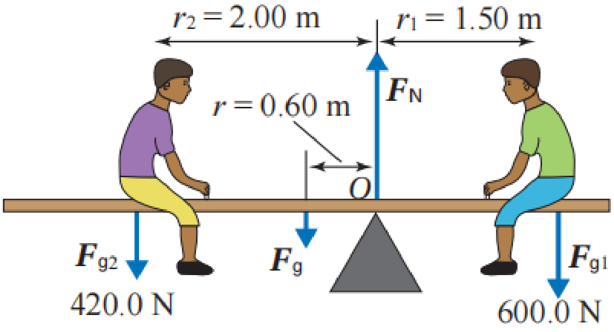
ما هما شرطا الاتزان السكوني؟

الشرط الأول: أن تكونَ القوّة المُحصّلة المؤثّرة فيه تساوي صفرًا $\sum \boldsymbol{F} = 0$.

الشرط الثاني: أن يكونَ العزم المُحصّل المؤثّر فيه يساوي صفرًا $\sum \boldsymbol{\tau} = 0$.

مثال 4: كتاب

يجلس فادي (F_{g1}) وصقر (F_{g2}) على جانبي لعبة اتّزان (see – saw) تتكوّن من لوحٍ خشبيّ منتظمٍ متماثلٍ وزنُه (F_g) يؤثّر في منتصفه، يرتكزُ على نقطةٍ تبعُد (0.60 m) يمين منتصف اللّوح الخشبي إذا كان النظام المكوّن من اللّعبة والطفلين في حالة اتّزان سكونيٍ واللوحُ الخشبيّ في وضعٍ أفقيّ، ومستعيناً بالبيانات المثبتة في الشكل؛ أحسب مقدار ما يأتي:



أ . وزن اللّوح الخشبي.(F_g) .

ب. القوّة (F_N) التي تؤثّر بها نقطة الارتكاز في اللّوح الخشبي.

المعطيات: $F_{g1} = 600.0$ N, $F_{g2} = 420.0$ N, $r = 0.60$ m, $r_1 = 1.50$ m, $r_2 = 2.00$ m

المطلوب: $F_g = ?$ $F_N = ?$

الحلّ:

أ. ألاحظُ أنّ اللّوح الخشبيّ يتأثّر بأربع قوًى، هي: وزني الطفلين (F_{g1}) و(F_{g2})، ووزن اللّوح (F_g) يؤثّر في منتصفه، والقوّة العمودية (F_N) التي تؤثّر بها نقطة الارتكاز في اللوح. وبما أن النظام مُتّزن، ومقدارَي القوّة العمودية، ووزن اللوح غيرُ معلومين؛ فإنّني أُطبّق الشرط الثاني للاتّزان حولَ محورٍ يمرُّ في إحدى نقطتي تأثير هاتين القوّتين؛ إذ أنّ عزم قوّةٍ حولَ محورٍ يمرُّ في نقطة تأثيرها يساوي صفرًا(لأنّ طول ذراع القوّة في هذه الحالة يساوي صفرًا). أُطبّق الشرط الثاني للاتّزان حول محورٍ يمرُّ في نقطة ارتكاز اللوح الخشبيّ (النقطة 0) مع ملاحظة أنّ عزم القوّة العموديّة يساوي صفرًا ($\tau F_{N(0)} = 0$)، واللوح متزنٌ أُفقيًّا؛ لذا فإن($\theta = 90°$)

$$\sum \tau = 0$$

$$F_{g2}\, r_2 + F_g\, r - F_{g1}\, r_1 = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2 + F_g\, r$$

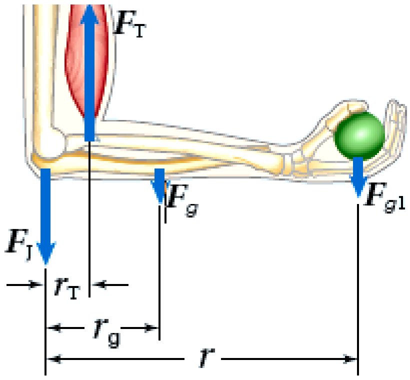
$$600.0 \times 1.50 = 420.0 \times 2.00 + F_g \times 0.60$$

$$F_g = \frac{900 - 840}{0.60}$$

$$= 100 \text{ N}$$

ب. النظام – وبالتالي اللوح الخشبي– في حالة اتّزان سكونيّ، لذا؛ فإنّ القوّة المُحصّلة المؤثّرة فيه تساوي صفرًا حسب الشرط الأول من شرطي الاتّزان. وأُطبّق القانون الثاني لنيوتن في اتّجاه محور y ؛ لأنّه لا توجد قوًى تؤثّر في اتّجاه محور x .

$$\sum F_y = ma_y = 0$$
$$F_N - (F_g + F_{g1} + F_{g2}) = 0$$
$$F_N = F_g + F_{g1} + F_{g2}$$
$$= 100 + 600.0 + 420.0$$
$$= 1120\ N$$



تمرين2: كتاب

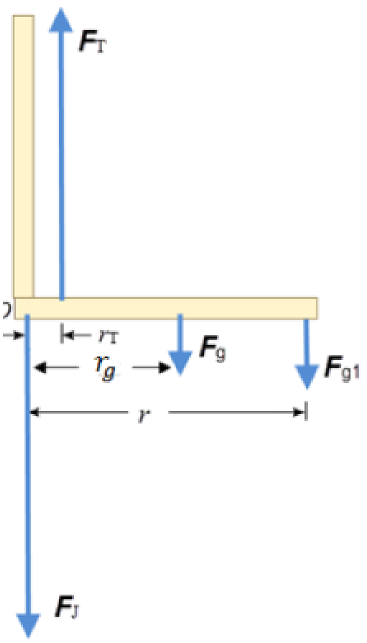
يرفع رجل بيده ثقلاً وزنُه (40.0 N)، في أثناء ممارسته للتمارين الرياضية في نادٍ رياضيّ. إذا علمتُ أنّ نقطة التقاء العضلة ثنائيّةَ الرأس بالساعد تبعدُ (r_T= 5.0 cm) عن المرفق، ووزن عظم الساعد والأنسجة فيه(30.0 N) ويؤثر على بُعد(r_g = 15.0 cm) عن المرفق، وبُعد نقطة تأثير القوّة في اليد (r = 35.0 cm) عن المرفق، والساعد متّزنٌ أفقيا في الوضع الموضّح في الشكل، فأحسبُ مقدار ما يأتي:

أ. قوّة الشدّ في العضلة (F_T) المؤثّرة في الساعد بافتراضها رأسيًّا لأعلى؟

ب. القوّة التي يؤثّر بها المرفق في الساعد (F_J)؟

الحل :

أ. أرسم الساعد والمرفق على شكل قضيبين متعامدين كما هو موضح في الشكل؛ لتبسيط المسألة، حيث(F_T) هي قوة الشد في العضلة المؤثرة في الساعد، و (F_J)هي القوة التي يؤثر بها المرفق في الساعد، و (F_{J1}) وزن الكرة، و (F_g)وزن عظم الساعد والأنسجة فيه. وبما أن النظام في حالة اتزن سكوني، ومقدار كل من قوة الشد في العضلة والقوة التي يؤثر بها المرفق في الساعد غيرمعلوم فإنني أطبّق الشرط الثاني للاتزان حول محور عمودي على الصفحة عبر المرفق (النقطة 0) ؛ لإيجاد مقدار (F_T). إن العزم الناتج عن القوة التي يؤثر بها المرفق في الساعد(F_J) يساوي صفر؛ لأن محور الدوران يمر في نقطة تأثيرها. الساعد متزن أُفقيًّا، لذا فإن ($\theta = 90°$)



$\sum\tau_0 = 0$

$F_T r_T - F_g\, r_g - F_{g1}\, r = 0$
$F_T \times 5.0 \times 10^{-2} - 30.0 \times 15.0 \times 10^{-2} - 40.0 \times 35.0 \times 10^{-2} = 0$
$F_T = 370$ N

ب. النظام في حالة اتزن سكوني، لذا فإن القوة المحصّلة المؤثرة فيه تساوي صفر، ونطبّق القانون الثاني لنيوتن على الساعد في اتجاه محور y لإيجاد مقدار القوة (F_J)؛ لأنه لا توجد قوى تؤثر في اتجاه محور x.

$\sum F_y = ma_y = 0$

F_T - $(F_J + F_g + F_{g1}) = 0$

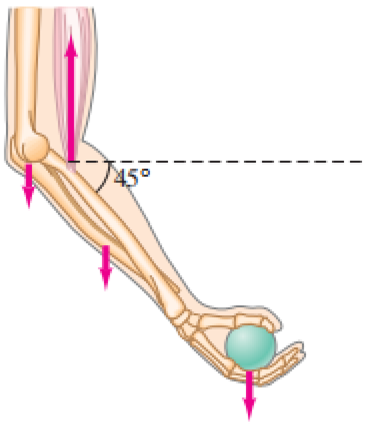
$F_J = F_T - F_g - F_{g1}$

= 370-30.0 - 40.0

= 300 N

مثال 1: إضافي

في المثال السابق اعد حل السؤال إذا كان الساعد يميل بزاوية (45°) عن الوضع الأفقي كما في الشكل :



الحل :

أ.

$\sum\tau_0 = 0$
$F_T r_T \sin 135° - F_g\, r_g \sin 45° - F_{g1}\, r \sin 45° = 0$
$F_T \times 5.0 \times 10^{-2} - 30.0 \times 15.0 \times 10^{-2} - 40.0 \times 35.0 \times 10^{-2} = 0$
$F_T = 370$ N

ب.

$\sum F_y = ma_y = 0$

F_T - $(F_J + F_g + F_{g1}) = 0$

$F_J = F_T - F_g - F_{g1}$

= 370- 30.0 - 40.0

= 300 N

مثال 2: إضافي

في المثال السابق اعد حل السؤال إذا كان الساعد يميل بزاوية (30°) عن الوضع الأفقي .

الحل:

أ.

$$\sum\tau_0 = 0$$

$$F_T r_T \sin 120° - F_g\, r_g \sin 60° - F_{g1}\, r \sin 60° = 0$$

$$F_T \times 5.0 \times 10^{-2} - 30.0 \times 15.0 \times 10^{-2} - 40.0 \times 35.0 \times 10^{-2} = 0$$

$$F_T = 370 \text{ N}$$

ب.

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$F_T - (F_J + F_g + F_{g1}) = 0$$

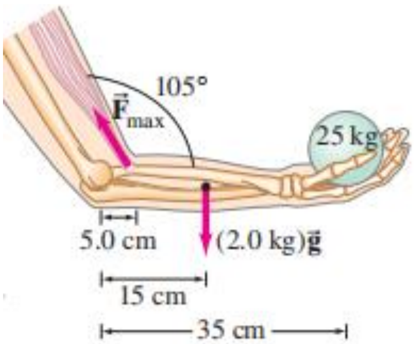
$$F_J = F_T - F_g - F_{g1}$$

$$= 370 - 30.0 - 40.0$$

$$= 300 \text{ N}$$

مثال 3: إضافي

اذا كان اكبر كتلة يستطيع رجل أن يحملها بيده (M= 25 kg)،عند زاوية (105°) للعضلة ثنائية الراس مع الساعد اذا علمتُ أنّ نقطة التقاء العضلة ثنائيّة الرأس بالساعد تبعدُ (r_F=5.0 cm) عن المرفق، وكتلة عظم الساعد والأنسجة فيه(m=2.0 kg) ويؤثر على بُعد (r_m=15.0 cm) عن المرفق، وبُعد نقطة تأثير القوّة في اليد (r_M = 35.0 cm) عن المرفق، والساعد متّزنٌ أفقيا في الوضع الموضّح في الشكل، احسب اعلى قوّة شدّ في العضلة (F_{max}) المؤثّرة في الساعد.



الحل:

$$\sum\tau_0 = 0$$

$$F_{max} r_F \sin 105 - mg\, r_m - Mg\, r_M = 0$$

$$F_{max} \times 0.05 \times 0.97 - 2.0{\times}10 \times 0.15 - 25.0{\times}10 \times 0.35 = 0$$

$$F_{max} \times 0.0485 = 3 + 87.5$$

$$F_{max} = 1866 \text{ N}$$

مركز الكتلة Centre of Mass

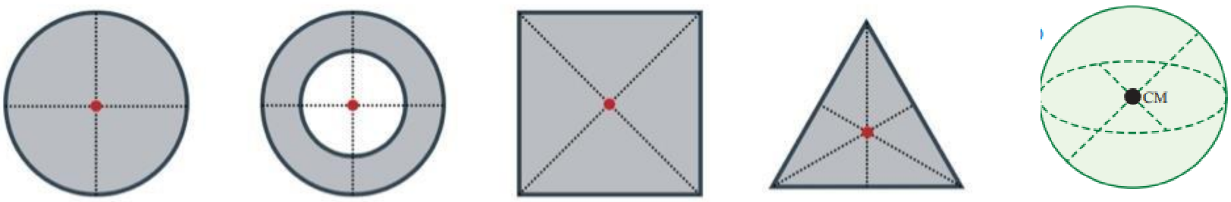
مركز الكتلة (CM) Centre of mass : أنّه النقطة التي يُمكن افتراض كتلة الجسم كاملةً مُركّزةً فيها.
وقد يقعُ مركز الكتلة داخل الجسم أو خارجها اعتمادا على شكل الجسم .

على ماذا يعتمد تحديد مركز الكتلة؟

يعتمد على تماثل الشكل وانتظامه .

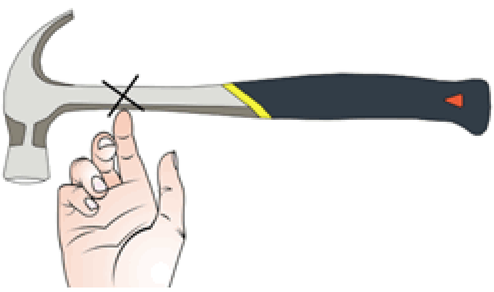
كيف يتم تحديد مركز الكتلة؟

1. الأشكال المنتظمة المتماثلة (التي تتوزع فيها الكتلة بشكل متجانس)، يكون مركز الكتلة فيها مركزها الهندسي مثل المثلث والمربع والمستطيل والدائرة والحلقة الدائرية والكرة واي جسم يمكن تحديد مركزه الهندسي يعتبر نفسه هو مركز الكتلة.



لاحظ في الشكل الأول من اليمين والرابع أن مركز الكتلة واقع على نقطة خارج الجسم (غير موجودة على الجسم نفسه).

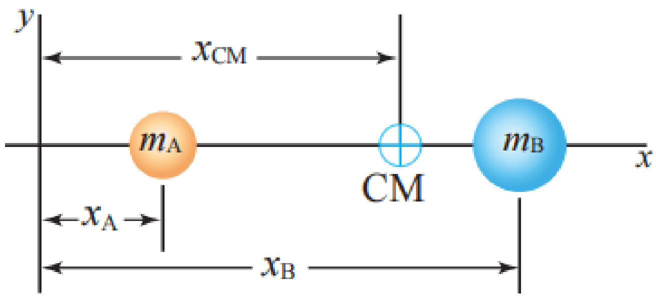
2. الأشكال غير المنظمة (التي لا تتوزع الكتلة فيها بشكل متجانس) أو تختلف المادة المكونة للجسم مثل المطرقة، فيكون مركز كتلتها أقرب للمنطقة التي تحتوي الكتلة الأكبر .



3. جسمين متساويين في الكتلة ،عندما يتكوّن النظام من جسمين كما في الشكل الذي يوضح رافع أثقال يحمل ثقلين متساويين في الكتلة متصلين معًا بقضيبٍ فلزيٍّ مُنتظم؛ فإنّ مركز الكتلة يقع عند منتصف المسافة بين الثقلين.

4. جسمين مختلفين في الكتلة ، فالنظام المكوّن من جسمين مختلفين في الكتلة فإن مركز كتلة النظام يقع على الخطّ الواصل بينهما ويكون أقرب إلى الجسم الأكبر كتلة.

يوضح الشكل نظامًا يتكون من جُسيمين كتلتيهما (m_A, m_B)، يتّصلان معًا بقضيبٍ خفيفٍ يمكنُني إهمال كتلته. ولحساب مركز الكتلة لهذا النظام أختار نظام محاورٍ يقعُ فيه الجُسيمان على محور x عند موقعين (x_A, x_B)، لتحديد الإحداثي x لموقع مركز كتلة النظام (x_{cm})، أستخدمُ العلاقة الآتية:



$$x_{cm} = \frac{m_A\, x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

ولنظامٍ يتكوّن من عددٍ (n) من الجُسيمات الموزّعة على محور x؛ أُحدّد موقع مركز الكتلة كما يأتي:

$$x_{cm} = \frac{m_A\, x_A + m_B x_B + m_C x_C + \dots\dots + m_n x_n}{m_A + m_B + m_C + \dots\dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

حيث (x_i) الإحداثي x للجسيم $(\,i\,)$ ، و $(M=\sum_i m_i)$ الكتلة الكلية للنظام.

أما الجسمُ غير منتظم الشكل، فيكون مركزُ كتلته أقرب إلى المنطقة ذات الكتلة الأكبر.

طريقة تحديد مركز الكتلة عمليا :

أولا: جسم منتظم (مسطرة مترية مثلا أو قضيب يتصل بنهايتيه كتلتين متساويتين)

الموادّ والأدوات: مسطرةٌ متريّة، حامل فلزيّ، خطّاف، قلمُ رصاص، مثقَب.

طريقة العمل:

1 . أضعُ الحامل الفلزيّ على سطح طاولة أُفقيّ، ثم أُثبّت أحد طرفي الخيط بالحامل وطرفه الآخر بالخطّاف.

2 . أُعلّق المسطرة المتريّة بالخطاف من مواقع مختلفة حتى أصل إلى نقطة التعليق التي تصبح عندها المسطرة مستقرّةً بوضعٍ أُفقيّ(مُتّزنة)، وأضع عندها إشارةً باستخدام قلم الرصاص. وأُلاحظ موقع هذه النقطة بالنسبة للمسطرة، مع الانتباه إلى سُمك المسطرة.

3. أقيس بُعدَ النقطة التي اتّزنت المسطرة عند تعليقها منها عن كلٍّ من نهايتيها. أُدون بُعدَ هذه النقطة.

التحليل والاستنتاج: اتزنت المسطرة المترية عند تعليقها من نقطة في منتصف المسافة بين نهايتيها (مركزها الهندسي)، وهذه النقطة هي مركز كتلة المسطرة (cm) ، وأستنتج أن الأجسام المتماثلة المنتظمة تقع مراكز كتلها في مراكزها الهندسية .

ثانيا: جسم غير منتظم (توزيع الكتلة فيه غير متجانس أو الجسم غير متماثل)

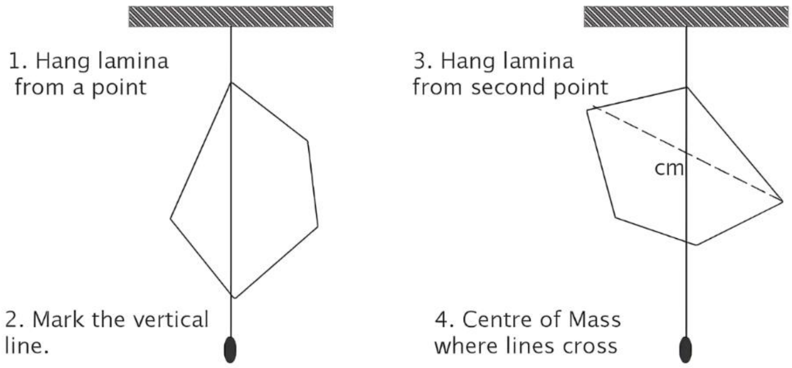
الموادّ والأدوات: خيطٌ خفيف غير قابلٍ للاستطالة، قطعة ورقٍ مقوّى، حامل فلزيّ، خطّاف، قلمُ رصاص، مقصّ، مثقَب، خيطُ الشاقول.

طريقة العمل:

1. أقصُّ قطعة الورق المقوّى لأحصل على شكلٍ غيرِ منتظم، وأثقبه عند حافّته ثقوبًا عدّةً صغيرةً متباعدة؛ ثقبان على الأقل عند النقطتين مثل A وB .

2. أُعلّق قطعة الورق المُقوّى (الشكل غير المنتظم) من أحد الثقبين في الحامل الرأسي، وأُعلّق خيط الشاقول بالحامل الرأسي أيضًا، وأنتظر حتى يستقرّ كلٌّ منهما ويتوقّفُ عن التأرجُح. ثم أرسمُ خطًّا رأسيًّا على قطعة الورق المُقوّى على امتداد خيط الشاقول؛ كما هو موضّحٌ في الشكل.

3. أكرّر الخطوة السابقة بتعليق قطعة الورق المقوّى من الثقب الآخر.

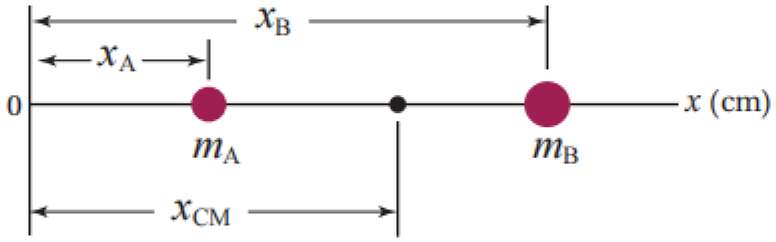


التحليل والاستنتاج:

1. أستنتج أنه لتحديد مركز كتلة جسم غير منتظم يلزمني تعليقه بشكل حر من موقعين على الأقل، فيكون مركز الكتلة عند نقطة تقاطع الخطين.
2. تقع مراكز كتل الأجسام المنتظمة والمتماثلة في مراكزها الهندسية، أما الأجسام غير المتماثلة وغير المنتظمة (قطعة الورق المقوى، مثلًا) فتكون مراكز كتلها أقرب للجزء الأكبر كتلة منها
3. تكون قطعة الورق المقوّى متزنة ولا تدور عند تعليقها، إذ تمثّل هذه النقطة مركز كتلتها، وعند تعليق جسم من مركز كتلته فإنه يكون متزنًا، حيث العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفر.

مثال 5: كتاب

نظامٌ يتكوّن من كرتين (m_A= 1.0 kg) و(m_B= 3.0 kg) ؛ كما هو موضحٌ في الشكل إذا علمتُ أنّ (x_A= 5.0 cm) و(x_B=15.0 cm)؛ أحدّد موقع مركز كتلة النظام؟



المعطيات: m_A = 1.0 kg, m_B = 3.0 kg, x_A = 5.0 cm, x_B = 15.0 cm

المطلوب : x_{CM} =?

الحل:

أستخدم العلاقة الآتية لإيجاد الإحداثي (x_{cm}).

$$x_{CM} = \frac{m_A\, x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{1.0 \times 5.0 \times 10^{-2} + 3.0 \times 15.0 \times 10^{-2}}{1.0 + 3.0}$$

$$=1.25 \times 10^{-2}\text{m} = 12.5 \text{ cm}$$

ألاحظُ أن موقع مركز الكتلة أقرب للكتلة الأكبر.

تمرين 3: كتاب

أُعيد حلّ المثال السابق إذا كانت (m_A =m_B = 4.0 kg) .

$$x_{CM} = \frac{m_A\, x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{4.0 \times 5.0 \times 10^{-2} + 4.0 \times 15.0 \times 10^{-2}}{4.0 + 4.0}$$

$$= 1.0 \times 10^{-1}\text{m} = 10 \text{ cm}$$

ألاحظُ أن موقع مركز الكتلة في منتصف المسافة بين الكرتين.

مراجعة الدرس

1. ما العزم؟ وما شرطا اتّزان جسم؟

العزم Torque: مقياسا لمقدرة القوة على إحداث دوران لجسم، وهو كمية متجهة، رمزه τ ويعرف رياضيا بأنه يساوي ناتج الضرب المتجهي لمتجه القوة (**F**) ومتجه موقع نقطة تأثير القوة (**r**) الذي يبدأ من نقطة على محور الدوران وينتهي عند نقطة تأثير القوة. ويقاس العزم بوحدة N.m حسب النظام الدولي للوحدات.

شرطا الاتّزان :

الشرط الأول: أن تكونَ القوّة المُحصّلة المؤثّرة فيه تساوي صفرًا $\sum \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.

الشرط الثاني: أن يكونَ العزم المُحصّل المؤثّر فيه يساوي صفرًا $\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$.

2. إذا أردتُ أن أفتح بابًا دوّارًا؛ أُحدّد موقع نقطة تأثير القوّة، بحيث أدفع الباب بأقلِّ مقدارٍ من القوّة. أُحدّد بأيّ اتّجاهٍ أؤثّر بهذه القوّة في الباب ؟

يكون موقع نقطة تأثير القوة أبعد ما يُمكن عن محور الدوران، ويكون اتجاه القوة عموديًّا على مستوى الباب.

3. ما المقصود بمركز كتلة جسم؟

يُعرّف مركز الكتلة Centre of mass (CM) أنّه النقطة التي يُمكن افتراض كتلة الجسم كاملةً مركّزةً فيها. وقد يقعُ مركز الكتلة داخل الجسم أو خارجها اعتمادا على شكل الجسم.

4. أثّرت قوًى عدّة في جسم؛ بحيث تمرُّ خطوط عملها في مركز كتلته، وكانت القوّة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرًا. هل يكون الجسم مُتّزنًا أم لا؟ أُفسّر إجابتي.

بما أن القوة المحصّلة المؤثرة فيه تساوي صفر فقد تحقق الشرط الأول للاتزان. وحيث أن خطوط عمل القوى تمر في نقطة واحدة فإن العزم المحصّل لها يساوي صفر (الشرط الثاني للاتزان)، لذا يكون الجسم متزنًا.

5. علل: توضَعُ قطع رصاصٍ على أطراف الأجزاء الفلزيّة من إطارات السيارات لمنعِها من الاهتزاز في أثناء دورانها. أتوقّع أين توجد مواقع مراكز كُتَل هذه الإطارات بعد وضع قطع الرصاص عليها.

عند حدوث عدم تماثل في توزيع كتلة الإطار (حدوث تآكل في بعض أجزاء العجل مثلا)، لا ينطبق مركز كتلة الإطار مع مركزه الهندسي الذي يمر فيه محور الدوران، مما يسبب اهتزاز عجل السيارة خصوصا عند السرعات العالية. ولضمان توزيع منتظم لكتلة الإطار بحيث ينطبق مركز كتلته مع مركزه الهندسي يتم إضافة قطع من الرصاص لاستعادة توزيع منتظم لكتلة العجل حول محور الدوران. هذا بدوره يؤدي إلى توقف الإطار عن الاهتزاز عند السرعات المرتفعة.

6. قارن بين الاتّزان السكونيّ والاتّزان الانتقالي من حيث: القوّة المُحصلّة المؤثّرة، السرعة الخطيّة، التسارُع الخطي .

	القوة المحصّلة المؤثرة	السرعة الخطية	التسارع الخطي
الاتزان السكوني	تساوي صفرًا	تساوي صفرًا	يساوي صفرًا
الاتزان الحركي (الانتقالي)	تساوي صفرًا	ثابتة مقدارًا واتجاهًا	يساوي صفرًا

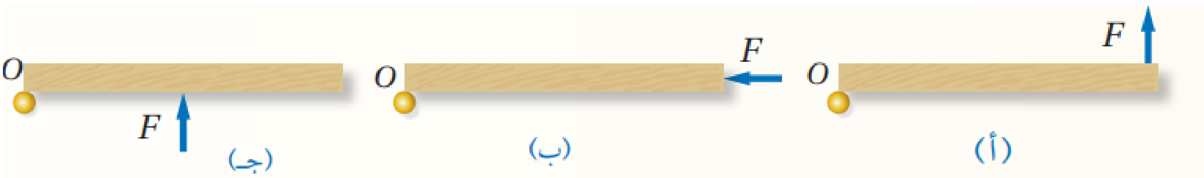
7. رأت ذكرى أخاها يحاول فكَّ إطار سيارته المثقوب باستخدام مفتاح شدٍّ لفكّ الصواميل التي تُثبّت الإطار، لكنه لم يستطع فكّها. أذكر طريقتين -على الأقل- يُمكن أن تقترحهما ذكرى على أخيها لمساعدته على فكّ الصواميل. أُفسّر إجابتي.

أ. وَصْل ماسورة في طرف مفتاح الشد لزيادة طول ذراع القوة، فيزداد العزم المحصّل المؤثر.

ب. جعل القوة التي يؤثر بها أخيها في مفتاح الشد عمودية على المفتاح، فيزداد العزم المحصل المؤثر.

ج. زيادة مقدار القوة المؤثرة في مفتاح الشد، عن طريق الاستفادة من وزنه بالوقوف على طرف المفتاح بحذر.

8. يوضّح الشكل أدناهُ منظرًا عُلويًّا لقوّةٍ مقدارُها (F) تؤثّر في الباب نفسه عند مواقع مختلفة. أُرتّب العزم الناتج عن هذه القوة حول محور الدوران (O) تصاعُديًّا.



عزم (ب) < عزم (ج) < عزم (أ)

9. عندَ انطلاق سيارةٍ بشكل مفاجئ ترتفع مقدمتها إلى أعلى. أُفسّر ذلك.

تؤثر قوة الاحتكاك السكوني بين إطارات السيارة وسطح الطريق بقوة إلى الأمام لتحريك السيارة، ويكون مركز كتلة السيارة عند نقطة في مستوى فوق مستوى سطح الطريق، لذا يوجد عزم محصّل يعمل على تدوير السيارة بحيث ترتفع مقدمتها.

أسئلة إضافية

مثال 4. إضافي

4. يجلس فارس على بُعد (1.8m) من مركز أرجوحة (see-saw)، فعلى أي بعد من مركز الأرجوحة يجب أن يجلس ماجد حتى يتزن؟ علما بأنَّ كتلة فارس (43kg) وكتلة ماجد (52 kg)، بإهمال وزن الأرجوحة ؟

المعطيات : افرض أن كتلة فارس F_{g1} ، وكتلة ماجد F_{g2}

الحل :

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0$$

$$F_{g2}\, r_2 - F_{g1}\, r_1 = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$$

$$430.0 \times 1.8 = 520.0 \times r_2$$

$$r_2 = \frac{430.0 \times 1.8}{520}$$

$$= 1.48 \text{ m}$$

مثال 5: إضافي

إذا كان نصف قطر إطار دراجة هوائية (7.70 cm) ,وأثرت السلسلة بقوة عمودية مقدارها (35.0N) في الإطار في اتجاه حركة عقارب الساعة فما مقدار العزم اللازم لمنع الإطار من الدوران؟

الحل:

$$\boldsymbol{\tau} = Fr \sin\theta$$

$$= -35.0 \times 7.70 \times 10^{-2} \times \sin 90°$$

$$= -2.695 \text{ N.m}$$

النتيجة السابقة تعبر عن العزم الناتج من السلسلة، ويلزم (+2.695 N.m) لمنع الاطار من الدوران.

مثال 6: إضافي

علقت سلتا فواكه بحبلين يمران على بكرتين قطراهما مختلفان، فاتزنتا كما في الشكل. ما مقدار كتلة السلة الأخرى ؟

المعطيات :

$r_1 = 1.1\ cm\ , r_2 = 4.5\ cm$

$m_1 = 0.23\ kg$

المطلوب :

$m_2 = ?$

الحل:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau_1} + \boldsymbol{\tau_2} = 0$$

$$F_{g2}\, r_2 - F_{g1}\, r_1 = 0$$

$$m_2 g\, r_2 - m_1 g\, r_1 = 0$$

$$m_2 g\, r_2 = m_1 g\, r_1$$

$$m_2 = \frac{m_1 g r_1}{g r_2} = \frac{m_1 r_1}{r_2}$$

$$= \frac{0.23 \times 1.1 \times 10^{-2}}{4.5 \times 10^{-2}}$$

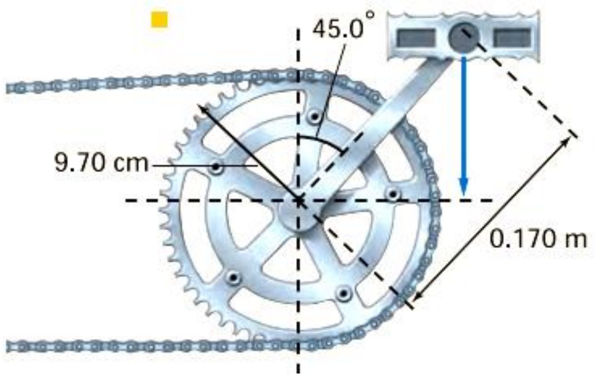
$$= 0.056\ \text{kg}$$

مثال 7: إضافي

يقف شخص كتلته (65.0kg)على بدالة دراجة هوائية، فإذا كان طول ذراع التدوير (0.170 m) يصنع زاوية (45.0°) بالنسبة للرأسي(العامودي) كما في الشكل وكان ذراع التدوير متصلا بالإطار الخلفي (الذي تديره السلسلة عادة) فما مقدار القوة التي يجب أن تؤثر فيها السلسة لمنع الإطار من الدوران، علما بأن نصف قطر الإطار (9.70 cm)؟

الحل :

نفرض أن عزم البدالة τ_1 وعزم الإطار τ_2



$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = 0$$
$$\tau_1 = \tau_2$$

$$F_1 r_1 \sin\theta = -F_2 r_2$$

$$F_2 = \frac{-F_1 r_1 \sin\theta}{r_2}$$

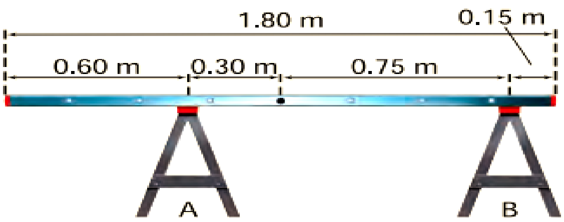
$$= \frac{-65.0 \times 10 \times 0.17 \times \sin 45°}{9.7 \times 10^{-2}}$$

$$= -805.5 \text{ N}$$

$$= 805.5 \text{ N} , -x$$

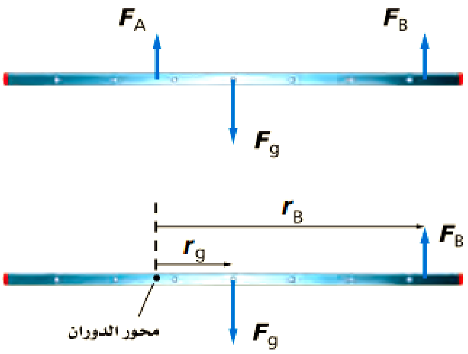
مثال 8: إضافي

سُلّم خشبي كتلته (5.8 kg) وطوله (1.80 m) يستقر أفقيا على حاملين داعمين. يبعد الحامل الأول A مسافة (0.60 m)عن طرف السلم . ويبعد الحامل الثاني B مسافة (0.15 m)عن الطرف الآخر له كما في الشكل ، ما مقدار القوة التي يؤثر بها كل من الحاملين في السلم ؟



الحل :

في مثل هذه المسائل يجب تحديد محور الدوران، ويجوز اختيار مكانة في أي نقطة، ولتسهيل الحل والتعامل مع اقل عدد من المجاهيل يفضل اختياره عند احدى الدعامتين عند (A) مثلا فيكون عزم القوة حول محور دورانها صفر في هذه النقطة ،يكون مركز كتلة السلم الذي كثافته ثابته (منتصف الطول والعرض) يمكن إعادة تمثيل السلم حول محور دورانه عند النقطة A كما في الشكل :
بما أن السلم في حالة اتزان ميكانيكي إذا نطبق شرطي الاتزان الميكانيكي.



أولا: السلم في وضع اتزان سكوني لذا محصلة القوى المؤثرة فيه (F_T) صفرا .

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$F_A + F_B + (- F_g) = F_T$$

$$F_A + F_B + (- F_g) = 0$$

$$F_A = F_g - F_B \qquad \text{.....................} \ (1)$$

ثانيا : السلم في وضع اتزان دوراني . لذا محصلة العزم حول محور دورانه صفرا.

$$\sum \tau = 0$$

$$F_B r_B + (- F_g\ r_g) = 0$$

$$F_B r_B = F_g\ r_g$$

$$F_B = \frac{F_g\, r_g}{r_B} = \frac{m_g g\, r_g}{r_B}$$

$$= \frac{5.8\times10\times0.30}{0.75+0.30} = 16.57\ \text{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبتعويض المعادلة (2) في (1)

$$F_A = F_g - F_B$$

$$= 5.8 \times 10 - 16.57 = 41.43\ \text{N}$$

لاحظ أن مجموع القوتين لأعلى يساوي وزن السلّم، والقوة التي يؤثر بها الحامل القريب من مركز الكتلة هي القوة الأكبر.

مثال 9: إضافي

يتزن لوح خشبي كتلته (24kg) وطوله (4.5m) على حاملين، أحدهما تحت مركز اللوح مباشرة، والثاني عند الطرف. ما مقدار القوتين التي يؤثر بها كل من الحاملين الرأسيين في اللوح؟

الحل :

نفرض أن F_g ناتجة عن وزن اللوح و نفرض أن F_c القوة عند مركز اللوح للأعلى و أن F_e عند طرف اللوح للأعلى .

وبما أن اللوح متزن يكون مجموع القوى المؤثرة علية صفر.

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$F_c + F_e + (-F_g) = 0$$

$$F_c = F_g - F_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبما أن اللوح متزن يكون مجموع العزم المحصل المؤثر علية صفرا.

$$\sum \tau = 0$$

$$F_c r_c + (-F_g\, r_g) + F_e r_e = 0$$

r_c و r_g تساوي صفر فيكون العزم الناتج عنهما صفرا.

$$F_e r_e = 0$$

$$F_e = 0\ \text{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبتعويض (2) في (1)

$$F_c = F_g - 0$$

$$F_c = F_g = m_g g = 24.0 \times 10 = 240\ \text{N}$$

مثال 10: إضافي

أعط مثالا على جسم في الحالات التالية:

a. متزن دورانيا، ولكنه غير متزن انتقاليا.

b. متزن انتقاليا، ولكنه غير متزن دورانيا.

الحل:

a . كتاب ساقط دون دوران.

b . لعبة أرجوحة أفقية غير متزنة، حيث تدور لعبة الأرجوحة حتى تضرب قدم اللاعب بالأرض.

مثال 11: إضافي

عندما تستخدم الكوابح ينخفض الجزء الأمامي للسيارة إلى أسفل، لماذا ؟

الحل:

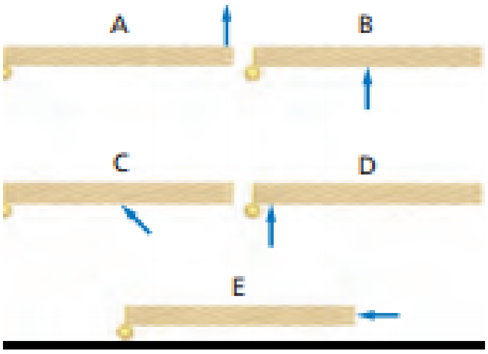
يؤثر الطريق بقوة في الإطارات مما يؤدي إلى توقف السيارة . مركز الكتلة فوق الطريق لذا توجد محصلة عزم على السيارة تعمل على تدوير السيارة في الاتجاه الذي يجعل مقدمتها تنخفض للأسفل.

مثال 12: إضافي

رتب العزوم المؤثرة في الأبواب الخمسة في الشكل من الأقل إلى الأكبر. ولاحظ أنّ مقدار القوة هو نفسه في الأبواب كلها؟

الحل:

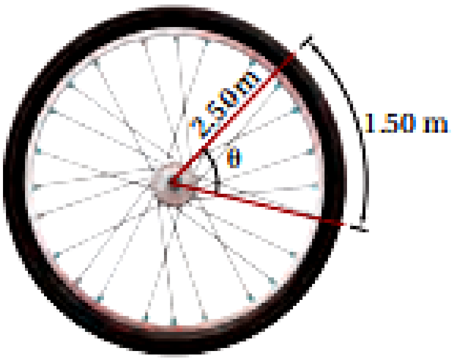
$A > B > C > D > (E = 0)$



مثال 13: إضافي

يدور إطار بحيث تتحرك نقطة عند حافته الخارجية مسافة (1.5 m)، وإذا كان نصف قطر الإطار (2.50m)كما في الشكل ، فما مقدار الزاوية بوحدات radians التي دارها الإطار؟

الحل :



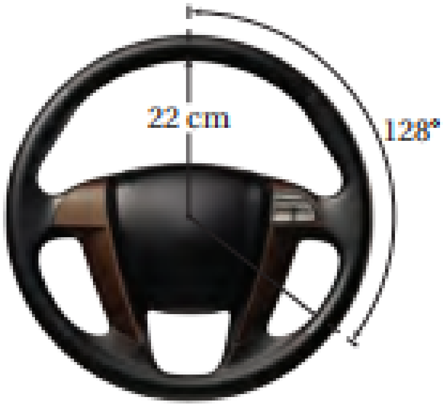
$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$= \frac{1.50}{2.50} = 0.6 \text{ rad}$$

مثال 14: إضافي

أديرت عجلة قيادة سيارة بزاوية قدرها (128°). انظر الشكل فإذا كان نصف قطرها (22 cm)فما المسافة التي تتحركها نقطة على الطرف الخارجي لعجلة القيادة؟

الحل :



$$\theta \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180}\, \theta \text{ (deg)}$$

$$= \frac{\pi}{180}\,(128) = 2.23 \text{ rad}$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$s = r\,\theta$$

$$= 0.22 \times 2.23$$

$$= 0.50 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

مثال 15: إضافي

يتطلب شد برغي عزما مقداره (8.0 N.m)، فإذا كان لديك مفتاح شد طوله (0.35 m). ما مقدار أقل قوة يجب التأثير بها في المفتاح ؟

الحل :

$$\tau = Fr\sin\theta$$

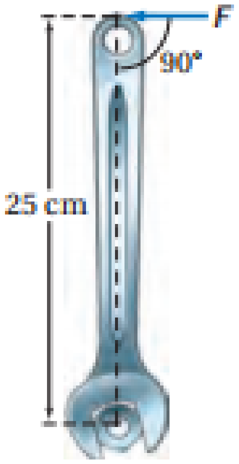
$$F = \frac{\tau}{r\sin\theta}$$

$$= \frac{8.0}{0.35 \times \sin 90°} = 22.86\ \mathrm{N}$$

مثال 16: إضافي

ما مقدار العزم المؤثر في صمولة والناتج عن قوة مقدارها(15 N) تؤثر عموديًّا في مفتاح شدّ طوله (25cm) ؟ انظر الشكل.

الحل :



$$\tau = Fr\sin\theta$$

$$= 15 \times 0.25 \times \sin 90°$$

$$= 3.75\ \mathrm{N.m}$$

مثال 17: إضافي

تبين مواصفات سيارة أن وزنها موزع بنسبة(53 %)على الإطارات الأمامية و(47 %)على الإطارات الخلفية، فإذا كان طول لوح قاعدة سيارة،(2.46m) فأين يكون مركز كتلة السيارة ؟

الحل :

لنفرض أن مركز الكتلة يبعد مسافة x من مقدمة السيارة و لنفرض أيضا أن وزن السيارة هو F_g

العزم لمقدمة السيارة: τ_F ، العزم لخلفية السيارة τ_R

$$\tau_F = \tau_R$$

$$F_F r_F = F_R r_R$$

$$(0.53\ F_g) \times x = (0.47\ F_g) \times (2.46 - x)$$

$$0.53 \times x = 0.47 \times (2.46 - x)$$

$$0.53\ x = 1.1562 - 0.47x$$

$$0.53\ x + 0.47x = 1.1562$$

$$x = 1.1562\text{m}$$

مثال 18: إضافي

لوح كتلته ($12.5\ kg$) وطوله ($4.00\ m$)، رفعه أحمد من أحد طرفيه ثم طلب المساعدة، فاستجاب له جواد.، ما أقل قوة يؤثر بها جواد لرفع اللوح إلى الوضع الأفقي ؟ وعند أي جزء من اللوح؟

الحل :

اقل قوه تكون في الطرف المقابل ، وحتى يصل اللوح الي الوضع الأفقي يتوزع وزن اللوح على احمد وجواد مناصفة

لنفرض أن وزن اللوح F_g، والقوة التي يؤثر بها احمد F_A، والقوة التي يؤثر بها جواد F_W

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A + F_W + (-F_g) = 0$$

$$F_A + F_W = F_g$$

في هذه الحالة تكون $F_A = F_W$ ولتكن F

$$2F = F_g$$

$$F = \frac{F_g}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{12.5 \times 10}{2} = 62.5\ \text{N}$$

مثال 19: إضافي

عارضة فولاذيه طولها($6.50\ m$)، ووزنها ($325\ N$) تستقر على دعامتين المسافة بينهما ($3.00\ m$) ، وبُعد كل من الطرفين عن الدعامتين متساوٍ. فإذا وقفت سوزان في منتصف العارضة وأخذت تتحرك نحو أحد الطرفين فما أقرب مسافة تتحركها سوزان لهذا الطرف قبل أن تبدأ العارضة في الانقلاب إذا كان وزن سوزان ($575\ N$)؟

الحل:

افرض أن عزم العارضة (τ_B)، وعزم سوزان (τ_S). وكل دعامة تبعد $(\frac{6.5-3}{2} = 1.75m)$ من نهاية العارضة الفولاذية ،مركز الكتلة للعارضة يساوي$(\frac{3}{2} = 1.5\ m)$ وستنقلب العارضة عندما يصبح العزم (τ_S) مساوي للعز م (τ_g) أو أكبر . اذن يبدأ فقدان الاتزان عندما $\tau_S \geq \tau_g$

$$\sum \tau = 0$$

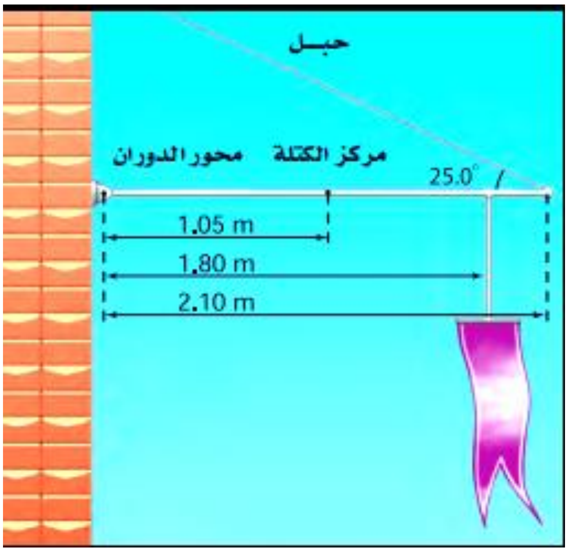
$$\tau_S = \tau_g$$

$$F_S r_S = F_g r_g$$

$$r_S = \frac{F_g r_g}{F_S} = \frac{325\ (^{3.00}/_{2})}{575} = 0.848\ m$$

تستطيع سوزان أن تتحرك $0.848\ m$ من الدعامة أو من الطرف $(1.75 - 0.848 = 0.90\ m)$

مثال 20: إضافي



تتدلى راية كبيرة من سارية أفقية قابلة للدوران حول نقطة تثبيتها في جدار كما في الشكل ، إذا كان طول السارية ($2.10m$), ووزنها ($175N$)،ووزن الراية ($105N$)، وعلقت على بعد $(1.80m)$ من محور الدوران (نقطة التثبيت في الجدار) فما قوة الشد في الحبل الداعم للسارية؟

الحل : بما أن النظام المكون من الجدار والسارية والراية والحبل في حالة اتزان ، فيمكن تطبيق الشرط الثاني للاتزان على النظام حول محور دورانه.

نفرض أن العزم الناتج عن قوة شد الحبل (τ_1) ، والعزم الناتج من قوة وزن السارية (τ_2) ، والعزم الناتج عن الراية (τ_3) .

$$\sum \tau = 0$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$F_1 r_1 \sin\theta - (F_2 r_2 + F_3 r_3) = 0$$

$$F_1 r_1 \sin\theta = F_2 r_2 + F_3 r_3$$

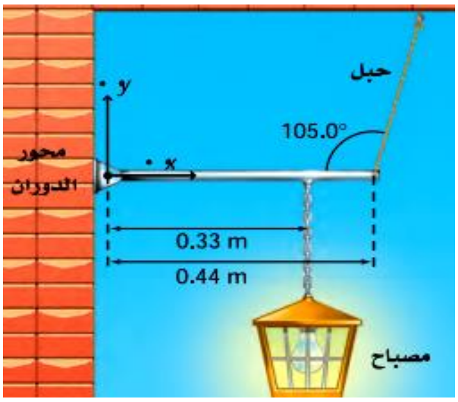
$$F_1 \times 2.10 \times \sin 25° = 175\times1.05 + 105\times1.80$$

$$F_1 \times 0.887 = 372.75$$

$$F_1 = \frac{372.75}{0.887} = 420.24\ \text{N}$$

مثال 21: إضافي

يتدلى مصباح من سلسلة معلقة بقضيب أفقي قابل للدوران حول نقطة اتصاله بجدار، ومشدود من طرفه الآخر بحبل، انظر الشكل إذا كان وزن القضيب(27 N) ووزن المصباح (64 N) احسب قوة الشد في الحبل الداعم لقضيب المصباح؟



الحل : بما أن النظام المكون من الجدار والقضيب والمصباح والحبل في حالة اتزان ، فيمكن تطبيق الشرط الثاني للاتزان على النظام حول محور دورانه.

نفرض أن العزم الناتج عن قوة شد الحبل (τ_1) ، والعزم الناتج من قوة وزن القضيب (τ_2) ، والعزم الناتج عن المصباح (τ_3) .

$$\sum \tau = 0$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$F_1 r_1 \sin\Theta - (F_2 r_2 + F_3 r_3) = 0$$

$$F_1 r_1 \sin\Theta = F_2 r_2 + F_3 r_3$$

$$F_1 \times 0.44 \times \sin 105° = 27\times0.22 + 64\times0.33$$

$$F_1 \times 0.425 = 27.06$$

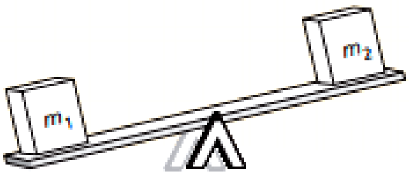
$$F_1 = \frac{27.06}{0.425} = 63.67\ \text{N}$$

مثال 22: إضافي

يبين الشكل صندوقين عند نهايتي لوح خشبي طوله ($3.0\ m$)، يرتكز عند منتصفه على دعامة تمثل محور دوران فإذا كانت كتلة الصندوق الأيسر($m_1 = 25\ kg$) وكتلة الصندوق الأيمن ($m_2 = 15\ kg$)، فما بعد النقطة التي يجب وضع الدعامة عندها عن الطرف الأيسر لكي يتزن اللوح الخشبي والصندوقان أفقيا ؟

الحل :

عند الاتزان يكون العزم الناتج من وزن الصندوق الأول يساوي العزم الناتج من وزن الصندوق الثاني نفرض أن بعد نقطة الاتزان من الطرف الأيسر تساوي (x) فيكون بعدها من الطرف الأيمن ($3 - x$).



$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = 0$$

$$m_1 g\, r_1 = m_2 g\, r_2$$

$$m_1\, x = m_2 (3 - x)$$

$$25\, x = 15\, (3 - x)$$

$$25\, x = 45 - 15\, x$$

$$40\, x = 45$$

$$x = 1.125\ m$$

مثال 23: إضافي

تتحرك سيارة قطر كل إطار من إطاراتها ($42\ cm$) فتقطع مسافة ($420\ m$) ، احسب عدد الدورات التي يدورها كل إطار عند قطع هذه المسافة؟

الحل :

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$s = \theta\, r$$

$$= 2\pi\, r$$

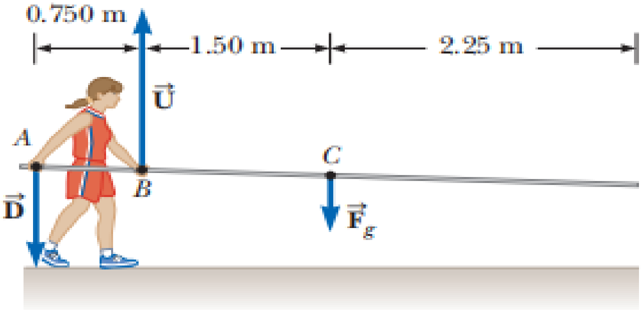
$$= 2\,(3.14)\,\left(\frac{42}{2} \times 10^{-2}\right)$$

$$= 1.32\ m$$

$$n_{rev} = \frac{d}{s} = \frac{420}{1.32} = 318.2\ rev$$

مثال 24: إضافي

لاعب قفز بعصا الزانة يثبت العصا بقوة لأعلي (U) وأسفل بقوه (D) بكلتا يديه كما في الشكل ، إذا كان وزن العصا (29.4N) والعصا متزنة ، احسب مقدار القوتين ؟



الحل :

على فرض أن محور الدوران عند النقطة (A) ، وبتطبيق شرط الاتزان الثاني لحساب (U) .

$$\sum \tau = 0$$

$$\tau_U + \tau_{Fg} = 0$$

$$U \times 0.75 - 29.4 \times (1.50 + 0.75) = 0$$

$$U \times 0.75 = 29.4 \times 2.25$$

$$U = \frac{66.15}{0.75} = 88.2 \text{ N}$$

وبتطبيق شرط الاتزان الأول لحساب (D) .

$$\sum F_y = 0$$

$$F_D + F_g + (-F_U) = 0$$

$$F_D = F_U - F_g$$

$$= 88.2 - 29.4 = 58.8 \ N$$

لاحظ انه يمكن حساب (D) بتطبيق شرط الاتزان الثاني باعتبار محور الدوران عند النقطة(B)، والحصول على نفس النتيجة كما يلي.

$$\sum \tau = 0$$

$$\tau_D + \tau_{Fg} = 0$$

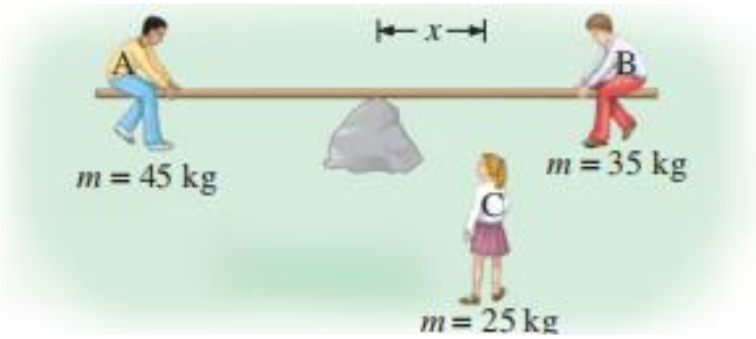
$$D \times 0.75 - 29.4 \times 1.50 = 0$$

$$D \times 0.75 = 44.1$$

$$D = \frac{44.1}{0.75} = 58.8 \text{ N}$$

مثال 25: إضافي

ثلاثة أطفال مختلفين الأوزان، يحاولون عمل اتزان في لعبة الأرجوحة، إذا جلس اثنان منهم على طرفيها كما في الشكل، أين يجب أن تجلس الطفلة الثالثة حتى يتحقق الاتزان، إذا كانت الأرجوحة مهملة الوزن وطولها (3.2 m) ؟



الحل :

القوة الناتجة من وزن الطفل (A) أكبر من القوة الناتجة من وزن الطفل (B) ، ولهذا السبب يكون مكان الطفلة (C) على يمين نقطة الارتكاز (الحجر) وعلى مسافة (x) منها وبتطبيق شرط الاتزان الثاني نحسب هذه المسافة كما يلي :

$$\sum \tau = 0$$

$$F_A\, r_A = F_C\, r_c + F_B\, r_B$$

$$m_A g\, r_A = m_C g\, x + m_B g\, r_B$$

$$m_A\, r_A = m_C\, x + m_B\, r_B$$

$$45 \times 1.6 = 25\, x + 35 \times 1.6$$

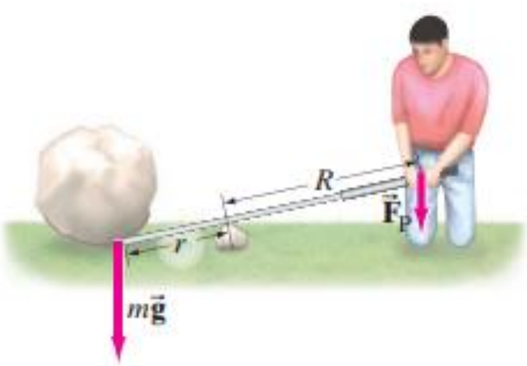
$$72 = 25\, x + 56$$

$$16 = 25\, x$$

$$x = 0.64\ m$$

مثال 26: إضافي

في الشكل المجاور رجل يحاول رفع صخرة كبيرة وزنها (mg) بواسطة عصا طويله ، إذ ا استخدم صخرة صغيرة كنقطة ارتكاز تبعد مسافة (r) عن الصخرة الكبيرة ، وضغط على العصا بقوة مقدارها (F_P) في الجهة المقابلة للصخرة ، احسب مقدار القوة اللازمة لرفع الصخرة ؟



الحل :

$$\sum \tau = 0$$

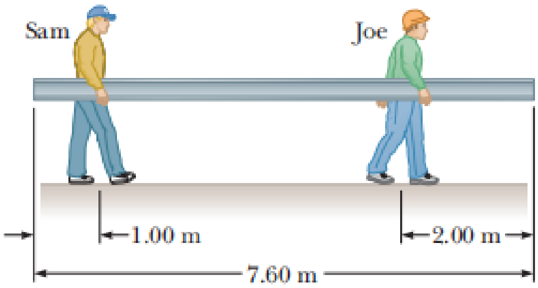
$$\tau_{mg} = \tau_{F_p}$$

$$mg\,(r) = F_P\,(R)$$

$$F_P = mg\,\frac{r}{R}$$

مثال 27: إضافي

في الشكل المجاور يشترك عاملان (Joe و Sam) في حمل عمود متماثل يزن ($4.50\ 10^2 N$)، مستعينا بالأبعاد الموضحة بالشكل، جد القوة التي يؤثر بها كل من العاملين في العمود ؟



الحل :

نختار المركز وليكن رمزه (c) كمحور دوران ،

لاحظ المسافة بين الرجلين (7.60 – (2.00 + 1.00) = 4.6 m)

و *sam* يبعد عن المركز (2.80m) و joe يبعد عن المركز (1.80m).

$$\sum \tau_c = 0$$

$$-F_{sam}\,(2.80) + F_{joe}(1.80) = 0$$

$$F_{joe} = 1.56\,F_{sam} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{sam} + F_{joe} = 450\text{ N} \ldots\ldots.(2)$$

وبتعويض (1) في (2)

$$F_{sam} + 1.56\,F_{sam} = 450$$

$$2.56\,F_{sam} = 450$$

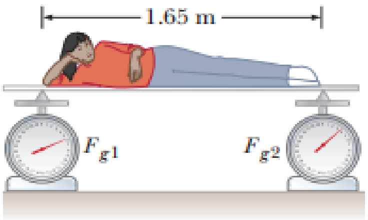
$$F_{sam} = \frac{450}{2.56}$$

$$= 176\text{ N}$$

$$F_{joe} = 1.56\,F_{sam} = 1.56\,(176) = 275\text{ N}$$

مثال 28: إضافي

في دراسة علم التشريح يلزم أحيانا معرفة مركز كتلة شخص معين كما في الشكل المجاور، إذا كانت قراءة الميزان الأول($F_{g1} = 380N$) وقراءة الميزان الثاني (F_{g2} =320N))، جد مركز كتلة هذا الشخص ؟



الحل: على اعتبار أن محور الدوران عند الأقدام. وبتطبيق شرط الاتزان كما يلي.

$\sum F_y = ma_y = 0$

$F_{g1} - F_g + F_{g2} = 0$

$380 - F_g + 320 = 0$

$F_g = 700$ N

$\sum \tau = 0$

$-F_{g2}\ (1.65) + F_g\ (x) + F_{g1}\ (0) = 0$

$-\ 380\ (1.65) + 700\ (x) + 320\ (0) = 0$

$x = 0.896$ m

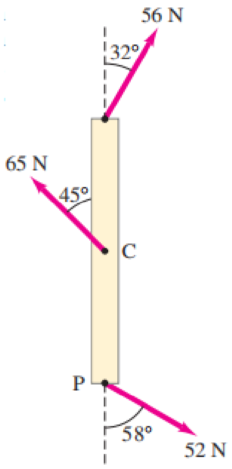
اذن مركز الكتلة يبعد مسافة (0.896 m) من محور الدوران.

مثال 29: إضافي

احسب العزم المحصل على قضيب طويل متماثل طوله (2.0 m) لجميع القوى المؤثرة عليه إذا كان محور الوران عمودي على مستوى الصفحة في الحالات التالية :

أ. عند منتصفه ؟

ب. عند طرفه عند النقطة P؟



الحل :

أ .

$\sum \tau_c = \tau_{56} + \tau_{65} + \tau_{52}$

$= -\ (56) \times (1) \times \sin 32° + 0 + (52) \times (1) \times \sin 58°$

$= 14.42$ N.m

ب.

$\sum \tau_p = \tau_{56} + \tau_{65} + \tau_{52}$

$= -\ (56) \times (2) \times \sin 32° + (65) \times (1) \times \sin 45° + 0$

$= -13.39$ N.m

الدرس الثاني

ديناميكا الحركة الدورانية

Dynamics of Rotational Motion

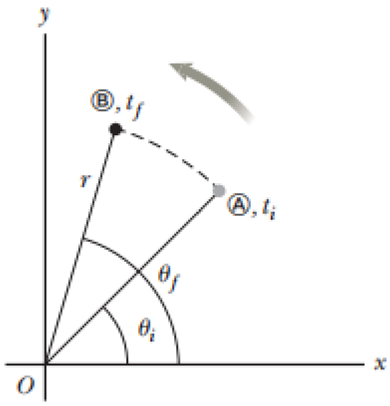
وصفُ الحركة الدورانيّة Description of Rotational Motion

لكي نفهم الحركة الدورانية يجب مقارنتها بالحركة الانتقالية من إزاحة وسرعة وتسارع وبالمثل يمكن

وصف الحركة الدورانيّة باستخدام مفاهيم خاصّةٍ وهي: الإزاحة الزاويّة، والسرعة الزاويّة، والتسارُع الزاويّ.

الموقع الزاويّ Angular position لأيّ جسيم عليه هو الزاوية (θ) التي يصنعُها الخطّ الواصلُ بين الجُسيم ونقطة الأصل مع الخطّ المرجعيّ محور $(+x)$

(عبارة أي جسم عليه تعني عندما يدورُ جسمٌ بزاويةٍ مُعيّنةٍ؛ فإنّ جميع جُسيماته تدور بالزاوية نفسِها)



فالموقعُ الزاويُّ للجُسيم عند النقطة A (θ_i) عند اللحظة (t_i)

ويصبح الموقعُ الزاويُّ للجُسيم عند النقطة B (θ_f) عند اللحظة (t_f) نتيجة دوران الجسم بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة.

الإزاحةُ الزاويّة Angular displacement

الإزاحةُ الزاويّة (Δθ) Angular displacement: فهي التغيُّر في الموقع الزاويّ، وتساوي الزاوية التي يمسحُها نصف قطر المسار الدائريّ الذي يدورُ مع الجسم .

ويمكن حسابها رياضيا كما يلي :

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

وتُعدُّ الإزاحة الزاويّة موجبةً عند الدوران بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة،

بينما تُعدُّ الإزاحة الزاويّة سالبةً عند الدوران باتّجاه حركة عقارب الساعة.

وحدة الإزاحة الزاويّة هي rad

السرعة الزاويّة Angular Velocity

الزاويّة المتوسّطة (Average angular velocity($\bar{\omega}$) هي: نسبة الإزاحة الزاويّة ($\Delta\theta$) لذلك الجسم إلى الفترة الزمنية (Δt) التي حدثت خلالها هذه الإزاحة.

وتُعطى بالعلاقة التالية:

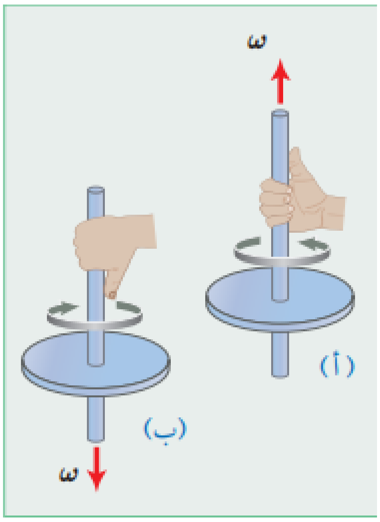
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ووحدةُ قياسِها هي (rad/s)

السرعةَ الزاويّة اللحظيّة Instantaneous angular velocity (ω). هي السرعةُ الزاويّة لجسمٍ عندَ لحظةٍ زمنيّةٍ مُعيّنةٍ.

وعندما تكون السرعة الزاويّة ثابتةً، فإنّ السرعةَ الزاويّةَ المتوسّطة تُساوي السرعة الزاويّة اللحظيّة.

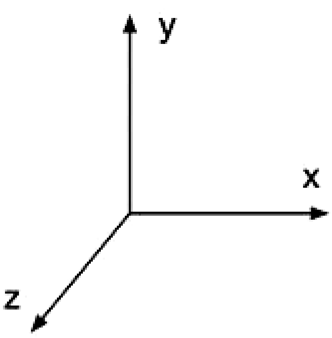
(وفي هذه الوحدة أينما ورد مصطلح السرعة الزاويّة فإنه يعني؛ السرعة الزاويّة اللحظيّة).



عند دوران جسمٍ :

1. بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة تكونُ إزاحته الزاويّة موجبةً؛ لذا فإنّ سرعته الزاويّة موجبةٌ أيضًا.
2. باتّجاه حركة عقارب الساعة؛ فإنّ إزاحتهُ الزاويّة وسرعته الزاويّة سالبتان.

وأستخدم قاعدة قبضة اليد اليمنى لتحديد اتّجاه السرعة الزاويّة لجسم؛ وذلك عن طريق لفّ أصابع اليد اليمنى حول محور دورانه بحيث تُشير إلى اتّجاه دوران الجسم، فيُشير الإبهام إلى اتّجاه السرعة الزاويّة. أنظر الشكل المجاور فمثلًا؛ عند دوران جسم حول المحور (z) بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة يكون متّجه السرعة الزاويّة خارجًا من الصفحة على امتداد محور الدوران. أمّا عند دوران الجسم باتّجاه حركة عقارب الساعة حول المحور نفسه فيكونُ مُتّجه السرعة الزاويّة داخلًا إلى الصفحة على امتداد محور الدوران، حيث اتّجاه المحور (z)عموديّ على مستوى الصفحة.



التسارُع الزاويّ Average angular acceleration

التسارُع الزاويّ المتوسط Average angular acceleration ($\bar{\alpha}$)

هو نسبةُ التغيّر في مقدار السرعة الزاويّة إلى الزمن اللازم لحدوث هذا التغيّر.

ورياضيا يعبر عنه كما يلي :

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

ويُقاس بوحدة (rad/s^2)

التسارُع الزاويّ اللحظيّ Instantaneous angular acceleration (α) .

هو التسارُع الزاويّ لجسمٍ عند لحظةٍ زمنيّةٍ مُعيّنةٍ.

وعند دوران جسمٍ بتسارُعٍ زاويّ ثابتٍ؛ فإنّ تسارُعه الزاويّ المتوسط يُساوي تسارُعه الزاويّ اللحظي

مثلا كوكب الأرض جسم يتحرّك حركةً دورانيّة، ويكون لأجزائه جميعها الإزاحة الزاويّة نفسها، وبالتالي السرعة الزاويّة نفسها، في حين يقطع كلُّ جزءٍ منها مسافاتٍ مختلفةً في كلّ دورةٍ نتيجة اختلاف بُعد كلّ منها عن محور الدوران ،

وسوف أستخدمُ مُصطلح التسارُع الزاويّ للإشارة إلى التسارع الزاويّ اللحظيّ؛ للاختصار

أي أن: $\bar{\alpha}$ = α.

وأستفيدُ من إشارة كل من السرعة الزاويّة والتسارُع الزاويّ في تحديد ما إذا كان الجسم يدور بتسارع أم بتباطؤ؛ فعندما تكون إشارتا السرعة الزاويّة والتسارع الزاويّ متماثلتين؛ فإنّ الجسمَ يدور بتسارع، أما إذا كانت إشارتاهما مختلفتين؛ فإنّ الجسم يدور بتباطؤ.

عندما يدور جسمٌ حول محورٍ ثابت؛ فإنّ كل جُسَيم فيه يدورُ بالزاوية نفسِها خلالَ فترةٍ زمنيّةٍ مُعيّنة، وبذلك فإن لأجزاء الجسم جميعها السرعة الزاويّة نفسُها والتسارع الزاويّ نفسه. لذا فإنّ الموقع الزاويّ (θ)، والسرعة الزاويّة (ω)، والتسارع الزاويّ (α) تميّز الحركة الدورانية للجسم بأكمله إضافةً إلى الجُسيمات المفردة فيه.

مثال 6: كتاب

يتسارع الجزء الدوّار في جهاز فصل مكوّنات الدمّ من السكون إلى (3.00×10^3 rad/s) خلال(30.0 s) بتسارُعٍ زاويّ ثابت. أحسب مقدار ما يأتي:

أ . التسارُع الزاويّ المتوسط؟

ب. السرعة الزاويّة بعد مرور (20.0 s) من بدء دورانه؟

المعطيات:

$\omega_i = 0, \quad \omega_f = 3.00 \times 10^3$ rad/s, $\quad t = 20.0$ s

المطلوب:

$\bar{\alpha}$= ?, ω = ?

الحلّ:

$\bar{\alpha} = \alpha$

أ . أستخدم المعادلة الآتية لحساب التسارُع الزاويّ المتوسط.

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{3.00 \times 10^3 - 0}{20.0}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha = 1.00 \times 10^2\ rad/s^2$$

ب. أستخدم معادلة التسارع الزاوي لحساب السرعة الزاويّة:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$$\omega_f - \omega_i = \bar{\alpha}\ t$$

$$\omega_f = \omega_i + \bar{\alpha}\ t$$

$$= 0 + 1.00 \times 10^2 \times 20.0$$

$$= 2.00 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

تمرين4: كتاب

يدور إطارُ سيارةٍ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة؛ بسرعةٍ زاويّة ثابتةٍ مقدارُها (2.0 rad/s) مدّةً زمنيّة مقدارُها (20.0 s)، ثمّ يتسارع بعد ذلك بتسارع زاويٍّ ثابت مقدارُه ($3.5\ rad/s^2$) مدةً زمنيّة مقدارُها (10.0 s)، أحسبُ مقدار ما يأتي:

أ. الإزاحة الزاويّة للإطار عند نهاية الفترة الزمنيّة لحركته بسرعة زاويّة ثابتة؟

ب. السرعة الزاويّة للإطار عند نهاية الفترة الزمنيّة لحركته بتسارُعٍ زاويٍّ ثابت؟

الحلّ:

أ. الإطار يدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، لذا تكون سرعته الزاوية وازحته الزاوية موجبتين.

$$\bar{\omega} = \omega_i = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\Delta\theta = \omega_i\ t_1$$

$$= 2.0 \times 20.0 = 40 \text{ rad}$$

ب. السرعة الزاويه والتسارع الزاوي موجبان، لذا يزداد مقدار السرعة الزاوية. وأحسب السرعة الزاوية النهائية كما يأتي:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\ t_2$$

$$= 2.0 + 3.5 \times 10.0$$

$$= 37 \text{ rad/s}$$

عزم القُصور الذاتيّ والقانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية
Moment of Inertia and Newton's Second Law for Rotational Motion

القصور الذاتي: هو مقياس لممانعة الجسم للتغيّر في حركته الانتقاليّة.

القصور الذاتي هو العجز الذاتي، وفي حالة الأجسام المتحركة والساكنة انتقاليا ودورانيا، يكون الجسم عاجز عن تغيير حالته السكونية أو الحركية الانتقالية أو الدورانية. فالجسم الساكن يبقى ساكن والجسم المتحرك يبقى متحرك، ما لم يؤثر عليه مؤثر خارجي. وهذا المؤثر الخارجي في الحركة الانتقالية محدد بالقوة المحصلة أما في الحركة الدورانية يصبح العزم المحصل.

وحسب القانون الثاني لنيوتن في الحركة الانتقالية فان التسارع (a) الذي يكتسبه الجسم يتناسب مع القوة المحصلة المؤثرة فيه ($\sum F$)

$$a \propto \Sigma F$$

$$\Sigma F = ma$$

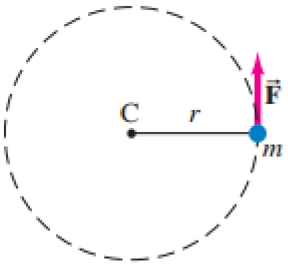
حيث تمثل كتلة الجسم (m) قصوره الذاتي .

وحسب القانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية فان التسارع الزاوي (α) الذي يكتسبه الجسم يتناسب مع العزم المحصل المؤثر فيه ($\sum \tau$)

$$\alpha \propto \Sigma \tau$$

$$\Sigma \tau = I\,\alpha$$

حيث تمثل (I) عزم قصوره الذاتي .



وأحسب عزم القصور الذاتي (I) لجسيم نُقطي، كتلته (m) ، يبعد مسافة عموديّة (r) عن محور الدوران، باستخدام العلاقة الآتية:

$$I = mr^2$$

ويُقاس بوحدة ($kg.m^2$) حسب النظام الدولي للوحدات.

على ماذا يعتمد عزم القصور الذاتي؟

يعتمد عزم القصور الذاتي لجسم على:

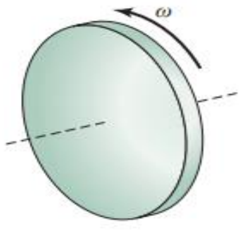
أ . كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه. كلما ابتعد توزيع الكتلة عن محور الدوران (زاد القطر) يكون عزم القصور الذاتي أكبر.

ب . موقع محور الدوران. فعزم القصور الذاتي لجسم محور دورانه في منتصفه وعامودي عليه اقل من عزم القصور الذاتي لجسم محور دورانه على أحد طرفية وعمودي عليه.

ولتوضيح النقطتين السابقتين:

أ. كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه.

الشكل المجاور الذي يمثل أسطوانتين مختلفتين لهما نفس الكتلة (مختلفتين في توزيع الكتلة)



(أ)

لاحظ بالنظر الي الشكلين (أ) و (ب) ما يلي :

1. كتلة الجسمين متساوية.

$$m_{أ} = m_{ب}$$

(ب)

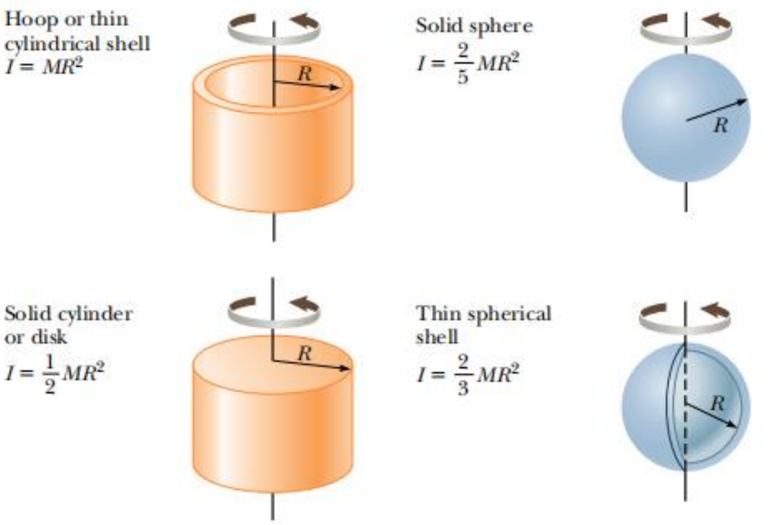
2. قطر(نصف القطر) (أ) أكبر من قطر (نصف قطر) (ب)

$$r_{أ} > r_{ب}$$

3. توزيع كتلة الجسم (أ) بعيدة عن محور دورانه وتوزيع كتلة الجسم (ب) على امتداد محور دورانه .
4. تحريك أو إيقاف الجسم (أ) أصعب من تحريك أو إيقاف الجسم (ب)
5. عزم القصور الذاتي للجسم (أ) أكبر من عزم القصور الذاتي للجسم (ب) .

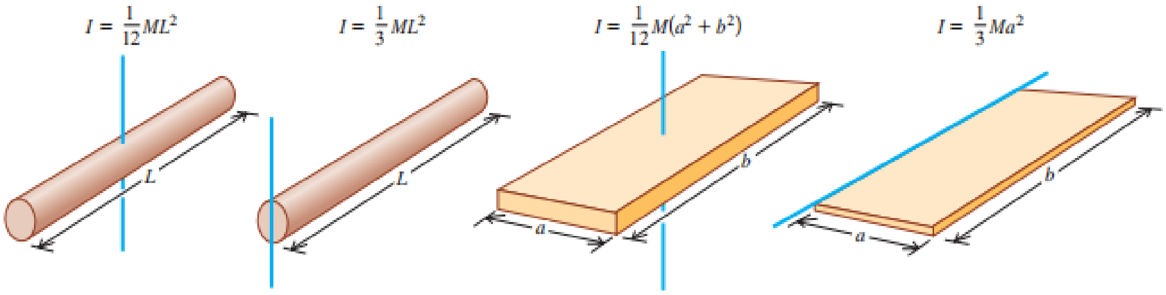
$$I_{أ} > I_{ب}$$

نستنتج من ذلك انه كلما ابتعدنا عن محور الدوران (زاد نصف القطر) يزداد عزم القصور الذاتي . وفي حالة تساوي أنصاف الأقطار فان الجسم المجوف له عزم قصور ذاتي أكبر من الجسم المصمت كما في الشكل التالي:



ب . موقع محور الدوران.

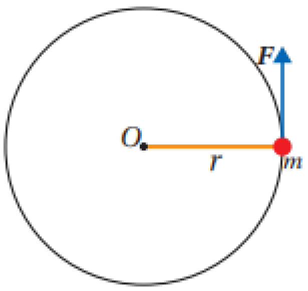
عند تطابق الأجسام في توزيع الكتلة واختلافها في موقع محور الدوران فعزم القصور الذاتي لجسم حول محورٍ عموديٍ عليه ويمرُّ في منتصفه اقل من أن يكون محور الدوران عموديًّا عليه ويمرُّ في أحد طرفيه، كما في الأشكال التالية (كلما اقترب محور الدوران من أحد الأطراف. زاد عزم القصور الذاتي)



ملاحظة: قيمة العزوم للقصور الذاتي للأشكال المختلفة السابقة ليست للحفظ ، بل للمقارنة.

مثال 7 : كتاب

كرةٌ كتلتُها (3.0 kg) مثبّتةٌ في نهاية قضيب فلزيّ خفيفٍ طولُه (0.80 m) ، وتتحرّك حركةً دورانيّةً في مستوًى أفقيّ حول محورٍ ثابتٍ عموديّ على مستوى الصفحة يمرُّ في النهاية الأخرى للقضيب بتأثير قوّةٍ مماسيه (F) ثابتةٍ في المقدار، كما هو موضّحٌ في الشكل إذا بدأت الكرة حركتَها من السكون بتسارُعٍ زاويّ ثابت؛ بحيث أصبح مقدار سرعتها الزاويّة (8π rad/s) خلال (5.0 s) فأحسبُ مقدار ما يأتي بإهمال كتلة القضيب الفلزيّ:



أ. التسارُع الزاويّ للكرة؟

ب. العزم المُحصّل المؤثّر في الكرة؟

ج. القوّة المماسيّة (F) المؤثّرة في الكرة؟

المُعطيات: $m = 3.0$ kg, $r = 0.80$ m, $\omega_i = 0.0$, $\omega_f = 8\pi$ rad/s, $t = 5.0$ s .

المطلوب: $\alpha = ?, \Sigma\tau = ?, F = ?$

الحلّ:

أ. الكرة تدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة؛ فتكون سرعتها الزاويّة موجبة، وأستخدم المعادلة الآتية لحساب مقدار التسارُع الزاويّ.

$$\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{8\pi - 0}{5.0}$$

$$\alpha = 5.0\ rad/s^2$$

ب. بدايةً يلزمُ حسابُ عزم القصور الذاتيّ للكرة حول محور دورانها كما يأتي:

$$I = mr^2 = 3.0 \times (0.80)^2 = 1.9\ kg.m^2$$

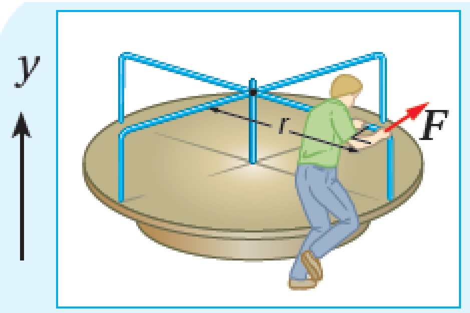
$$\Sigma\tau = I\ \alpha = 1.9 \times 5.0 = 9.5\ N.m$$

ج. أستخدم علاقة العزم لحساب مقدار القوّة المماسيّة المؤثّرة.

$$\Sigma F = F = \frac{\Sigma\tau}{r} = \frac{9.5}{0.80} = 11.9\ N \approx 12\ N$$

تمرين 5: كتاب

لعبةُ القرص الدوّار الموضّحة في الشكل؛ تتكوّن من قرصٍ مُصمتٍ قابلٍ للدّوران حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ في مركزه باتّجاه محور y . أثّر شخصٌ بقوةٍ مماسيه (F) ثابتةٍ في المقدار عند حافّة القرص مقدارُها (250 N) . إ ذا علمت أنّ كتلة القرص الدوّار (50.0 kg) ونصف قطره (2.0 m) ، وبإهمال قوى الاحتكاك وافتراض قرص اللعبة منتظمَ توزيع الكتلة، وبدأت اللعبة الدورانَ من السكون بتسارُعٍ زاويٍّ ثابتٍ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة، فأحسبُ مقدار ما يأتي:



أ . العزمُ المحصّل المؤثر في اللعبة؟

ب. التسارُع الزاويّ للّعبة؟

ج. السرعة الزاويّة للّعبة بعد (2.0 s) من بدء دورانها؟

د. التسارع الزاويّ للّعبة عندما يجلس طفلٌ كتلتُه(20.0 kg) على بُعد (1.5 m) من محور الدوران، بافتراض الطفل جُسيم نُقطيّ؟

الحل:

أ. اللعبة تدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة فيكون العزم موجبًا، وأستخدم علاقة العزم لحساب مقداره كما يأتي:

$$\Sigma\tau = F\ r sin = 250 \times 2.0\ sin 90^\circ = 5.0 \times 10^2\ N.m$$

ب. باستخدام الجدول أحسب عزم القصور الذاتي لقرص اللعبة حول محور دورانه.

$$I_{disck} = \frac{1}{2} m\, r^2 = \frac{1}{2} \times 50.0 \times (2.00)^2 = 1.0 \times 10^2 kg.m^2$$

ثم أحسب مقدار التسارع الزاوي للعبة.

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

$$5.0 \times 10^2 = 1.0 \times 10^2 \times \alpha$$

$$\alpha = 5.0\ rad/s^2$$

ج. اللعبة تدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فتكون سرعتها الزاوية موجبة، وأستخدم المعادلة الآتية لحساب مقدارها.

$$\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 0 + 5.0 \times 2.0 = 10.0$ rad/s

د. بداية، أحسب عزم القصور الذاتي للنظام المكوّن من القرص والطفل معًا حول محور دوران اللعبة، باعتبار الطفل جُسيم نقطي على بُعد (1.5 m) من محور الدوران .

$I = I_{disc} + I_{child}$

$I = 1.0 \times 10^2 + m_{child}\, r_{child}^2$

$= 2.0 \times 10^2 + 20.0 \times (1.5)^2 = 145\ kg.m^2$

ثم أحسب مقدار التسارع الزاوي للعبة.

$\Sigma\tau = I\alpha$

$5.0 \times 10^2 = 145 \times \alpha$

$\alpha = 3.4\ rad/s^2$

مراجعة الدرس

1.**الفكرة الرئيسة:** ما الكميّات الفيزيائيّة اللازمة لوصف الحركة الدورانية لجسم؟ وما عزم القصور الذاتي؟

من الكميات الفيزيائية اللازمة لوصف الحركة الدورانية: العزم، والإزاحة الزاوية، والسرعة الزاوية، والتسارع الزاوي

عزم القصور الذاتي مقياسٌ لممانعة الجسم لتغيير حالته الحركيّة الدورانيّة، رمزُه (I)

2.**أفسّر:** تدور إطارات سيارة بسرعة زاويّة ثابته تساوي .(5.0 rad/s) أجيبُ عمّا يأتي:

أ . هل التسارع الزاويّ للإطارات موجبٌ أم سالبٌ أم صفر؟ أُفسّر إجابتي.

بما أن الإطارات تدور بسرعة زاوية ثابتة فإن تسارعها الزاوي يساوي صفر.

ب. هل تدور أجزاء الإطار جميعها بمقدار السرعة الزاويّة نفسه أم لا؟ أُفسّر إجابتي.

بما أن شكل الإطار ثابت فإن جميع أجزائه تدور بمقدار السرعة الزاوية نفسه.

3. **أُفسّر:** السرعة الزاويّة لجسمٍ عند لحظةٍ زمنيةٍ مُعيّنةٍ تساوي(-3 rad/s) ، وتسارعُه الزاويّ عند اللحظة نفسها ($2\ \mathrm{rad}/s^2$) أُجيبُ عمّا يأتي:

أ . هل يدور الجسم باتّجاه حركة عقارب الساعة أم بعكسه؟ أُفسّر إجابتي.

بما أن إشارة السرعة الزاوية سالبة فإن الجسم يدور باتجاه حركة عقارب الساعة.

ب. هل يتزايد مقدار سرعته الزاويّة أم يتناقص أم يبقى ثابت؟ أُفسّر إجابتي.

بما أن إشارتي السرعة الزاوية والتسارع الزاوي مختلفتان فإن الجسم يتباطأ.

4.**أحلّل وأستنتج:** يدور إطار درّاجة بسرعة زاويّة ثابتة حول محورٍ ثابت. كيف يتغيّر مقدار السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالانتقال من داخله إلى حافّته الخارجية؟

لجميع أجزاء الإطار السرعة الزاوية نفسها.

5.علام يعتمدُ عزم القصور الذاتي لجسم؟

يعتمد عزم القصور الذاتي لجسم على كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه، وعلى موقع محور الدوران.

6. **أحسب:** مثقبٌ كهربائيٌّ يدورُ جزؤه الدوّار من السكون بتسارعٍ زاويٍّ ثابت، ويُصبح مقدار سرعته الزاويّة (2.6×10^3 rad/s) بعد (4 .0 S)من بدء دورانه. أحسبُ مقدار التسارُع الزاويّ للجزء الدوّار من المثقب؟

$$\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

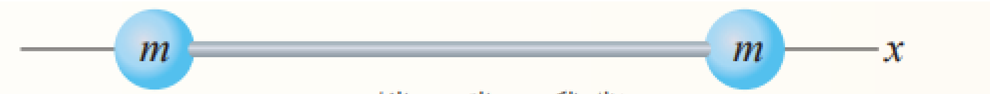
$$= \frac{2.6\times10^3 - 0}{4}$$

$$= 6.5\times10^2\ \mathrm{rad}/s^2$$

7. **أفسّر:** أيُّهما أسهل: تدوير قلم حول محورٍ عموديٍّ عليه مارًّا بمركز كتلته؛ أم تدويره حول محوره الهندسيّ؟ أُفسّر إجابتي.

تدوير القلم حول محوره الهندسي أسهل إذ يكون عزم القصور الذاتي له في هذه الحالة أصغر مقارنة بعزم القصور الذاتي عند تدويره حول محور عمودي عليه مارا بمركز كتلته.

8.**أُقارن:** قضيب فلزي خفيف ورفيع طوله (L) مُثبّت في طرفيه كرتين مُتماثلتين مهملتي الأبعاد، كتلة كلٍّ منهما (m) كما هو موضّحٌ في الشكل. في الحالة الأولى؛ دُوّر النظام المكوّن من القضيب الفلزيّ والكرتين حول محورٍ ثابتٍ عموديٍ على مستوى الصفحة يمرُّ بمنتصف القضيب الفلزيّ. وفي الحالة الثانية؛ دُوّر النظام حول محورٍ ثابتٍ عموديٍّ على مستوى الصفحة يمرُّ بمركز إحدى الكرتين عند أحد طرفي القضيب الفلزيّ. بإهمال كتلة القضيب الفلزيّ مُقارنةً بكتلتي الكرتين، في أي الحالتين السابقتين يلزمني عزمٌ محصّلٌ أكبر لبدء تدوير النظام؟ أُفسّر إجابتي.



نظام الكرتين والقضيب الفلزي.

الحل:

في الحالة الأولى، تبعد كل كرة مسافة($r_1 = \frac{L}{2}$) عن محور الدوران، وكتلتا الكرتين متساويتان.

أحسب عزم القصور الذاتي كما يأتي:

$$I=mr_1^2 + m\,r_1^2 = 2mr_1^2 = \frac{mL^2}{2}$$

أُلاحظ أن عزم القصور الذاتي يساوي ناتج جمع عزمي القصور الذاتي للكرتين حول محور الدوران نفسه.

في الحالة الثانية، يمر محور الدوران في إحدى الكرتين لذا لا تُساهم هذه الكرة في عزم القصور الذاتي؛ لأن (r=0)، بينما تبعد الكرة الثانية مسافة مقدارها.(L) وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:

$$I= m\,r^2 + 0 = mr^2 = m\,L^2$$

يكون عزم القصور الذاتي أكبر عند تدوير القضيب حول أحد طرفيه، وفي هذه الحالة يلزم عزم محصّل أكبر لبدء تدوير النظام

أسئلة إضافية

مثال 30: إضافي

ما الإزاحة الزاويّة لعقارب ساعة يد خلال ساعة واحدة؟ وذلك ل :

a. عقرب الثواني

b. عقرب الدقائق

c. عقرب الساعات

الحل:

a. $\theta_s = -2\pi \times 60 = -120\,\pi\,\text{rad}$

b. $\theta_m = -2\pi\,\text{rad}$

c. $\theta_h = -\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}\,\text{rad}$

مثال 31: إضافي

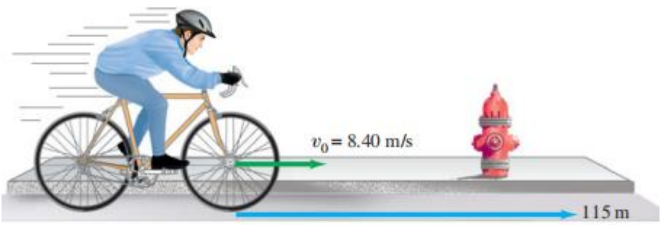
في الشكل المجاور دراجة هوائية تسير بسرعة ابتدائية مقدارها $(8.40\ m/s)$ تقطع مسافة $(115m)$ حتى تتوقف إذا كان قطر اطار الدراجة $(68.0\ cm)$ احسب :

a. السرعة الزاوية الابتدائية لإطارات الدراجة؟

b. عدد دورات كل إطار حتى نهاية المسافة المقطوعة؟

c. الزمن الازم حتى تتوقف الدراجة؟

d. التسارع الزاوي لإطارات الدراجة ؟



الحل :

a. $\omega_i = \frac{v_i}{r} = \frac{8.40}{0.340} = 24.7\ rad/s$

b. $\frac{115}{2\pi r} = \frac{115}{2\pi\ (0.340)} = 53.8\ \text{rev}$

c. $v_f^2 = v_i^2 + 2ax$

$0 = (8.4)^2 + 2(a)\ (115)$

$-70.56 = 230\ a$

$a = 0.306\ m/s^2$

$v_2 = v_1 + at$

0 = 8.4 +(- 0.306 t)

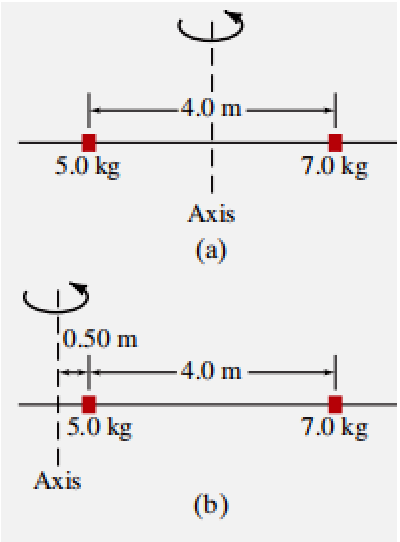
t = 27.4 s

d. $\alpha = \dfrac{\Delta w}{\Delta t} = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{t}$

$= \dfrac{0-24.7}{27.4} = -0.902\ rad/s^2$

مثال 32: إضافي

في الشكل المجاور احسب عزم القصور الذاتي للجسمين حول محور الدوران الموضح على اعتبار القضيب الواصل بينهما مهمل الوزن وعزم القصور الذاتي لكل جسم ($I = mr^2$)؟



الحل :

a.

$I = \sum mr^2 = (5.0)(2.0)^2 + (7.0)(2.0)^2$

$= 20 + 28 = 48\ kg.m^2$

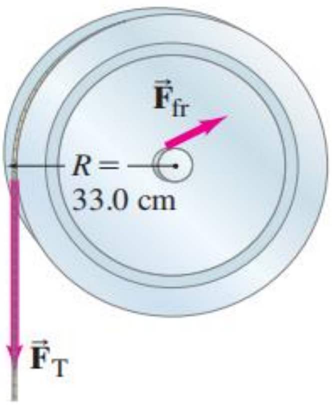
b.

$I = \sum mr^2 = (5.0)(0.5)^2 + (7.0)(4.5)^2$

$= 1.3 + 142 = 143.3\ kg.m^2$

ملاحظة: في هذا المثال لاحظ نقطتين مهمتين، الملاحظة الأولى أن عزم القصور يختلف باختلاف محور الدوران والملاحظة الثانية في الحالة (b) عزم القصور الناتج من الجسم القريب من محور الدوران يشكل اقل من 1% من العزم الكلي.

مثال 33: إضافي



في الشكل المجاور حبل ملفوف حول بكرة يشدها للأسفل بقوة مقدارها $(F_T = 15\ N)$ ، قابلة للدوران حول محور يمر بمركزها وعمودي على مستوى الصفحة كتلها $(M= 4.0kg)$ ونصف قطرها $(R= 33.0\ cm)$ ويؤثر عليها قوة احتكاك مع محور الدوران عزمها $(\tau_{fr} = 1.10\ N.m)$ ، اذا تسارعت البكرة من السكون الي سرعة زاوية مقدارها $(30.0\ rad/s)$ في $(3.00\ s)$ ، احسب :

1. العزم المحصل المؤثر في الكرة ؟
2. التسارع الزاوي للكرة ؟
3. عزم القصور الذاتي للكرة ؟

الحل :

1. العزم المحصل الناتج للكرة ناتج من قوة الشد عكس عقارب الساعة والعزم الناتج عن قوة الاحتكاك مع عقارب الساعة كما يلي:

$$\sum \tau = F_T R - \tau_{fr}$$

$$= (15.0) \times (0.330) - 1.10$$

$$= 3.85\ N.m$$

2. التسارع الزاوي

$$\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$$= \frac{30.0 - 0}{3.0} = 10.0\ rad/s^2$$

عزم القصور الذاتي للكرة حسب القانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية فان التسارع الزاوي (α) الذي يكتسبه الجسم يتناسب مع العزم المحصل المؤثر فيه $(\sum \tau)$

$$\Sigma\tau = I\,\alpha$$

$$I = \frac{\Sigma\tau}{\alpha} = \frac{3.85}{10.0} = 0.385\ kg.m^2$$

الدرس الثالث

الزخم الزاوي Angular Momentum

الطاقة الحركيّة الدورانيّة Rotational Kinetic Energy

الأجسام التي تتحرك حركة انتقالية تمتلك طاقة حركية خطية (K) ترتبط بحاصل ضرب الكتلة (m)بمربع السرعة(v^2) ووحدتها جول (J) حسب العلاقة التالية :

$$K = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

أما الأجسام التي تدور حول محورٍ ثابتٍ ،تمتلك طاقة حركية دورانية (K_r) ترتبط بعزم القصور الذاتي للجسم (I)، و مربع سرعته الزاويّة (ω^2). ووحدتها جول (J) حسب العلاقة التالية :

$$K_r = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2$$

ألاحظُ التناظر بين الطاقة الحركية الخطيّة ($\frac{1}{2}\ m\ v^2$) والطاقة الحركيّة الدورانيّة ($\frac{1}{2}\ I\ \omega^2$)

حيثُ تُقابل الكميّتان (m,v) في الحركة الخطية الكميّتان (I,ω) في الحركة الدورانية على الترتيب.

على ماذا تعتمدُ الطاقة الحركية الدورانية؟

تعتمدُ الطاقة الحركية الدورانية لجسمٍ على عزم القصور الذاتي له، وسرعته الزاويّة، وتُقاس الطاقة الحركية الدورانية بوحدة (J) .

إذا تغيّر موقع محور دوران جسم مع بقاء مقدار السرعة الزاويّة ثابتًا، فهل يتغيرُ مقدار الطاقة الحركيّة الدورانيّة؟

نعم يتغير مقدار الطاقة الحركية الدورانية، لأنه بتغير موقع محور الدوران يتغير عزم القصور الذاتي للنظام.

مثال 8: كتاب

يتحرّكُ جزيءُ أُكسجينٍ (O_2) حركةً دورانيّةً حول محورٍ ثابتٍ باتجاه محور(z) ، عموديٍّ على مُنتصف المسافة بين ذرتيّ الأكسجين المكوّنتين له، بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها (4.6×10^{12}rad/s). إذا علمتُ أنّ عزم القصور الذاتيّ لجزيء الأكسجين حول محور دورانه z يساوي (1.95×10^{-46} kg.m^2) عند درجة حرارة الغرفة؛ فأحسبُ مقدار الطاقة الحركيّة الدورانيّة للجزيء؟

المعطيات:

$\omega = 4.6 \times 10^{12}$ rad/s, $I = 1.95 \times 10^{-46}$ kg.m^2

المطلوب: $K_r = ?$

الحلّ:

أحسبُ الطاقة الحركيّة الدورانيّة كما يأتي:

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.95 \times 10^{-46} \times (4.6 \times 10^{12})^2$$

$$= 2.06 \times 10^{-21} \text{ J}$$

تمرين 6 : كتاب

قرصٌ مصمتٌ منتظمٌ متماثلٌ كتلتهُ (2.0 kg) ، ونصف قطره(0.50 m) ، يتحرّك حركةً دورانيّةً بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها (8.0 rad/s) حول محورٍ ثابتٍ عموديّ على مركزه، وعزم القصور الذاتي له يعطي بالعلاقة ($\frac{1}{2}\, mr^2$) أحسب الطاقة الحركيّة الدورانيّة للقرص؟

الحل :

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\, mr^2\right) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (2) (0.5)^2\right) (8.0)^2$$

$$= 8 \text{ J}$$

مثال 34: إضافي

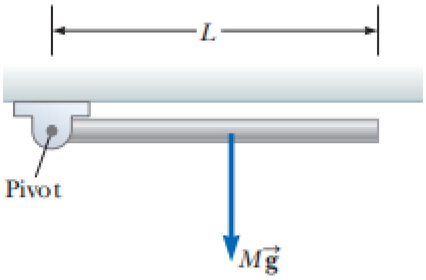
ساق رفيع منتظم طوله ($L=1.00\ m$) وكتلته ($M=2.00Kg$) ، قابل للدوران حول محور عديم الاحتكاك عند طرفه الأيسر كما في الشكل المجاور ، إذا كان عزم القصور الذاتي للساق خلال هذا المحور هو ($\frac{1}{3}\ M\ L^2$) ، و كان الساق متزن أفقيا ثم ترك حر الحركة من السكون ، احسب :

أ. تسارعه الزاوي لحظة إفلاته من الوضع الأفقي؟

ب. تسارعه الزاوي لحظة إفلاته من زاوية ($60°$) من الوضع الأفقي أسفل السطح ؟

الحل:

أ.



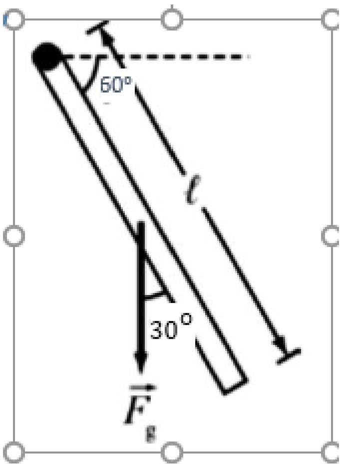
$$\sum \tau = I\ \alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\,\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}\,M\,L^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$= \frac{3\ (10)}{2\ (1)} = 15\ \text{rad}/\ s^2$$

ب.

في الحالة الثانية عندما يسقط الجسم بتأثير وزنه من زاوية (60 °) أسفل السطح عن الوضع الأفقي، تكون الزاوية (θ)؛ بين مُتّجه القوّة ومُتّجه موقع نقطة تأثير القوّة تساوي($30°$).



$$\sum \tau = I\ \alpha$$

$$Mg\ \frac{L}{2}\ \ \sin 30° = \frac{1}{3}\ M\ L^2\ \alpha$$

$$\alpha = \frac{Mg\,\frac{L}{2}\,(\frac{1}{2})}{\frac{1}{3}\,M\,L^2} = \frac{3g}{4L}$$

$$= \frac{3\ (10)}{4\ (1)} = 7.5\ \text{rad}/\ s^2$$

الزخَم الزاويّ وحفظهُ Angular Momentum and it's Conservation

الزخَم الزاويّ Angular momentum : يُعرف بأنّه يساوي ناتج ضربِ عزم القصور الذاتي للجسم أو النظام في سرعته الزاويّة. وهو كميّة مُتّجهةٌ، رمزه (L) ، ووحدةُ قياسه ($kg.m^2/s$) حسبَ النظام الدولي للوحدات.

يُعطى مقدار الزخَم الزاويّ لجسمٍ يتحرّك حركةً دورانيةً حول محورٍ ثابتٍ بالعلاقة

$$L = I\omega$$

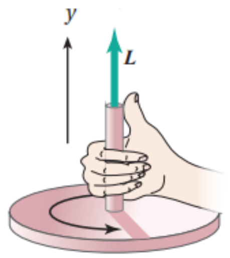
ويكون اتّجاهُ الزخَم الزاويّ باتّجاه السرعة الزاويّة المُتّجهه، حيث يكون خارجًا من الصفحة على امتداد محور الدوران عند دوران الجسم بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة، وهنا يُعدّ الزخَم الزاويّ موجبًا، كما هو موضّحٌ في الشكل (أ)

(أ)

أمّا عند دوران الجسم باتّجاه حركة عقارب الساعة فيكونُ مُتّجه الزخَم الزاويّ داخلً إلى الصفحة على امتداد محور الدوران، ويعدُّ الزخَم الزاويّ سالبًا كما هو موضح في الشكل (ب)

(ب)

أو يمكن استخدام قاعد قبضة اليد اليمنى لتحديد اتجاه الزخَم الزاويّ لجسم يدور حول المحور y ؛ وذلك عن طريق لفّ أصابع اليد اليمنى حول محور الدوران بحيث تُشير إلى اتّجاه دوران الجسم، فيُشير الإبهام إلى اتّجاه الزخَم الزاوي كما في الشكل (ج) .



(جـ)

على ماذا يعتمد الزخم الزاوي ؟

يعتمد على عزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية.

الزخَم الزاويّ والعزم Angular Momentum and Torque

العزمَ المُحصّل المؤثّر في جسمٍ يتحرّك حركةً دورانيّةً حول محور ثابت يُساوي المعدّل الزمنيّ للتغيّر في زخَمه الزاويّ حولَ المحور نفسه.

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt}$$

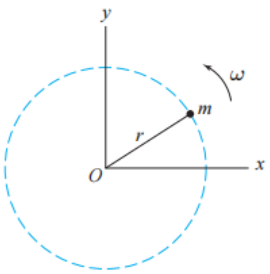
وعند حدوث تغيُّر في الزخَم الزاويّ (ΔL) خلال فترةٍ زمنيّةٍ(Δt) ؛ فإنّه يُمكن كتابة العلاقة السابقة في الحركة الدورانيّة كما يأتي :

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

ما العلاقة بين العزم المحصّل المؤثر في جسم والمعدل الزمني لتغيّر زخمه الزاويّ. أُفسّر إجابتي؟
العزم المُحصّل المؤثّر في جسمٍ يتحرّك حركةً دورانيّةً حول محورٍ ثابت يُساوي المعدّل الزمنيّ للتغيّر في زخَمه الزاويّ حولَ المحور نفسه.

مثال 9: كتاب

يتحرّك جُسيمٌ كتلته (50.0 g) حول محورٍ ثابت (محور z) عند النقطة(O) ، في مسارٍ دائريٍّ نصفُ قطره(20.0 cm) ، بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها(5.0 rad/s) بعكس اتّجاه دوران عقارب الساعة، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور أحسبُ مقدار الزخَم الزاويّ للجُسيم حول هذا المحور، وأُحدّد اتّجاهه؟



المُعطيات:

$m = 50.0 \times 10^{-3}$ kg, $r = 20.0 \times 10^{-2}$ m, $\omega = 5.0$ rad/s, $I = mr^2$

المطلوب:

$L = ?$

الحلّ:

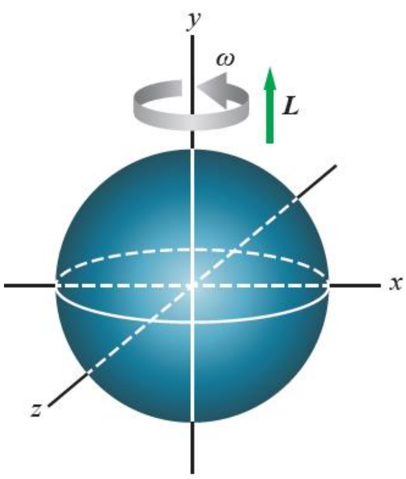
أحسب مقدارَ الزخَم الزاويّ للجُسيم بالعلاقة التالية:

$$L = I\omega$$
$$= mr^2\omega$$
$$= 50.0 \times 10^{-3} \times (20.0 \times 10^{-2})^2 \times 5.0$$
$$= 1.0 \times 10^{-2} \text{kg}.m^2/\text{s}$$

باستخدام قاعدة قبضة اليد اليمنى؛ فإنّ مُتّجه الزخَم الزاويّ يكون خارجًا من الصفحة على امتداد محور الدوران.

مثال 10:كتاب

كرةٌ مُصمَتة منتظمةٌ متماثلةٌ كتلتُها (5.0 kg) ونصفُ قطرها (10.0 cm) ، تتحرّك حركةً دورانيّةً حول محورٍ ثابتٍ (محور y) يمرُّ في مركزها، بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها (20 rad/s) بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة عند النظر إليها من أعلى، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور أحسبُ مقدار الزخَم الزاويّ للكرة حول هذا المحور، وأُحدّد اتّجاهه؟



المُعطيات: $m = 5.0$ kg, r = 10.0×10^{-2}m, ω = 20 rad/s , $I = \frac{2}{5}\,mr^2$

المطلوب : L=?

الحلّ:
أستخدم العلاقة الآتية لحساب مقدار الزخَم الزاويّ لجسمٍ يدور حول محورٍ ثابت .

$$L = I\omega$$
$$= \frac{2}{5}\,mr^2\omega$$
$$= \frac{2}{5} \times 5.0 \times (10.0 \times 10^{-2})^2 \times 20$$
$$= 0.4\ \text{kg.}m^2/\text{s}$$

الزخَم الزاويّ للكرة موجبٌ، إذ يكون اتّجاه الزخَم الزاويّ باتّجاه محور y الموجب عند النظر إليها من أعلى؛ لأنّ الكرة تدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة كما يبدو للناظر.

تمرين 7 : كتاب

في المثال السابق، إذا تغيّر مقدار السرعة الزاويّة للكرة حول محور الدوران نفسه بتسارع زاويّ ثابت، بحيث أصبح (40 rad/s) خلال(5 s) ، فأحسبُ مقدار العزم المحصّل المؤثّر في الكرة خلال هذه الفترة الزمنيّة؟

الحل :

$$\sum\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{I(\omega_f - \omega_i)}{\Delta t}$$
$$= \frac{2\times10^{-2}(40-20)}{5} = 8\times10^{-2}\ \text{N.m}$$

حفظُ الزخَم الزاويّ Conservation of Angular Momentum

قانون حفظ الزخَم الزاويّ : Law of Conservation of Angular Momentum ينصُّ على أنَّ": الزخَم الزاويّ لنظامٍ معزولٍ يظلُّ ثابتًا في المقدار والاتّجاه"، إذ يكونُ العزم المحصّل المؤثّر في النظام المعزول صفرًا. أي أنّ الزخَم الزاويّ الابتدائيّ لنظامٍ معزولٍ يُساوي زخَمه الزاويّ النهائيّ.

في الحركة الدورانيّة عندما يُساوي العزم المحصّل المؤثّر في جسمٍ أو نظامٍ صفرًا($\boldsymbol{\Sigma\tau} = 0$) ؛ هنا يظلُّ الزخَم الزاويّ ثابتًا مع مرور الزمن، أي أنّ:

$$\sum\tau = \frac{dL}{dt} = 0$$

وهذا يعني؛ أنّ الزخَم الزاويّ ($\boldsymbol{L}$) محفوظ، وأستنتج من العلاقة السابقة أنّ:

$$\boldsymbol{L_f = L_i}$$

أما إذا أُعيد توزيع كتلة النظام المعزول الذي يتحرّك حركةً دورانيّة؛ فإنّ عزمَ القصور الذاتيّ والسرعة الزاويّة للنظام يتغيّران بحيث يبقى الزخَم الزاوي ثابتًا .وبما أنّ($L = I\omega$) ، فإنّه عند تغير (I) يجب أن تتغيّر (ω) للنظام بحيث يبقى الزخَم الزاويّ ثابتًا .وأُعبّر عن ذلك رياضيًّا كما يأتي:

$$I_f\ \omega_f = I_i\ \omega_i = constant$$

يبيّن الشكل المجاور مُتزلّجًا على الجليد يدور حول محورٍ عموديٍّ على سطح الأرض ويمرُّ بمركز كتلته .يمكنُ التعامُل مع المُتزلّج على أنّه نظامٌ معزولٌ حيثُ قوّة وزنه والقوة العموديّة تؤثّران في الاتّجاه الرأسيّ وعزم كلٍّ منهما حول محور الدوران يساوي صفرًا، أضفُ إلى ذلك؛ أنّ مقدارَ قوّة الاحتكاك بين الزلاجات والجليد صغيرٌه ويمكنُ إهمال العزم الناتج عنه حول محور الدوران .وهذا يعني أنّ الزخَم الزاويّ للمُتزلّج محفوظٌ :($I\ \omega = constant$) .

(ب) متزلج يدور بسرعة زاوية ω_f.　　(أ) متزلج يدور بسرعة زاوية ω_i.

اعتمادا على الشكل أعلاه

1. هل يمكن اعتبار النظام معزول؟

نعم يمكن اعتبار النظام معزول بإهمال قوة الاحتكاك، وبما ان قوّة وزنه والقوة العموديّة تؤثّران في الاتّجاه الرأسيّ وعزم كلٍّ منهما حول محور الدوران يساوي صفرًا، فيمكن اعتبار النظام معزول.

2. هل اختلف عزم القصور الذاتي في الشكل (أ) عن الشكل (ب) ؟

يعتمد عزم القصور الذاتي على كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه وعلى موقع محور الدوران وفي هذه الحالة موقع محور الدوران لم يتغير، لكن المتزلج أعاد توزيع كتلته عندما قام المتزلج بضمّ قدميه وذراعيه نحو جسده.

3. ما أثر قيام المتزلج بضمّ قدميه وذراعيه نحو جسده على حركته الدورانية؟

بالطبع يقلُّ عزمُ قصوره الذاتي، لذا يزداد مقدارُ سرعته الزاويّة بحيثُ يبقى زخَمه الزاويّ ثابتًا.

مثال 11: كتاب

ثلاثة أطفال كتلهم (32 kg ،28 kg ،20kg) يقفون عند حافّة لعبة دوّارة على شكل قرصٍ دائري منتظم كتلته (M = 100 kg) ونصف قطره (r = 2.0 m)، ويدور بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتة مقدارها (2.0 rad/s)، حول محور دوران ثابت عموديّ على سطح القرص ويمرُّ في مركزه باتّجاه محور (y) تحرّك الطفل الذي كتلته (20 kg) ووقف عند مركز القرص. أحسبُ مقدار السرعة الزاويّة الجديد للعبة الدوّارة؟

المُعطيات:

$M = 100$ kg, $r = 2.0$ m, $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 28$ kg, $m_3 = 32$ kg, $\omega_i = 2.0$ rad/s

المطلوب:

$\omega_f = ?$

الحل:

يمكن التعامل مع النظام على أنّه معزولٌ؛ لذا يكون الزخَم الزاويّ محفوظًا. أُطبّقُ قانون حفظ الزخَم الزاويّ:

$\boldsymbol{L_f} = \boldsymbol{L_i}$

$I_f\ \omega_f = I_i\ \omega_i$

$$\frac{1}{2} M r^2 + (m_2+m_3)r^2 \times \omega_f = \frac{1}{2} M r^2 + (m_1+ m_2+m_3)r^2 \times \omega_i$$

$$\frac{1}{2} \times (100)\ (2)^2 + (28+32)\ (2)^2 \times \omega_f = \frac{1}{2} (100)\ (2)^2 + (20+ 28+32)\ (2)^2 \times 2$$

$$440 \times \omega_f = 1040$$

$$\omega_f = \frac{1040}{440} = 2.36 \text{ rad/s}$$

لاحظ أن الطفل الأول عندما تحرك الي مركز القرص، قل عزم القصور الذاتي للنظام، وحيث أن الزخم الدوراني محفوظ لنظام معزول فان سرعته الزاوية ازدادت.

مراجعة الدرس

1. **الفكرة الرئيسة**: ما الزخَم الزاويّ؟ وعلامَ ينص قانون حفظ الزخَم الزاويّ؟ علامَ تعتمد الطاقة الحركيّة الدورانيّة لجسمٍ يدور حول محورٍ ثابت؟

الزخَم الزاوي يُعرف بأنه يساوي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي للجسم أو النظام في سرعته الزاوية وهو كمية متجهة، رمزه (L) وينصّ قانون حفظ الزخم الزاوي على أن: "الزخَم الزاويّ لنظامٍ معزولٍ يظلُّ ثابتًا في المقدار والاتّجاه"، إذ يكونُ العزم المحصّل المؤثّر في النظام المعزول صفرا. وتعتمد الطاقة الحركية الدورانية لجسم يدور حول محور ثابت على عزم قصوره الذاتي وسرعته الزاوية.

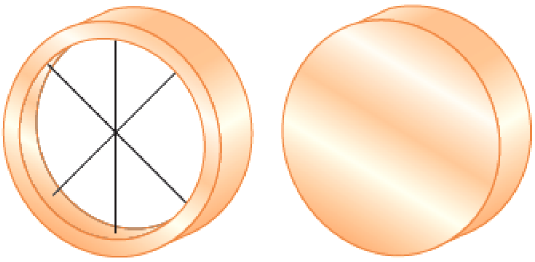
2. **أُفسّرُ**: أنبوبٌ مجوّفٌ وأسطوانة مصمتة، متماثلان في الكتلة والأبعاد، ويدور كلٌّ منهما حول محورٍ تماثله بالسرعة الزاويّة نفسها. هل لهما الطاقة الحركيّة الدورانيّة نفسها أم لا؟ أوضّح إجابتي.

الأنبوب المجوف يمتلك عزم قصور ذاتي أكبر، لأن كتلته موزعة على سطح الأنبوب بعيدا عن محور الدوران مقارنة بالأنبوب المسمط. وبالرجوع إلى العلاقة$(K_r = \frac{1}{2} I\,\omega^2)$ فإن الطاقة الحركية الدورانية تتناسب طرديا مع عزم القصور الذاتي، بثبوت السرعة الزاوية. فيكون للأسطوانة المجوفة طاقة حركية دورانية أكبر.

3. **أحلّل وأستنتج**: يبيّنُ الشكل المجاور أُسطوانتين إحداهما مصمتة والأُخرى مجوّفة، متماثلتين في الكتلة والأبعاد والسرعة الزاويّة، وتدوران حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ في المركز الهندسي لكلٍّ منهما. مستعينًا بالشكل المجاور؛ أجيب عن السؤالين الآتيين:

أ . **أُقارنُ** بين مقداري الزخَم الزاويّ للأسطوانتين، هل هما متساويان أم لا؟ أُفسّر إجابتي.

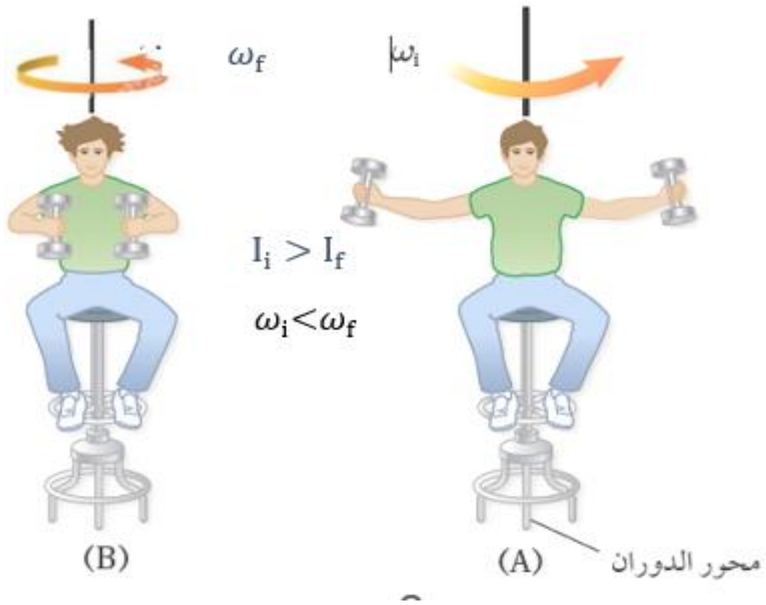
ب .**أُقارنُ** بين مقداري الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانتين، هل هما متساويان أم لا؟ أفسر إجابتي.


(ب) (أ)

أ .
مقدار الزخم الزاوي للأُسطوانة المجوّفة أكبر منه للأُسطوانة المصمتة؛ لأن الزخم الزاوي يعتمد على عزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية، وهما تدوران بمقدار السرعة الزاوية نفسها، وعزم القصور الذاتي للأسطوانة المجوّفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة.

ب. مقدار الطاقة الحركية الدورانية للأُسطوانة المجوّفة أكبر منه للأُسطوانة المصمتة؛ لأن الطاقة الحركية الدورانية تعتمد على عزم القصور الذاتي ومربع مقدار السرعة الزاوية، وهما تدوران بمقدار السرعة الزاوية نفسها، وعزم القصور الذاتي للأسطوانة المجوّفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة.

4. **التفكير الناقد**: يجلس طالبٌ على كرسيٍّ قابلٍ للدوران حول محورٍ رأسي، ويُمسك ثقلً بكلِّ يدٍ . بدايةً؛ يدور الطالب والكرسيُّ بسرعةٍ زاويّة (ω_i) ويداه ممدودتان، كما هو موضحٌ في الشكل (A) إذا طلب المعلم من الطالب ضمّ ذراعيه؛ كما في الشكل (B)؛ فماذا يحدث لكلٍّ من:



أ . عزمُ قصوره الذاتي؟
ب .سرعتهُ الزاويّة النهائية؟

أ. يؤدي ضمّ الطالب لذراعيه إلى تقليل مقدار عزم القصور الذاتي له حول محور الدوران الراسي من المقدار (I_i) إلى المقدار (I_f) لأنه حرّك جزء من كتلته وحرّك الثقلين قريبًا من محور الدوران .

ب. لا يوجد عزم محصّل مؤثر في النظام الذي يتكون من الطالب والكرسي والثقلين، لذا يكون الزخم الزاوي محفوظًا لهذا النظام حول محور الدوران. ألاحظ أن عزم القصور الذاتي للطالب في الشكل (B)أقل منه في الشكل (A)؛ أي أن: $(I_i > I_f)$، لذا يجب أن يكون مقدار سرعته الزاوية النهائية (ω_f) في الشكل (B) أكبر مقارنة بمقدار سرعته الزاوية الابتدائية (ω_I)، بحسب قانون حفظ الزخم الزاوي. أي يزداد مقدار سرعته الزاوية، ويتغرمن (ω_i) إلى (ω_f) ويمكن للطالب تقليل مقدار سرعته الزاوية عن طريق مد ذراعيه مرة أخرى على استقامتيهما، وتحريك الثقلين إلى الخارج

أسئلة التفكير الواردة في كتاب الأنشطة

السؤال الأول :أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة لكُلّ جملة ممّا يأتي:

1. .يكونُ جسمٌ واقع تحت تأثير عزم ازدواج عندما:
أ. يكون متزنًا؛ أي تكون القوّة المُحصّلة والعزم المحصّل المؤثّران فيه يساويان صفرًا.
ب. تؤثّر فيه قوّتان لهما المقدار نفسه والاتجاه نفسه، وخطًّا عملهما متطابقان.
ج. تؤثّر فيه قوتان لهما المقدار نفسه، متعاكستان في الاتّجاه، وخطّا عملهما غير متطابقين.
د. تؤثّر فيه قوّتان لهما المقدار نفسه، والاتّجاه نفسه، وخطّا عملهما غير متطابقين.

2. تستخدم رؤى مفكًّا طولُه (30.0 cm) لفتح غطاء علبة بالتأثير في طرف المفك بقوّةٍ مقدارها (80.0 N) عموديا علية، إنّ مقدار العزم الذي تؤثّر به رؤى بوحدة (N.m) يساوي :
أ. 24 ب. 2.67 ج. 2400 د.0

3. الزاويةُ التي يصنعها الخطُّ الواصل بين الجسم ونقطة الأصل مع الخط المرجعيّ محور $(+\ x)$ تسمى
أ. الإزاحةُ الزاويّة ب. الموقعُ الزاويّ ج. السرعةُ الزاويّة د. الزاويةُ الحرجة

4. البُعد العموديّ بين خطِّ عمل القوة ومحور الدوران يُسمّى :
أ. الإزاحةُ الزاويّة ب. الموقعُ الزاويّ ج. العزمُ د. ذراعُ القوة

5. يجلس خالدٌ (60.0 kg) وعاهد (50.0 kg) على طرفي لعبةٍ see – saw مُتزنةٍ أُفقيًّا، تتكون من قضيبٍ فلزيٍّ منتظمٍ يرتكز عند نقطة في منتصفه. إذا كان بُعد خالد (1.5 m) عن نقطة الارتكاز، فإنّ بُعدَ عاهد عن النقطة نفسها بوحدة m يساوي :
أ. 1.25 ب. 1.8 ج. 3.0 د. 2.0

6. السرعة الزاويّة لجسمٍ يتحرّك حركةً دورانيّةً عند لحظة معيّنة تُساوي (-5 rad/s)، وتسارعُهُ الزاويّ عند اللحظة نفسها ($3rad/ s^2$) ، أصفُ حركة هذا الجسم بأنّه:
أ. يدورُ باتّجاه حركة عقارب الساعة بتسارع.
ب. يدور باتّجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.
ج. يدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة بتسارع.
د. يدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.

7. يدور إطار سيّارةٍ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة حول محور دورانٍ ثابتٍ عموديٍّ عليه ويمرّ ُفي مركزه. أيُّ الجمل الآتية صحيحةٌ فيما يتعلّقُ بحركة الإطار:
أ. تزدادُ السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالاقتراب من محور الدوران.
ب. تزداد السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالابتعاد عن محور الدوران.
ج. يكون لأجزاء الإطار جميعها السرعةُ الزاويّة نفسُها.
د. السرعة الزاويّة لبعض أجزاء الإطار موجبة، ولأجزاء أُخرى سالبة حسب بعدها عن محور الدوران.

1	2	3	4	5	6	7
ج	أ	ب	د	ب	ب	ج

السؤال الثاني : أحسبُ: لتدوير مقبض صنبور الماء؛ أثّرتُ فيه بقوتين مقدارُ كُلّ منهما (3.0 N) باتّجاهين متعاكسين، وعموديًّا على طول المقبض. إذا علمتُ أن طول المقبض (8.0 cm) ؛ فما مقدار عزم الازدواج المؤثّر في مقبض الصنبور؟
الحل :

$\tau_{couple}= 2F\, r\sin\theta = 2\times3.0 \times4.0 \times10^{-2}\sin 90^\circ= 0.24$ N.m

السؤال الثالث: أستخدمُ المتغيّرات: في أثناء مسابقة يدور مُتزلّجٌ على الجليد حول نفسه بسرعةٍ زاويّةٍ ابتدائية (ω_i) وفي نهاية العرض ضمّ المُتزلّج يديه نحو جسمه فأصبح مقدار عزم قصوره الذاتيّ النهائيّ مساويًا نصف مقدار عزم قصوره الذاتيّ الابتدائيّ. كم يُصبح مقدار سرعته الزاويّة النهائيّة مقارنةً بمقدار سرعته الزاويّة الابتدائيّة بإهمال تأثير عزم قوة احتكاك الزلّاجات مع الجليد؟ أفسّر إجابتي.

الحل :

أفترض أن قوى الاحتكاك مع الجليد مهملة كما هو مُعطى في السؤال، لذا يُمكن التعامل مع النظام على أنه معزول، ويكون الزخم الزاوي محفوظ، و ($I_f = \frac{1}{2} I_i$)، لذا فإن:

$\boldsymbol{L_i = L_f}$

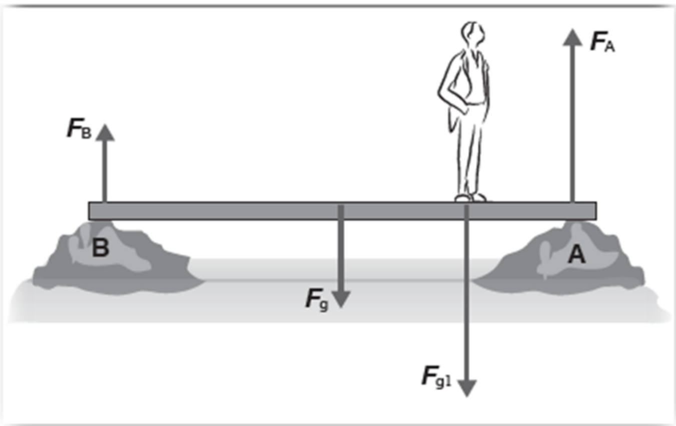
$I_i\omega_i= I_f\omega_f$

$I_i\omega_i= \frac{1}{2} I_i\omega_f$

$\omega_f= 2\omega_i=$

بما أن الزخم ا الزاوي محفوظ فإن نقصان عزم القصور الذاتي يؤدي إلى زيادة مقدار السرعة الزاويه، حيث ($I\ \omega=constant$)

السؤال الرابع: يوضّح الشكّل المجاور جسرًا خشبيًّا مُنتظمًا متماثلًا طولة (8.0m) ووزنُه (200N) يرتكزُ طرفيه على ضفّتي نهر. إذا وقف شخصٌ وزنه (800N) على بُعد (2.0m) من الطرف (A)، وكان اللّوح مُتّزنًا؛ أحسب مقدار ما يأتي:



أ. القوّة العموديّة المؤثّرة في الطرف (A) من الجسر ؟

ب. القوّة العموديّة المؤثّرة في الطرف (B) من الجسر؟

أ. تؤثر في الجسر أربع قوى(F_A) القوة العمودية المؤثرة في الطرف (A)من الجسر، و (F_B) القوة العمودية المؤثرة في الطرف (B) من الجسر، و(F_{g1}) وزن الشخص، و(F_g) وزن الجسر يؤثر في منتصفه عند مركز كتلته كون الجسر منتظم متماثل .وبما أن النظام في حالة اتزان سكوني، فإنني أُطبّق الشرط الثاني للاتزان حول محور عمودي على الصفحة عبر الطرف (B) للجسر؛ لأجد مقدار (F_A).
إنّ العزم الناتج عن القوة و (F_B) العمودية يساوي صفرا ؛ لأن محور الدوران يمر في نقطة تأثيرها . وألاحظ أن الجسر متزن أفقيًّا لذا فإنّ ($\theta=90^\circ$).

$$\sum \tau_B = 0$$
$$F_A\, r - F_g\, r_{cm} - F_{g1}\, r_1 = 0$$
$$F_A \times 8.0 = 200 \times 4.0 + 800 \times 6.0$$
$$F_A = 700\ \text{N}$$

ب .النظام في حالة اتزان سكوني، لذا فإن القوة المحصّلة المؤثرة فيه تساوي صفرا، وأُطبّق القانون الثاني لنيوتن على الجسر في اتجاه محور y لأجد مقدار القوة (F_B)، لأنه لا توجد قوى تؤثر في اتجاه محور x .

$$\Sigma F_y = m a_y = 0$$
$$F_A + F_B - (F_g + F_{g1}) = 0$$
$$F_B = F_g + F_{g1} - F_A$$
$$F_B = 200 + 800 - 700 = 300\ \text{N}$$

اتّزان الجسور Equilibrium of Bridges

يتطلّب بناءُ المنشآت التي أراها؛ من جسور وسدودٍ ومبانٍ إلى ناطحات السحاب من المصمّمين والمهندسين المعماريين تحديدَ القوى المؤثرة في هياكلها وتراكيبها؛ للمحافظة عليها ثابتةً ومتزنةً سكونيًّا وعدم انهيارها .ويُعنَى الاتّزان السكونيّ بحساب القوى المؤثّرة في هذه الهياكل والتراكيب، لتحديد ما إذا كانت قادرة على تحمّل هذه القوى دونَ حدوث تشوّهٍ أو تصدّعٍ أو كسرٍ فيها .وهذا الإجراءُ الذي يتّبعه المصمّمون والمهندسون يُمكّنهم من حساب القوى المؤثّرة في مكوّنات هياكل وتراكيب المباني والجسور، والآلات، والمركبات، وغيرها .ألاحظ في حياتي اليوميّةَ جسورًا مختلفةَ التصاميم، يتعّرض كلٌّ منها لقوًى مختلفةٍ تؤثّر في مكوناته، تعمل على شدّها أو ضغطها .إذ يؤثّر فيها قوى ضغطٍ تجعلُها تنكمش وتتقلّص، وقوى شدٍّ تجعلُها تتمدّد ويزداد طولها؛ كما هو موضّحٌ في الشكل .لذا يجب أخذ هذه القوى في الحسبان عند تصميم أي جسر؛ كي لا يتعرض إلى التصدُّع والالتواء والانكماش، لعدم مقدرته على تحمّلها، وإيجاد وسائل وتصاميم مناسبة تعمل على توزيع هذه القوى على مختلف أجزاء الجسر بالشكل الذي يمنع تمركُزَها في منطقةٍ واحدة. لرسم أفضل التصاميم وتنفيذها باستخدام المواد المناسبة؛ يراعي المصمّمون والمهندسون المعماريون في مراحل تصميم الجسور المختلفة وإنشائها تحقيقَ شرطي الاتّزان في مكوناتها جميعًا .

ولتكون الجسورُ أنظمةً متّزنةً؛ يجب أخذُ قياساتٍ دقيقةً مضبوطةً لهذه القوى ومواقع دعامات الجسر والمسافات بينها ومقدار أكبر ثقل يُمكن أن يتحمّله الجسر دون أن ينهار. والشكل المجاور يوضح أماكن الشد والضغط التي يتعرض لها الجسر.

1. ما هي القوى المؤثرة التي تتعرض هياكل الجسور؟

أ . قوى شد تجعلُها تتمدّد ويزداد طولها.

ب. قوى ضغط تجعلُها تنكمش وتتقلّص.

2. ماذا يحدث للجسور عند عدم مراعاة قوي الشد والضغط التي تتعرض لها؟

يحدث فيها تشوّهٍ أو تصدّعٍ أو كسرٍ ثم تنهار.

3. ماذا يفيد معرفة القوى المؤثرة للمهندسين عند بناء الجسور؟

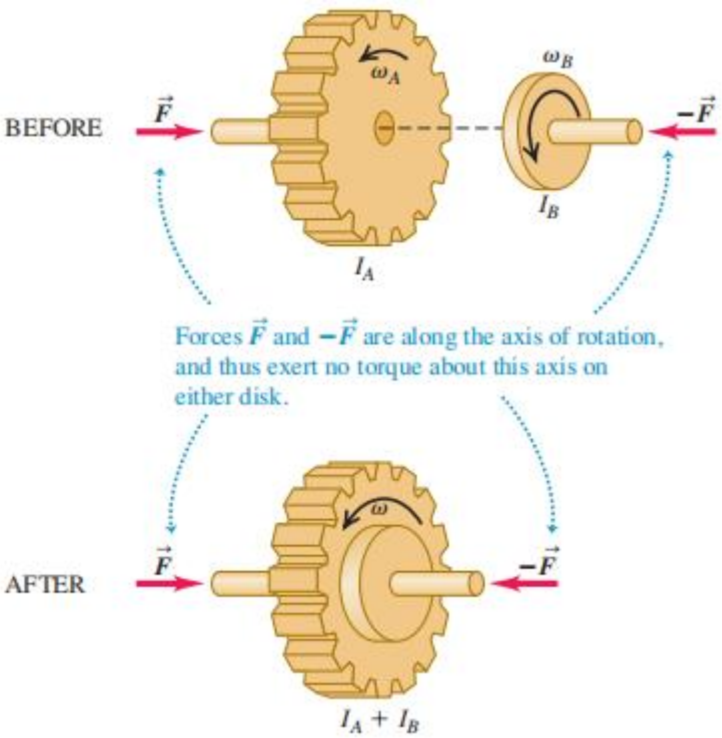
يساعد في إيجاد وسائل وتصاميم مناسبة تعمل على توزيع هذه القوى على مختلف أجزاء الجسر بالشكل الذي يمنع تمركُزَها في منطقةٍ واحدة.

4. كيف يستطيع المصممون الاستفادة من شرطا الاتزان في بناء الجسور؟

يمكن الاستفادة بأخذُ قياساتٍ دقيقةً مضبوطةً للقوى وتحديد مواقع دعامات الجسر والمسافات بينها ومقدار أكبر ثقل يُمكن أن يتحمّله الجسر دون أن ينهار.

مثال 35: إضافي

في الشكل المجاور قرصان مصمتان لهما عزم قصور ذاتي (I_A) و (I_B) ، بداية يتحرك كل منهما بشكل منفصل بسرعة زاوية (ω_A) و (ω_B) وبنفس الاتجاه، إذا التحم الجسمان وتحركا بسرعة زاوية واحدة (ω)، جد مقدار هذه السرعة؟



الحل:

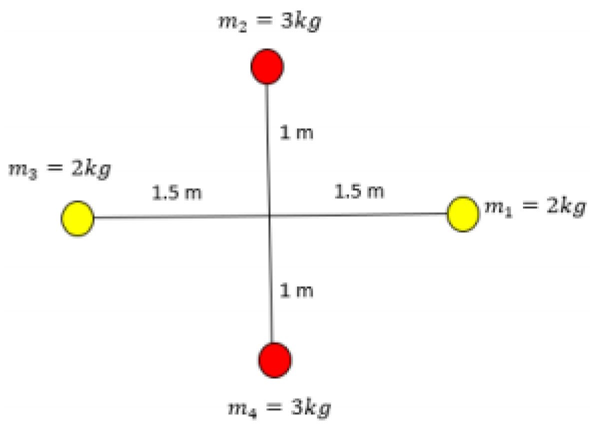
$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\,\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{(I_A + I_B)}$$

مثال 36: إضافي

احسب القصور الدوراني للنظام المكون من أربع جسيمات كما في الشكل عندما يدور النظام حول:

1. محور x في المنتصف؟
2. محور y في المنتصف؟
3. محور z في المنتصف؟



الحل :

1. حول محور x في المنتصف.

$$I_X = \sum mr^2 = m_2 r_2^{\,2} + m_4 r_4^{\,2}$$

$$=3(1)^2+3(1)^2 = 6\ kg.m^2$$

2. حول محور y في المنتصف.

$$I_y=\sum mr^2 = m_1{r_1}^2+m_3{r_3}^2$$
$$=2(1.5)^2+2(1.5)^2 = 9\ kg.m^2$$

3. حول محور z في المنتصف.

$$I_z=\sum mr^2 = m_1{r_1}^2+m_3{r_3}^2 + m_2{r_2}^2+m_4{r_4}^2$$
$$=2(1.5)^2+2(1.5)^2+ 3(1)^2+3(1)^2= 15\ kg.m^2$$

مثال 37: إضافي

يتدحرج دولاب قصوره الدوراني ($2.0\ kg.m^2$) وكتلته (8.0 kg) ونصف قطره (0.3 m) بمعدل (6)دورات في الثانية فما طاقته الحركية الكلية؟

الحل :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{6\times2\pi}{1} = 12\pi\ rad/s$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$v = \omega r = 12\pi \times 0.3 = 11.3\ m/s$$

$$K_t= \frac{1}{2}I\omega^2+ \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}(2) \times(12\pi)^2+ \frac{1}{2}(8) \times (11.3)^2$$

$$= 1931\ J$$

مثال 38: إضافي

ناقلا حركة أحدهما صغير والآخر كبير، متصلان أحدهما بالآخر ويدوران كما في الشكل. قارن أولا بين سرعتيهما الزاوية، ثم بين السرعتين لخطيتين لسنين متصلين معا ؟

الحل :

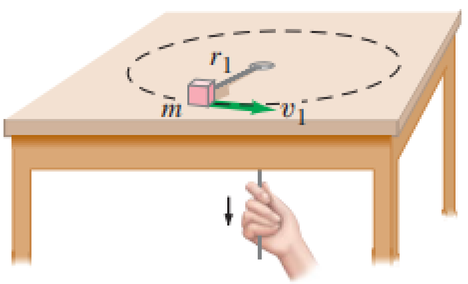
أولا : السرعة الخطية:
السرعات الخطية للأسنان متماثلة

ثانيا : سرعتيهما الزاوية:
لان أنصاف الأقطار مختلفة تكون السرعات الزاوية مختلفة حسب العلاقة :

$$\omega = \frac{v}{r}$$

مثال 39: إضافي

تدور كرة صغيرة كتلتها (m) مثبتة في نهاية خيط في مسار دائري على سطح طاولة أفقي أملس، ويمر الطرف الأخر للخيط عبر ثقب في سطح الطاولة كما في الشكل المجاور. إذا كانت تدور بسرعة ($v_1 = 2.4\ m/s$) في مسار دائري نصف قطره (0.8 m) ثم سحب الخيط ببطء عبر الثقب، بحيث يقل نصف القطر إلى (0.48 m) ، فكم تصبح سرعة الكرة(v_2)؟



الحل :

$$\boldsymbol{L_1 = L_2}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 {r_1}^2 \frac{v_1}{r_1} = \frac{1}{2}m_2 {r_2}^2 \frac{v_2}{r_2}$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2} = 2.4\ \frac{0.8}{0.48} = 4\ \text{m/s}$$

مثال 40: إضافي

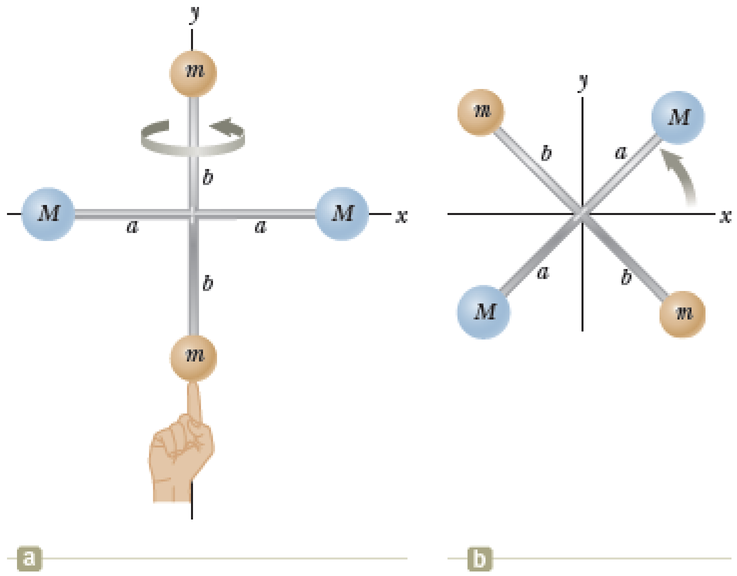
في الشكل المجاور نظام مكون من أربع كرات، احسب عزم القصور الذاتي والطاقة الحركية الدورانية في الحالات التالية:

أ. إذا دار النظام حول محور (Y) بسرعة زاوية (ω) كما في الشكل (a)؟

ب. إذا دار النظام في المستوى(xy) بسرعة زاوية (ω) كما في الشكل(b)؟

الحل:

أ. ألاحظ أن عزم القصور الذاتي للكرتين (m) يساوي صفرا؛ لأنهما تقعان على محور الدوران (y).
وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:



$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K_{Ry} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2)\, \omega^2 = Ma^2\omega^2$$

ب. إذا دار النظام في المستوى (xy) أي على محور دوران عمودي على مستوى الصفحة (محور z) مارا بمركز النظام، يكون للكرات الأربعة تأثير في عزم القصور الذاتي وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2$$
$$= 2Ma^2 + 2mb^2 = 2(Ma^2 + mb^2)$$

$$K_{Rz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2(Ma^2 + mb^2))\, \omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\, \omega^2$$

أسئلة الوحدة

السؤال الأول : أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة لكلّ جملة ممّا يأتي:

1. جسمان متماثلان A و B على سطح الأرض؛ الجسمُ A عند خط الاستواء، والجسم B عند قطبها الشمالي. أيّ ممّا يأتي يُعبِّر بشكلٍ صحيح عن العلاقة بين سرعتي الجسمين الزاويّة؟

أ. $\omega_A = \omega_B \neq 0$ ب. $\omega_A > \omega_B$ ج. $\omega_A < \omega_B$ د. $\omega_A = \omega_B$

2. وحدة قياس الزخَم الزاويّ حسب النظام الدولي للوحدات هي:

أ. N .m/s ب. kg.m/s ج. N/s د. $Kg.m^2/s$

3. وحدة قياس عزم القصور الذاتي حسب النظام الدولي للوحدات هي:

أ. N.m/s ب. $kg.m^2$ ج. $k\,g.m^2/s$ د. kg.m/s

4. عند دوران إطار سيارةٍ حولَ محورٍ ثابتٍ؛ فإنّ مقدار سرعته الزاويّة:

أ. يكون متساويًا لأجزائه جميعها. ب. يزداد بالابتعاد عن محور الدوران.
ج. يقلُّ بالابتعاد عن محور الدوران. د. يساوي صفرًا.

5. عند دوران أُسطوانةٍ مُصمَتةٍ متماثلةٍ حول محورٍ ثابتٍ مدّةً زمنيّةً معيّنةً فإنّ مقدار الإزاحة الزاويّة:

أ. يكون متساويًا لأجزائها جميعها.
ب. لا يعتمد على زمن دوران الجسم؛ فهو يساوي (2π rad) دائمًا.
ج. يكون أكبرَ للجُسيمات القريبة من محور الدوران.
د. يكون أكبرَ للجُسيمات البعيدة من محور الدوران.

6. تستخدم سلمى مِفكّ براغي لفكّ برغيٍّ من خِزانتها ولم تتمكّن من ذلك. يجب على سلمى استخدام مفكّ براغي يكون مقبضه:

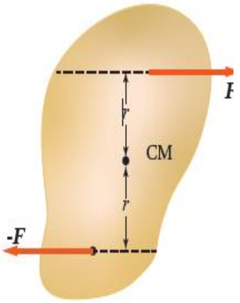
أ. أطولَ من مقبض المفكّ المستخدم. ب. أقصرَ من مقبض المفكّ المستخدم.
ج. أكثرَ سُمكًا من سُمك المقبض المستخدم. د. أقلَّ سُمكًا من سُمك المقبض المستخدم.

7. يستخدمُ خالدٌ مفتاح شدٍّ لفكِّ صامولة إطار سيارة ولم يتمكّن من ذلك. يجب على خالد استخدام مفتاح شدٍّ يكون مقبضه:

أ. أطولَ من مقبض مفتاح الشدّ المستخدم. ب. أقصرَ من مقبض مفتاح الشدّ المستخدم.
ج. أكثرَ سُمكًا من سُمك مفتاح الشدّ المستخدم. د. أقل سُمكًا من سُمك مفتاح الشدّ المستخدم.

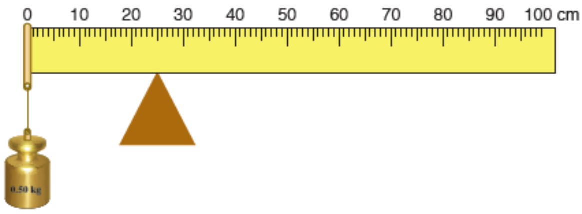
8. كُسر مَضرب بيسبولٍ منتظم الكثافة في موقع مركز كتلته إلى جزأين؛ كما هو موضّحٌ في الشكل. إنّ الجزء ذا الكتلة الأصغر هو:

أ. الجزء الموجود على اليمين.
ب. الجزء الموجود على اليسار.
ج. كلا الجزأين له الكتلة نفسُها.
د. لا يمكن تحديده.



9. الشكل المجاور يبيّن قوتين متساويتين مقدارًا ومتعاكستين اتجاهًا تؤثّران على بُعدٍ متساوٍ من مركز كتلة جسمٍ موجودٍ على سطحٍ أملس. أيُّ الجمل الآتية تصفُ بشكلٍ صحيحٍ حالة الجسم الحركيّة عند اللحظة المُبيّنة:

أ. الجسم في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ؛ حيث القوّة المحصّلة المؤثّرة فيه تساوي صفرًا.
ب. الجسم ليس في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ، ويبدأ الدوران بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة.
ج. الجسم في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ، حيث العزم المحصّل المؤثّر فيه يساوي صفرًا.
د. الجسم ليس في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ، ويبدأ الدوران باتّجاه حركة عقارب الساعة.

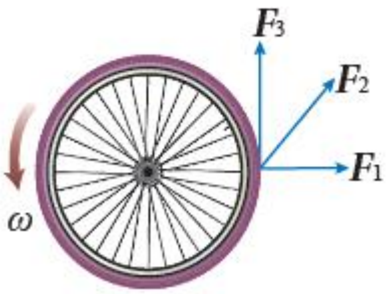


10 . مسطرةٌ متريّةٌ مُنتظمةٌ متماثلةٌ ترتكزُ على نقطةٍ عند التدريج (25 cm). عُلّق ثقّلٌ كتلتُه (0.50 kg) عند التدريج (0 cm) للمسطرة، فاتّزنت أُفقيًّا، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور. إنّ مقدار كتلة المسطرة المتريّة يساوي:

أ. 0.25 kg ب. 0.50 kg ج. 0.10 kg د. 0.20 kg

11 . جُسيمان نقطيّان البُعد بينهما (r). إذا علمتُ أنّ $(m_1 = 4m_2)$؛ فإنّ موقع مركز الكتلة يكون:

أ. في منتصف المسافة بين الجُسيمين. ب. بين الجُسيمين، وأقرب إلى (m_1)
ج. بين الجُسيمين، وأقرب إلى (m_2). د. خارج الخطّ الواصل بين الجُسيمين، وأقرب (m_1)



12 . تؤثّر ثلاث قوًى لها المقدار نفسُه في إطار قابلٍ للدوران حول محورٍ ثابتٍ عموديّ على مستوى الصفحة مارًّا في مركزه. أيُّ هذه القوى يكون عزمها هو الأكبر:

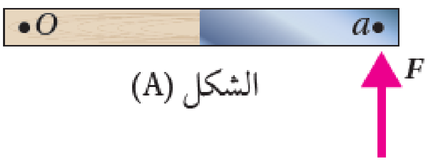
أ . F_1 ب. F_2
ج. F_3 د . جميعُها لها مقدار العزم نفسه.

13 . كرةٌ مُصمَتةٌ وكرةٌ مجوّفة، لهما الكتلة نفسُها ونصفُ القطر نفسه، تدوران بمقدار السرعة الزاويّة نفسه. أيُّ الكرتين مقدارُ زخَمها الزاويّ أكبر:

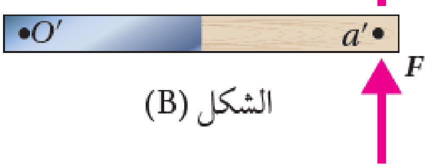
أ. الكرة المُصمَتة. ب. الكرة المجوّفة. ج. لهما مقدار الزخَم الزاويّ نفسه. د. لا يُمكن معرفة ذلك.

أقرأ الفقرة الآتية، ثم أُجيب عن السؤالين(14 و 15).

يوضّح الشكل المجاور مسطرةً متريّةً نصفُها خشبٌ ونصفُها الآخر فولاذ. بدايةً؛ المسطرةُ قابلةٌ للدوران حول محورٍ عموديّ عليها عند نهايتها الخشبيّة (النقطة 0) ، أنظرُ الشكل (A)، وأثرتُ فيها بقوة (F) عند نهايتها الفولاذية (النقطة a) بعد ذلك؛ جعلتُ المسطرة قابلةً للدوران حول محورٍ عموديّ عليها عند نهايتها الفولاذيّة (النقطة ` O)، أنظر الشكل ( B)، وأثرتُ فيها بالقوة ( F) نفسها عند نهايتها الخشبية (النقطة ` a)



الشكل (A)



الشكل (B)

14. أيُّ العلاقات الآتية صحيحةٌ لعزميّ القصور الذاتي للمسطرتين حول محوري دورانهما:
أ. $I_A > I_B$ ب. $I_A < I_B$ ج. $I_A = I_B$ د. $I_A = I_B = 0$

15. أيُّ العلاقات الآتية صحيحةٌ حول مقداري التسارُع الزاويّ للمسطرتين حول محوري دورانهما:
أ. $\alpha_A > \alpha_B$ ب. $\alpha_A < \alpha_B$ ج. $\alpha_A = \alpha_B$ د. $\alpha_A = -\alpha_B$

16 . عندما تؤثر قوّةٌ في جسمٍ؛ فإن عزمها يكون صفرًا عندما:
أ . يتعامد مُتّجه القوّة مع مُتّجه موقع نقطة تأثيرها. ب. يتزايد مقدار السرعة الزاويّة للجسم.
ج. يمرُّ خطُّ عمل القوّة بمحور الدوران. د. يتناقص مقدار السرعة الزاويّة للجسم.

17 . يجلس طفلان على طرفي لعبةٍ مُتّزنةٍ أُفقيًّا (see – saw). عند تحرُّك أحد الطفلين مُقتربًا من نقطة الارتكاز؛ فإنّ الطرفَ الذي يجلس عليه:
أ. يرتفع لأعلى. ب. ينخفض لأسفل.
ج. يبقى في وضعه الأُفقي ولا يتغير. د. قد يرتفع أو ينخفض حسب وزن الطفل.

الإجابات

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
أ	د	ب	أ	أ	ج	أ	ب	د	ب

11	12	13	14	15	16	17			
ب	ج	ب	أ	ب	ج	أ			

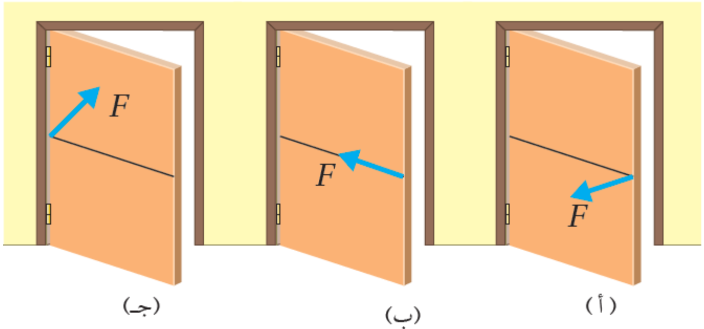
السؤال الثاني : أُفسّر ما يأتي:
أ. عند حساب العزم المحصّل المؤثّر في جسمٍ؛ فإنّني أهملُ القوى التي يمرُّ خط عملها في محور الدوران.
لأن العزم الناتج عن كل من القوى المؤثرة في محور دوران جسم، والقوى التي يمر خط عملها في محور الدوران يساوي صفرا؛ لأن طول ذراع القوة يساوي صفرا.
ب. يعتمد عزم القصور الذاتيّ لجسمٍ على موقع محور دورانه.
كلّما كانت كتلة الجسم (أو الجزء الأكبر من كتلته) أقرب إلى محور دورانه كان عزم قصوره الذاتي أقل

السؤال الثالث : أُقارن بين كتلة جسمٍ وعزم القصور الذاتي له؟
الكتلة: تقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الانتقالية، وهي ثابتة لا تتغير
عزم القصور الذاتي: يقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الدورانية، وهو يتغير بتغير محور الدوران.

السؤال الرابع : التفكير الناقد: ذهبت عرين وفرح إلى مدينة الألعاب في عيد الفطر، وركبتا لعبة الحصان الدوّار؛ حيث جلست عرين على حصانٍ قرب الحافّة الخارجية للصفيحة الدائرية المُتحرّكة للّعبة؛ بينما جلست فرح على حصانٍ في منتصف المسافة بين عرين ومحور الدوران الثابت. عند دوران اللعبة بسرعةٍ زاويّة ثابتة؛ أيُّ الفتاتين: عرين أم فرح مقدار سرعتها الزاويّة أكبر؟
مقدار السرعة الزاوية لهما متساويان؛ إذ تقطع الفتاتان الزاوية نفسها خلال الفترة الزمنية نفسها.

السؤال الخامس : **أحلّل وأستنتج:** يوضّح الشكل قوّةً مُحصّلةً (F) ثابتة المقدار تؤثّر في الباب نفسه في مواقعَ واتّجاهاتٍ مختلفةٍ لثلاث حالات. أحدّد الحالة (الحالات) التي يفتح فيها الباب، والحالة (الحالات) التي لا يفتح فيها، مفسّرًا إجابتي.

الشكل (أ): يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة عمودي على محور الدوران، والبعد بين خط عمل القوة ومحور الدوران أكبر ما يمكن.



الشكل(ب): لا يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة يمر في محور الدوران وعزم القوة يساوي صفرا

الشكل(ج): لا يفتح الباب؛ لأن القوة تؤثر في محور الدوران، أي أن البُعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران يساوي صفرا، فيكون عزمها صفرا.

السؤال السادس : قطعة بولسترين على شكل خارطة المملكة الأردنيّة الهاشميّة. كيف أُحدّد مركز كُتلتِها عمليًّا؟

أثقب ثقبين صغيرين متباعدين عند حافة قطعة البولسترين، ثم أعُلّقها بخيط من أحدهما راسيًّا في الهواء، وعند توقّف قطعة البولسترين عن التأرجح أرسم خطًّا عليها على امتداد طول الخيط. ثم أعُلّق قطعة البولسترين من الثقب الثاني وأُكرّر ما عملته سابقًا. يقع مركز الكتلة في منتصف المسافة بين سطحي قطعة البولسترين تحت نقطة تقاطع هذين الخطين.

السؤال السابع: **أحلّل وأستنتج:** يقفز غطّاس عن لوح غطسٍ مُتّجهًا نحو سطح الماء في البركة. ولاحظت أنّه بعد مغادرته لوح الغطس بدأ بالدوران، وضمَّ قدميه وذراعيه نحو جسمه. أُجيب عمّا يأتي:

أ . لماذا ضمّ الغطّاس قدميه وذراعيه نحو جسمه في أثناء أدائه لحركات الدوران؟

لتقليل مقدار عزم قصوره الذاتي حيث يقل البعد بين كتلته ومحور دورانه، ممّا يُمكّنه من الدوران بسرعة زاوية أكبر.

ب. ما الذي يحدث لزخَمه الزاويّ بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟

تؤثر قوة الجاذبية في مركز كتلته لذا لا ينشأ عنها عزم يؤثر في الغطّاس، ويكون العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفرا فيبقى زخمه الزاوي محفوظًا أي لا يتغير زخمه الزاوي؛ فنقصان عزم القصور الذاتي يقابله زيادة في السرعة الزاوية.

ج. ما الذي يحدث لمقدار سرعته الزاويّة بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟

العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفرا فيبقى زخمه الزاوي محفوظًا؛ أي لا يتغير زخمه الزاوي، ويؤدي نقصان عزم القصور الذاتي له إلى زيادة مقدار سرعته الزاوية.

د . ما الذي يحدثُ لمقدار طاقته الحركيّة الدورانية بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟

بعد ضم قدميه وذراعيه يقل عزم قصوره الذاتي بينما يزداد مقدار سرعته الزاوية بالنسبة نفسها؛ فإذا قلّ مقدار عزم القصور الذاتي بمقدار النصف يتضاعف مقدار سرعته الزاوية مرّتان، وبما أن الطاقة الحركية الدورانية تتناسب طرديًّا مع مربّع مقدار السرعة الزاوية فإن مقدار طاقته الحركية الزاوية يزداد.

السؤال الثامن : أستخدم الأرقام: تدور عربةُ دولابٍ هوائيٍّ في مدينة الألعاب بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة، فتمسح إزاحةً زاويّةً مقدارُها (1.5 rad) خلال (3.0 s). أحسبُ مقدار السرعة الزاويّة المتوسّطة للعربة.؟

الحل :

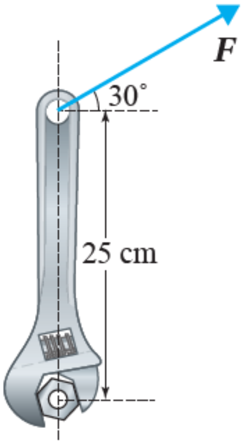
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{1.5}{3.0} = 0.5 \text{ rad/s}$$

السؤال التاسع : أستخدم الأرقام: تستخدم فاتن مفتاح شدٍّ لشدِّ صامولةٍ؛ كما هو موضح في الشكل المجاور. أستعينُ بالشكل والبيانات المثبتة فيه للإجابة عمّا يأتي، علمًا أنّ مقدار العزم اللازم لفكّ الصامولة يساوي (50.0 N.m).

أ. أحسبُ مقدار القوّة اللازم التأثير بها في طرف مفتاح الشدّ في الاتّجاه الموضّح في الشكل؟

ب. أُحدّد اتّجاه دوران مفتاح الشدّ؟



قوّةٌ تؤثّر في مفتاح شدّ.

الحل :

أ.

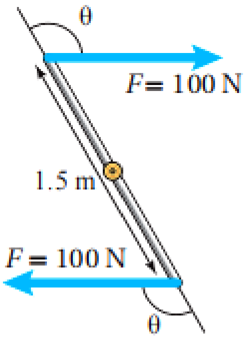
$$\tau = Fr \sin \Theta$$

$$F = \frac{\tau}{r \sin \Theta}$$

$$= \frac{50.0}{0.25 \times \sin 60°} = 230.9 \text{ N}$$

ب .سوف يدور مفتاح الشد باتجاه حركة عقارب الساعة، لذا يكون عزم القوة سالبًا.

السؤال العاشر : قوّتان متوازيتان متساويتان مقدارًا ومتعاكستان اتّجاهًا، مقدار كُلٍّ منهما(100 N) ، تؤثّران عند طرفي قضيبٍ فلزيّ طوله (1.5 m) قابلٍ للدّوران حول محورٍ ثابتٍ عند منتصفه عموديٍّ على مستوى الصفحة، كما هو موضحٌ في الشكل. إذا كان العزم الكليُّ المؤثّر في القضيب (130 N.m) باتّجاه حركة عقارب الساعة؛ أحسبُ مقدار الزاوية (θ) التي يصنعُها خطُّ عملِ كلِّ قوّةٍ مع مُتّجه موقعِ نقطةِ تأثيرِها؟



الحل:

القوتان متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الاتجاه وخطّا عملهما غير متطابقين، لذا فإنهما تشكّلان ازدواجًا يعمل على تدوير القضيب باتجاه حركة عقارب الساعة .وأحسب مقدار الزاوية (θ) كما يأتي:

$$\tau = Fr \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\tau}{2Fr} = \frac{130}{2\times100\times0.75} = 0.886$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.886 = 120° \text{ or } 60°$$

حيث $\sin120° = \sin60° = 0.866$ ، ولأن الزاوية منفرجة فيكون مقدارها (120°).

السؤال الحادي عشر : **أستخدمُ الأرقام:** تقفُ هناء على طرفِ القرص الدوّار للعبة الحصان الدوّار. إذا علمتُ أنّ كتلة قرص اللعبة بمحتوياته $(2\times10^2 kg)$ ونصف قطره (4m)، وسرعته الزاويّة (2 rad/s)، وكتلة هناء (50 kg)، وبافتراض أنّ كتلة القرص موزّعةٌ بشكلٍ منتظم، والنظام المكوّن من اللعبة وهناء معزول، أحسب مقدار ما يأتي:

أ . الزخَم الزاويّ الابتدائيّ للنظام؟

ب. السرعة الزاويّة للّعبة عندما تقف هناء على بُعد (2m) من محور دوران اللعبة؟

الحل:

أ .

$$L_i = I_i\,\omega_i$$
$$= \left(\frac{1}{2} M r^2 + mr^2\right) \times \omega_i$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times 2 \times10^2 \times(4)^2 + 50 \times(4)^2\right) \times2$$
$$= 4.8 \times10^3 \text{ kg}.m^2/s$$

ب. النظام معزول، فيكون العزم المحصّل المؤثر فيه صفرا، ويكون الزخم الزاوي محفوظًا، لذا فإن:

$L_f = L_i$

$I_f\ \omega_f = 4.8\times 10^3$

$$\omega_f = \frac{4.8\times10^3}{I_f} = \frac{4.8\times10^3}{\frac{1}{2}\,M r^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

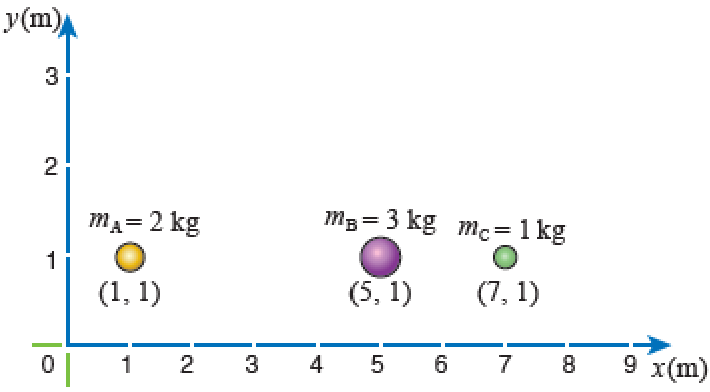
$$= \frac{4.8\times10^3}{\left(\frac{1}{2}\times 2\times10^2\times(4)^2 + 50\times(2)^2\right)}$$

$$= \frac{4.8\times10^3}{(1600+200)}$$

$$= 2.67\ rad/s$$

السؤال الثاني عشر: نظامٌ يتكوّن من ثلاثة جُسيمات؛ كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور. أستعينُ بالشكل والبيانات المثبّتة فيه لأُحدّد موقع مركز كتلة النظام؟

الحل:

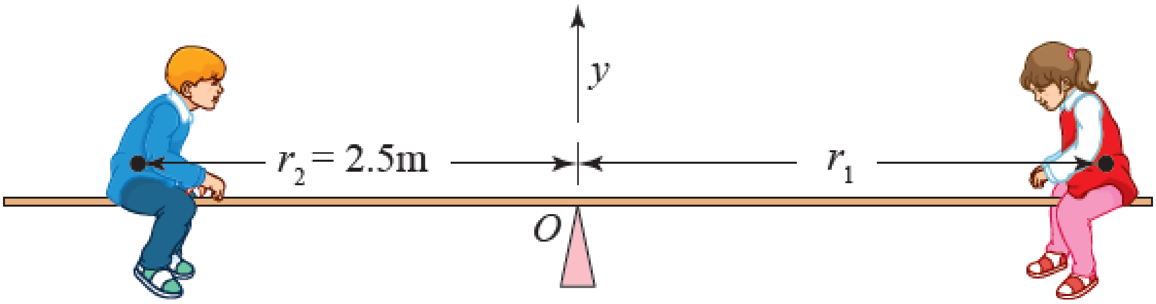


$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$= \frac{2\times1 + 3\times5 + 1\times7}{2+3+1}$$

$$= 4\ \text{m}$$

السؤال الثالث عشر: أُحلّل وأستنتج: لعبة اتّزانٍ (see – saw) تتكوّن من لوحٍ خشبيٍّ مُنتظمٍ مُتماثلٍ وزنهُ(150 N) ؛ يرتكزُ من منتصفه عند النقطة (O) تجلس نهى (F_{g1}) على أحد طرفي اللوح الخشبي على بُعد (r_1) من نقطة الارتكاز؛ بينما يجلس شقيقها ماهر (F_{g2}) على الجهة المقابلة على بُعد (2.5 m) من نقطة الارتكاز. إذا علمتُ أنّ وزن نهى (250 N) ، ووزن ماهر(300 N) ، والنظام في حالة اتّزان سكونيّ، واللوح الخشبيّ في وضعٍ أُفقيّ كما هو موضح في الشكل؛ **أحسب** مقدار ما يأتي :

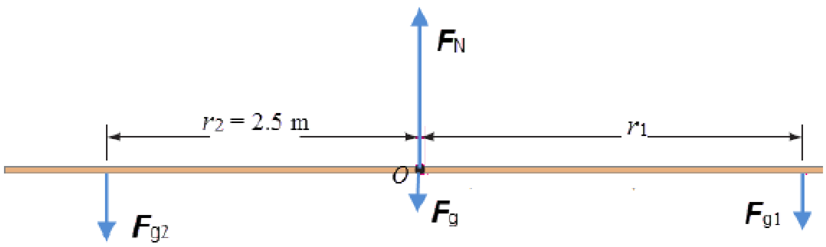


طفلان يجلسان على لعبة see – saw مُتّزنةٍ أُفقيًا.

أ. القوّة (F_N) التي تؤثّر بها نقطة الارتكاز في اللّوح الخشبيّ، وأحدّد اتجاهها؟
ب. بُعد نهى عن نقطة الارتكاز كي يكون النظام في حالة اتّزان سكونيّ؟

الحل:

أ. يتأثر اللوح الخشبي بأربع قوى، هي: وزن نهى (F_{g1})، ووزن ماهر (F_{g2})، ووزن اللوح (F_g) يؤثر في مركز كتلة اللوح وهو مركز الهندسي لأنه منتظم ومتماثل، والقوة العمودية (F_N) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح، كما هو موضح في مخطط الجسم الحر. وبما أنّ النظام متزن، ومقدار القوة العمودية غير معلوم فإنني أُطبّق الشرط الأول للاتزان، حيث القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرا. وأُطبّق القانون الثاني لنيوتن في اتجاه محور y ؛ لأنه لا توجد قوى تؤثر في اتجاه محور x .



$\sum F_y = ma_y = 0$
F_N - $(F_g + F_{g1} + F_{g2}) = 0$
$F_N = F_g + F_{g1} + F_{g2}$
= 150 + 250 + 300
= 700 N

ب. لإيجاد الموقع الذي يجب أن تجلس فيه نهى بحيث يكون النظام متزن أُطبّق الشرط الثاني للاتزان.
إذا أخذت محورا عموديا على الصفحة عبرنقطة الارتكاز(O) (مركز كتلة اللوح) كمحور دوران لمعادلة العزم، فإن العزم الناتج عن كلّ من القوة العمودية (F_N) وقوة الجاذبية (F_g) يساوي صفرا. وألاحظ أن اللوح متزن أُفقيًّا لذا فإنّ $(\theta = 90°)$.

$\sum \tau = 0$

$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$
$250 \times r_1 = 300 \times 2.5$

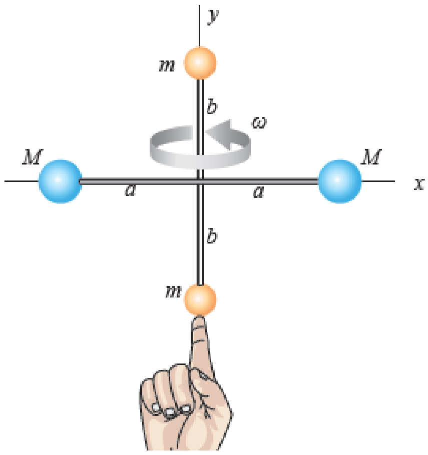
$$r_1 = \frac{750}{250} = 3\ \text{m}$$

يجب أن تجلس نهى على بُعد (3m) يمين نقطة ارتكاز اللوح الخشبي كي يكون النظام متزنًا.

السؤال الرابع عشر: أُحلّل وأستنتج: نظامٌ يتكوّن من أربع كراتٍ صغيرةٍ مثبّتةٍ في نهايات قضيبين مُهمَلي الكتلة. ويدور النظام حول محور y كما هو موضحٌ في الشكل المجاور بسرعةٍ زاويّةٍ مقدارُها (2 rad/s). إذا علمت أنّ (a = b = 20 cm) ، (m=50.0g) و (M = 100 g)، وأنصاف أقطارِ الكرات مهملةً مقارنةً بطولي القضيبين؛ بحيث يُمكن عدُّها جُسيماتٍ نقطيّة؛ أحسب مقدار ما يأتي:

أ. عزم القصور الذاتي للنظام؟

ب. الطاقة الحركية الدورانية للنظام؟



الحل:

أ. ألاحظ أن عزم القصور الذاتي للكرتين (m) يساوي صفرا؛ لأنهما تقعان على محور الدوران (y). وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:

$$I = M\,a^2 + M\,a^2 = 2\,M\,a^2$$
$$= 2 \times 100 \times 10^{-3} \times (20 \times 10^{-2})^2 = 8 \times 10^{-3}\ \text{kg}.m^2$$

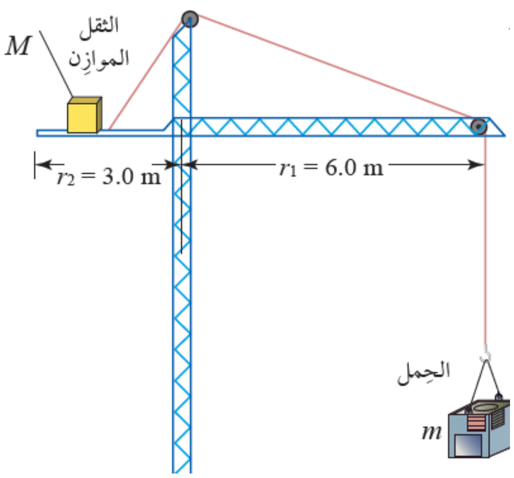
ب. أحسب الطاقة الحركية الدورانية للنظام كما يأتي:

$$K_R = \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-3} \times (2)^2 = 1.6 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

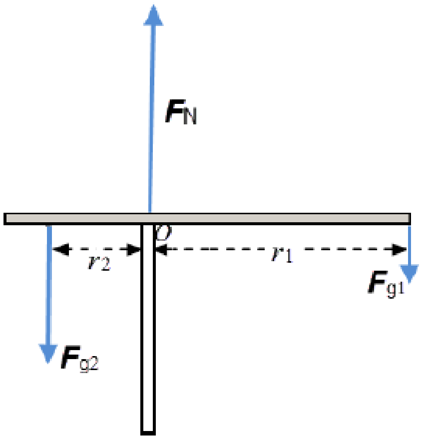
السؤال الخامس عشر : تُستخدم بعضُ أنواع الروافع لرفع الأثقال الكبيرة (الأحمال) إلى أعالي الأبراج والبنايات العالية. ويجب أن يكون العزم المُحصّل المؤثّر في هذه الرافعة صفرًا؛ كي لا يوجد عزم مُحصّلٌ يعملُ على إمالتها وسقوطها؛ لذا يوجد ثقلٌ موازِنٌ M على الرافعة لتحقيق اتّزانها، حيث يُحرّك عادةً هذا الثقل تلقائيًّا (بشكل أوتوماتيكي) عبر أجهزة استشعارٍ ومحرّكاتٍ لموازنة الحِمل بدقّة. يبيّن الشكل المجاور رافعةً في موقع بناءٍ ترفع حِملً مقداره (3.0×10^3 kg) ، ومقدار الثقل الموازِن (1.0×10^4 kg) أستعينُ بالشكل والبيانات المثبّتة فيه للإجابة عمّا يأتي مهملً كُتلة الرافعة؛ علمًا أن الرافعة متزنة أفقيًّا .

أ . أحدّد موقع الثقل الموازِن عندما يكون الحِمل مرفوعًا عن الأرض وفي حالة اتّزانٍ سكونيّ؟

ب. أُحدّد مقدارَ أكبر كتلة يُمكن أن تحملَها الرافعة عندما يكون موقع الثقل الموازِن عند طرفها؟



الحل:



أ. يتأثر ذراع الرافعة بثلاث قوى (كتلة الرافعة مهملة)، هي: وزن الحمل (F_{g1}) ، ووزن الثقل الموا زن (F_{g2}) والقوة العمودية (F_N) المؤثرة في الرافعة عند نقطة الارتكاز (0)، كما هو موضح في الشكل. لإيجاد موقع الثقل الموا زن بحيث يكون النظام متزن أُطبّق الشرط الثاني للاتزان. إذا أخذت محورا عمودياً على الصفحة عبر نقطة الارتكاز (0) كمحور دوران لمعادلة العزم، فإن العزم الناتج عن القوة العمودية (F_N) المؤثرة في اللوح يساوي صفرا. وألاحظ أن ذراع الرافعة متزن أفقيًّا لذا فإن $(\theta=90°)$.

$$\sum \tau = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$$
$$3.0 \times 10^4 \times 6.0 = 1.0 \times 10^5 \times r_2$$
$$r_2 = \frac{18 \times 10^4}{1 \times 10^5}$$
$$= 1.8 \text{ m}$$

يجب أن يكون موقع الثقل الموازن على بُعد (1.8 m) يسار نقطة الارتكاز (0) كي يكون النظام متزنً.

ب. موقع الثقل الموا زن عند أبعد نقطة عن نقطة الارتكاز $(r_2 = 3.0\ m)$ ، ومقدار الثقل (m)هو المجهول. أُطبّق الشرط الثاني للاتزان حول المحور(0).

$$\sum \tau = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$$
$$F_{g1} \times 6.0 = 1.0 \times 10^5 \times 3.0$$

$$F_{g1} = \frac{3.0 \times 10^5}{6.0}$$
$$= 5.0 \times 10^4 \text{ N}$$
$$m_2 = \frac{F_{g1}}{g} = \frac{5.0 \times 10^4}{10} = 5.0 \times 10^3 \text{ kg}$$

الجدول التالي يبين التناظر بين الحركة الانتقالية والحركة الدورانية والعلاقة بينهما إن وجدت.
و العلاقات التالية : ($P=\sqrt{2mK}$) و ($L=\sqrt{2IK}$) غير موجودة في الكتاب ويمكن استخدمها فقط في أسئلة الاختيار من متعدد .

الكمية الفيزيائية	الحركة الانتقالية	الحركة الدورانية	العلاقة
الإزاحة	x (m)	θ (rad)	$x = r\theta$
السرعة	v (m/s)	ω (rad/s)	$v = r\omega$
التسارع	a (m/s^2)	α (rad/s^2)	$a_{tan} = r\,\alpha$
القصور	m (kg)	$I = \sum m\,r^2$ $(kg.m^2)$	
مسبب الحركة	F (N)	$\tau = F\,r\sin\theta$ $(N.m)$	
الطاقة الحركية	$K = \frac{1}{2}mv^2$ (J)	$K_r = \frac{1}{2}I\,\omega^2$ (J)	
الزخم	$P = mv$ $(kg.\frac{m}{s})$ $P = \sqrt{2mK}$	$L = I\omega$ $(kg.\frac{m^2}{s})$ $L = \sqrt{2IK}$	
حفظ الزخم	$\sum p_i = \sum p_f$	$\sum L_i = \sum L_f$	
قانون نيوتن الثاني	$\sum F = ma$	$\sum \tau = I\alpha$	
الصيغة العامة لقانون نيوتن الثاني	$\sum F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$	$\sum F = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
معادلات الحركة	$v_f = v_i + at$ $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$ $\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\omega_f - \omega_i)$	