National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين للصف الثاني عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة: التكامل

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد تكاملات غير محدودة لاقترانات القوة صفحة 6
1	$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$
2	$\int (2 + x^3 + 5x^{-2})\,dx = 2x + \frac{1}{4}x^4 - 5x^{-1} + C = 2x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{x} + C$
3	$\int (2x^7 - 4x^{-4})\,dx = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3}x^{-3} + C = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3x^3} + C$
4	$\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + C$
5	$\int (4x^4 - 4x^2 + x)\,dx = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
6	$\int (x^2 + 7 - 2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 7x - x^2 + C$
7	$\int (x^2 + 2x - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$
8	$\int (2x+5)^5\,dx = \frac{1}{12}(2x+5)^6 + C$
9	$\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$
	إيجاد تكاملات محدودة لاقترانات القوة صفحة 7
10	$\int_{-2}^{3} x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 \Big\vert_{-2}^{3} = \frac{1}{6}(729 - 64) = \frac{665}{6}$
11	$\int_{1}^{2} (2x^{-3} + 3x)\,dx = \left(-x^{-2} + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{1}^{2} = \left(-\frac{1}{4} + 6\right) - \left(-1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

12	$\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_1^4 \left(2x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-2x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(-\frac{1}{2} - 1\right) - (-2-2) = \frac{5}{2}$
إيجاد قاعدة اقتران عُلمت مشتقته ونقطة تحققه (الشرط الأولي) صفحة 7	
13	$f(x) = \int (x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$ $f(0) = 0 + 0 + C$ $8 = 0 + C \Rightarrow C = 8$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 8$
إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x صفحة 8	
14	$2x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , x = 2$ $Area = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_1^2$ $= \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{12}$
15	$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 6 \quad , x = 2$ $f(3) = 9 - 24 + 12 = -3 \Rightarrow f(x) < 0, \;\; 2 < x < 6$ $Area = -\int_2^6 f(x)\,dx = \int_2^6 (-x^2 + 8x - 12)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x\right)\Big\|_2^6$ $= (-72 + 144 - 72) - \left(-\frac{8}{3} + 16 - 24\right) = \frac{32}{3}$

16	ملحوظة مهمة: يُرجى تعديل قاعدة الاقتران المُعطى كالآتي: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2)(x+5) = 0$ $\Rightarrow x = 3 \quad , x = -2 \quad , x = -5$ $f(-3) = -27 + 36 + 33 - 30 = 12 \Rightarrow f(x) > 0, \quad -5 < x < -2$ $f(0) = -30 \Rightarrow f(x) < 0, \quad -2 < x < 3$ $Area = \int_{-5}^{-2} f(x)\,dx + (-\int_{-2}^{3} f(x)\,dx)$ $= \int_{-5}^{-2} (x^3 + 4x^2 - 11x - 30)\,dx + \int_{-2}^{3} (-x^3 - 4x^2 + 11x + 30)\,dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 30x\right)\Big\|_{-5}^{-2} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 30x\right)\Big\|_{-2}^{3}$ $= \frac{863}{6}$

الدرس الأول: تكامل اقترانات خاصة

1	$\int 4e^{-5x}\,dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$
2	$\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$
3	$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$
4	$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x})\,dx = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$
5	$\int (\cot x \csc x - 2e^x)dx = -\csc x - 2e^x + C$
6	$\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx = \int \left(3\cos 3x - (\sec^2 x - 1)\right)dx$ $= \sin 3x - \tan x + x + C$

7	$\int \cos 3x\,(1+\csc^2 x)\,dx = \int \cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ $= \int \cos x + \cot x \csc x\,dx = \sin x - \csc x + C$
8	$\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx = \int\left(x-1-\frac{2}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\ln\lvert x+2\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$
10	$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int(\sec^2 x + x^{-2})dx = \tan x - \frac{1}{x} + C$
11	$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3x^2\rvert + C$
12	$\int \ln e^{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$
13	$\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin x) + C$
14	$\int \frac{3}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert + C$
15	$\int \frac{3-2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx = \int\left(3\csc^2\frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x\right)dx$ $= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + C$
16	$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \ln\lvert e^x+4\rvert\rvert_0^1 = \ln(e+4) - \ln 5 = \ln\frac{e+4}{5}$
17	$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2\frac{3}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert\Big\rvert_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$
18	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

19	$\int_{-1}^{1}\lvert 3x-2\rvert dx=\int_{-1}^{\frac{2}{3}}(2-3x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(3x-2)dx$ $=\left(2x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big\vert_{\frac{2}{3}}^{1}=\frac{13}{3}$
20	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+3\sin x)^2dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x)dx$ $=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x)dx$ $=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+8\sin^2 x+3\sin 2x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+4(1-\cos 2x)+3\sin 2x)dx$ $=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(5-4\cos 2x+3\sin 2x)dx=\left(5x-2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big\vert_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\pi-2}{4}$
21	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\ln\lvert\cos x\rvert\vert_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0=\frac{1}{2}\ln 2$
22	$\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-4\sin^2 x\cos^2 x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-(2\sin x\cos x)^2)dx$ $=\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}\cos 4x\,dx=\frac{1}{4}\sin 4x\Big\vert_{0}^{\frac{\pi}{16}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$

23	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \tan^2 x) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x - 1) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + 2\tan x \sec x - 1) dx$ $= (2\tan x + 2\sec x - x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$
24	$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2}\right) dx = \left(2x - \frac{4}{3}\ln\|3x+2\|\right)\Big\|_0^1$ $= 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 2 = 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$
25	$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx + \int_3^5 (10-x) dx$ $= (x^2+x)\Big\|_1^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2} = 22$

26	$\int_1^k \frac{4}{2x-1}dx = 1$ $\Longrightarrow 2\ln\lvert 2x-1\rvert\big\rvert_1^k = 1$ $\Longrightarrow 2\ln\lvert 2k-1\rvert = 1$ $\Longrightarrow 2\ln(2k-1) = 1$ $\Longrightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2} \quad , k > \frac{1}{2}$ لأن $\Longrightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$ $\Longrightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$
27	$\int_0^{\ln a}(e^x+e^{-x})dx = \frac{48}{7}$ $\Longrightarrow (e^x-e^{-x})\big\rvert_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$ $\Longrightarrow \left(a-\frac{1}{a}\right)-(1-1) = \frac{48}{7}$ $\Longrightarrow a-\frac{1}{a}-\frac{48}{7} = 0$ $\Longrightarrow 7a^2-48a-7 = 0$ $\Longrightarrow (7a+1)(a-7) = 0$ $\Longrightarrow a = -\frac{1}{7}$ (تُرفض) $, \quad a = 7$
28	$A = \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{1}{2}x\,dx = \int_0^{\pi}(1+\cos x)dx = (x+\sin x)\big\rvert_0^{\pi} = \pi$

29	$f(x)=\int (e^{-x}+x^2)dx=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+C$ $f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+C$ $f(0)=-1+C$ $4=-1+C\Rightarrow C=5$ $\Rightarrow f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+5$
30	$f(x)=\int\left(\frac{3}{x}-4\right)dx=3\ln\lvert x\rvert-4x+C$ $f(x)=3\ln\lvert x\rvert-4x+C$ $f(1)=-4+C$ $0=-4+C\Rightarrow C=4$ $\Rightarrow f(x)=3\ln\lvert x\rvert-4x+4$
31	$s(3)-s(0)=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3\frac{-t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\rvert_0^3=-\frac{1}{2}\ln 10\text{ m}$
32	$d=\int_0^3\lvert v(t)\rvert\,dt=\int_0^3\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\rvert_0^3=\frac{1}{2}\ln 10\text{ m}$
33	$s\left(\frac{\pi}{2}\right)-s(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}v(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin 3t\,dt=-2\cos 3t\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}=2\text{ m}$
34	$6\sin 3t=0\Rightarrow 3t=0,\pi\Rightarrow t=0,\frac{\pi}{3}$ $d=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert v(t)\rvert\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert 6\sin 3t\rvert dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}6\sin 3t\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-6\sin 3t\,dt$ $=-2\cos 3t\rvert_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cos 3t\rvert_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2+2+0-2(-1)=6\text{ m}$

<table>
<tr>
<td>35</td>
<td>

عندما $0 \le t \le 6$

$$s(t) = \int (8t - t^2)dt = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

$$s(0) = 0 - 0 + C_1$$

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 \quad ,0 \le t \le 6$$

عندما $t > 6$

$$s(t) = \int \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C_2$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة $s(6) = 144 - \frac{216}{3} = 72$

$$s(6) = 90 - 9 + C_2$$

$$72 = 81 + C_2 \Rightarrow C_2 = -9$$

$$\Rightarrow s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9 \quad ,t > 6$$

$$\Rightarrow s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9 = 191 \text{ m}$$

</td>
</tr>
</table>

الدرس الثاني: التكامل بالتعويض

1	$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$
2	$u = 1 - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} du$ $\int \left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2} dx = \int u^2 \sin\frac{x}{2} \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} du = \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C$ $= \frac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$
3	$\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x} x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $= \int u^3 \csc^2 \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$ $= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$
4	$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

5	$u = x + 2 \Rightarrow dx = du \quad , \qquad x = u - 2$ $\int x^3(x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$ $= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{3}{5}u^{10} + \frac{4}{3}u^9 - u^8 + C$ $= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$
6	$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx$ $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$ $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$
7	$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\, du = 2\int e^u\, du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$
8	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin(2\ln 2x)}{x} dx$ $u = 2\ln 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$ $\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$ $= -\frac{1}{2}\cos(2\ln 2x) + C = -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$

9	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$ $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)dx = \int \cos^3 u\, du = \int \cos u \cos^2 u\, du$ $= \int \cos u\,(1 - \sin^2 u\,)du$ $v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u \Rightarrow \cos u\, dx = dv$ $\int \cos u\,(1 - \sin^2 u\,)du = \int (1 - v^2)dv = v - \frac{1}{3}v^3 + C$ $= \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u + C$ $= \sin(\tan x) - \frac{1}{3}\sin^3(\tan x) + C$ ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة: $\int \sec^2 x \cos(\tan x)\left(1 - \sin^2(\tan x)\right) dx$ وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.
10	$u = 4x + 1 \Rightarrow 4dx = du \quad , \qquad 4x = u - 1$ $x = 20 \Rightarrow u = 81$ $x = 6 \Rightarrow u = 25$ $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du = \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_{25}^{81} = (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5\right) = \frac{592}{3}$

11	$u=\sqrt{x-1}\Rightarrow u^2=x-1\Rightarrow 2udu=dx$ $x=5\Rightarrow u=2$ $x=2\Rightarrow u=1$ $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{2u}{1+u}du=\int_1^2\left(2-\frac{2}{u+1}\right)du$ $=(2u-2\ln\|u+1\|)\|_1^2=(4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)=2-2\ln\frac{2}{3}$
12	$u=1+\cos x\Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x\Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$ $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$ $x=0\Rightarrow u=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int_2^1\frac{2\sin x\cos x}{u}\times\frac{du}{-\sin x}=\int_2^1-\frac{2(u-1)}{u}du$ $=\int_2^1\frac{2-2u}{u}du=\int_1^2\frac{2u-2}{u}du=\int_1^2\left(2-\frac{2}{u}\right)du$ $=(2u-2\ln\|u\|)\|_1^2=(4-2\ln 2)-(2-0)=2-2\ln 2$
13	$u=1+\sqrt{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow dx=2\sqrt{x}du$ $x=4\Rightarrow u=3$ $x=1\Rightarrow u=2$ $\int_1^4\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx=\int_2^3\frac{u^3}{\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}du=\int_2^3 2u^3du=\frac{1}{2}u^4\Big\|_2^3=\frac{81}{2}-\frac{16}{2}=\frac{65}{2}$
14	$u=\tan x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\sec^2 x\Rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}=\cos^2 x\,du$ $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=1$ $x=0\Rightarrow u=0$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx=\int_0^1\frac{e^u}{\cos^2 x}\times\cos^2 x du=\int_0^1 e^u du=e^u\|_0^1=e-1$

15	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2(1-u^2)\, du$ $= \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2 - u^4)\, du = \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big\|_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\right) = \frac{47}{480}$
16	$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0 \;, x = -1$ $A = -\int_{-1}^0 f(x)\, dx = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x}\, dx$ $u = 1 + x \Rightarrow dx = du \;\;,\;\; x = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = -1 \Rightarrow u = 0$ $A = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x}\, dx = \int_0^1 -x\sqrt{u}\, du = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\, du$ $= \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du = \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big\|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

17	$f(x) = \int 16\sin x\,\cos^3 x\,dx$ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $f(x) = \int 16\sin x\; u^3 \times \frac{du}{-\sin x} = \int -16\,u^3\,du = -4u^4 + C$ $= -4\cos^4 x + C$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$ $0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$ $\Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$
18	$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$ $u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+5} + C$ $f(2) = 3 + C$ $1 = 3 + C \Rightarrow C = -2$ $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2$

19	$s(t)=\int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ $u=1+t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$ $s(t)=\int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}}\times\frac{du}{2t}=\int -u^{-\frac{3}{2}}du=2u^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+C$ $s(0)=2+C=$ $4=2+C \Rightarrow C=2$ $\Rightarrow s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+2$

الدرس الثالث: التكامل بالكسور الجزئية

1	$\frac{4}{x^2+4x}=\frac{4}{x(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}$ $A(x+4)+B(x)=4$ $x=0 \Rightarrow A=1$ $x=-4 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{4}{x^2+4x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx=\ln\|x\|-\ln\|x+4\|+C=\ln\left\|\frac{x}{x+4}\right\|+C$
2	$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$ $A(x+3)+B(x-3)=6$ $x=3 \Rightarrow A=1$ $x=-3 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{6}{x^2-9}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$ $=\ln\|x-3\|-\ln\|x+3\|+C=\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|+C$

3	$\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}=\frac{x^2-3x+8}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ $A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)=x^2-3x+8$ $x=2\Rightarrow A=\frac{2}{3}$ $x=-1\Rightarrow C=-4$ $x=0\Rightarrow A-2B-2C=8\Rightarrow\frac{2}{3}-2B+8=8\Rightarrow B=\frac{1}{3}$ $\int\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$ $=\frac{2}{3}\ln\|x-2\|+\frac{1}{3}\ln\|x+1\|+\frac{4}{x+1}+C$
4	$\frac{x-10}{x^2-2x-8}=\frac{x-10}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-4)=x-10$ $x=4\Rightarrow A=-1$ $x=-2\Rightarrow B=2$ $\int\frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x+2}\right)dx$ $=-\ln\|x-4\|+2\ln\|x+2\|+C$

5	$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}$ $=1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+1)=5x-1$ $x=-1\Rightarrow A=2$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=1$ $\int\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$ $=x+2\ln\lvert x+1\rvert+\frac{1}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert+C$
6	$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$ $A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)=2x^2-x+6$ $x=-1\Rightarrow A=3$ $x=0\Rightarrow 2A+C=6\Rightarrow 6+C=6\Rightarrow C=0$ $x=1\Rightarrow 3A+2B+2C=7\Rightarrow 9+2B=7\Rightarrow B=-1$ $\int\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{-x}{x^2+2}\right)dx$ $=3\ln\lvert x+1\rvert-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$

7	$\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ $A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)=8x+24$ $x=-1 \Rightarrow A=1$ $x=3 \Rightarrow C=12$ $x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=24 \Rightarrow 9-3B+12=24 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x-3}+\frac{12}{(x-3)^2}\right)dx$ $=\ln\|x+1\|-\ln\|x-3\|-\frac{12}{x-3}+C$
8	$\frac{8x}{x^3+x^2-x-1}=\frac{8x}{x^2(x+1)-(x+1)}=\frac{8x}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$ $=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$ $A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2=8x$ $x=-1 \Rightarrow B=4$ $x=1 \Rightarrow C=2$ $x=0 \Rightarrow -A-B+C=0 \Rightarrow -A-4+2=0 \Rightarrow A=-2$ $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\int\left(\frac{-2}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx$ $=-2\ln\|x+1\|-\frac{4}{x+1}+2\ln\|x-1\|+C=2\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|-\frac{4}{x+1}+C$

9	$\frac{4}{x^3-2x^2}=\frac{4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$ $A(x)(x-2)+B(x-2)+C(x^2)=4$ $x=0 \Rightarrow B=-2$ $x=2 \Rightarrow C=1$ $x=1 \Rightarrow -A-B+C=4 \Rightarrow -A+2+1=4 \Rightarrow A=-1$ $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx$ $=-\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x}+\ln\lvert x-2\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{x-2}{x}\right\rvert+\frac{2}{x}+C$
10	$\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $A(x)(x+1)+B(x+1)+C(x^2)=x-1$ $x=0 \Rightarrow B=-1$ $x=-1 \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow 2A+2B+C=0 \Rightarrow 2A-2-2=0 \Rightarrow A=2$ $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx=\int_1^5\left(\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x+1}\right)dx$ $=\left(2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}-2\ln\lvert x-2\rvert\right)\Big\vert_1^5=\left(\frac{1}{x}+2\ln\left\lvert\frac{x}{x-2}\right\rvert\right)\Big\vert_1^5=2\ln\frac{5}{3}-\frac{4}{5}$

<table>
<tr>
<td>11</td>
<td>
$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$
$A(x-2) + B = 4 - x$
$x = 2 \Rightarrow B = 2$
$x = 0 \Rightarrow -2A + B = 4 \Rightarrow -2A + 2 = 4 \Rightarrow A = -1$
$\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx = \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right) dx$
$= \left(-\ln|x-2| - \frac{2}{x-2}\right)\Big|_7^{12} = -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \ln\frac{1}{2}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>12</td>
<td>
$\frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{4}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$
$A(x+3) + B(x+5) = 4$
$x = -5 \Rightarrow A = -2$
$x = -3 \Rightarrow B = 2$
$\int_1^{2} \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx = \int_1^{2} \left(\frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3}\right) dx$
$= (-2\ln|x+5| + 2\ln|x+3|)|_1^2 = \left(2\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|\right)\Big|_1^2$
$= 2\ln\frac{5}{7} - 2\ln\frac{2}{3} = 2\ln\frac{15}{14}$
</td>
</tr>
</table>

13	$\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}=5+\frac{-x+10}{2x^2-5x}=5+\frac{10-x}{x(2x-5)}=5+\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-5}$ $A(2x-5)+B(x)=10-x$ $x=0\Rightarrow A=-2$ $x=\frac{5}{2}\Rightarrow B=3$ $\int_1^2\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx=\int_1^2\left(5+\frac{-2}{x}+\frac{3}{2x-5}\right)dx$ $=\left(5x-2\ln\lvert x\rvert+\frac{3}{2}\ln\lvert 2x-5\rvert\right)\Big\rvert_1^2=10-2\ln 2-5-\frac{3}{2}\ln 3=5-\ln 12\sqrt{3}$
14	$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{(2x-3)^2}$ $A(2x-3)^2+B(x+1)(2x-3)+C(x+1)=25$ $x=-1\Rightarrow A=1$ $x=\frac{3}{2}\Rightarrow C=10$ $x=0\Rightarrow 9A-3B+C=25\Rightarrow 9-3B+10=25\Rightarrow B=-2$ $\int_2^5\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx=\int_2^5\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{2x-3}+\frac{10}{(2x-3)^2}\right)dx$ $=\left(\ln\lvert x+1\rvert-\ln\lvert 2x-3\rvert-\frac{5}{2x-3}\right)\Big\rvert_2^5=\left(\ln\left\lvert\frac{x+1}{2x-3}\right\rvert-\frac{5}{2x-3}\right)\Big\rvert_2^5$ $=\left(\ln\frac{6}{7}-\frac{5}{7}\right)-(\ln 3-5)=\frac{30}{7}+\ln\frac{2}{7}$

15	$\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{(x-3)(x+2)}=1+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-3)=16-2x$ $x=3\Rightarrow A=2$ $x=-2\Rightarrow B=-4$ $\int_0^2\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx=\int_0^2\left(1+\frac{2}{x-3}+\frac{-4}{x+2}\right)dx$ $=(x+2\ln\lvert x-3\rvert-4\ln\lvert x+2\rvert)\rvert_0^2$ $=2-4\ln 4-2\ln 3+4\ln 2=2-2\ln 12$
16	$A=\int_1^2\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$ $\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+2)=4x+3$ $x=-2\Rightarrow A=1$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=2$ $A=\int_1^2\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$ $=(\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert 2x-1\rvert)\rvert_1^2$ $=(\ln 4+\ln 3)-(\ln 3+0)=\ln 4$

17	$A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$ $\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8}=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$ $=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{1}{4}+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-2}+\frac{C}{(2x-2)^2}$ $A(2x-2)^2+B(x+2)(2x-2)+C(x+2)=3x^2-4x-2$ $x=-2 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ $x=1 \Rightarrow C=-1$ $x=0 \Rightarrow 4A-4B+2C=-2 \Rightarrow 2-4B-2=-2 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$ $A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx=\int_2^3\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-2}+\frac{-1}{(2x-2)^2}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ln\lvert x+2\rvert+\frac{1}{4}\ln\lvert 2x-2\rvert+\frac{1}{2(2x-2)}\right)\Big\rvert_2^3$ $=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln\frac{25}{8}$

18	$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}du$ $\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$ $(Au+B)(u-1)+C(u^2+1) = u+1$ $u = 1 \Rightarrow C = 1$ $u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$ $u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$ $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right)du$ $= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln\|u-1\| + C = -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln\|e^x-1\| + C$
19	$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}du$ $\frac{5}{u^2+3u-4} = \frac{5}{(u+4)(u-1)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$ $A(u-1) + B(u+4) = 5$ $u = 1 \Rightarrow B = 1$ $u = -4 \Rightarrow A = -1$ $\int \frac{5}{u^2+3u-4}du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\ln\|u+4\| + \ln\|u-1\| + C$ $\Rightarrow \int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = -\ln(4+\sin x) + \ln\|-1+\sin x\| + C$ $= \ln\left\|\frac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right\| + C$

20	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du$ $\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$ $A(u+2) + B(u+3) = 1$ $u = -3 \Rightarrow A = -1$ $u = -2 \Rightarrow B = 1$ $\Rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2}\right) du = \ln\|u+2\| - \ln\|u+3\| + C$ $\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \ln\left\|\frac{2 + \tan x}{3 + \tan x}\right\| + C$
21	$\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x-3) = 4x$ $x = 3 \Rightarrow A = 3$ $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right) dx = (3\ln\|x-3\| + \ln\|x+1\|)\|_0^1$ $= (3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln\frac{16}{27}$

22	$\frac{1}{2x^2+x-1}=\frac{1}{(2x-1)(x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}$ $A(x+1)+B(2x-1)=1$ $x=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{2}{3}$ $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}dx=\int_1^p\left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{3}\ln\|2x-1\|-\frac{1}{3}\ln\|x+1\|\right)\Big\|_1^p=\left(\frac{1}{3}\ln\|2p-1\|-\frac{1}{3}\ln\|p+1\|\right)-\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)$ $=\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{2(2p-1)}{p+1}\right\|=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4p-2}{p+1}\right)\quad ,p>1$

الدرس الرابع: التكامل بالأجزاء

1	$u = x \qquad dv = \cos 4x\,dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 4x$ $\int x\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}x\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x\,dx = \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$
2	$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ $du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ $\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ $= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$
3	$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$ $du = dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$
4	$u = \ln x \qquad dv = (x^2+1)dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3 + x$ $\int (x^2+1)\ln x\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + C$
5	$\int \ln x^3\,dx = \int 3\ln x\,dx$ $u = 3\ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{3}{x}dx \qquad v = x$ $\int 3\ln x\,dx = 3x\ln x - \int 3dx = 3x\ln x - 3x + C$

6	$u = e^{2x}$ $\quad dv = \sin x\,dx$ $du = 2e^{2x}dx$ $\quad v = -\cos x$ $\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x\,dx$ $u = 2e^{2x}$ $\quad dv = \cos x\,dx$ $du = 4e^{2x}dx$ $\quad v = \sin x$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - \int 4e^{2x}\sin x\,dx$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$ $\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$
7	$u = \ln x$ $\quad dv = dx$ $du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = x$ $\int_1^e \ln x\;dx = x\ln x\vert_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\vert_1^e - x\vert_1^e = e - e + 1 = 1$
8	$u = \ln x$ $\quad dv = x^{-2}dx$ $du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{-1}{x}$ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\;dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\vert_1^2 + \int_1^2 x^{-2}\;dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\vert_1^2 - \frac{1}{x}\Big\vert_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

9	$u = x \qquad dv = \cos\frac{1}{4}x\,dx$ $du = dx \qquad v = 4\sin\frac{1}{4}x$ $\int_0^{\pi} x\cos\frac{1}{4}x\ dx = 4x\sin\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi} - \int_1^{2} 4\sin\frac{1}{4}x\ dx$ $= 4x\sin\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi} + 16\cos\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi}$ $= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16$
10	$u = e^{3x} \qquad dv = \cos 2x\,dx$ $du = 3e^{3x}dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$ $\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \int \frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x\,dx$ $u = \frac{3}{2}e^{3x} \qquad dv = \sin 2x\,dx$ $du = \frac{9}{2}e^{3x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \int \frac{9}{4}e^{3x}\cos 2x\,dx$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ $\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x + C$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + C$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}(2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{13}\left(2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3\right)$

11

$u = \ln(x+1)$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx$ $\qquad v = x$

$$\int_1^e \ln(x+1)\, dx = x\ln(x+1)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1}\, dx$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^e - (x - \ln(x+1))\Big|_1^e$$

$$= e\ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1)) + (1 - \ln 2)$$

$$= (1+e)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$$

12

$$\int x^2 e^x\, dx$$

سنستخدم هنا طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة	الإشارة	$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x\, dx = e^x(x^2 - 2x + 2)\Big|_0^1 = e - 2$$

13

$u = \ln x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad v = x$

$$\int_2^4 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_2^4 - \int_2^4 dx = x\ln x\Big|_2^4 - x\Big|_2^4$$

$$= 4\ln 4 - 2\ln 2 - 2 = 8\ln 2 - 2\ln 2 - 2 = 6\ln 2 - 2$$

14	إن الإحداثيين x للنقطتين A, B هما أول حلين موجبين للمعادلة: $x\sin x = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = \pi\,, x = 2\pi\,, \ldots$ ومنه: $A(\pi, 0), B(2\pi, 0)$
15	$Area = \int_0^{\pi} x\sin x\ dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\ dx)$ $u = x \qquad dv = \sin x\, dx$ $du = dx \qquad v = -\cos x$ $\int x\sin x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + C$ $Area = \int_0^{\pi} x\sin x\ dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\ dx)$ $= (-x\cos x + \sin x)\|_0^{\pi} + (x\cos x - \sin x)\|_{\pi}^{2\pi}$ $= \pi + 2\pi - (-\pi) = 4\pi$
16	$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = 1$ $\Rightarrow A(1,0)$
17	$Area = \int_1^2 x^2 \ln x\ dx$ $u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$ $du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$ $Area = \int_1^2 x^2 \ln x\ dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big\|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\ dx$ $= \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big\|_1^2 - \frac{1}{9}x^3\Big\|_1^2$ $= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

الدرس الخامس: المساحات والحجوم

1	ملاحظة هامة: يرجى تعديل المعادلة $y = 1$ في الرسم إلى $y = 2$ $A = \int_0^{\pi} (2 - (1 + \cos 2x))\, dx = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\|_0^{\pi} = (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi$
2	$1 + 10x - 2x^2 = 1 + 5x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$ $\Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$ $\Rightarrow A = \int_0^5 \left(1 + 10x - 2x^2 - (1 + 5x - x^2)\right)\, dx$ $= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$
3	$A = \int_0^2 \left(3x - x^2 - (x)\right)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$ $= \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$
4	$A = \int_{-1}^2 \left((x^2 + 1) - (2x - 2)\right)\, dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3)\, dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)\Big\|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3\right) = 9$
5	$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$ $A = \int_{-2}^1 \left((2 - x) - (x^2)\right)\, dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)\, dx$ $= \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2}$
6	$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 1$ لكن $x \neq 0$ لأن الاقترانين غير معرفين عند $x = 0$، إذن يتقاطع المنحنيان في نقطة واحدة عند $x = 1$ $A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\, dx = \left(\ln\|x\| + \frac{1}{x}\right)\Big\|_1^2 = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - (1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

7	$1-\cos x=\cos x \Rightarrow 2\cos x=1 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ $\cos x > 1-\cos x,\quad 0<x<\frac{\pi}{3}$ $\cos x < 1-\cos x,\quad \frac{\pi}{3}<x<\pi$ $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-(1-\cos x))\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos x-(\cos x))\,dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-2\cos x)\,dx$ $=(2\sin x-x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}+(x-2\sin x)\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$
8	$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4=4-\frac{1}{2}x \Rightarrow 3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x=0$ $\Rightarrow \sqrt{x}\left(3-x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0\ \ ,x-\frac{1}{2}\sqrt{x}-3=0$ $\Rightarrow x=0\ \ ,2x-\sqrt{x}-6=0$ $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2,\qquad \sqrt{x}>0 \Rightarrow\ \ u>0$ $2x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow 2u^2-u-6=0$ $(2u+3)(u-2)=0 \Rightarrow u=-\frac{3}{2}, u=2 \Rightarrow x=\ 4$ (الحل السالب مرفوض) $\Rightarrow x=0\ \ ,\ \ x=4$ $\Rightarrow A(4,2)$
9	$A=\int_0^4\left(\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4\right)-\left(4-\frac{1}{2}x\right)\right)dx$ $=\int_0^4\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x\right)dx=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)\Big\|_0^4$ $=16-\frac{64}{5}+4=\frac{36}{5}=7.2$

10	$s(7)-s(0)=\int_0^7 v(t)\,dt=-A_1+A_2-A_3$ $=-\frac{1}{2}(2)(1)+\frac{1}{2}(2)(4+1)-\frac{1}{2}(2)(1)=-1+5-1=3\text{ m}$
11	$d=\int_0^7 \lvert v(t)\rvert\,dt=A_1+A_2+A_3=1+5+1=7\text{ m}$
12	$s(7)-s(0)=3\text{ m}\ \Rightarrow s(7)-2=3+2\ =5\text{ m}$
13	$\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow(x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=3\ ,x=-2$ $V=\pi\int_0^3\left((g(x))^2-(f(x))^2\right)dx=\pi\int_0^3\left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right)dx$ $=\pi\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big\|_0^3=\frac{153\pi}{5}=30.6\pi$
14	$V=\pi\int_e^{e^3}(f(x))^2\,dx=\pi\int_e^{e^3}\ln x\,dx$ $u=\ln x$ $\qquad dv=dx$ $du=\frac{1}{x}dx$ $\qquad v=x$ $V=\pi\int_e^{e^3}\ln x\,dx=\pi(x\ln x\|_e^{e^3}-\int_e^{e^3}dx)=\pi(x\ln x\|_e^{e^3}-x\|_e^{e^3})$ $=\pi(3e^3-e-e^3+e)=2\pi e^3$
15	$x^2=\sqrt{2x}\Rightarrow x^4=2x\Rightarrow x^4-2x=0\Rightarrow x(x^3-2)=0\Rightarrow x=0,x=\sqrt[3]{2}$ $V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(\left(\sqrt{2x}\right)^2-(x^2)^2\right)dx=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}(2x-x^4)\,dx$ $=\pi\left(x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_0^{\sqrt[3]{2}}=\pi\left(\sqrt[3]{4}-\frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right)=\frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$
16	$y=4\Rightarrow x^2+16=25\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=-3,x=3$ $x^2+y^2=25\Rightarrow y^2=25-x^2$ $V=\pi\int_{-3}^3(y^2-(4)^2)\,dx=\pi\int_{-3}^3(25-x^2-16)\,dx=\pi\int_{-3}^3(9-x^2)\,dx$ $=\pi\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^3=\pi((27-9)-(-27+9))=36\pi$

الدرس السادس: المعادلات التفاضلية

1	$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \Rightarrow \ln\|y\| = x^3 + C$
2	$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2-4} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$ $\Rightarrow A(y+2) + B(y-2) = 1$ $y = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$ $y = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}$ $\int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\|y-2\| - \frac{1}{4}\ln\|y+2\| = \ln\|x\| + C \Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left\|\frac{y-2}{y+2}\right\| = \ln\|x\| + C$
3	$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \times e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx$ $\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + C$

4	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sec y}{ye^{x^2}}\Rightarrow\frac{ydy}{\sec y}=\frac{xdx}{e^{x^2}}\Rightarrow\int y\cos y\,dy=\int xe^{-x^2}\,dx$ نجد $\int y\cos y\,dy$ بالأجزاء (من دون إضافة ثابت التكامل): $u=y$ $dv=\cos y\,dy$ $du=dy$ $v=\sin y$ $\Rightarrow\int y\cos y\,dy=y\sin y-\int\sin y\,dy=y\sin y+\cos y+C$ نجد $\int xe^{-x^2}\,dx$ بالتعويض(من دون إضافة ثابت التكامل): $u=-x^2\Rightarrow du=-2x\,dx\Rightarrow dx=-\frac{du}{2x}$ $\Rightarrow\int xe^{-x^2}\,dx=\int xe^{u}\times\frac{du}{-2x}=-\int\frac{1}{2}e^{u}du=-\frac{1}{2}e^{u}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ نضيف ثابت التكامل في الخطوة الأخيرة: $\int y\cos y\,dy=\int xe^{-x^2}\,dx$ $\Rightarrow y\sin y+\cos y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
5	$\frac{dy}{dx}=\frac{y-3}{y}\Rightarrow\frac{y}{y-3}dy=dx\Rightarrow\int\frac{y}{y-3}dy=\int dx$ $\Rightarrow\int\left(1+\frac{3}{y-3}\right)dy=\int dx$ $\Rightarrow y+3\ln\lvert y-3\rvert=x+C$

6	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\ln x}{y^2}\Rightarrow y^2dy=x\ln x\,dx\Rightarrow\int y^2dy=\int x\ln x\,dx$ نجد $\int x\ln x\,dx$ بالأجزاء: $u=\ln x \qquad dv=xdx$ $du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{1}{2}x^2$ $\Rightarrow\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ $\int y^2dy=\int x\ln x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
7	$\frac{dy}{dx}=-30\cos 4x\sin 4x \quad ,y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$ $\Rightarrow dy=-30\cos 4x\sin 4x\,dx$ $\Rightarrow\int dy=\int -15\sin 8x\,dx$ $\Rightarrow y=\frac{15}{8}\cos 8x+C$ الحل العام : $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{15}{8}\cos 8\left(\frac{\pi}{8}\right)+C$ الشرط الأولي : $0=-\frac{15}{8}+C\Rightarrow C=\frac{15}{8}$ $\Rightarrow y=\frac{15}{8}\cos 8x+\frac{15}{8}$ الحل الخاص :

8	$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$ $\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 dx$ الحل العام : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$ الشرط الأولي : $y(0) = 2 \Rightarrow 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$ الحل الخاص : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + 2$
9	$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y}$, $y(0) = 0$ $\Rightarrow \cos y\, dy = 4\sqrt{x} dx$ $\Rightarrow \int \cos y\, dy = \int 4\sqrt{x} dx$ الحل العام : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ الشرط الأولي : $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ الحل الخاص : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x\sqrt{x}$

10	$\frac{dy}{dx}=xe^{y-x^2}\quad ,y(1)=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{y}e^{-x^2}\Rightarrow \frac{dy}{e^y}=xe^{-x^2}dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^y}=\int xe^{-x^2}dx$ نجد $\int xe^{-x^2}dx$ بالتعويض: $u=-x^2\Rightarrow du=-2xdx\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^y}=\int xe^{-x^2}dx=\int xe^{u}\times\frac{du}{-2x}=\int -\frac{1}{2}e^{u}du=-\frac{1}{2}e^{u}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ $-e^{-y}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ $\Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ الحل العام : $y(1)=0\Rightarrow 1=\frac{1}{2e}+C\Rightarrow C=1-\frac{1}{2e}$ الشرط الأولي : $\Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}e^{-x^2}+1-\frac{1}{2e}$ الحل الخاص :
11	$\frac{dy}{dx}=xe^{-y}\quad ,y(4)=\ln 2$ $\Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}}=xdx$ $\Rightarrow \int e^{y}dy=\int xdx\Rightarrow e^{y}=\frac{1}{2}x^2+C$ الحل العام : $y(4)=\ln 2\Rightarrow 2=8+C\Rightarrow C=-6$ الشرط الأولي : $\Rightarrow e^{y}=\frac{1}{2}x^2-6$ الحل الخاص :

12	$\frac{dy}{dx} = (3x^2+4)y^2 \quad , y(2) = -0.1$ $\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (3x^2+4)dx$ $\Rightarrow \int y^{-2}dy = \int (3x^2+4)dx$ $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3+4x+C$ الحل العام : $y(2) = -0.1 \Rightarrow 10 = 8+8+C \Rightarrow C = -6$ الشرط الأولي : $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3+4x-6$ الحل الخاص :
13	$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^{0.8} \quad , y(0) = 100000$ $\Rightarrow y^{-0.8}dy = \frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow \int y^{-0.8}dy = \int \frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow 5y^{0.2} = \frac{1}{2}t + C$ الحل العام : $y(0) = 100000 \Rightarrow 5\sqrt[5]{100000} = 0 + C \Rightarrow C = 50$ $\Rightarrow 5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}t + 50$ الحل الخاص :
14	$5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}(7) + 50 \Rightarrow \sqrt[5]{y} = 10.7 \Rightarrow y = (10.7)^5 \approx 140255$

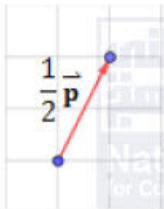
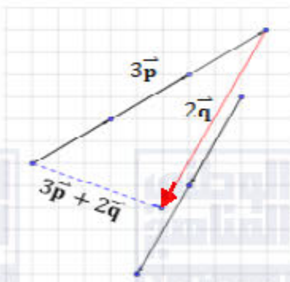
15	$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}$, $v(0) = 20$ $\Rightarrow -v^{-2}dv = \frac{1}{100}dt$ $\Rightarrow -\int v^{-2}dv = \int dt$ $\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{100}t + C$ $v(0) = 20 \Rightarrow \frac{1}{20} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{20}$ $\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{100}t + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{t+5}{100} \Rightarrow v = \frac{100}{t+5}$
16	$e^y\frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\Rightarrow e^y dy = (10 + 2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow \int e^y dy = \int (10 + 2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow e^y = 10x + 2\tan x + C$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{5\pi}{2} + 2 + C \Rightarrow C = -1 - \frac{5\pi}{2}$ $\Rightarrow e^y = 10x + 2\tan x - 1 - \frac{5\pi}{2}$

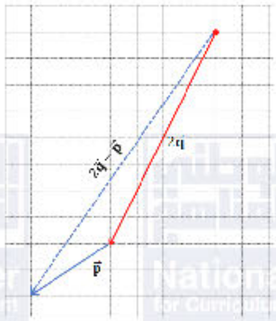
17	$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0 \quad , y(6)=4$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int -\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \ln\|y\|=-\ln\|x\|+C$ $y(6)=4 \Rightarrow \ln 4=-\ln 6+C \Rightarrow C=\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\|=-\ln\|x\|+\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\|+\ln\|x\|=\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|xy\|=\ln 24$ $\Rightarrow \|xy\|=24$ $\Rightarrow \|y\|=\frac{24}{\|x\|} \Rightarrow y=\frac{24}{x}$ or $\Rightarrow y=-\frac{24}{x}$ $\Rightarrow y=\frac{24}{x}$ (لأن $y=-\frac{24}{x}$ لا تحقق شروط السؤال)

إجابات كتاب التمارين للصف الثاني عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة: المتجهات

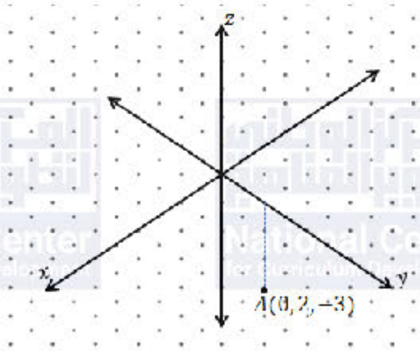
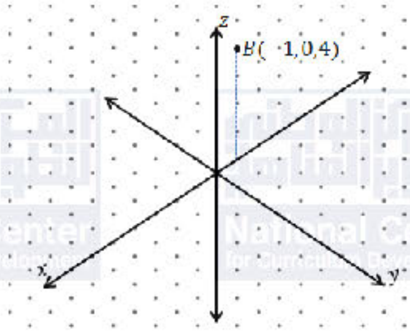
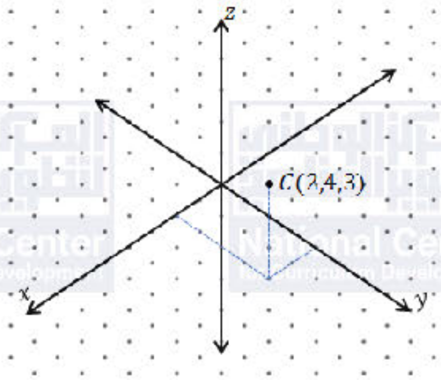
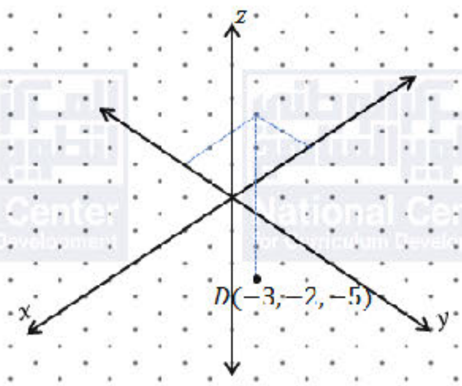
أستعد لدراسة الوحدة

	الصورة الإحداثية ومقدار المتجه صفحة 19
1	$A(-1,6), B(-1,-2), C(4,-5), D(5,1)$ $\overrightarrow{AB} = \langle 0,-8\rangle$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{0+64} = 8$
2	$\overrightarrow{BC} = \langle 5,-3\rangle$, $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
3	$\overrightarrow{CD} = \langle 1,6\rangle$, $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$
4	$\overrightarrow{DA} = \langle -6,5\rangle$, $\lvert\overrightarrow{DA}\rvert = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$
	جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا صفحة 19
5	
6	
7	

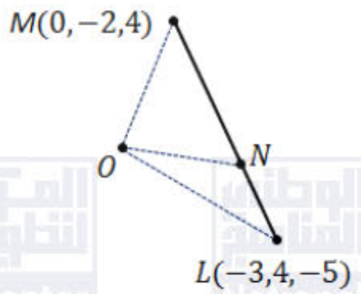
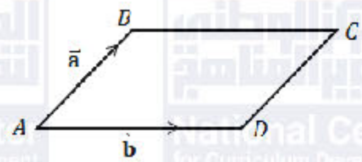
8	
جمع المتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي صفحة 20	
9	$\vec{u} + \vec{v} = \langle 9,7 \rangle$
10	$\vec{v} - \vec{u} = \langle 3,11 \rangle$
11	$3\vec{u} + 2\vec{v} = \langle 21,12 \rangle$
12	$-2\vec{u} + \vec{v} = \langle 0,13 \rangle$
الضرب القياسي، والزاوية بين متجهين صفحة 21	
13	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(3) - 5(-1) = 11$
14	$\vec{m} \cdot \vec{n} = -3(8) - 4(6) = -48$
15	$\vec{r} \cdot \vec{s} = -5(2) + 4(3) = 2$
16	$\vec{q} \cdot \vec{p} = 11(-4) + 8(-5) = -84$
17	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$ $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(5) + 7(1) = 22$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{22}{\sqrt{58}\sqrt{26}}\right) \approx 55.5°$

18	$\lvert\vec{\mathbf{c}}\rvert = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\lvert\vec{\mathbf{d}}\rvert = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ $\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{d}} = 2(-6) - 3(9) = -39$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{d}}}{\lvert\vec{\mathbf{c}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{d}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-39}{\sqrt{13}\sqrt{117}}\right) = \cos^{-1}(-1) = 180°$ ملحوظة: يمكن ملاحظة أن $\vec{\mathbf{d}} = -3\vec{\mathbf{c}}$ ، ومنه استنتاج أن قياس الزاوية بينهما هو $180°$ لأن لهما اتجاهان متعاكسان.
19	$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = 4(3n-4) + n(-10) = 0$ $\Rightarrow 12n - 16 - 10n = 0 \Rightarrow n = 8$

الدرس الأول: المتجهات في الفضاء

1	
2	
3	
4	
5	$A(3,0,6)$

6	$C(0,5,6)$
7	$D(0,0,6)$
8	$F(3,5,0)$
9	مركزه هو منتصف $\overline{OB}$ وهو: $\left(\frac{0+3}{2},\frac{0+5}{2},\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},3\right)$
10	$\overrightarrow{AB}=\langle 6,4,-3\rangle, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{36+16+9}=\sqrt{61}$
11	$\overrightarrow{EF}=\langle 3,4,-12\rangle, \lvert\overrightarrow{EF}\rvert=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$
12	$\overrightarrow{GH}=\langle 12,4,6\rangle, \lvert\overrightarrow{GH}\rvert=\sqrt{144+16+36}=\sqrt{196}=14$
13	$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{64+25+45}=\sqrt{134}$ ليكن $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AC}$ ، فإنّ: $\hat{\mathbf{u}}=\frac{1}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\sqrt{134}}(8\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}-3\sqrt{5}\hat{\mathbf{k}})=\frac{8}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{5}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{j}}-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{k}}$
14	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert=\sqrt{25+16+400}=\sqrt{441}=21$ $\Rightarrow \hat{\mathbf{v}}=\frac{1}{21}\langle -5,4,20\rangle=\langle\frac{-5}{21},\frac{4}{21},\frac{6}{21}\rangle$ $\hat{\mathbf{v}}$هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$
15	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert=\sqrt{16+144+9}=13$ $\Rightarrow \hat{\mathbf{v}}=\frac{4}{13}\hat{\mathbf{i}}-\frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}+\frac{3}{13}\hat{\mathbf{k}}$ $\hat{\mathbf{v}}$هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ ، إذن، المتجه الذي له اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ نفسه ومقداره 52 هو $52\,\hat{\mathbf{v}}$ ويساوي: $52\left(\frac{4}{13}\hat{\mathbf{i}}-\frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}+\frac{3}{13}\hat{\mathbf{k}}\right)=16\hat{\mathbf{i}}-48\hat{\mathbf{j}}+12\hat{\mathbf{k}}$
16	$2\vec{\mathbf{u}}+4\vec{\mathbf{v}}=2\langle 3,5,-7\rangle+4\langle -4,3,-6\rangle=\langle -10,22,-38\rangle$
17	$3\vec{\mathbf{u}}-2\vec{\mathbf{v}}=3\langle 3,5,-7\rangle-2\langle -4,3,-6\rangle=\langle 17,9,-9\rangle$

18	$a\langle 3,5,-7\rangle + 5\langle -4,3,-6\rangle = \langle 3a-20, 5a+15, -7a-30\rangle$ $\Rightarrow \langle 3a-20, 5a+15, -7a-30\rangle = \langle -2, b, c\rangle$ $\Rightarrow 3a-20=-2$ و $5a+15=b$ و $-7a-30=c$ $\Rightarrow a=6$ و $b=45$ و $c=-72$
19	$\frac{AP}{PB}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BP}{BA}=\frac{3}{8}$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}(-2\vec{\mathbf{b}}+2\vec{\mathbf{a}})$ $=\left(2-\frac{3}{4}\right)\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{4}\vec{\mathbf{a}}=\frac{5}{4}\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{4}\vec{\mathbf{a}}$ $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(5\vec{\mathbf{b}}+3\vec{\mathbf{a}}) \Rightarrow k=\frac{1}{4}$
20	ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$ $\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{LN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$ $\Rightarrow \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LN}$ $=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL})$ $=\langle -3,4,-5\rangle+\frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$ $=\langle -2,2,-2\rangle$ 
21	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$ ………………… (1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ $\Rightarrow -\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=-6\hat{\mathbf{i}}+7\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ ……………… (2) $(1)+(2): 2\vec{\mathbf{b}}=-4\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$ $\Rightarrow \vec{\mathbf{b}}=-2\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ $(1)-(2): 2\vec{\mathbf{a}}=8\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}=4\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ 

22	$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=p\langle 1,0,4\rangle+q\langle 2,0,-3\rangle+r\langle -5,3,1\rangle$ $=\langle p+2q-5r,3r,4p-3q+r\rangle=\langle 28,-12,-5\rangle$ $3r=-12\Rightarrow r=-4$ $p+2q-5r=28\Rightarrow p+2q=8\ldots\ldots\ldots(1)$ $4p-3q+r=-5\Rightarrow 4p-3q=-1\ldots\ldots\ldots(2)$ $(1)\times 4-(2): 11q=33\Rightarrow q=3\ \ ,p=2$
23	$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=6\vec{a}+6\vec{c}$
24	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-6\vec{a}+6\vec{c}$
25	$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AU}=6\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=6\vec{a}+\frac{2}{3}(6\vec{c})=6\vec{a}+4\vec{c}$
26	$\overrightarrow{UT}=\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{BT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(6\vec{c})+\frac{1}{2}(-6\vec{a})=2\vec{c}-3\vec{a}$
27	$\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-6\vec{c}=\frac{1}{2}(6\vec{a})-6\vec{c}=3\vec{a}-6\vec{c}$
28	$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=6\vec{c}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}=6\vec{c}+\frac{3}{5}(6\vec{a}-6\vec{c})=\frac{18}{5}\vec{a}+\frac{12}{5}\vec{c}$
29	$\overrightarrow{US}=\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}(-6\vec{c})+\frac{2}{5}(-6\vec{a}+6\vec{c})=-\frac{12}{5}\vec{a}-\frac{8}{5}\vec{c}$
30	$\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}(-6\vec{a}+6\vec{c})+6\vec{a}=\frac{12}{5}\vec{a}+\frac{18}{5}\vec{c}$
31	$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})$ $\Rightarrow\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}(-\vec{b})+\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ $\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{11}{12}\vec{b}$
32	$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\lambda\vec{a}=\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

33	$\overrightarrow{QR} = \mu\overrightarrow{PR} = \mu(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR}) = \mu\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{BO} + \lambda\overrightarrow{OA}\right) = \mu\left(-\frac{5}{4}\vec{\mathbf{b}} + \lambda\vec{\mathbf{a}}\right)$ $= \mu\lambda\vec{\mathbf{a}} - \frac{5}{4}\mu\vec{\mathbf{b}}$
34	بمطابقة السؤالين السابقين، نجد بمقارنة معاملات $\vec{\mathbf{a}}$ ، و $\vec{\mathbf{b}}$ أنّ: $-\frac{5}{4}\mu = -\frac{1}{3} \Rightarrow \mu = \frac{4}{15}$ $\mu\lambda = \lambda - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{15}\lambda = \lambda - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{11}{15}\lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{11}$

الدرس الثاني: المستقيمات في الفضاء

1	$\overrightarrow{AB} = \langle -7,2,7\rangle$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,5,-3\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 14,-4,-14\rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle -5,-3,10\rangle$ بما أن: $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ إذن: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ لكن لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$ نظرًا لأن النسبة بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، لذلك $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$ و الشكل $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.
2	$\overrightarrow{AB} = \langle -6,-3,-2\rangle$ $\overrightarrow{BC} = \langle -14,-1,23\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 6,3,2\rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle 14,1,-23\rangle$ $\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BC} = (-1)\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$ إذن، الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأن فيه زوجين من الأضلاع المتوازية.
3	يمكن الحل بالاستناد للتوازي: $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $= \langle 3,1,5\rangle + \langle 2,3,1\rangle - \langle 6,5,4\rangle = \langle -1,-1,2\rangle$ $\Rightarrow D(-1,-1,2)$
4	$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT} = 2\vec{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} = 2\vec{b} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) = 2\vec{b} + \frac{1}{6}(-2\vec{b} + 5\vec{a})$ $= \left(2 - \frac{2}{6}\right)\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a} = \frac{10}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a} = \frac{5}{6}(2\vec{b} + \vec{a})$ $\Rightarrow \overrightarrow{OT} = \frac{5}{6}(2\vec{b} + \vec{a})$ $\Rightarrow \overrightarrow{OT} \parallel (2\vec{b} + \vec{a})$
5	$\overrightarrow{OS} = 3\overrightarrow{OR} = 3(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}) = 3\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}\right) = 3\vec{a} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = 3\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$ $= 2\vec{a} + \vec{b}$

6	$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT} = -\vec{a} - \vec{b}$ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = -\vec{a} + (2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$ $\Rightarrow \overrightarrow{PT} = (-1)\overrightarrow{PS}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة P نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط T, P, S تقع على استقامة واحدة.
7	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = 8\vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = 8\vec{a} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = 8\vec{a} + \frac{2}{5}(-8\vec{a} + 7\vec{c})$ $= \left(8 - \frac{16}{5}\right)\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{24}{5}\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})$
8	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = 7\vec{c} + 12\vec{a}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة.
9	وجدنا في السؤال السابق أن: $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ $\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OP + PB} = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow 5\,OP = 2\,OP + 2PB \Rightarrow 3\,OP = 2PB$ $\Rightarrow \frac{OP}{PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OP : PB = 2 : 3$
10	$\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + t(4\hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + (3 + 4t)\hat{j} - (5 + 2t)\hat{k}$
11	$\vec{r} = \langle 2, -7, 11\rangle + t\langle -4, 5, 8\rangle = \langle 2 - 4t, -7 + 5t, 11 + 8t\rangle$
12	$\vec{v} = \langle 6 - 1, 19 - (-7)\rangle = \langle 5, 26\rangle$ $\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته. $\Rightarrow \vec{r} = \langle 1, -7\rangle + t\langle 5, 26\rangle = \langle 1 + 5t, -7 + 26t\rangle$

13	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 7-(-5), 13-4, -8-15\rangle = \langle 12,9,-23\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle -5,4,15\rangle + t\langle 12,9,-23\rangle = \langle -5+12t, 4+9t, 15-23t\rangle$
14	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 13-5, 10-22, 3-(-8)\rangle = \langle 8,-12,11\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle 5,22,-8\rangle + t\langle 8,-12,11\rangle = \langle 5+8t, 22-12t, -8+11t\rangle$
15	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 9-0, 4-2, 6-(-5)\rangle = \langle 9,2,11\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle 0,2,-5\rangle + t\langle 9,2,11\rangle = \langle 9t, 2+2t, -5+11t\rangle$
16	تقع النقطة $(3,7,11)$ على المستقيم l إذا وُجِد عدد حقيقي t حيث: $\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 3,7,11\rangle$ $\Rightarrow -5+3t=3$ و $8-2t=7$ و $4+9t=11$ $\Rightarrow t=\frac{8}{3}\ ,\quad t=\frac{1}{2}\ ,\quad t=\frac{7}{9}$ لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث، إذن: النقطة $(3,7,11)$ لا تقع على المستقيم l.
17	تقع النقطة $(1.b,c)$ على المستقيم l ، إذن توجد قيمة للوسيط t تحقق المعادلة الآتية: $\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 1,b,c\rangle$ $-5+3t=1 \Rightarrow t=2$ $8-2t=b \Rightarrow 8-4=b \Rightarrow b=4$ $4+9t=c \Rightarrow 4+18=c \Rightarrow c=22$
18	الإحداثي y للنقطة الواقعة في المستوى xz هو 0 نجد قيمة t التي تحقق المعادلة $8-2t=0$، وهي $t=4$ ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz نعوض $t=4$ في معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle -5+12, 8-8, 4+36\rangle = \langle 7,0,40\rangle$ إذن، إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz هي: $(7,0,40)$
19	يتوازى المستقيمان إذا توازى اتجاهاهما، أي: $\langle 4,a,-12\rangle \parallel \langle 3,-2,-9\rangle$ $\Rightarrow \langle 4,a,-12\rangle = k\langle 3,-2,-9\rangle\ , k\in\mathcal{R}$ $\Rightarrow 4=3k \Rightarrow k=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow a=\frac{4}{3}(-2) = -\frac{8}{3}$

20	النقاط $A(7,1,q), V(2,5,-3), U(p,-3,-1)$ على استقامة واحدة: $\Rightarrow \overrightarrow{AV} \parallel \overrightarrow{VU} \Rightarrow \overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{VU}, k \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow \langle -5,4,-3-q \rangle = k\langle p-2,-8,2 \rangle$ $4 = -8k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ $-5 = k(p-2) \Rightarrow p = 12$
21	$\overrightarrow{VU} = \langle 12-2, -3-5, -1-(-3) \rangle = \langle 10,-8,2 \rangle$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 10,-8,2 \rangle$، ويمكن تبسيطه إلى $\langle 5,-4,1 \rangle$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,5,-3 \rangle + t\langle 5,4,1 \rangle$
22	من السؤال 20 نجد أن: $-3-q = 2k \Rightarrow -3-q = -1 \Rightarrow q = -2$
23	لإيجاد متجه موقع النقطة D نعوض $\lambda = 2$ في معادلة l_1 $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3+2, -2+2(2), 4-2 \rangle = \langle 5,2,2 \rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 3,2,-1 \rangle$ إذن، معادلة المستقيم المطلوب هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5,2,2 \rangle + t\langle 3,2,-1 \rangle$

24	اتجاه l_1 : $\langle 1,-1,-2\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$ اتجاه l_2 : $\langle -1,0,1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 1,-1,-2\rangle = k\langle -1,0,1\rangle$ يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u يحققان: $\langle 4+t, 3-t, 3-2t\rangle = \langle 5-u, 1, u\rangle$ $\Rightarrow 3-t=1 \Rightarrow t=2$ $\Rightarrow 4+t=5-u \Rightarrow t+u=1 \Rightarrow 2+u=1 \Rightarrow u=-1$ $\Rightarrow 3-2t=u \Rightarrow 2t+u=3$ $2(2)+(-1) \stackrel{?}{=} 3$ $3=3$ ✓ تحققت المعادلات الثلاث للقيمتين $t=2, u=-1$ ، فالمستقيمان متقاطعان، ونجد نقطة تقاطعهما بتعويض $t=2$ في معادلة l_1 $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4,3,3\rangle + 2\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 6,1,-1\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $(6,1,-1)$
25	اتجاه l_1 : $\langle 2,2,3\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,1,-2\rangle + t\langle 2,2,3\rangle$ اتجاه l_2 : $\langle 2,1,-1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 9,6,-2\rangle + u\langle 2,1,-1\rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 2,2,3\rangle = k\langle 2,1,-1\rangle$ يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u بحيث: $\langle 3+2t, 1+2t, -2+3t\rangle = \langle 9+2u, 6+u, -2-u\rangle$ $\Rightarrow 3+2t=9+2u \Rightarrow t-u=3$ .... (1) $1+2t=6+u \Rightarrow 2t-u=5$ .... (2) $-2+3t=-2-u \Rightarrow 3t+u=0$ .... (3) $(2)-(1): t=2 \Rightarrow u=-1$ نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t=2, u=-1$: $3(2)+(-1) \neq 0$ المعادلة غير متحققة، إذن، المستقيمان غير متقاطعين، و غير متوازيين، فهما متخالفان.

26	$\overrightarrow{AB} = \langle 3,-3,-2\rangle$ $\mathbf{\vec{r}} = \langle 2,1,3\rangle + t\langle 3,-3,-2\rangle$ معادلة المستقيم: $\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \langle 2+3t, 1-3t, 3-2t\rangle$ $AC = 3CB \Rightarrow \lvert\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\rvert = 3\lvert\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(2+3t-2)^2+(1-3t-1)^2+(3-2t-3)^2} = 3\sqrt{(2+3t-5)^2+(1-3t+2)^2+(3-2t-1)^2}$ $\Rightarrow 8t^2-18t+9=0$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس) $\Rightarrow (2t-3)(4t-3)=0$ $\Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{13}{2},-\frac{7}{2},0\right)$ أو $t=\frac{3}{4} \Rightarrow C\left(\frac{17}{4},-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$

27

نثبت أن كل زوج من أزواج المستقيمات، متقاطعان، ونجد نقاط التقاطع (رؤوس المثلث):

متجه موقع أي نقطة على المستقيمات الثلاثة على التوالي تعطى كما يأتي:

$$\begin{pmatrix}-3+5t\\1-2t\\4-4t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+s\\5+s\\-4-2s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+2q\\-1-5q\\2q\end{pmatrix}$$

أولًا:

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle$

$-3+5t = 1+s \Rightarrow 5t-s=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t = 5+s \Rightarrow 2t+s=-4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t = -4-2s \Rightarrow 2t-s=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(1)+(2): 7t=0 \Rightarrow t=0\ ,s=-4$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t=0\ ,s=-4$: $2(0)-(-4)=4$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $A(-3,1,4)$

ثانيًا:

$\langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$1+s = 2+2q \Rightarrow s-2q=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$5+s = -1-5q \Rightarrow s+5q=-6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$-4-2s = 2q \Rightarrow s+q=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(2)-(1): 7q=-7 \Rightarrow q=-1\ ,s=-1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $q=-1\ ,s=-1$: $(-1)+(-1)=-2$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $B(0,4,-2)$

ثالثًا:

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$-3+5t = 2+2q \Rightarrow 5t-2q=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t = -1-5q \Rightarrow 2t-5q=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t = 2q \Rightarrow 2t+q=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(3)-(2): 6q=0 \Rightarrow q=0\ ,t=1$

نفحص تحقق المعادلة (1) عند $q=0\ ,t=1$: $5(1)-2(0)=5$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $C(2,-1,0)$

كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة، فهذه المستقيمات تكون مثلثًا، أطوال أضلاعه:

$AB = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}$

$BC = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$

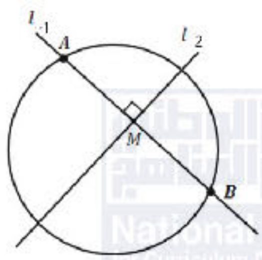
$AC = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45}$

الدرس الثالث: الضرب القياسي

1	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4(-2)+5(3)-3(-7) = 28$
2	$\vec{e}\cdot\vec{f} = -13(-2)+8(3)-5(10) = 0$
3	$\vec{m}\cdot\vec{n} = 7(2)+4(-5)-9(10) = -96$
4	$\vec{w}\cdot\vec{v} = 15(6)+24(5)-7(a) = 0 \Longrightarrow a = 30$
5	$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5(2)+2(-1)+3(-2) = 2$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$ $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{4+1+4} = 3$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 83.8°$
6	$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(-1)+1(-1)-1(4) = -6$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 144.7°$
7	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda(\lambda)+4(-3)+\lambda(4) = 0 \Longrightarrow \lambda^2+4\lambda-12 = 0$ $\Longrightarrow (\lambda+6)(\lambda-2) = 0 \Longrightarrow \lambda = -6\ ,\ \lambda = 2$
8	اتجاه l_1 : $\vec{v} = \langle 2,-6,3\rangle$ اتجاه l_2 : $\vec{w} = \langle 3,-4,12\rangle$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2(3)-6(-4)+3(12) = 66$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{4+36+9} = 7$ $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{9+16+144} = 13$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{7(13)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{91}\right) \approx 43.5°$

9	اتجاه l_1 : $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3-(-2), -5-11, 9-6\rangle = \langle 5, -16, 3\rangle$ اتجاه l_2 : $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4-(-5), 3-9, 8-12\rangle = \langle 9, -6, -4\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 5(9) - 16(-6) + 3(-4) = 129$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290}$ $\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \approx 48.9^\circ$
10	$\vec{\mathbf{m}} = \langle v, 0, -1\rangle$, $\vec{\mathbf{n}} = \langle 2, -1, 0\rangle$ $\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = 2v + 0 + 0 = 2v$ $\lvert\vec{\mathbf{m}}\rvert = \sqrt{v^2+1}$ $\lvert\vec{\mathbf{n}}\rvert = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$ $\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \lvert\vec{\mathbf{m}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{n}}\rvert\cos 60^\circ$ $\Rightarrow 2v = \sqrt{5(v^2+1)} \times \frac{1}{2} \Rightarrow 16v^2 = 5v^2 + 5 \Rightarrow v^2 = \frac{5}{11} \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{5}{11}}$
11	$\overrightarrow{OA} = \langle 3, -2, 6\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle -5, 4, 1\rangle$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -5(3) + 4(-2) + 1(6) = -17$ $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$ $m\angle AOB = \theta$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right) \approx 112^\circ$ $Area = \frac{1}{2}(OA)(OB)\sin\theta = \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42})\sin 112^\circ \approx 21.03$

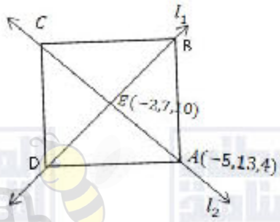
12	$\overrightarrow{EF} = \langle 4, -10, -7 \rangle$ $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, -3,5 \rangle + t\langle 4, -10, -7 \rangle$ معادلة المستقيم l هي : إذا كانت M هي مسقط العمود من G على المستقيم l، فإنّ: $\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 + 4t, -3 - 10t, 5 - 7t)$ ويكون: $\overrightarrow{MG} = (-1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t)$ $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{MG}$ $\Longrightarrow \langle 4, -10, -7 \rangle \perp \langle -1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t \rangle$ $\Longrightarrow 4(-1 - 4t) - 10(-3 + 10t) - 7(-1 + 7t) = 0$ $\Longrightarrow -4 - 16t + 30 - 100t + 7 - 49t = 0$ $\Longrightarrow -165t = -33 \Longrightarrow t = \dfrac{33}{165} = 0.2$ $\Longrightarrow M(1.8, -5,3.6)$
13	$GM = \sqrt{(1.8 - 0)^2 + (-5 + 6)^2 + (3.6 - 4)^2} = \sqrt{4.4} \approx 2.1$
14	مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر $\overline{AC}$ يقسمه إلى مثلثين متطابقين. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6(15) - 2(8) + 11(5) = 129$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{36 + 4 + 121} = \sqrt{161}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{225 + 64 + 25} = \sqrt{314}$ $m\measuredangle BAC = \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \approx 55°$ $Area(ABCD) = 2 \times \dfrac{1}{2}(AC)(AB)\sin\theta = \sqrt{161}\sqrt{314}\sin 55° \approx 184.2$

15	$\overrightarrow{OS} = \langle -1,-1,-1\rangle$ $\overrightarrow{OR} = \langle -1,1,1\rangle$ $\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OR} = -1(-1)-1(1)-1(1) = -1$ $\lvert\overrightarrow{OS}\rvert = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\lvert\overrightarrow{OR}\rvert = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OR}}{\lvert\overrightarrow{OS}\rvert\lvert\overrightarrow{OR}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109.5°$
16	$\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -q+6-2=0 \Rightarrow q=4$
17	$\langle -4+4u, 10+2u, p-u\rangle = \langle 8-t, 2+3t, -12+2t\rangle$ $-4+4u = 8-t \Rightarrow 4u+t = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $10+2u = 2+3t \Rightarrow 2u-3t = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $p-u = -12+2t \Rightarrow p = 2t+u-12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $(1)\times 3+(2): 14u = 28 \Rightarrow u = 2\ ,t = 4$ وبما أن المستقيمين متقاطعان، تتحقق المعادلة (3) أيضًا عند $u=2\ ,t=4$ ويكون: $p=-2$ وتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي $M(4,14,-4)$
18	العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه (نظرية)، والنقطة M (نقطة تقاطع l_1، وl_2) هي نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$.  $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}$ $= \langle 9,-1,-14\rangle + 2(\langle 4,14,-4\rangle - \langle 9,-1,-14\rangle)$ $= \langle 9,-1,-14\rangle + 2\langle -5,15,10\rangle$ $= \langle -1,29,6\rangle$

19	$\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at \rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle -19+t+2, 14-3t-5, -5+at-8 \rangle$ $= \langle -17+t, 9-3t, -13+at \rangle$ $\overrightarrow{TF} \perp l \Rightarrow \langle -17+t, 9-3t, -13+ta \rangle \cdot \langle 1, -3, a \rangle = 0$ $\Rightarrow -17+t-3(9-3t)+a(-13+at) = 0$ $\Rightarrow -17+t-27+9t-13a+a^2t = 0$ $\Rightarrow (10+a^2)t = 13a+44$ $\Rightarrow t = \dfrac{13a+44}{10+a^2}$
20	$\dfrac{13a+44}{10+a^2} = 5 \Rightarrow 5a^2+50 = 13a+44$ $\Rightarrow 5a^2-13a+6 = 0 \Rightarrow (5a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{5}, a = 2$ $a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+10 \rangle = \langle -14, -1, 5 \rangle$ $a = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+3 \rangle = \langle -14, -1, -2 \rangle$
21	متجه الموقع لأي نقطة على المستقيم l هو: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle$ تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle = \langle -4, 5, -1 \rangle$ $\Rightarrow 3+7u = -4 \quad , \quad -2-7u = 5 \quad , \quad 4+5u = -1$ $\Rightarrow u = -1 \quad , \quad u = -1 \quad , \quad u = -1$ إذن، C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u = -1$ في معادلته المتجهة.
22	$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5-(-2), 6-4 \rangle = \langle -2, -3, 2 \rangle$ $\Rightarrow \mathbf{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 2 \rangle$ هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب.

23	$\overrightarrow{OD}=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD}=\langle 3-2t+4,-2-3t-5,4+2t+1\rangle=\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$ $\angle CDA$ قائمة، فإن $\overline{CD}\perp\overline{AD}$ وهذا يعني أنّ $\overline{CD}$ يعامد $\overleftrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$. $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}\perp\overline{CD}\Rightarrow\langle -2,-3,2\rangle\cdot\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle=0$ $\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t)=0$ $\Rightarrow -14+4t+21+9t+10+4t=0$ $\Rightarrow 17t=-17\Rightarrow t=-1$ $\overrightarrow{OD}=\langle 3+2,-2+3,4-2\rangle=\langle 5,1,2\rangle$ $\Rightarrow D(5,1,2)$
24	اتجاه المستقيم الأول l_1: $\langle 2,-1,-2\rangle$ اتجاه المستقيم الثاني l_2: $\langle 1,-2,2\rangle$ المستقيمان متعامدان لأن: $\langle 2,-1,-2\rangle\cdot\langle 1,-2,2\rangle=2(1)-1(-2)-2(2)=0$
25	يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t, u تحقق: $\langle 8+2t,2-t,-2t\rangle=\langle -9+u,21-2u,-4+2u\rangle$ $8+2t=-9+u\Rightarrow 2t-u=-17$ ……………………(1) $2-t=21-2u\Rightarrow 2u-t=19$ ……………………(2) $-2t=-4+2u\Rightarrow 2u+2t=4$ ……………………(3) $(3)-(1): 3u=21\Rightarrow u=7,\quad t=-5$ نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم: $2(7)-(-5)=19$ ✓ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونجد نقطة التقاطع بتعويض $u=7$ في معادلة l_2: $\vec{\mathbf{r}}=\langle -9+7,21-14,-4+14\rangle=\langle -2,7,10\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $E(-2,7,10)$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة، نجد أن النقطة المعطاة A تقع على المستقيم l_2 عندما $u = 4$ ، فإن نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة منتصف قطري المربع.



لتكن $C(x,y,z)$

إذن، $\left(\frac{x-5}{2}, \frac{y+13}{2}, \frac{z+4}{2}\right) = (-2,7,10)$

$$\Rightarrow x = 1, y = 1, z = 16 \Rightarrow C(1,1,16)$$

ويقع الرأسان B, D على المستقيم l_1 ويبعدان عن النقطة $E(-2,7,10)$ مسافة تساوي مقدار المتجه $\overrightarrow{AE}$

حيث:

$$\overrightarrow{AE} = \langle -2-(-5), 7-13, 10-4 \rangle = \langle 3,-6,6 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$$

26

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB}$$

حيث $\overrightarrow{EB}$ متجه طوله 9 وحدات باتجاه l_1 ، وينتج من ضرب متجه الوحدة في اتجاه l_1 بالعدد 9 ، فإذا كان $\hat{\mathbf{v}}$ متجه الوحدة في اتجاه l_1، فإنّ:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \langle 2,-1,-2 \rangle = \langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB} = \langle -2,7,10 \rangle + 9 \langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \rangle = \langle 4,4,4 \rangle$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = \langle -2,7,10 \rangle - 9 \langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \rangle = \langle -8,10,16 \rangle$$

إذن، إحداثيات الرأسين B, D هي:

$B(4,4,4), D(-8,10,16)$ ، أو بالعكس: $D(4,4,4), B(-8,10,16)$.

إجابات كتاب التمارين للصف الثاني عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة السادسة: الإحصاء والاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد التوافيق صفحة 30
1	$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$
2	$\binom{50}{1} = \frac{50!}{1!\,49!} = 50$
3	$\binom{100}{99} = \frac{100!}{99!\,1!} = 100$
4	$\binom{1000}{0} = \frac{1000!}{0!\,1000!} = 1$
5	$\binom{20}{20} = \frac{20!}{20!\,0!} = 1$
	إيجاد التباديل صفحة 30
6	$P(10,9) = \frac{10!}{1!} = 10!$
7	$P(8,0) = \frac{8!}{8!} = 1$
8	$P(7,7) = \frac{7!}{0!} = 7! = 5040$
9	$P(6,1) = \frac{6!}{5!} = \frac{6(5!)}{5!} = 6$
10	$P(5,2) = \frac{5!}{3!} = \frac{5(4)3!}{3!} = 20$

المتغيرات العشوائية، وتوزيعها الاحتمالي صفحة 31

11

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(X = 0) = P(TTTT) = \frac{1}{16}$

$P(X = 1) = P(\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X = 2) = P(\{TTHH, THHT, HTHT, HTTH, THTH, HHTT\}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(X = 3) = P(\{THHH, HHHT, HTHH, HHTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X = 4) = P(HHHH) = \frac{1}{16}$

X	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

12

$X \in \{1, 2, 3\}$

$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{7}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{4}{7}$, $P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{2}{7}$

X	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

13

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(X = 0) = P(\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X = 1) = P(\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\})$
$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(X = 2) = P(\{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\})$
$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(X = 3) = P(\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X = 4) = P(\{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(X = 5) = P(\{(1,6), (6,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لمجموعة من المشاهدات صفحة 32

14

$\mu = \frac{1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 - 1 - 5 + 3}{10} = 1.4$

$\sum x^2 = 92$

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{92}{10} - 1.96 = 7.24$

$\sigma = \sqrt{7.24} \approx 2.7$

15

$\mu = \frac{-2 - 3 - 4 + 5 + 2 + 1 + 4 + 5}{8} = 1$

$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n} = \frac{9 + 16 + 25 + 16 + 1 + 0 + 9 + 16}{8} = 11.5$

$\sigma = \sqrt{11.5} \approx 3.4$

إيجاد التوقع، والتباين، والانحراف المعياري صفحة 33	
16	$E(x) = \sum xp(x) = -0.2$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.4) + 1(0.6) - (-0.2)^2 = 0.96$ $\sigma = \sqrt{0.96} \approx 0.98$
17	$\sum p(x) = 1 \Rightarrow 0.2 + 0.1 + 0.3 + k = 1 \Rightarrow k = 0.4$ $E(x) = \sum xp(x) = 1.9$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.1) + 4(0.3) + 9(0.4) - (1.9)^2 = 1.29$ $\sigma = \sqrt{1.29} \approx 1.14$

الدرس الأول: التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدين

1	$P(X=4)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{4096}\approx 0.084$
2	$P(X\le 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3=0.414$
3	$P(X\ge 2)=1-P(X<1)=1-P(X=1)$ $=1-\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$
4	$P(3\le X\le 7)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$ $=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^3+\left(\frac{7}{8}\right)^4+\left(\frac{7}{8}\right)^5+\left(\frac{7}{8}\right)^6\right)\approx 0.373$
5	$P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}=0.125$
6	$P(X>5)=1-P(X\le 4)\approx 1-0.414=0.586$
7	$P(1<X<3)=P(X=2)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{64}\approx 0.109$
8	$P(4<X\le 6)=P(X=5)+P(X=6)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5\approx 0.137$
9	$P(X=4)=\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1\approx 0.077$
10	$P(X\ge 5)=P(X=5)=\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\approx 0.010$
11	$P(X\le 3)=1-\left(P(X=4)+P(X=5)\right)$ $=1-\left(\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\right)\approx 0.913$
12	$P(3<X\le 5)=P(X=4)+P(X=5)$ $=\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\approx 0.087$
13	$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$ $=\binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2+\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0$ ≈ 0.317

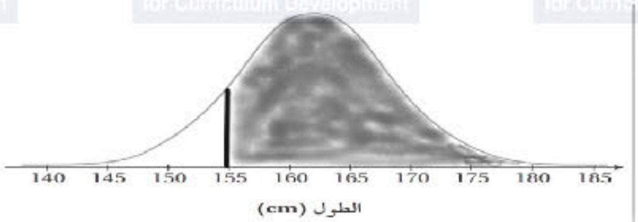
14	$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5+\binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4+\binom{5}{2}(0.4)^2(0.6)^3$ ≈ 0.683
15	$P(2\le X<5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\binom{5}{2}(0.4)^2(0.6)^3+\binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2+\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1$ ≈ 0.653
16	$P(5<X<8)=0$
17	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.45}=\frac{20}{9}\approx 2.22$
18	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}=2.5$
19	$E(X)=np=10(0.2)=2$ $Var(X)=\sigma^2=np(1-p)=10(0.2)(0.8)=1.6$
20	$E(X)=np=150(0.3)=45$ $Var(X)=\sigma^2=np(1-p)=150(0.3)(0.7)=31.5$
21	هذا الاحتمال يساوي احتمال أن السيارات الخمس الأولى جميعها لم تكن صفراء، وبالتالي: $P=(0.9)^5\approx 0.590$ و يمكن ملاحظة أن $X\sim Geo(0.1)$ حيث X عدد السيارات التي تمر حتى مرور أول سيارة صفراء، و يكون الاحتمال المطلوب هو: $P(X>5)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\right)$ $=1-0.1(1+0.9+(0.9)^2+(0.9)^3+(0.9)^4)\approx 0.590$
22	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-(0.1+0.1(0.9)+0.1(0.9)^2)=0.729$
23	ليكن X عدد الاهداف المسجلة في الرميات الـ 15 $\Longrightarrow X\sim B(15,0.1)$ $P(X=3)=\binom{15}{3}(0.1)^3(0.9)^{12}\approx 0.129$
24	ليكن X عدد الطلبة الذين سيحتاجون أوراقا إضافية ضمن الطلبة الثلاثين: $\Longrightarrow X\sim B\left(30,\frac{3}{5}\right)\Longrightarrow P(X=10)=\binom{30}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\approx 0.002$
25	$P(X=0)=\binom{30}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^{30}=\left(\frac{2}{5}\right)^{30}\approx 1.153\times 10^{-12}$

الدرس الثاني: التوزيع الطبيعي

1	$\mu_A = 15 > \mu_B = 12$ $\sigma_B > \sigma_A$ وذلك لأن قيم المتغير العشوائي في B أكثر انتشارًا من نظيراتها في المنحنى A
2	$P(0 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < 0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$
3	$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
4	$P(Z < z) = 0.638$ الاحتمال المعطى (0.638) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 0.35$
5	$P(Z > z) = 0.6$ الاحتمال المعطى (0.6) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6 \Rightarrow z \approx 0.25 \Rightarrow$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z \approx -0.25$
6	$P(0 < Z < z) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < 0) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.95$ الاحتمال المعطى (0.95) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z \approx 1.65$

7	$P(-z < Z < z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = 0.8$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9$ الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z \approx 1.28$
8	$P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35-30}{10}\right) = P(Z < 0.5) = 0.6915$
9	$P(X > 38.6) = P\left(Z > \frac{38.6-30}{10}\right) = P(Z > 0.86) = 1 - P(Z < 0.86)$ $= 1 - 0.8051 = 0.1949$
10	$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-30}{10}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0.8413$
11	$P(35 < X < 40) = P\left(\frac{35-30}{10} < Z < \frac{40-30}{10}\right) = P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$ $= 0.8413 - 0.6915 = 0.1498$
12	$P(15 < X < 32) = P\left(\frac{15-30}{10} < Z < \frac{32-30}{10}\right) = P(-1.5 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5) = P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 1.5))$ $= P(Z < 0.2) + P(Z < 1.5) - 1 = 0.5793 + 0.9332 - 1 = 0.5125$
13	$P(17 < X < 19) = P\left(\frac{17-30}{10} < Z < \frac{19-30}{10}\right) = P(-1.3 < Z < -1.1)$ $= P(Z < -1.1) - P(Z < -1.3) = 1 - P(Z < 1.1) - (1 - P(Z < 1.3))$ $= P(Z < 1.3) - P(Z < 1.1) = 0.9032 - 0.8643 = 0.0389$

14	$P(X < x) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.3$ الاحتمال المعطى (0.3) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7$ $\Rightarrow z = 0.52$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z \approx -0.52$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} \approx -0.52 \Rightarrow x \approx 24.8$
15	$P(X > x) = 0.6915 \Rightarrow P(Z > z) = 0.6915$ الاحتمال المعطى (0.6915) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6915 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6915 \Rightarrow z = 0.5$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.5$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = -0.5 \Rightarrow x = 25$
16	$P(X < x) = 0.7516 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7516$ الاحتمال المعطى (0.7516) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z \approx 0.68$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} \approx 0.68 \Rightarrow x \approx 36.8$
17	$P(X > x) = 0.05 \Rightarrow P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z > z) = 0.05 \Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.05 = 0.95$ $\Rightarrow z \approx 1.65$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} \approx 1.65 \Rightarrow x \approx 46.5$

18	$P(X > 1020) \Rightarrow P\left(Z > \frac{1020-1000}{10}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تزيد كتلتها عن 1020 kg هي 2.28%
19	$P(990 < X < 1010) \Rightarrow P\left(\frac{990-1000}{10} < Z > \frac{1010-1000}{10}\right)$ $= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$ $= 2P(Z < 1) - 1 = 0.6826$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح كتلتها بين 990 kg ، و 1010 kg هي 68.26%
20	$P(X < 1020) = P\left(Z < \frac{1020-1000}{10}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$ إذن، النسبة المئوية للحاويات الصالحة للشحن هي 97.72%
21	
22	$P(X > 155) \Rightarrow P\left(Z > \frac{155-162}{6.3}\right) \approx P(Z > -1.11) = P(Z < 1.11)$ $= 0.8665$
23	$P(X > 169) \Rightarrow P\left(Z > \frac{169-162}{6.3}\right) \approx P(Z > 1.11) = 1 - 0.8665$ $= 0.1335$

24

تتنوع الإجابات لوجود عدد لانهائي من الفترات $[z_1, z_2]$ والتي يقع ضمنها النسبة المعطاة من الطالبات.

هذه بعض الإجابات المحتملة:

- نختار البحث عن فترة على الشكل $[-1, z_2]$ بحيث: $P(-1 < Z < z) = 0.5$

$$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -1) = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) - \left(1 - P(Z < 1)\right) = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) - 1 = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) = 1.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + 0.8413 = 1.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) = 0.6587$$
$$\Rightarrow z = 0.4$$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1, 0.4]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1 \Rightarrow x_1 = 155.7$$
$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.4 \Rightarrow x_2 = 164.52$$

إذن، الفترة $[155.7, 164.52]$ من الأطوال تحوي 50% من الطالبات.

- نختار أيضًا الحل السهل $Z > 0$ والذي يشمل 50% من البيانات، أي الفترة $Z \in [0, \infty)$

وفي قيم X (الأطوال)، هذا يعني الفترة $[162, \infty)$cm

وبما أن المساحات عندما $Z > 3.4$ صغيرة جدًا، ويمكن إهمالها كما يظهر في الجدول، فإنه يمكن اعتبار أن 50% من الطالبات تقع أطوالهن ضمن الفترة $[162, 183.42]$ cm من الأطوال.

- أو يمكننا أن نأخذ أي مساحتين على يمين محور التماثل وعلى يساره يكون مجموعهما يساوي 0.5 كما هو مبين في الرسم الآتي:

$$P(Z < z_2) = 0.6554 \Rightarrow z_2 = 0.4$$
$$\Rightarrow x_2 = 0.4(6.3) + 162$$
$$= 164.52$$

$$P(Z > z_1) = 1 - 0.1554 = 0.8446$$
$$\Rightarrow z_1 = -1.01 \Rightarrow x_1 = -1.1(6.3) + 162 = 155.64$$

إذن، إحدى الفترات التي تقع ضمنها أطوال 50% من الطالبات هي: $(155.64, 164.52)$

25

نختار أولًا البحث عن فترة من الشكل $[-2, z]$ حيث: $P(-2 < Z < z) = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -2) = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) - \left(1 - P(Z < 2)\right) = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 2) - 1 = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 2) = 1.815$

$\Rightarrow P(Z < z) + 0.9772 = 1.815$

$\Rightarrow P(Z < z) = 0.8387$

$\Rightarrow z = 0.99$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-2, 0.99]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -2 \Rightarrow x_1 = 149.4$$

$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.99 \Rightarrow x_2 = 168.23$$

إذن، الفترة $[149.4, 168.23]$ من الأطوال تحوي 81.5% من الطالبات.

نختار أيضًا البحث عن فترة على الشكل $[-z, z]$ بحيث $P(-z < Z < z) = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) - \left(1 - P(Z < z)\right) = 0.815$

$\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.815$

$\Rightarrow P(Z < z) = 0.9075$

$\Rightarrow z = 1.32$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1.32, 1.32]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1.32 \Rightarrow x_1 = 153.684 \approx 153.7$$

$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 1.32 \Rightarrow x_2 = 170.316 \approx 170.3$$

إذن، الفترة $[153.7, 170.3]$ من الأطوال تحوي تقريبًا 81.5% من الطالبات.