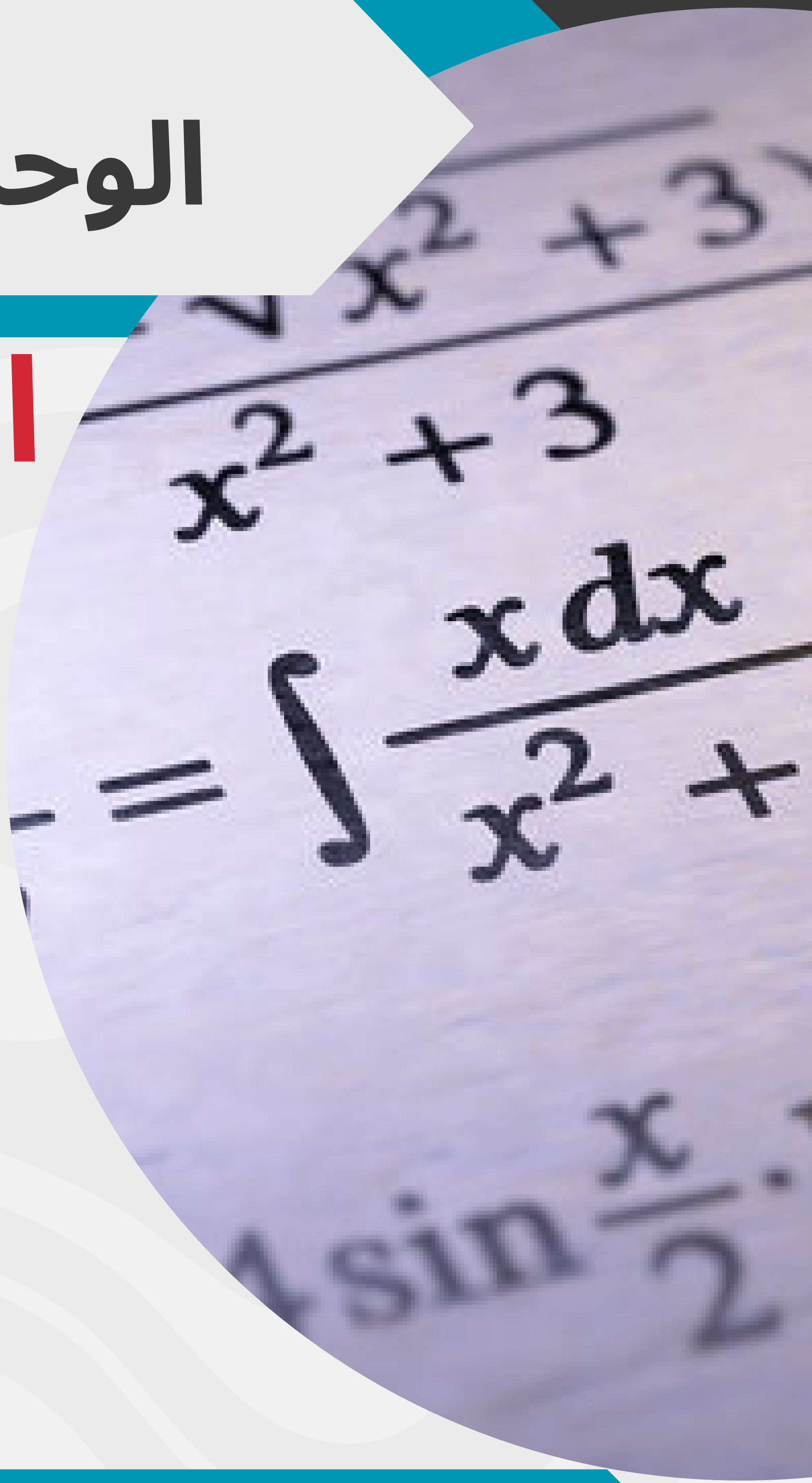
2023

الوحدة الرابعة

التكامل



أ.عماد مسك

الفرع الأدبي

تشمل :

- شرح كامل الكتاب
- امثلة محلول
- تمارين إضافية

للتواصل 0795153669

الاقتران الأصلي $F(x)$:

تعلمت سابقاً أنه إذا كان الاقتران معلوماً فإنه يمكن إيجاد مشتقته باستعمال قواعد الإشتقاق، ولكن إذا كانت المشتقة معلومة فيمكن استعمال طريقة عكسية لإيجاد الاقتران الأصلي $F(x)$ مثلاً إذا كان $f(x) = 4x^3$ فإن الاقتران $F(x) = x^4$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ ويمكن إيجاد أكثر من اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ مثل:

$$x^4 + 1 \,,\, x^4 - 5 \,,\, x^4 + 10, \ldots\ldots$$

مفهوم أساسي:

إذا كان $F(x)$ إقتراناً أصلياً للإقتران المتصل $f(x)$ فإن أي اقتران متصل آخر للاقتران $f(x)$ يكتب في صورة

$$G(x) = F(x) + c$$

حيث c: ثابت

وبالتالي فإن مشتقة الاقتران الأصلي تعطي الاقتران $f(x)$

$$f(x) = \frac{d}{d(x)}(F(x) + c)$$

يمكن التعبير عن المعادلة السابقة دون استعمال رمز المشتقة كالآتي:

التكامل غير المحدود:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

مثال:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 9\, dx =$

الحل:

$$\int 9\, dx = 9x + C$$

2) $\int x^{10}\, dx =$

الحل:

$$\int x^{10}\, dx = \frac{1}{10+1} x^{10+1} + C$$
$$\frac{1}{11} x^{11} + C$$

3) $\int \sqrt{x}\, dx =$

الحل:

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$4)\ \int \frac{1}{x^3}\, dx =$$

الحل:

$$\int x^{-3} dx$$

$$= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

مفهوم أساسي:

إذا كان k, n عدداً حقيقياً فإن:

$$1)\ \int k\, dx = kx + c$$

$$2)\ \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$
$$n \neq -1$$

$$3)\ \int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

$$4)\ \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx$$
$$= \int f(x)\, dx$$
$$\pm \int g(x)\, dx$$

مثال:

أجد كلاً ممن التكاملين الآتيين:

$$1)\quad \int (\boldsymbol{6x^2 + 2x})\, \boldsymbol{dx} =$$

الحل:

$$= 6 \int x^2\, dx\ + 2 \int x\, dx$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

$$= 2x^3 + x^2 + C$$

$$2)\quad \int \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} - \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x^5}}\right) \boldsymbol{dx} =$$

الحل:

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx - 3 \int \frac{1}{x^5}\, dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx - 3 \int x^{-5}\, dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}\, dx - 3\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right) + C$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$

مثال:

أجد كلاً من التكاملات التالية:

$$1)\quad \int (\boldsymbol{x+2})(\boldsymbol{x-2})\, \boldsymbol{dx} =$$

الحل:

$$\int (x^2 - 4)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

2) $\int \frac{8x^3+5x}{x}\, dx =$

الحل:

$$= \int \left(\frac{8x^3}{x} + \frac{5x}{x}\right) dx$$

$$\int (8x^2 + 5)dx$$

$$\frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

3) $\int \boldsymbol{x(x^2 + \frac{2}{x})\, dx} =$

الحل:

$$\int (x^3 + 2)dx$$

$$\frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

اتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$a) \int 6\, dx =$

$b) \int x^8\, dx =$

$c) \int \sqrt[3]{x}\, dx =$

$d) \int \frac{1}{x^5}\, dx =$

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

أتحقق من فهمي:

جد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$a)\ \int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right) dx =$$

$$b)\ \int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx =$$

أتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$a)\ \int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}\, dx =$$

$$b)\ \int (3x+2)(x-1)dx =$$

$$c)\ \int x(x^3 - 7)\, dx =$$

تمارين وتدريبات على الدرس

جد كلاً من التكاملات الآتية

$$1)\quad \int 4\, dx =$$

2) $\int \frac{-3}{2}\, dx =$

3) $\int 2x^3\ dx =$

4) $\int \frac{1}{2} x^6\, dx =$

5) $\int 2x^{-3}\, dx =$

6) $\int \frac{5}{x^3}\, dx =$

7) $\int 3\sqrt{x}\, dx =$

8) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx =$

9) $\int \frac{-2}{\sqrt[3]{x}}\, dx =$

10) $\int (3x^2 - 2x + 9)\, dx =$

11) $\int (x+1)(x^3 - 2)\, dx =$

12) $\int \frac{8x^4 - 3x^2}{x}\, dx =$

13) $\int \sqrt{x}\,(x^3 + 2x)dx =$

14) $\int \frac{5}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx =$

15) $\int \frac{x^2-9}{x+3}\, dx =$

16) $\int (x+5)^2\, dx =$

17) $\int \frac{x^3-8}{x-2}\, dx =$

18) $\int \frac{5x^4-x^2+1}{x^2}\, dx =$

19) $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\, dx =$

20) $\int (2x^{-3} + 4x^{-2} + 9)\, dx =$

21) $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt{x^3}}\right) dx =$

22) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx =$

23) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx =$

24) $\int \frac{x^2-5x+6}{x-3}\, dx =$

25) $\int (x+1)(x+2)(x+3)\, dx =$

26) $\int (\frac{5}{x^2} + \frac{x^2}{5})\, dx =$

27) 27) $\int (\frac{\sqrt{x+3}}{x^2})^2\, dx =$

تمارين إضافية:

جد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (3x-1)(x^2-4)\, dx =$

2) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\, dx =$

3) $\int \frac{5x^3-x^2-x}{x}\, dx =$

4) $\int (3x^{-2} + \frac{x^5}{2} + 9)\, dx =$

5) $\int \left(3x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{4x}\right) dx =$

6) $\int \sqrt[3]{x}(x+1)dx =$

7) $\int \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} - \sqrt{2}\right) dx =$

8) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)^3 dx =$

9) $\int \frac{x^3-27}{x-3}\, dx =$

10) $\int (x-4)^2\, dx =$

اختبار ذاتي:

أجد كلًا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{2}{x^3} - 3\sqrt{x}\right) dx$

2) $\int (6x^2 - 4x)\, dx$

3) $\int \left(\frac{7}{x^2} + \sqrt[3]{x^4}\right) dx$

4) $\int \left(x^{-2} + x^{\frac{5}{2}}\right) dx$

5) $\int \left(3x^{-2} + 6x^{-\frac{1}{2}} + x - 4\right) dx$

6) $\int (4x + 2) dx$

7) $\int \left(3x^6 - \frac{2}{x^2}\right) dx$

8) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

9) $\int (10x^4 + 8x^{-3}) dx$

10) $\int 2x^{-4}\, dx$

11) $\int \left(8x^3 + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

12) $\int (3 - x - 2x^5) dx$

13) $\int \frac{x^2-1}{x^2}\, dx$

14) $\int x^2(1 - x^3) dx$

15) $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\, dx$

16) $\int (x-5)(x+5) dx$

21) $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2} dx$

22) $\int x\sqrt{x}\, dx$

23) $\int (x+4)^2 dx$

24) $\int x(x+1)^2 dx$

17) $\int \frac{4-x^2}{2+x} dx$

18) $\int \frac{5-x}{x^5} dx$

19) $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}} dx$

20) $\int \frac{x^2-1}{x-1} dx$

الشرط الأولي:

هو نقطة تعطي في المسألة وتحقق الاقتران الأصلي والهدف منها تحديد قيمة ثابت التكامل C وبالتالي الحصول على الاقتران الأصلي الوحيد الذي يحققها.

مثال:

جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ويمر منحناه بالنقطة (1,3).

تذكر:

للاقتران $f(x)$ عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية التي يمكن التعبير عنها بالصورة الآتية

$$f(x) = F'(x) \text{ حيث } G(x) = F(x) + C$$

مثال:

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومر منحناه بالنقطة (2,4).

الحل:

أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)dx$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

- أجد قيمة الثابت C.

لإيجاد قيمة الثابت C، أستعمل الشرط الأولي المعطى في المسألة، وهو النقطة (2,4) التي يمر بها منحنى الاقتران، وتحقق قاعدة الاقتران؛ إي أعوض $x = 2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحل المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

$$4 = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + C$$

$$C = -6$$

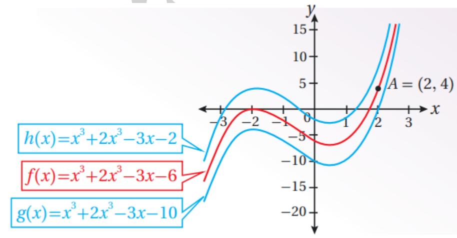
إذن، قاعدة الاقتران هي:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

توضيح

يبين التمثيل البياني المجاور أن الاقتران الأصلي الوحيد الذي يحقق الشرط الأولي في المسألة هو:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 6$$



الشرط الأولي: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المهمة على الشرط الأولي، إيجاد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم إذا علم اقتران السرعة المتجهة.

اتحقق من فهمي:

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومرَّ منحناه بالنقطة (1,9).

مثال من الحياة:

التكلفة الحِدية: يمثل الاقتران $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة ملونة تنتجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأن تكلفة إنتاج طابعة واحدة *JD 583*.

تذكر:

تمثل التكلفة الحدِّية مشتقة اقتران التكلفة، وترتبط بالتكاليف التي تتغير بتغير مستويات الإنتاج، خلافاً للتكلفة الثابتة التي لا تتغير بتغير مستويات الإنتاج.

الحل:

$$C(x) = \int (3x^2 - -60x + 400)\, dx$$

$$= x^3 - 30x^2 + 400x + K$$

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + K$$

$$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400(1) + K$$

$$K = 212$$

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$$

أتعلم

بما أن C يمثل اقتران التكلفة، فإنني أستعمل K للتعبير عن ثابت التكامل.

اتحقق من فهمي:

التكلفة الحدِّية: يمثل الاقتران التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأن تكلفة إنتاج 10 قطع هي $2200\ JD$.

مثال:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، وسرعته v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $11m$، فأجد موقع الجسيم بعد 8 ثوانٍ من بدء الحركة.

تذكر:

اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة المتجهة، واقتران السرعة المتجهة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع، أي أن:

$$\boldsymbol{s'(t) = v(t)}$$

$$\boldsymbol{v'(t) = a(t)}$$

الحل:

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (t+2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

$$11 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C$$

$$C = 11$$

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$$

$$s(8) = \frac{1}{2}(8)^2 + 2(8) + 11$$

$$= 59$$

اتحقق من فهمي:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

مثال:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4m$، وكانت سرعته المتجهة $1m/s$ بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

تذكر:

يرمز إلى ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع بالرمز C_1؛ نظرًا إلى وجود ثابت تكامل آخر سينتج من تكامل اقتران السرعة المتجهة.

الحل:

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$= \int 6t\, dt$$

$$= 3t^2 + C_1$$

$$v(t) = 3t^2 + C_1$$

$$1 = 3(1)^2 + C_1$$

$$C_1 = -2$$

$$v(t) = 3t^2 - 2$$

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int (3t^2 - 2)\ dt$$

$$= t^3 - 2t + C_2$$

$$s(t) = t^3 - 2t + C_2$$

$$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$$

$$C_2 = 4$$

$$s(t) = t^3 - 2t + 4$$

$$s(2) = (2)^3 - 2(2) + 4$$

$$= 8$$

أتحقق من فهمي:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 6t$ إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو$5m$، وكانت سرعته المتجهة $2m/s$. جد موقع الجسيم بعد مرور3 ثواني.

أتحقق من فهمي:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، بحيث: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان موقع الجسم الابتدائي هو $7m$، جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة.

تمارين وتدريبات على الدرس

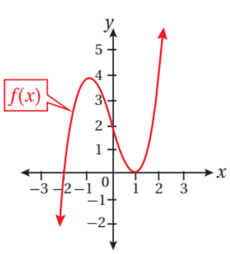
1) التكلفة الحدِّية: يمثل الاقتران:
$C'(x) = 0.3x^2 + 2x$، التكلفة الحدّية (بالدينار) لكل قطعة تنتج في إحدى الشركات حيث: x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج: x قطعة بالدينار أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علماً بأن تكلفة الإنتاج *10* قطع هي $2200\,JD$.

2) أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان:
$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - x$، و يمر منحناه بالنقطة *(4,0)*.

3) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $(3x-1)(x+5)$ جد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة *(2,-3)*.

4) أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان:
$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2$ ، و يمر منحناه بالنقطة *(4,11)*.

5) يبين الشكل المجاور الاقتران $f(x)$ حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$، أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



6) يتحرك جسيم في مسار، و تعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $V(t) = t + 2$ ، حيث: حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $11m$، فأجد موقع الجسيم بعد 8 ثواني من بدء الحركة.

7) عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قطره y سنتيميترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dx} = 4t^{\frac{-2}{3}}$ ، و كان نصف قطر البالون بعد 8 ثوان من بدء نفخه 30 cm فأجد كل مما يأتي:

أ) قاعدة العلاقة y بدلالة t.

ب) نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

8) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو $\frac{2x^2-5x}{x}$، جد قاعدة العلاقة y علمًا بأن منحناها يمر بالنقطة (-1,5).

9) يتحرك جسيم في مسار، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $V(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

10) **التكلفة الحِّدية: يمثل الاقتران** $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ **التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة ملونة تنتجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأن تكلفة إنتاج طابعة واحدة** ***JD 583.***

11) **إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة** ***y*** **هو:** $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$**، فأجد قاعدة العلاقة** ***y*****، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة** ***(0,5)*****.**

12) **في دراسة تناولت نوعًا معينًا من الأشجار، تبين أن ارتفاع هذه الأشجار يتغير بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:** $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$**، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة، إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو $2ft$، فأجد $h(x)$.**

13) **أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان:** $f'^{(x)} = (x+2)^2$ **، و يمر منحناه بالنقطة** ***(1,7)*****.**

15) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و يعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = -12$ ، حيث t الزمن بالثواني. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو$3m$، وكانت سرعته المتجهة بعد مرور 2 ثانية $-20m/s$ ، جد موقع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

16) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو $f'(x) = \frac{x^2+10}{x^2}$، فأجد قاعدة العلاقة $f(x)$ علمًا بأن منحناها يمر بالنقطة (5,2).

اختبار ذاتي:

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران$f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران$f(x)$.

1) $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$

2) $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

3) $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

4) $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

5) $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$

6) $f'(x) = -\frac{10}{x^2}; (1, 15)$

7) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x) = \sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة *(9,25)*.

8) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة *y* هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$، فأجد قاعدة العلاقة *y*، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة *(2,4)*.

9) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة *y* هو: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$ ، و مرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مبررًا إجابتي.

10) الإيراد الحدِّي: يمثل الاقتران $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من منتجات إحدى الشركات حيث x عدد القطع المبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

إرشاد: يمثل الاقتران الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

11) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و تعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين **من بدء الحركة.**

12) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و يعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$ ، حيث: t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $27m/s$ ، فأجد موقع الجسيم بعد3 ثوانٍ من بدء الحركة.

الدرس الثالث: التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلاً على الفترة $[a,b]$، وكان $F(x)$ يمثل أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإن التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

يمكن التعبير عن الفرق: $F(b) - F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

خطوات الحل:

1) كامل عادي لإيجاد $F(x)$.

2) $F(x)\Big|_a^b$ (للتعبير عن الفرق -).

3) $F(b) - F(a)$ (قوسين بيناتهم طرح).

مثال:

جد قيمة التكاملات التالية:

$$1)\ \int_0^1 (2x-5)\,dx$$

الحل:

$$x^2 - 5x\Big|_2^1$$

$$\left(1^2 - 5(1)\right) - \left(0^2 - 5(0)\right)$$

تعويض ال 1   تعويض ال 0

$$(-4) - (0) = -4$$

$$2)\ \int_{-1}^2 (1-5x^2)(1+5x^2)\,dx$$

الحل:

بالتوزيع:

$$\int_{-1}^2 (1 - 5x^2 + 5x^2 - 25x^4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^2 (1 - 25x^4)\,dx$$

$$= x - 5x^5\Big|_{-1}^{\,2}$$

$$= \left((2) - 5(2)^5\right) - \left(-1 - 5(-1^5)\right)$$

$$= (-158) - (4) = -162$$

3) $\int_{1}^{4} (8x - \sqrt{x})dx$

الحل:

$$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}\right)\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1^3}\right)\right)$$

$$= \left(64 - \frac{2}{3} \times 8\right) - \left(4 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(64 - \frac{16}{3}\right) - \left(4 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{176}{3} - \frac{10}{3} = \frac{166}{3}$$

4) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

الحل:

$$x^3 + 2x^2 + 3x \Big|_0^2$$

$$= (2^3 + 2(2)^2 + 3(2)) - (0^3 + 2(0)^2 + 3(0))$$

$$= (22) - (0) = 22$$

أمثلة:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2$

2) $\int_{1}^{4} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

3) $\int_{-3}^{-2} 6\, dx$

4) $\int_{3}^{6} (x - \frac{3}{x})^2\, dx$

5) $\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

6) $\int_0^6 x(6 - x)\, dx$

7) $\int_1^8 8\sqrt[3]{x}\, dx$

8) $\int_1^6 \left(6x - \frac{12}{x^4} + 3\right) dx$

9) $\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

10) $\int_1^3 \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2}\, dx$

11) $\int_{-2}^3 (-x^2 + x - 5)\, dx$

12) $\int_1^4 x^3(\sqrt{x} + \frac{1}{x})\, dx$

13) $\int_1^3 (x - 2)(x + 2)\, dx$

14) $\int_1^8 (x^{1/3} - x^{1/5})\, dx$

15) $\int_{-3}^3 (9 - x^2)\, dx$

16) $\int_{0}^{2}(2x^3-4x+5)\,dx$

17) $\int_{1}^{5}10x^{-2}\,dx$

18) $\int_{3}^{4}(6x^2-4x)dx$

19) $\int_{1}^{2}\frac{x^2+x^3}{x}dx$

20) $\int_{10}^{10}\frac{x+1}{x^2}dx$

مثال:

جد قيمة المجهول بما يلي:

1) إذا كان $\int_1^3 2a\ dx = 4$ جد a:

الحل:

نكامل وثم نساوي الناتج ب 4 ليصبح معادلة بدلالة a نحلها....

$\rightarrow 2ax\Big|_1^3 = 4$

$\big(2a(3)\big)-\big(2a(1)\big)=4$

$6a-2a=4$

$\frac{4a}{4}=\frac{4}{4}\rightarrow a=1$

2) إذا كان $\int_1^2(2ax+3)\,dx = 7$ جد a

الحل:

$\rightarrow \frac{2a}{2}x^2+3x\Big|_1^2 = 7$

$\big(a(4)+6\big)-\big(a(1)+3\big)=7$

$4a+6-a-3=7$

$3a-3=7\rightarrow 3a=10$

$a=\frac{10}{3}$

الدرس الثالث: التكامل المحدود

3) إذا كان $\int_2^3 (2x - a)\, dx = 3$ جد a

الحل:

$$x^2 - ax \Big|_2^3 = 3$$

$$(9 - 3a) - (4 - 2a) = 3$$

$$9 - 3a - 4 + 2a = 3$$

$$5 - a = 3 \rightarrow a = 2$$

اتحقق من فهمي:

1) إذا كان $\int_0^k 6x^2\ dx = 2$ ، فاجد قيمة الثابت k

2) إذا كان $\int_1^m (6x - 10)\ dx = 4$ ، فاجد قيمة الثابت m

3) إذا كان $\int_0^g 8\ dx = 4$ ، فاجد قيمة الثابت g

أمثلة:

1) إذا كان: $\int_{-2}^b 8\ dx = 24$ ، فأجد قيمة الثابت b

2) إذا كان: $\int_1^5 k\ dx = -8$ ، فأجد قيمة الثابت k

3) إذا كان: $\int_0^a 3x^2\ dx = -35$ ، فأجد قيمة الثابت a

4) إذا كان: $\int_0^{a+1} 2\ dx = 2$ ، فأجد قيمة الثابت a

5) إذا كان: $\int_1^g 5\ dx = \int_3^4 7\ dx$ ، فأجد قيمة الثابت g

6) إذا كان: $\int_1^7 2k\ dx = 24$ ، فأجد قيمة الثابت k

خواص التكامل المحدود

أ- الخاصية الأولى: خاصية الثابت.

$$\int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)\ dx$$

وتذكر أيضاً أن التكامل يوزع على الجمع والطرح.

مثال:

إذا كان $\int_2^{10} f(x)\ dx = 3$ فإن قيمة $\int_2^{10} 6f(x)\ dx$ تساوي:

$a)\ 6 \qquad b)\ 18 \qquad c)\ 3 \qquad d)9$

الحل:

المطلوب ← $\int_2^{10} 6f(x)\ dx$

$$= 6\int_2^{10} f(x)\ dx = 6\times 3 = 18$$

مثال:

إذا كان

$$\int_{-2}^3 9g(x)\ dx = 4, \int_{-2}^3 f(x)\ dx = -1$$

جد $\int_{-2}^3 (2f(x) + g(x))\ dx$

الحل:

المطلوب ← (توزيع)

$$\int_{-2}^3 2f(x)\,dx + \int_{-2}^3 g(x)\ dx$$

$$2\int_{-2}^3 f(x)\ dx + \int_{-2}^3 g(x)\ dx$$

$$2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$$

ب- الخاصية الثانية: خاصية قلب الحدود.

احسب قيمة $\int_1^4 2x\ dx$ واحسب $\int_4^1 2x\ dx$

ماذا تلاحظ؟

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

مثال:

إذا كان $\int_4^5 f(x)\ dx = 6$ فإن

$= \int_5^4 f(x)\ dx$

$a)\ 6 \qquad b)-6 \qquad c)\ 5 \qquad d)4$

الحل:

$\int_5^4 f(x)\ dx = -6$

مثال:

إذا كان:

فإن $\int_{-5}^{6} g(x)\ dx = -2$

$= \int_6^{-5} \frac{3}{2} g(x)\ dx$

$a)\ 2 \qquad b)-2 \qquad c)\ 3 \qquad d)-3$

الحل:

المطلوب: $\frac{3}{2}\int_6^{-5} g(x)\ dx$

$\frac{3}{2} \times 2 = 3$

مثال:

إذا كان

$\int_2^0 g(x)\ dx = 2, \int_0^2 f(x)\ dx = 4$

جد ما يلي:

$$1)\ \int_0^2 (g(x) + 3f(x))\,dx$$

$$2)\ \int_2^0 \left(2g(x) - \frac{f(x)}{4}\right) dx$$

الحل:

$$1)\ \int_0^2 g(x)\,dx + \int_0^2 3f(x)\,dx$$

$$= -2 + 3\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= -2 + 3 \times 4$$

$$= -2 + 12 = 10$$

$$2)\ \int_2^0 2g(x)\,dx - \int_2^0 \frac{f(x)}{4}\,dx$$

$$= 2\int_2^0 g(x)\,dx - \frac{1}{4}\int_2^0 f(x)\,dx$$

$$= 2\times 2 - \frac{1}{4}\times -4$$

$$= 4 + \frac{4}{4} = 4 + 1 = 5$$

ج- الخاصية الثالثة: خاصية تساوي الحدود.

احسب قيمة $\int_3^3 2x\ dx$. ماذا تلاحظ؟

$$\rightarrow \int_a^a \boldsymbol{f(x)\ dx = 0}$$

مثال:

- **قيمة التكامل** $\int_1^1 \left(\frac{2x^3-6x}{x\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\right) dx$**:**

تساوي؟

$a)0$ $\quad b)1$ $\quad c)-1$ $\quad d)$غير ذلك

- **قيمة التكامل** $\int_{-3}^{-3} g(x)\ dx$**:**

$a)-3$ $\quad b)0$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)-1$

د- الخاصية الرابعة: خاصية الإضافة.

احسب قيمة $\int_1^2 2x\,dx$ واحسب $\int_2^3 2x\,dx$

واحسب $\int_1^3 2x\,dx$. ماذا تلاحظ؟

$$\int_a^c \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} + \int_b^c \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

مثال:

إذا كان

$\int_1^4 \boldsymbol{f(x)\,dx = 3}$ **وكان** $\int_4^5 \boldsymbol{f(x)\,dx = 7}$

فإن $\int_1^5 \boldsymbol{f(x)\,dx}$ **يساوي:**

$a)\ 10$ $\quad b)4$ $\quad c)-4$ $\quad d)-10$

الحل:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx$$

$$= 3 + 7 = 10$$

مثال:

إذا كان

$\int_3^8 f(x)\,dx = 9, \int_3^5 f(x)\,dx = 6$ **فإن**

$\int_5^8 f(x)\,dx$ **يساوي:**

$a)\ 15 \qquad b)3$

$c) -3 \qquad d) -15$

الحل:

$$\int_5^8 f(x)\,dx = \int_5^3 f(x)\,dx + \int_3^8 f(x)\,dx$$

$$= -6 + 9 = 3$$

أمثلة على خواص التكامل المحدود:

مثال:

إذا كان

$\int_0^5 g(x)\,dx = -4,$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10,$$

$$\int_5^7 f(x)\,dx = 3$$

فأجد كلاً مما يأتي:

1) $\int_0^5 \left(4f(x) + g(x)\right) dx$

الحل:

2) $\int_5^0 5g(x)\,dx$

الحل:

3) $\int_0^7 f(x)\,dx$

الحل:

مثال:

إذا كان $\int_4^1 f(x)\,dx = 2$,

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7,\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = 5$$

فأجد كلاً مما يأتي:

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(f(x) + 3h(x)\big)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_{1}^{-1} 4h(x)\,dx$

مثال:

1) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{5} (|x+3|-5)dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{7} |2x-1|\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-3}^{4} |x|\,dx$

أ. عماد مسك 0795153669

مسائل:

يمثل الاقتران $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) جهاز لوحي (iPad) تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المبيعة شهرياً، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهرياً بالدينار، أجد مقدار التغير في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 1000 جهاز.

الحل:

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\,dx$$

$$P(1100) - P(1000)$$

$$= \int_{1000}^{1100} 165 - 0.1x\,dx$$

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2) - (165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

$$= 6000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهرياً بمقدار JD 6000

مثال:

معتمداً المعلومات الوارد ذكرها في المثال (5)، أجد مقدار التغير الشهري في ارباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 1400 جهاز.

مثال:

تغير التكلفة: يمثل الاقتران:
$C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطعة تنتجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهرياً.

مثال:

تلوث: يلوث مصنع بحيرة بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من الملوثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغراماً من الملوثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

مثال:

سكان: أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يتغير شهرياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الشهر الثمانية القادمة.

مثال:

إذا كان: $\int_2^3 (x^2 - a)\, dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

مثال:

أثبت أن:

$$\int_0^1 x^n(1-x)\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

حيث $n > 0$

اختبار ذاتي:

1- إذا كان:

$\int_0^5 f(x)\,dx = 10,$

$\int_0^5 g(x)dx = -4\,,$

$\int_5^7 f(x)\,dx = 3$ فأجد قيمة كل مما يأتي:

1) $\int_0^5 (4f(x) + g(x))\,dx$

2) $\int_0^5 \frac{g(x)}{2}\,dx$

3) $\int_0^5 f(x) \times g(x)$

2- إذا كان:

$\int_1^3 f(x)\,dx = 6, \int_1^3 g(x)\,dx = -2$،

فأجد قيمة كل مما يأتي:

1) $\int_1^3 (4f(x))\,dx$

2) $\int_1^3 \frac{g(x)}{2}\,dx$

3) $\int_1^3 (3g(x) - 6f(x) + 4)$

3- إذا كان: $\int_2^5 3f(x)\,dx = 6$، فجد $\int_5^2 f(x)\,dx$.

4- إذا كان $\int_3^5 \frac{f(x)}{2} dx = 12$:، فجد $\int_5^3 f(x)\, dx$.

5- إذا كان: $\int_{-2}^5 f(x)\, dx = 9$، فجد $\int_5^{-2} \sqrt{3f(x)}dx$.

6- إذا كان $\int_7^4 f(x)\, dx = 6$:، فجد $\int_4^7 (3f(x) - 2x + 1)\, dx$.

7- إذا كان:

$\int_3^2 f(x)\, dx = 8, \int_{-1}^2 f(x)\, dx = 16$

فإن $\int_{-1}^3 f(x)\, dx$.

8- إذا كان

$\int_{-2}^2 f(x)\, dx = 18, \int_{-2}^1 f(x)\, dx = 9$:

فإن $\int_1^2 f(x)dx$.

9- إذا كان:

$\int_7^4 f(x)\, dx = 9, \int_7^1 f(x)\, dx = 5$ فإن

$\int_1^4 f(x)dx$.

10- إذا كان:

$\int_2^3 f(x)\, dx = -4, \int_1^3 f(x)\, dx = 6$

فإن $\int_1^2 2f(x)dx$.

11- إذا كان $\int_3^1 f(x)\, dx =$

$-4, \int_0^3 3f(x)\, dx = 6$: فإن

$\int_0^3 2f(x)dx$.

أ. عماد مسك 0795153669

12- إذا كان:

$\int_2^6 f(x)\,dx = 4, \int_6^1 3f(x)\,dx = 3$ فإن

.$\int_1^2 f(x)dx$

13- إذا كان

:$\int_3^1 f(x)\,dx = -4, \int_0^1 3f(x)\,dx = 6$

فإن $\int_0^3 2f(x)dx$.

14- إذا كان:

$\int_2^6 f(x)\,dx = -10,$

$\int_1^6 3f(x)\,dx = 15$ فإن $\int_1^2 2f(x)dx$.

$a)\ 5 \quad b)\ 13 \quad c)\ 25 \quad d) 30$

15- إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+1 , x < 1 \\ 2x \quad , x \geq 1 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$.

16- إذا كان: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 , x < 0 \\ x + 5 \quad , x \geq 0 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$.

17- إذا كان: $f(x) = |3x - 6|$، فأجد قيمة $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$.

18- إذا كان: $f(x) = |x - 2|$، فأجد قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$.

19- يمثل الاقتران $P'(x) = 160 - 2x$ **الربح الحدي لكل جهاز لوحي (iPad) تبيعه إحدى الشركات حيث x عدد الأجهزة اللوحية المبيعة شهرياً، و** $P(x)$ **ربح x قطعة شهرياً بالدينار، جد مقدار التغير بأرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها إلى 110 جهاز، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 100 جهاز.**

حالة 1: لا تقع في الفترة

مثال 1:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x + 3$، والمحور x ، والمستقيمين $x = 3 , x = -1$

الحل:

نجد نقاط التقاطع مع محور x

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

خارج الفترة $[-1,3]$

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 3)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x \Big|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{(3)^2}{2} + 3(3) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 3(-1)\right)$$

$$= \frac{9}{2} + 9 - \left(\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$= \frac{8}{2} + 12$$

$$= 4 + 12$$

$$= 16$$

مثال 2:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x والمستقيمين $x = 4 , x = 1$

مثال 3:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 5 - x$ والمحور x والمستقيمين $x = 3 , x = 5$

مثال 4:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ، والمحور x ، والمستقيمين $x = 0 , x = 2$.

مثال 5:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = -7 + 2x - x^2$ والمحور x والمستقيمين $x = 1 , x = 2$.

مثال 6:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 8x$ ، والمحور x والمستقيمين $x = 5 , x = 2$

مثال 7:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4$ ، والمحور x والمستقيمين $x = -1 , x = 1$

حالة 2: تقع ضمن الفترة

مثال 1:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 + 4x$ والمحور x والمستقيمين $x = -1$، و $x = 2$.

الحل:

$$x^3 + 4x = 0$$
$$x(x^2 + 4) = 0$$
$$x = 0 \qquad or \qquad x^2 + 4 = 0$$

تقع ضمن الفترة $[-1,2]$

$$A = \int_{-1}^{0} (4x + x^3)\, dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)\, dx$$

$$= 2x^2 + \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4} + 2x^2\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(2(0)^2 + \frac{(0)^4}{4}\right) - \left(2(-1)^2 + \frac{(-1)^4}{4}\right) + \left(\frac{(2)^4}{4} + 2(2)^2\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} + 2(0)^2\right)$$

$$= 0 - \left(2 + \frac{1}{4}\right) + (4 + 8) - (0)$$

$$= 14 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{57}{4}$$

مثال 2:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 12$ والمحور x والمستقيمين $x = 1$، و $x = 3$.

مثال 3:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x$ والمحور x والمستقيمين $x = -1$، و $x = -3$.

حالة 3: لا يوجد فترة

مثال 1:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x.

الحل:

نجد نقاط التقاطع مع محور x

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 3$$

حدود التكامل لإيجاد المساحة

$$A = \int_0^3 (3x - x^2)dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{3(3)^2}{2} - \frac{(3)^3}{3} - (\frac{3(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3})$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0$$

$$= \frac{81-54}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

ملاحظة:

عوضنا عدد يقع ضمن الفترة [0,3] وليكن العدد (1) فإذا كان ناتج التعويض موجباً نضع الاقتران $f(x)$ كما هو وإذا كان ناتج التعويض سالباً نضرب الاقتران $f(x)$ بـ (-).

ويأتي هذا الاجراء حتى يكون ناتج المساحة موجباً دون الحاجة إلى وضع رمز القيمة المطلقة.

مثال 2:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - x$ والمحور x

الدرس الرابع: المساحة

مثال 3:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x،

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

مثال 4:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، $f(x) = x^3 - 9x$

مثال 5:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 3$ والمحور x

مثال 6:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$ والمحور x

مثال 7:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2(2-x)$ والمحور x

مثال 8:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 9 - x^2$ والمحور x

مثال 9:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-4)$ والمحور x.

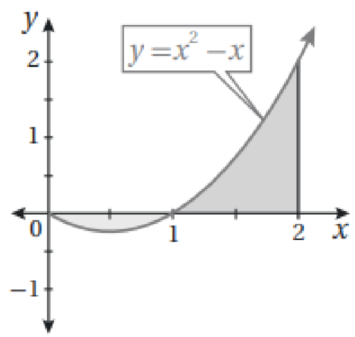
مثال 10:

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 2x$ والمحور x .

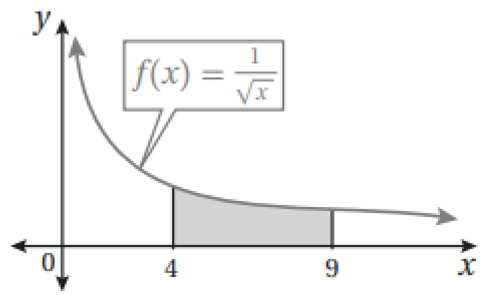
مثال 11:

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات الآتية:

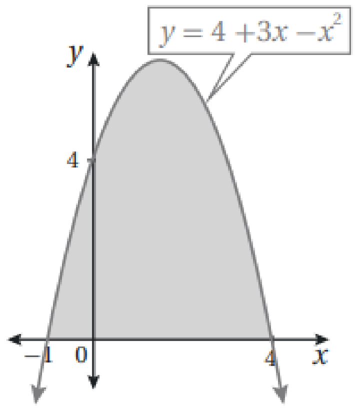
1)



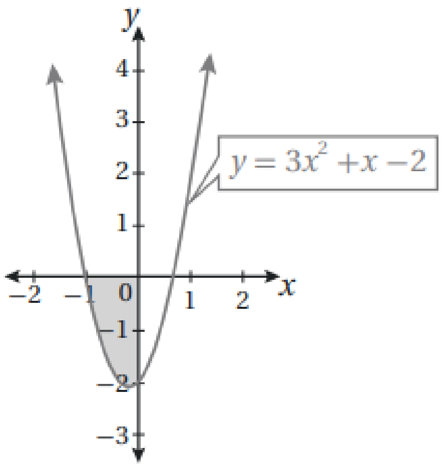
2)



3)



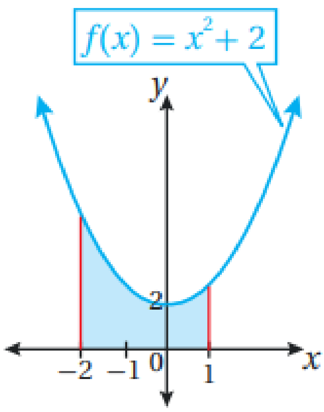
4)



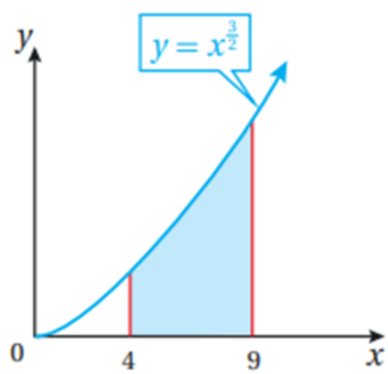
مثال 12:

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

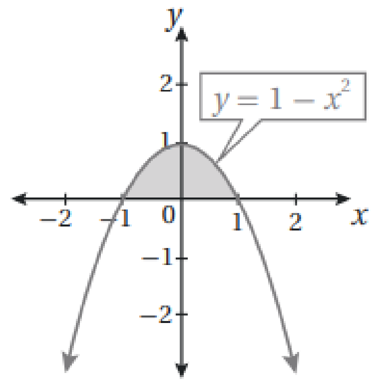
1)



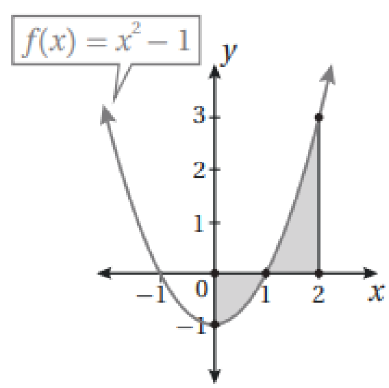
2)



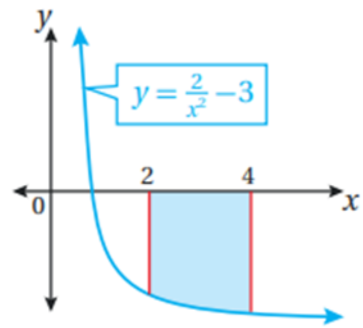
5)



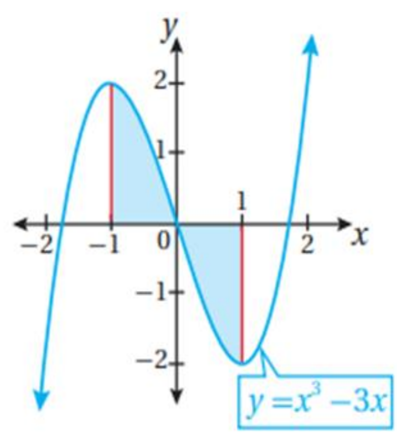
6)



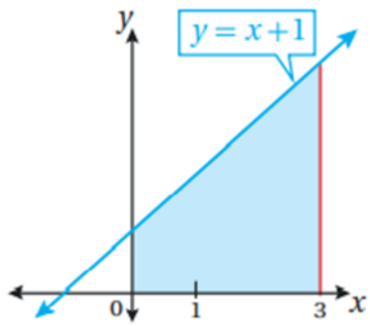
3)


$y=\frac{2}{x^2}-3$
y
x
0
2
4

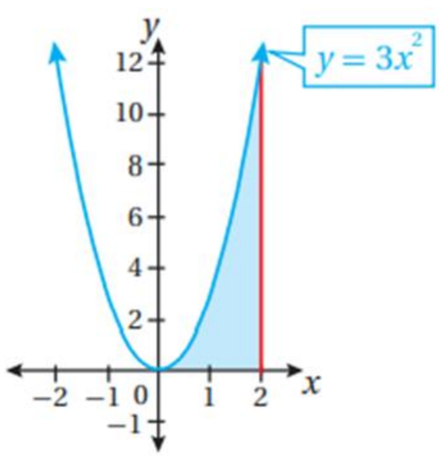
4)


$y=x^3-3x$
y
x
−2
−1
0
1
2
−1
−2

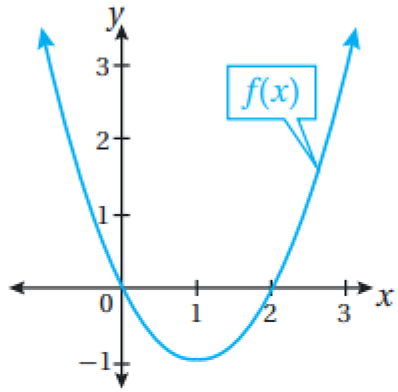
5)


$y=x+1$
y
x
0
1
3

6)

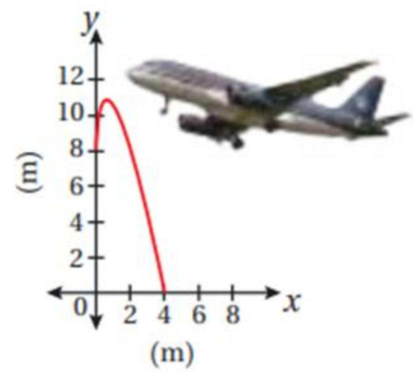

$y=3x^2$
y
x
12
10
8
6
4
2
−2
−1
0
1
2
−1

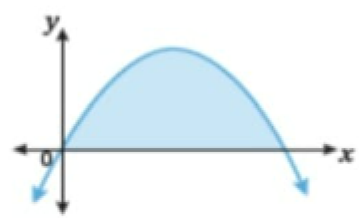
7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x والمستقيم $x = 3$



8) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x والمستقيم $x = -1$، بالاعتماد على التمثيل البياني في المثال السابق.

9) يبين التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح الطائرة ممثلاً بالمعادلة $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$ حيث $0 \le x \le 4$.
أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة

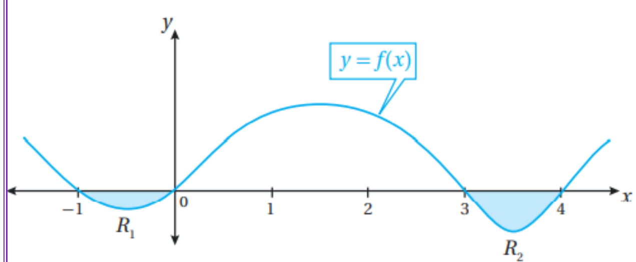




10) تبرير: يبين الشكل منحنى الاقتران $f(x)$ إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة وكانت

$$\int_0^4 f(x)dx = 10$$

فأجد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ مبرراً إجابتي.



الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

مفهوم أساسي:

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ و e هو العدد النيبيري، فإن:

$$1)\ \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

$$2)\ \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

$$3)\ \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$4)\ \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$5)\ \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C, x \neq -\frac{b}{a}$$

مثال 1:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int (e^x + 8)\,dx$$

الحل:

$$= e^x + 8x + C$$

$$2)\ \int (5\cos x + \sqrt{x})\,dx$$

الحل:

$$= \int \left(5\cos x + x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$3)\ \int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

الحل:

$$= \int (4\sin x - x^{-2})\,dx$$

$$= -4\cos x - \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= -4\cos x + \frac{1}{x} + C$$

مثال 2:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$

2) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^5}\right) dx$

3) $\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)\, dx$

مثال 3:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

2) $\int \left(e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

3) $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx$

مثال 4:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^{x}\right) dx$

2) $\int \left(\sin x - \frac{4}{x}\right) dx$

3) $\int \frac{x^3 - 7x + 2}{x^2} dx$

مثال 5:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (2x + 7)^5 \, dx$

2) $\frac{1}{\sqrt{4x - 2}} dx$

3) $\int 2e^{4x+3} \, dx$

مثال 6:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (7x-5)^6\, dx$

2) $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

3) $\int 4\cos(3x-7)\, dx$

4) $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

5) $\int \left(5\cos(2x+3)+\sqrt[3]{x}\right) dx$

6) $\int \frac{1}{8x-1}\, dx$

4) $\int (\sin 5x + e^{2x})\, dx$

5) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\, dx$

6) $\int \frac{5}{3x+2}\, dx$

مثال 7:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{3x^2}{x^3+5}\right) dx$

2) $\int \left(\frac{6x}{x^2+9}\right) dx$

3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\, dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$

اتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

2) $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$

3) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$

4) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

مثال 8:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 (6e^{-3x}+12x^3)\,dx$

2) $\int_{-1}^{2} (x+1)^3\,dx$

3) $\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\,dx$

أ. عماد مسك 0795153669

اتحقق من فهمي:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^2 (4e^{2x} + 7)\, dx$

2) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\, dx$

3) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\, dx$

أتدرب واحل مسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{2} + 3x\right) dx$

2) $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right) dx$

3) $\int (e^x + 1)^2\, dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x+2)\, dx$

5) $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right) dx$

6) $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right) dx$

7) $\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right) dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$

9) $\int (\sin(2x-3)+e^{6x-4})\, dx$

10) $\int (4\cos(6x+1))\, dx$

11) $\int \left(\frac{\sin x+3\cos x}{4}-\sqrt{x^3}\right) dx$

12) $\int (e^{6x}+(1-2x)^6)\, dx$

الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

13) $\int \left(\frac{x}{x^2+1}\right) dx$

14) $\int \frac{x^2}{x^3-3} dx$

15) $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12} dx$

16) $\int \frac{e^x+7}{e^x} dx$

17) $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x} dx$

18) $\int (4x^3+2+3\sin(5-3x))\, dx$

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$

20) $\int \frac{3}{(1+4x)^2} dx$

21) $\int \frac{1 + xe^{x}}{x} dx$

22) $\int_{1}^{2} \left(2x + 3e^{x} - \frac{4}{x}\right) dx$

23) $\int_{0}^{5} \frac{x}{x^{2} + 10} dx$

24) $\int_{3}^{4} (2x - 6)^{4}\, dx$

مثال:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{1 - x^{2}}{5x} dx$

2) $\int (5e^{x} + 4)\, dx$

3) $\int (1 - e^{2x-3})\, dx$

4) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\, dx$

5) $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$

6) $\int (5-\sin(5-5x))\,dx$

7) $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}\,dx$

8) $\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx$

9) $\int \left(3\cos x+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

10) $\int (3x+2)^5\,dx$

11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

12) $\int \left(e^{2x}-\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$

13) $\int (\sin(2x+3) + \cos(3x+2))\, dx$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

15) $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\, dx$

16) $\int_0^1 e^x(4-e^x)\, dx$

17) $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

مثال:

في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبين أن معدل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُمنذج بالاقتران:

$R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$ حيث $R(t)$ عدد البراميل المنتجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بدء ضخ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء عملية الضخ من البئر، علماً بأن $R(0) = 0$.

مثال:

أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يزداد سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$ حيث t عدد السنوات منذ عام 2010 م، و $P(t)$ عدد السكان. أجد عدد سكان القرية عام 2020 م، علماً بأن عدد سكانها عام 2010 م هو 3500 شخص.

مثال:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

مثال:

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 5e^{x}; (0, \frac{1}{2})$

2) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}; (1, -1)$

3) $f'(x) = e^{-x} + x^2; (0, 4)$

مثال:

بيئة: في دراسة تناولت أسماكاً في بحيرة، تبين أن عدد الأسماك $P(t)$ يتغير بمعدل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ ، حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

1) أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t، علماً بأن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة.

2) أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة.

أ. عماد مسك 0795153669

مثال:

طب: يلتئم جرح جلدي بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و$A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

1) أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أي زمن t، علماً بأن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9cm^2$.

2) أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات التفكير العليا:

اكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x} dx$، وكان حله على النحو المجاور.

اكتشف الخطأ في حل أحمد، ثم أصححه.

$$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{2 \times 1}{2x} dx$$

$$= \int \frac{2}{2x} dx$$

$$= \ln|2x| + c$$

تحد: أجد كل تكامل مما يأتي:

1) $\int \sqrt{e^x}\, dx$

2) $\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\, dx$

3) $\int (x^2 + 2x + 1)^5\, dx$

مثال:

اكتشف المختلف: أي التكاملات الآتية مختلف، مبرراً إجابتي؟

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\int (x+1)^3\, dx$$

مثال:

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (e, e^2).

مثال:

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(0, 2)$؟

مثال:

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = e^{-x}; (0, 3)$

2) $f'(x) = \frac{3}{x} - 4; (1, 0)$

3) $f'(x) = 4e^{x} - 2; (0, 1)$

مثال:

تلوث: يعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة لكل مليلتر من الماء في البحيرة يتغير بمعدل: $N'(t) = \frac{2000t}{1+t^2}$ ، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من الماء بعد t يوماً من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$ ، علماً بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليلتر.

مثال:

أحدد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون ايجاد التكامل"

$$\int (3 \sin 3x + 1) dx$$

$$\int (3 \sin(3x + 1)) dx$$

مثال 1:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int 3x^2(x^3+1)^7\,dx$$

الحل:

$$y = x^3 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dy}{3x^2}$$

$$\int \cancel{3x^2}(y)^7 \frac{dy}{\cancel{3x^2}} = \int y^7\,dy$$

$$= \frac{y^8}{8} + C$$

$$= \frac{(x^3+1)^8}{8} + C$$

$$2)\ \int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$$

الحل:

$$y = x^2 + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int \cancel{2x}\sqrt{y}\frac{dy}{\cancel{2x}} = \int y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$3)\ \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

الحل:

$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int \cancel{\cos x}\, e^y \frac{dy}{\cancel{\cos x}} = \int e^y\,dy$$

$$e^y + C = e^{\sin x} + C$$

$$4)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

الحل:

$$5)\ \int x^4 \sin(x^5 - 8)\,dx$$

الحل:

6) $\int \sin^3 x \cos x \; dx$

الحل:

مثال 2:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 6x^2(2x^3-3)^4 \, dx$

2) $\int xe^{x^2+1} \, dx$

3) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} dx$

4) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

5) $\int x^3 \cos(x^4-5) \, dx$

6) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$

مثال 3:

أسعار: يمثل الاقتران $P(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المبيعة بالمئات، إذا كان: $P'(x)=\frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل التغير في سعر الحذاء، فأجد $P(x)$، علماً بأن سعر الحذاء الواحد $30JD$ عندما يكون عدد الأحذية المبيعة 400 حذاء.

مثال 4:

يمثل الاقتران $P(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة (بالمئات) من المنتج، إذا كان: $P'(x)=\frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $P(x)$، علماً بأن سعر القطعة الواحدة $75JD$ عندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة.

مثال 5:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)^3\,dx$

2) $\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

3) $\int_{-1}^{3} 8xe^{x^2}\,dx$

مثال 6:

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$

2) $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$

3) $\int (x+1)(x^2+2x+5)\,dx$

4) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

5) $\displaystyle \int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$

6) $\displaystyle \int \sin x \sqrt{1 + 3\cos x}\, dx$

7) $\displaystyle \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2}\, dx$

8) $\displaystyle \int_0^1 x\sqrt{3x^2 + 2}\, dx$

9) $\displaystyle \int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

10) $\displaystyle \int_0^1 (x + 1)(x^2 + 2x)^5\, dx$

11) $\displaystyle \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$

12) $\displaystyle \int x^2(2x^3 + 5)\, dx$

13) $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

14) $\int x^6 e^{1-x^7}\,dx$

15) $\int \dfrac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$

16) $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}\,dx$

17) $\int \dfrac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$

18) $\int \dfrac{1}{x\ln x}\,dx$

19) $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\,dx$

20) $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$

21) $\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx$

22) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx$

23) $\int e^x (2 + e^x)^5 \, dx$

24) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

25) $\int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x) \, dx$

26) $\int_0^2 (2x - 1)e^{x^2 - x} \, dx$

27) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

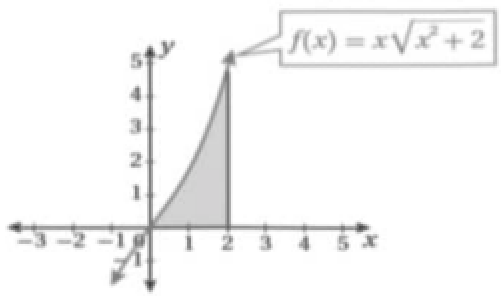
28) $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

29) $\int_0^1 (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$

30) $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx$

مثال 7:

أجد مساحة المنطقة المظللة في التمثيل البياني المجاور.



مثال 8:

الإيراد الحدّي: يمثل الاقتران $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من انتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علماً بأن $R(0) = 0$.

مثال 9:

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المّار بالنقطة المعطاة. استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$

2) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}; (0, \frac{3}{2})$

مثال 10:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل. فأجد موقعه بعد t ثانية من بدء الحركة.

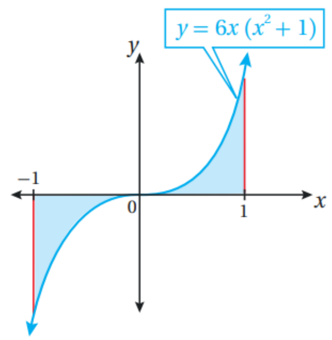
مثال 11:

يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب mg/cm^3 إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل: $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

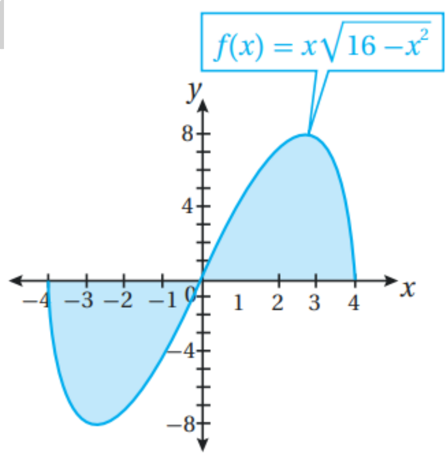
مثال 12:

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

1)



2)



مثال 13:

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

2) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}; (0, -1)$

مثال 14:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$ حيث t الزمن بالثواني وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم $4m$ فأجد موقع الجسيم بعد tثانية من بدء الحركة

مثال 15:

زراعة : يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الان . اذا كان

$\acute{V}(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ هو معدل التغير في سعر دونم الأرض فأجد $V(t)$ علما بأن سعره الان 5000JD.

مثال 16:

سكان : أشارت دراسة الى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران :

$P(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$ حيث t عدد السنوات من عام 2015 م و $P(t)$ عدد السكان بالالف . أجد مقدار الزيادة في عدد سكان المدينة من عام 2015 الى عام 2025 م.

مثال 17:

أكتشف المختلف: أي التكاملات الاتية مختلف مبررا اجابتي؟

$$\int 3x^2\, e^{1+x^3} dx$$

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2} dx$$

$$\int x(x^3+1)\, dx$$

$$\int x cos x^2\, dx$$

مثال 18:

أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx$$

وكان حلها على النحو الاتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\, dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_0^1 4u^3\, du$$

$$= u^4 \Big|_0^1$$

$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حل سعاد، ثم أصححه.

مثال 19:

تحد: إذا كان

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

فأجد قيمة الثابت k

اختبار نهاية الوحدة

اختر رمز الإجابة الصحيحة:

1) قيمة $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$ هي:

$a)\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+c$ $\qquad b)\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+c$

$c)\ x^2-\frac{1}{x}+c$ $\qquad d)\ x^2+\frac{1}{x}+c$

2) إذا كان $\int_0^2 kx\,dx = 6$ فأن قيمة الثابت k هي:

$a)\ 1$ $\qquad b)\ 2$

$c)\ 3$ $\qquad d)\ 4$

3) قيمة $\int_0^3(-x^2+3x)dx$ هي:

$a)\ 3\frac{3}{4}$ $\qquad b)\ 21\frac{1}{4}$

$c)\ 4\frac{1}{2}$ $\qquad d)\ 22\frac{1}{2}$

4) قيمة $\int_0^2 e^{2x}dx$ هي:

$a)\ e^4-1$ $\qquad b)\ e^4-2$

$c)\ 2e^4-2$ $\qquad d)\ \frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

5) قيمة $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ هي:

$a)\ -2$ $\qquad b)\ \frac{-7}{16}$

$c)\ \frac{1}{2}$ $\qquad d)\ 2$

6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران $f(x) = 4x - x^2$ والمحور x هو:

$a)\ \int_4^0 (4x-x^2)dx$

$b)\ \int_0^4 (4x-x^2)dx$

$c)\ \int_1^0 (4x-x^2)dx$

$d)\ \int_0^1 (4x-x^2)dx$

أجد كلا من التكاملات الاتية:

7) $\int 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

8) $\int (8x-10x^2)dx$

9) $\int \frac{5}{x^3}\, dx$

10) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

11) $\int (5x^2 - 2e^{7x})\, dx$

12) $\int \left(2x + 3e^{4x+5}\right) dx$

13) $\int \frac{x^2 - 6}{2x} dx$

14) $\int \frac{1}{(x-1)^3}\, dx$

15) $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

16) $\int 2xe^{x^2-1}\, dx$

17) $\int 4e^x(3 + e^{2x}) dx$

18) $\int \frac{1 + x}{(4 + 2x + x^2)^8} dx$

19) $\int x\sin(3+x^2)dx$

20) $\int (3\sin 3x - 4\cos x)dx$

21) $\int \left(x - \sin(7x+2)\right) dx$

22) $\int (e^{3x} - e^{-3x})\, dx$

23) $\int \frac{1}{1-5x} dx$

24) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو:

$\frac{dy}{dx} = 4x - 2$ فأجد قاعدة العلاقة y علما بان منحناها يمر بالنقطة (0,3)

25) الإيراد الحدي يمثل الاقتران
$\acute{R}(x) = 4x - 1.2x^2$ الأيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع في أحدى الشركات, حيث x عدد القطع المبيعة و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$علما بأن $R(20) = 30000$

26) يتحرك جسيم من السكون ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$ حيث t الزمن بالثواني وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

إذا كان $\int_{-5}^{5} f(x)dx = 10$،
$\int_{-5}^{-1} f(x)dx = 4$
$\int_{-5}^{-1} g(x)dx = 11$ فأجد كلا مما يلي:

$$27)\ \int_{-1}^{5} f(x)\,dx$$

$$28)\ \int_{-5}^{-1} 7f(x)\,dx$$

$$29)\ \int_{-1}^{-5} (3\big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الاتية:

$$30)\ \int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$31)\ \int_{1}^{3} \frac{x^3+2x^2}{x}\,dx$$

$$32)\ \int_{1}^{5} |3-x|\,dx$$

$$33)\ \int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$34)\ \int_{2}^{5} 3x(x+2)\,dx$$

$$35)\ \int_{2}^{3} 2x\,e^{-x^2}\,dx$$

$$36)\ \int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\,dx$$

$$37)\ \int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\,dx$$

38) إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2+4\,, & x<0 \\ 4-x, & x\geq 0 \end{cases}$

فأجد قيمة:

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

39) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = 5 + e^{t-2}$ حيث t الزمن بالثواني وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة

في كل مما يأتي المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$40)\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 2\ ;\ (0, 6)$

$41)\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{20}}{x^2}\ ;\ (1, 400)$

$42)\ f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\ ;\ (1, 1)$

$43)\ f'(x) = 5e^x - 4\ ;\ (0, -1)$

$44)\ f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}\ ;\ (2, 10)$

45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$ والمحور x والمستقيمين $x = 1, x = -2$

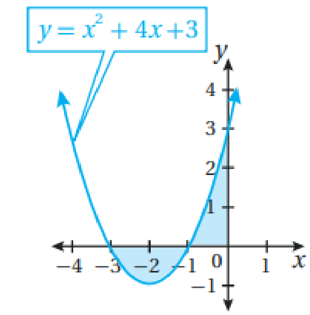
46) طب: يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسه بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3) اذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل $\acute{C}(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$ فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الاولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

47) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

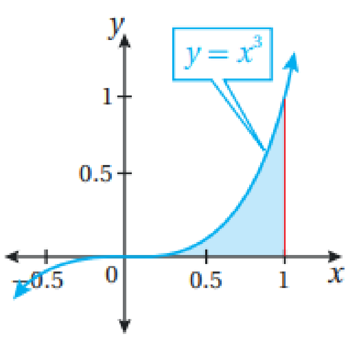
$f(x) = 3x^2 - 3x$ والمحور x

- **أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الاتية:**

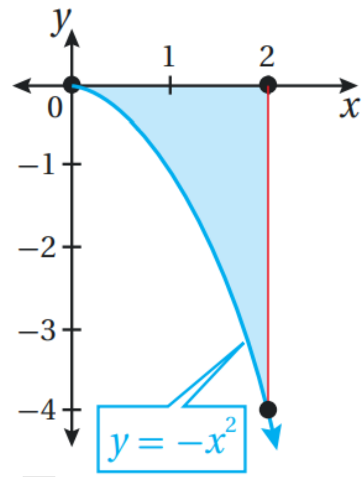
48)



49)



50)



51)