

**السؤال الثالث:** ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران

$$f(x) = |x - 2| \text{ عندما } x = 2$$

**الحل:**

$$\text{اعادة تعريف } x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{--} \quad \text{++} \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow \\ 2 \end{array}$$

نجد المشتقة من اليمين واليسار

$$f'_+(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

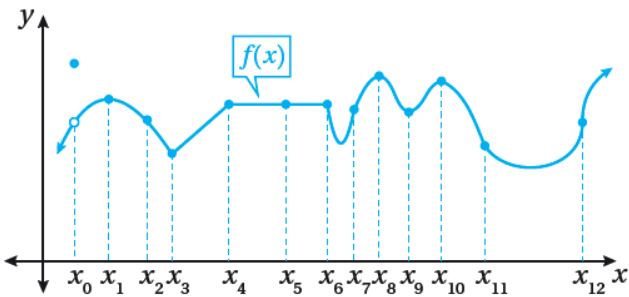
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-2-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)+2-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2) \text{ غير موجودة}$$

**السؤال الرابع:** حدد قيم  $x$  للنقاط التي لا يكون عندها

كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق مبررا اجابتي



**الحل:**

عند  $x_0$  لأن غير متصل

عند  $x_3, x_4, x_6$  رؤوس حادة

عند  $x_{12}$  مماس رأسي

**مراجعة مكتفة في التفاضل**

**السؤال الأول:** اذا كانت  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  أجد

$f'(0)$  باستعمال تعريف المشتقة الاولى

**الحل:**

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^{\frac{1}{2}} - (0)^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{1}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$f'(0)$  غير موجودة

اذا  $f(x)$  غير قابل للاشتقاق عندما  $x = 0$

**السؤال الثاني:** اذا كانت  $f(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$  أجد

$f'(3)$  باستعمال تعريف المشتقة الاولى

**الحل:**

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h-3)^{\frac{1}{3}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$f'(3)$  غير موجودة

$f(x)$  غير قابل للاشتقاق عندما  $x = 3$

$$8) y = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$$

$$y' = (\sqrt[3]{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x} + 3)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$9) f(x) = \ln x \cos x$$

$$f'(x) = -\ln x \sin x + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$10) f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(x)(1) - (x+1)(1)}{x^2}\right)$$

$$11) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)e^x}{(e^x)^2}$$

$$12) f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(e^x + \sqrt{x})^2}$$

$$13) f(t) = \frac{1}{t - \frac{1}{t}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t - t^{-1}} \Rightarrow f'(t) = \frac{-(1+t^{-2})}{(t-t^{-1})^2}$$

السؤال الخامس : أجد مشتقة كل مما يأتي:

$$1) f(x) = \sqrt{2x^5 + 8}$$

$$f'(x) = \frac{10x^4}{2\sqrt{2x^5 + 8}}$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$3) f(x) = e^{x^5 + 7x^{\frac{3}{5}}}$$

$$f'(x) = \left(5x^4 + \frac{21}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)e^{x^5 + 7x^{\frac{3}{5}}}$$

$$4) f(x) = 5^{3x}$$

$$f'(x) = \ln 5 \times 5^{3x} \times 3 = (3 \ln 5)5^{3x}$$

$$5) f(x) = \ln(7x^3 + \sqrt{x})$$

$$f'(x) = \frac{21x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{7x^3 + \sqrt{x}}$$

$$6) f(x) = \log_6 \tan x$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\ln 6 \tan x}$$

$$7) f(x) = (\cos x)^5$$

$$f'(x) = 5(\cos x)^4(-\sin x)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - x^2 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{x^{\cancel{2}} + 1 - x^{\cancel{2}}}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

**السؤال 7:** إذا كانت  $y = \frac{x+1}{x-1}$  حيث  $x \neq 1$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ اثبت أن}$$

**السؤال 8:** إذا كان  $f(x), g(x)$  اقترانين قابلين

ولاشتقاق عندما  $x = 0$  وكان

$$f(0) = 5, f'(0) = -3$$

$$g(0) = -1, g'(0) = 2 \text{ فأجد كلا مما يأتي:}$$

$$1) (fg)'(0)$$

$$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$$

$$= 5(2) + (-1)(-3) = 10 + 3 = 13$$

$$2) \left(\frac{f}{g}\right)'(0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{(g(0))^2}$$

$$14) f(x) = 3x - 5 \cos(\pi x)^2$$

$$f'(x) = 3 - 5(-\sin(\pi x)^2)(2\pi x)\pi$$

$$= 3 + 10\pi x^2 \times \sin(\pi x)^2$$

$$15) f(x) = \log_3(1 + x \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(1)}{\ln 3(1 + x \ln x)}$$

$$16) f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$$

$$f'(x) = e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2) + \cos e^{2x} \times e^{2x}(2)$$

$$17) f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$$

$$f'(x) = 4 \tan^3(\sec(\cos x)) \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x) \tan x(\cos x) x - \sin x$$

**السؤال 6**

$$\text{إذا كانت } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ اثبت أن}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

**الحل:**

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(1) - (x)\left(\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right)}{\left((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

**السؤال 11:** إذا كان  $A(x) = f(g(x))$  وكان

$$f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3$$

$$A'(5) \text{ فأجد } , g(5) = -2, g'(5) = 6$$

**الحل:**

$$A'(5) = f'(g(5))g'(5)$$

$$= f'(-2) \times 6 = 4 \times 6 = 24$$

**السؤال 12:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ mx + b & , x > 2 \end{cases} \text{ إذا كان}$$

فأجد قيمة كلا من  $m$  و  $b$  اللتين تجعلان  $f$  قابلاً للاشتقاق عند جميع قيم  $x$  الحقيقية، مبرراً إجابتي

**السؤال 13:** حدد قيمة (قيم)  $x$  التي لا يكون عندها كل

اقتران مما يأتي قابلاً للاشتقاق

$$1) f(x) = \frac{x-8}{x^2-4x-5}$$

غير قابل للاشتقاق عند  $x = 5, -1$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$$

$$f(x) = (3x-6)^{\frac{1}{3}} + 5$$

**الحل**

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x-6)^{-\frac{2}{3}} \times 3 = \frac{1}{(3x-6)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-1(-3) - 5(2)}{(1)^2} = \frac{3-10}{1} = -7$$

$$3) (7f - 2fg)'(0)$$

$$= 7f'(0) - 2(fg)'$$

$$= 7(-3) - 2(13) = -21 - 26 = -47$$

**السؤال 9:** إذا كان  $f(x) = 9 \ln x + \frac{1}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3} \text{ فأثبت أن}$$

**الحل:**

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-4x}{(2x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

**السؤال 10:** إذا كان  $f(x) = 9 \ln x + \frac{1}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3} \text{ فأثبت أن}$$

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-4x}{(2x^2)^2} \text{ **الحل:**}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{4x}{4x^4}$$

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1 = 0$$

**الحل:**

$$x^4 \left( \frac{6 \ln x - 5}{x^4} \right) + 4x^3 \left( \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \right) + 2x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} \right) + 1$$

$$= 6 \ln x - 5 + 4 - 8 \ln x + 2 \ln x + 1$$

$$= 8 \ln x - 8 \ln x - 5 + 5 = 0$$

**السؤال 15:**

إذا كان الاقتران  $y = e^{2x} + e^{-2x}$  فأثبت أن

$$f''(x) = 4f(x)$$

**الحل:**

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$= 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$$

**السؤال 16:**

إذا كان الاقتران  $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$  فأثبت

$$f''(x) + 16f(x) = 0$$

**الحل:**

$$f(x) = \sin 4x + \cos 4x$$

$$f'(x) = 4 \cos 4x - 4 \sin 4x$$

$$f''(x) = -16 \sin 4x - 16 \cos 4x$$

$$= -16(\sin 4x + \cos 4x)$$

$$= -16f(x)$$

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

غير قابل للاشتقاق عند  $x = 2$

$$3) f(x) = |x^2 - 9|$$

**الحل:**

$$f'(-3^-) \neq f'(-3^+)$$

$f'(x)$  غير موجودة عند  $x = 3, -3$

**السؤال 14:**

إذا كان  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  فأجيب عن السؤالين الآتيين

$$(1) \text{ أثبت أن } f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$$

**الحل:**

$$f'(x) = \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} \right) - \ln x (2x)}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^3 \left( \frac{-2}{x} \right) - (1 - 2 \ln x) 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^2 - (1 - 2 \ln x) 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{x^2 (-2 - 3 + 6 \ln x)}{x^6} = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$$

(2) اثبت ان المقدار:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 + 2)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3((x^2 + 3)^2 + 2)(2x)$$

$$f''(x) + 16f(x) = -16f(x) + 16f(x) = 0$$

**السؤال 17:**

$$f(x) = 3 \sin x - \sin^3 x \text{ إذا كان الاقتران } x$$

$$f'(x) = 3 \cos^3 x \text{ أثبت أن } x$$

**الحل:**

$$f'(x) = 3 \cos x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$= 3 \cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$= 3 \cos x (\cos^2 x)$$

$$f'(x) = 3 \cos^3 x$$

**السؤال 18:**

$$g(x) = \sqrt{5x-1}, f'(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ إذا كان } x$$

$$\text{أجد } (fg(x))' \text{ عندما } x=1$$

**الحل:**

$$g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$

$$(fg(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$= f'(g(1))g'(1)$$

$$= f'(2) \times \frac{5}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$$

**السؤال 19:**

$$y = u^3 + 2u + 5, \quad u = x^2 + 3 \text{ إذا كانت } x$$

$$\text{أجد } \frac{dy}{dx}$$

**الحل:**

**السؤال 20:**

$$x = \sin 3t, \quad y = \cos 3t \text{ إذا كان } t$$

$$\text{أجد } \frac{d^2y}{dx^2}$$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \sin 3t}{3 \cos 3t} = -\tan 3t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3 \sec^2 3t \times \frac{1}{3 \cos 3t} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^3 3t$$

**السؤال 21:**

$$x = e^{-t}, y = t^3 + t + 1, \quad t = 0$$

$$\text{أجد } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-e^{-t}(6t) - (3t^2 + 1)(-e^{-t})}{(-e^{-t})^2}$$

$$= \frac{-e^{-t}(6t) - (3t^2 + 1)(-e^{-t})}{(-e^{-t})^2} \times \frac{1}{-e^{-t}}$$

**الحل :**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x^3 + 2x)(3x^2 + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(3) \times 5 = 5 \times 5 = 25$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{0 - (0+1)(-1)}{(-1)^2} \times \frac{1}{-1} = -1$$

**السؤال 22 احسب  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  للاقتران  $x = \tan y$** 

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \cos y (-\sin y) \frac{dy}{dx}$$

$$= -2 \sin y \cos y (\cos^2 y)$$

$$= -2 \sin y \cos^3 y$$

**السؤال 25:**إذا كان  $3 - \sin y = x + y$  ، اثبت ان :

$$y'' = \frac{\sin y}{(1 + \cos y)^3}$$

**الحل :**

$$-\cos y y' = 1 + y'$$

$$1 = y'(1 + \cos y) \Rightarrow y' = \frac{-1}{1 + \cos y}$$

$$y'' = \frac{-1 \times \sin y y'}{(1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y}{(1 + \cos y)^3}$$

**السؤال 26:** إذا كان

$$(f' \circ g)'(1) \text{ ، } f(x) = x^3 + 2x \text{ ، } g(x) = 3x^2$$

**الحل :**

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(g(1)) \times g'(1) = f''(3) \times 6 = 108$$

**السؤال 23:** احسب  $\frac{dy}{dx}$  للعلاقة  $y = x^{\sin x}$ 

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sin x \left( \frac{1}{x} \right) + \ln x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left( \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left( \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$$

**السؤال 27:**إذا كان  $y = (\sin x + \cos x)^4$  ، اثبت ان :

$$y'' + 4y = 12 \cos^2 2x$$

**الحل :**

$$y' = 4(\sin x + \cos x)^3 (\cos x - \sin x)$$

$$y'' = 4(\sin x + \cos x)^3 (-\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(12(\sin x + \cos x)^2 (\cos x - \sin x))$$

$$y'' = -4(\sin x + \cos x)^4 + 12((\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x))$$

**السؤال 24:**إذا كان  $f'(3) = 5$  ،  $y = f(x^3 + 2x)$  ،

$$\text{جد } \frac{dy}{dx} \text{ عندما } x = 1$$

إذا كان  $f(x) = x^3 + ax^2$  ، وكان

$$(a) \text{ جد } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{3}+h) - f'(\frac{1}{3})}{h} = 8$$

**الحل :**

$$f''(\frac{1}{3}) = 8$$

$$f'(x) = 3x^2 + ax$$

$$f''(x) = 6x + a = 8$$

$$f''(x) = 6(\frac{1}{3}) + a = 8$$

$$a = 6$$

**مثال 32:** يمكن نمذجة الكمية  $A$  (بالغرام) المتبقية

من عينة كتلتها الابتدائية  $20g$  من عنصر البلوتونيوم

بعد  $t$  يوماً باسـتعمال الاقتران:

$$A(t) = 20 \left( \frac{1}{2} \right)^{t/140}$$

البلوتونيوم عندما  $t = 2$

$$A'(t) = 20 \left( \ln \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{t/140} \times \frac{1}{140}$$

$$A'(2) = 20 \left( \ln \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{2/140} \times \frac{1}{140}$$

**مثال 33:**

يمثل الاقتران:  $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$  موقع

جسم يتحرك على خط مسقطيم حيث  $s$  الموقع بالامتار

و  $t$  الزمن بالثواني

**1** اجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما  $t = 4$

**الحل:**

$$s(t) = t^2 - 7t + 8$$

$$v(t) = 2t - 7$$

$$y'' = -4y + 12(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$$

$$y'' = -4y + 12 \cos^2 2x$$

$$y'' + 4y = 12 \cos^2 2x$$

**السؤال 28:**

إذا كان  $y = \sin n$  ,  $x = \cos n$  ، اثبت ان :

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

**الحل :**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} = \frac{\cos n}{-\sin n} = -\cot x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\csc^2 n \times \frac{1}{-\sin n} = -\csc^3 n$$

**السؤال 29:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x < 2 \\ ax^3 + 9bx - 12 & , x > 2 \end{cases}$$

$f'(2)$  موجودة ، جد الثوابت  $a, b$

**الحل :**

$$a = -1, b = 1$$

**السؤال 30:**

إذا كان  $y = \tan^2 x + \frac{1}{2} \tan^4 x$  ، اثبت ان :

**الحل :**

$$y' = 2 \tan x \sec^2 x + 2 \tan^3 x \sec^2 x$$

$$y' = 2 \tan x \sec^2 x (1 + 2 \tan^2 x)$$

$$y' = 2 \tan x \sec^2 x (\sec^2 x)$$

$$y' = 2 \tan x \sec^4 x$$

**السؤال 31:**



(2) أجد موقع الجسم عندما كان في حالة سكون أول مرة بعد انطلاقه

**الحل:**

$$v(t) = 0 \text{ سكون يعني}$$

$$v = -\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin \frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3$$

(3) أجد موقع الجسم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة مبررا إجابتي.

**الحل:**

$$\sin t = 0 \Rightarrow s(t) = 4 - 0 = 4$$

$$\sin t = 1 \Rightarrow s(t) = 4 - 1 = 3$$

$$\sin t = -1 \Rightarrow s(t) = 4 - (-1) = 5$$

**مثال 35:** أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة  $x$  المعطاة:

1)  $f(x) = x + \cos 2x$  ,  $x = 0$

**الحل:**

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 \quad \therefore (0, 1)$$

$$f'(x) = 1 + (-2 \sin 2x(2))$$

$$f'(0) = 1 + 0 = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$$

2)  $f(x) = 2^x$  ,  $x = 0$

**الحل:**

$$f(0) = 2^0 = 1 \quad \therefore (0, 1)$$

$$f'(x) = \ln 2 \times 2^x$$

$$v(4) = 2(4) - 7 = 1$$

$$a(t) = 2 \Rightarrow a(4) = 2$$

(2) أجد قيم  $t$  التي يكون عنجها الجسم في حالة سكون لحظي

**الحل:**

$$v(t) = 2t - 7 = 0$$

$$2t = 7 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5$$

(3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما  $t = 2$

**الحل:**

$$v(2) = 2(2) - 7 = -3 < 0$$

الحركة بعكس الاتجاه الاصيلي (للييسار)

(4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

**الحل:**

$$s(0) = 8$$

$$s(t) = t^2 - 7t + 8 = 8$$

$$t = 0, 7$$

$$t = 7 \text{ نختار}$$

**مثال 34:**

يمثل الاقتران:  $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$  موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث  $s$  الموقع بالامتار و  $t$  الزمن بالثواني:

(1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد  $t$  ثانية

**الحل:**

$$v(t) = s'(t) = -\cos t$$

$$a(t) = v'(t) = \sin t$$

$$2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(-4,3)} = \frac{8-3}{-4+6} = \frac{5}{2}$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$

$$2) x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \quad , (1,0)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2+0}{1}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

**مثال 38:** إذا كان الاقتران:  $y = e^x - ax$  حيث

$a$  عدد حقيقي فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع

الاقتران مع المحور  $y$  مبررا إجابتي

**الحل:** يقطع المنحنى محور  $y$  عندما  $x = 0$

$$y = e^0 - 0 = 1 \quad \therefore (0,1)$$

$$y' = e^x - a$$

$$y'(0) = 1 - a$$

$$y - 1 = (1 - a)(x - 0)$$

$$f'(0) = \ln 2 \times 2^0 = \ln 2$$

$$y - 1 = \ln 2(x - 0)$$

$$y = (\ln 2)x + 1$$

$$3) f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2} \quad , x = 3$$

**الحل:**

$$f(3) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = 2(-1) = -2$$

$$\therefore (3, -2)$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} \left( \cos \frac{\pi x}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{\pi x}{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

$$f'(3) = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{3\pi}{2} \left( \frac{1}{2 \times 2} \right)$$

$$= 0 + (-1) \left( \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

**مثال 36:** إذا كان الاقتران:  $y = e^{\sin x}$  فأجد ميل

مماس منحنى الاقتران عند النقطة  $(0,1)$

**الحل:**

$$f'(x) = (\cos x) e^{\sin x}$$

$$f'(0) = (\cos 0) e^{\sin 0} = 1 \times 1 = 1$$

**مثال 37:** أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما

يأتي عند النقطة المعطاة:

$$1) x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , (-4,3)$$

$$x=1$$

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \therefore (1,1)$$

**مثال 41:** أجد معادلة المماس لمنحنى المعادلة

وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة  $t$   
المعطاة:

$$x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\frac{\pi}{4}$$

$$x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 1 = 1$$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\therefore (1, -1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 x}{2 \sec x (\sec x \tan x)}$$

$$= \frac{1}{2 \tan x} = \frac{1}{2 \tan \frac{-\pi}{4}} = \frac{1}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

**مثال 43:** يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad \text{حيث:}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$  أجد المقطع  $y$  لمماس المنحنى عندما

$$t = \frac{\pi}{4} \quad \text{بدلالة } a \text{ و } b$$

**الحل:**

**مثال 39:** إذا كان الاقتران:  $y = ke^x$  حيث

$k > 0$  وكان منحناه يقطع المحور  $y$  عند النقطة

$p$  أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند

النقطة  $p$  مع المحور  $x$

**الحل:**

يقطع المحور  $y$  عندما  $x = 0$

$$y = ke^0 = k \quad \therefore (k, 0)$$

$$y' = ke^x$$

$$y'(0) = ke^0 = k$$

$$y - k = k(x - 0)$$

$$y - k = kx$$

يقطع المحور  $x$  عندما  $y = 0$

$$-k = kx \Rightarrow x = -1 \quad \therefore (-1, 0)$$

**مثال 40:** أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون

عندها لمنحنى الاقتران مماس أفقي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2) - (2x-1)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{2x - 2x^2}{x^4} = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ليس في المجال}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-4)}$$

ميل المستقيم  $m_2$

$$3 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$6 \frac{dy}{dx} = -3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

ميل المستقيم = ميل المنحنى

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{2(y-4)}$$

$$-y + 4 = 1 \Rightarrow y = 3$$

$$1 = x + 2 \Rightarrow x = -1$$

النقطة  $(-1, 3)$

**مثال 45:** أجد النقطة على منحنى

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$$

$$3x = 5 + 6y$$

**الحل:**

$$\frac{-1}{m_1} = m_2 \text{ عمودي/ يعامد}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = m_1$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos t}{-a \sin t}$$

عند  $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{-a}{\sqrt{2}}} = \frac{-b}{a} = m$$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a} \left( x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

يقطع محور  $y$  عند  $x = 0$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a} \left( 0 - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a} \times \frac{-a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b$$

**مثال 44:** أجد النقطة على منحنى

$$(y-4)^2 = x+2$$

$$3x + 6y = -2$$

**الحل:**

$$m_1 = m_2 \text{ ميل المستقيم = ميل المنحنى}$$

ميل المنحنى  $m_1$

$$2(y-4) \frac{dy}{dx} = 1$$

ميل المستقيم

$$x + 2y = 0$$

$$1 + 2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} = m_2$$

المماس يوازي المستقيم

$$\frac{-1}{2y} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = 1$$

$$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \quad \therefore (0,1)$$

**مثال 47:** إذا كان الاقتران:  $y = \ln(ax + b)$ 

حيث  $a$  و  $b$  ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة  $P$  هو 1 فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

**(1)** أثبت أن الإحداثي  $x$  للنقطة  $P$  أقل من 1**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax + b} = 1$$

$$ax + b = a$$

$$b = a - ax$$

$$b = a(1 - x)$$

بما أن  $a > 0$ 

$$1 - x > 0 \Rightarrow 1 > x \\ \Rightarrow x < 1$$

**(2)** أجد إحداثي النقطة التي يكون عندها ميل المماس

$\frac{1}{2}$  علما بأن  $P$  هي النقطة  $(0, 2)$  ثم أبرر إجابتي

**الحل:**

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,2)} = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$$

ميل المستقيم

$$3 - 6 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -6 \frac{dy}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = m_2$$

$$\frac{-1}{m_1} = m_2$$

$$-2 = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sqrt{x} = -\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 6$$

$$3\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$2 + \sqrt{y} = 6 \quad \text{بالتعويض}$$

$$\sqrt{y} = 4 \Rightarrow y = 16$$

النقطة  $(4,16)$ **مثال 46:** أجد إحداثي نقطة على المنحنى:

$$x + y^2 = 1$$

موازي للمستقيم:  $x + 2y = 0$ **الحل:**

ميل المماس

$$x + y^2 = 1$$

$$1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y} = m_1$$

$$|t|(t^2 + 2) = \text{الارتفاع}$$

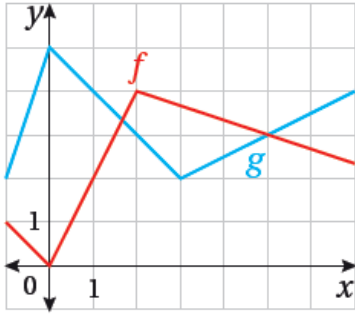
$$\frac{1}{2} = \text{المساحة} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 + 2) \times |t|(t^2 + 2) = \frac{1}{2}|t|(t^2 + 2)^2$$

**مثال 49:** يبين الشكل المجاور منحنينى الاقترانين

$h(x) = f(g(x))$  و  $f(x)$  و  $g(x)$  إذا كان:

وكان:  $p(x) = g(f(x))$  فأجد كلا مما يأتي:



1)  $h'(1)$

$$h'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

$$g(1) = 4 \text{ من الشكل}$$

لايجاد  $g'(1)$

$$(0, 5)(1, 4)$$

$$m = \frac{5-4}{0-1} = -1 \Rightarrow g'(1) = -1$$

لايجاد  $f'(4)$

$$(2, 4)(5, 3)$$

$$m = \frac{4-3}{2-5} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow f'(4) = \frac{-1}{3}$$

$$h'(1) = f'(4) g'(1)$$

$$h'(1) = f'(4) \times -1 = \frac{-1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$$

$$y|_{(0,2)} = \ln(0+b)$$

$$= \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$$

فتكون  $a = e^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b} = \frac{e^2}{e^2x+e^2}$$

$$= \frac{e^2}{e^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y = \ln(ax+b)$$

$$= \ln(e^2 + e^2) = \ln 2e^2$$

$$\therefore (1, \ln 2e^2)$$

**مثال 48:** إذا كانت  $y = 2t$ ,  $x = t^2$  أثبت أن

مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس

والمحورين الإحداثيين هي  $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

**الحل:**

يقطع محور  $x$  عند  $y = 0$

$$0 - 2t = -t(x - t^2)$$

$$2 = x - t^2$$

$$x = t^2 + 2$$

القاعدة  $t^2 + 2 =$

يقطع محور  $y$  عند  $x = 0$

$$y - 2t = -t(0 - t^2)$$

$$y - 2t = t^3$$

$$y = t^3 + 2t = t(t^2 + 2)$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x = 1$$

نجد  $y$ 

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$\left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right) \left(1, -\frac{\sqrt{27}}{2}\right)$$

$$\left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right) \text{ عندما}$$

$$y' = \frac{-9}{2\sqrt{27}} = m$$

$$y - \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{-9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

$$y' = \frac{9}{2\sqrt{27}} = m \left(1, -\frac{\sqrt{27}}{2}\right) \text{ عندما}$$

$$y + \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

$$2) p'(1)$$

$$p'(1) = g'(f(1)) f'(1)$$

$$f(1) = 2 \text{ من الشكل}$$

لايجاد  $f'(1)$ 

$$(0,0)(2,4)$$

$$m = \frac{0-4}{0-2} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

لايجاد  $g'(2)$ 

$$(0,5)(3,2)$$

$$m = \frac{5-2}{0-3} = -1 \Rightarrow g'(2) = -1$$

$$p'(1) = g'(2) \times 2 = -1 \times 2 = -2$$

**مثال 50:** أجد معادلتني مماسي منحنى العلاقة:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ اللذين يمران بالنقطة } (4,0)$$

**الحل:**

نفرض نقطة التماس  $(x, y)$

$$(4,0)$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{y-0}{x-4}$$

$$\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

$$\frac{2yy'}{9} = \frac{-x}{2} \Rightarrow y' = \frac{-9x}{4y}$$

$$\frac{y}{x-4} = \frac{-9x}{4y} \Rightarrow 4y^2 = -9x^2 + 36x$$

$$4y^2 + 9x^2 = 36x \quad \div 36$$

**مثال 51:** يبين الشكل

المجاور مصباحا على

ارتفاع  $h$  وحدة من

المحور  $x$  إذا وقعت

النقطة  $(1.25, 0)$  في

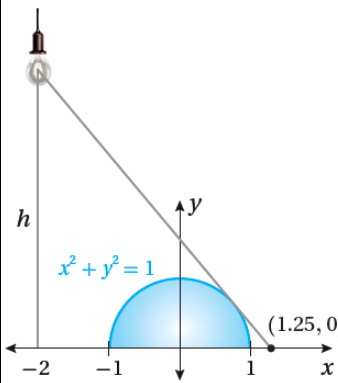
نهاية الشعاع الصادر من

المصباح، الذي يمس منحنى العلاقة:  $x^2 + y^2 = 1$

فأجد ارتفاع المصباح  $h$

**الحل:**

نفرض نقطة التماس  $(x, y)$



$$y - \frac{3}{5} = \frac{8}{3} + \frac{16}{15} \Rightarrow y = \frac{65}{15}$$

**مثال 52:** إذا كان مماس منحنى الاقتران:  $y = x^{\sqrt{x}}$

عند النقطة (4,16) يقطع المحور  $x$  في النقطة  $B$  ،  
والمحور  $y$  في النقطة  $C$  ، فأجد مساحة  $\Delta OBC$   
حيث  $O$  نقطة الأصل

**الحل:**

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y \left( \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= 16 \left( \frac{1}{2} + \ln 4 \times \frac{1}{4} \right) = 8 + 4 \ln 4$$

$$y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4)$$

يقطع محور  $x$  عندما  $y = 0$

$$-16 = 4(2 + \ln 4)(x - 4)$$

$$-16 = 4(2 + \ln 4)x - 16(2 + \ln 4)$$

$$x = \frac{16(2 + \ln 4) - 16}{2(2 + \ln 4)}$$

يقطع محور  $y$  عندما  $x = 0$

$$y - 16 = -16(2 + \ln 4)$$

$$y = 16 - 16(2 + \ln 4)$$

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{16(2 + \ln 4) - 16}{2(2 + \ln 4)} \right) (16 - 16(2 + \ln 4))$$

$$m = \frac{y - 0}{x - 1.25}$$

نجد ميل المماس من المستقيم  $0 = 2x + 2x \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{-x}{y} = \frac{y - 0}{x - 1.25}$$

$$y^2 = -x^2 + 1.25x$$

$$y^2 = -x^2 + 1.25x$$

$$y^2 + x^2 = 1.25x$$

$$1.25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1.25} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

نجد  $y$

$$\left( \frac{4}{5} \right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3} = m$$

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3} \left( x - \frac{4}{5} \right)$$

عند  $x = -2$

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3} \left( -2 - \frac{4}{5} \right)$$