المرجع في الرياضيات

الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفصل الأول / الوحدة الأولى

الدرس الثاني

مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

أعزائي الطلاب: لأي ملاحظات على الدوسيه الرجاء ارسالها على رقم الواتس اب أعلاه

طبعة السنة 2024

نسخة مجانية ليستفيد منها الطلبة، فلا تتردد بنشرها لتعم الفائدة وكسب الأجر

ولا تنسونا من دعائكم

تأسيس الدرس الثاني : (مهم جداً)

مراجعة طرق التحليل : (مهم جداً لهذا الدرس والدروس اللاحقة)

طرق التحليل، مهمة جداً للحل وللاختصار والتبسيط وتجهيز الحل : (فهم وحفظ)

1) تحليل الفرق بين مربعين:

$x^2 - y^2 =$ (الجذر التربيعي للثاني + الجذر التربيعي للأول) (الجذر التربيعي للثاني – الجذر التربيعي للأول)

$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$

أمثلة :

1) $x^2 - 9 = (x - 3)\,(x + 3)$

2) $9x^2 - 1 = (3x - 1)\,(3x + 1)$

3) $25x^2 - 16y^2 = (5x - 4y)\,(5x + 4y)$

2) تحليل الفرق بين مكعبين:

$x^3 - y^3$

$=$ (الثاني تربيع + (الأول × الثاني) + الأول تربيع) (الجذر التكعيبي للثاني – الجذر التكعيبي للأول)

$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ملاحظة: القوس الثاني في التحليل يعتمد تحليله على القوس الأول.

أمثلة :

1) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

3) $27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

3) تحليل مجموع مكعبين:

$x^3 + y^3$

$=$ (الجذر التكعيبي للأول + الجذر التكعيبي للثاني) (الأول تربيع – الأول ضرب الثاني + الثاني تربيع)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

أمثلة :

1) $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

2) $8x^3 + 125 = (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$

3) $x^3 + 27y^3 = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$

ملاحظة 1): القوس الثاني في التحليل يعتمد تحليله على القوس الأول.

ملاحظة 2): القوس الثاني الناتج عن عملية تحليل فرق مكعبين أو مجموع مكعبين لا يحلل.

4) تحليل القوس مرفوع لتربيع:

$(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) =$ (الأول تربيع + (2 × الأول × الثاني) + الثاني تربيع)

$(x - y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) =$ (الأول تربيع – (2 × الأول × الثاني) + الثاني تربيع)

أمثلة :

1) $(2x + 3)^2 = (4x^2 + 12x + 9)$

2) $(x + 2y)^2 = (x^2 + 4xy + 4y^2)$

3) $(x - 5)^2 = (x^2 - 10x + 25)$

4) $(3x - 7)^2 = (9x^2 - 42x + 49)$

5) تحليل القوس مرفوع لتكعيب:

$(x+y)^3=(x^3+3x^2y+3x^2y+y^3)$ الاشارات جميعها موجبة

= (الأول تكعيب + (3 × الأول تربيع × الثاني) + (3 × الأول × الثاني تربيع) + الثاني تكعيب)

أمثلة :

1) $(x+2)^3=(x^3+6x^2+12x+8)$

2) $(x+5)^3=(x^3+15x^2+75x+125)$

$(x-y)^3=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$ اشارة الحد الثاني والرابع سالبة

= (الأول تكعيب − (3 × الأول تربيع × الثاني) + (3 × الأول × الثاني تربيع) − الثاني تكعيب)

أمثلة :

1) $(x-3)^3=(x^3-9x^2+27x-27)$

2) $(x-1)^3=(x^3-3x^2+3x-1)$

5) تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود معامل x^2 فيها يساوي 1:

$x^2 \mp bx \mp c =$ (الجذر التربيعي للأول ∓ العدد الأكبر) (الجذر التربيعي للأول + العدد الأقل)

إشارة الحد الوسط × إشارة الحد الأخير

1) إذا كانت إشارة الحد الأخير موجب : عددان حاصل ضربهما يساوي الحد الثابت، وناتج جمعهم يساوي معامل الحد الوسط.

2) إذا كانت إشارة الحد الأخير سالب: عددان حاصل ضربهما يساوي الحد الثابت، وناتج طرحهم يساوي معامل الحد الوسط.

إشارة الحد الأول × إشارة الحد الثاني

أمثلة :

1) $x^2+9x+14=(x+7)(x+2)$

2) $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

3) $x^2-3x-18=(x-6)(x+3)$

الدرس الثاني: مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مسألة اليوم: (صفحة 26)

كلما زاد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلصت مساحة البؤبؤ ، يستعمل الاقتران $A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالمليمترات المربعة ، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm)، وتعرف حساسية العين للضوء بأنها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع ، أجد اقتراناً يمثل حساسية العين للضوء .

$$A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$$

$$A'(b)=\frac{(1+4b^{0.4})(9.6b^{-0.6})-(40+24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$A'(b)=\frac{(9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})-(64b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$A'(b)=\frac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$A'(b)=\frac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

مشتقة ضرب اقترانين

مشتقة حاصل ضرب اقترانين : $f(x)=g(x)\times h(x)$

المشتقة: $f'(x)=\big(g(x)\times h'(x)\big)+\big(h(x)\pm g'(x)\big)$

المشتقة = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=(3x-2x^2)(5+4x)$

$$f'(x)=(3x-2x^2)(4)+(5+4x)(3-4x)$$

$$f'(x)=(12x-8x^2)+(15-20x+12x-16x^2)$$

$$f'(x)=(12x-8x^2)+(15-8x-16x^2)$$

$$f'(x)=12x-8x^2+15-8x-16x^2$$

$$f'(x)=-24x^2+4x+15$$

2) $f(x) = xe^x$

$$\acute{f}(x) = xe^x + (e^x \times 1)$$

$$\acute{f}(x) = xe^x + e^x$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 28)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$$\acute{f}(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$$

$$\acute{f}(x) = 14x^4 - 28x^3 + 42x - 4x^3 + 8x^2 - 12 + 21x^4 - 12x^3 - 28x^3 + 16x^2$$

$$\acute{f}(x) = 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$$

2) $f(x) = \ln x \, \cos x$

$$\acute{f}(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\acute{f}(x) = -\ln x \, \sin x + \frac{\cos x}{x}$$

مشتقة قسمة اقترانين

قاعدة: مشتقة حاصل قسمة اقترانين $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

المشتقة $\acute{f}(x) = \dfrac{(h(x) \pm \acute{g}(x)) - (g(x) \times \acute{h}(x))}{(h(x))^2}$ **، أي المشتقة** $= \dfrac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 29)

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(\frac{1}{x}) - (\ln x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \left[\frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}\right] \times \frac{x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 30)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x+1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1) - (2x+2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 1 - 2x - 2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x) - (\sin x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

مثال 3: من الحياة (صفحة 31)

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران : $T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

1) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

$$T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$$

$$\acute{T}(t)=\frac{(1+t^2)\times(4)-(4t)\times(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$\acute{T}(t)=\frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\acute{T}(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

إذن معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو : $\acute{T}(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

2) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t=2$ ، مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{T}(2)=\frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$

$$\acute{T}(2)=\frac{4-16}{25}$$

$$\acute{T}(2)=\frac{-12}{25}$$

$$\acute{T}(2)=-0.48$$

إذن عندما يكون الزمن $2h$ ،فإن درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 32)

سكان : يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t الزمن بالسنوات ، وP عدد السكان بالآلاف :

1) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

$$P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{(2t+9)\times(1000t)-(500t^2)\times(2)}{(2t+9)^2}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{2000t^2+9000t-1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{1000t^2+9000t}{(2t+9)^2}$$

2) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{P}(12)=\frac{1000(12)^2+9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{144000000+108000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{144000+108000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)=\frac{252000}{1089}$$

$$\acute{P}(12)\approx 231.405$$

إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنوياً تقريباً .

مشتقة المقلوب

يتم تطبيق هذه القاعدة عندما يكون الاقتران كسري، ويكون البسط ثابت، والمقام اقتران.

إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ يمكن استخدام قاعدة مشتقة المقلوب:

البسط: سالب مشتقة الاقتران مضروبة بالثابت نفسه، المقام: مربع الاقتران.

$$f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{-(\text{الثابت})\times(\text{مشتقة الاقتران})}{(\text{الاقتران})^2}$$

مثال 4: (صفحة 33)

أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

الحل بطريقة مشتقة المقلوب:

$$\acute{f}(t)=-\frac{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{-\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\left[\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\right]\times\frac{t^2}{t^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{1-t^2}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}$$

الحل بطريقة رفع اقتران المقام ويتم الاشتقاق بتطبيق قاعدة قوس مرفوع الى أسّ:

$$f(t)=\frac{1}{t+t^{-1}}$$

$$f(t)=(t+t^{-1})^{-1}$$

$$\acute{f}(t)=-(t+t^{-1})^{-2}(1-t^{-2})$$

$$\acute{f}(t)=(-1+t^{-2})(t+t^{-1})^{-2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{-1+t^{-2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{-\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\acute{f}(t)=\left[\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\right]\times\frac{t^2}{t^2}$$

$$\acute{f}(t)=\frac{1-t^2}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 33)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{1}{5x-x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-5+2x}{(5x-x^2)^2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\left(\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \left[\frac{-\left(\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}\right] \times \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\acute{f}(x) = -\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

مشتقة الاقترانات المثلثية

ملاحظة (1): قاعدة اشتقاق الاقترانات المثلثية، والاقتران وما هي مشتقته : (حفظ)

المشتقة $=$ نشتق الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي $\times$ مشتقة الزاوية .

1) $f(x) = \sin x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

3) $f(x) = \tan x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$

4) $f(x) = \cot x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

5) $f(x) = \sec x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$

6) $f(x) = \csc x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

ملاحظة (2): تحويلات مهمة للاقترانات المثلثية لغايات التبسيط والاختصار: (حفظ)

1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 2) $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

3) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 4) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

5) $\sin x = \dfrac{1}{\csc x}$ 6) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

7) $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ 8) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

ملاحظة (3): قواعد مهمة جداً : (حفظ)

1) القاعدة الذهبية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

3) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

2) القاعدة الفضية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

2) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

3) القاعدة البرونزية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

2) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

3) $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

مثال 5: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 34)

1) $f(x) = x^2 \sec x$

$$\acute{f}(x) = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$

2) $f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1 + \tan x) \times (-\csc x \cot x) - (\csc x) \times (\sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x\,(1) - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 35)

1) $f(x) = x\cot x$

$$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1)$$

$$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$$

2) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1+\sin x)^2}$$

المشتقات العليا

ملاحظة (1): رموز الاشتقاق:

1) اذا كان الاقتران يتضمن $f(x)$		2) اذا كان الاقتران يتضمن y			
المشتقة الأولى	$f'(x)$	المشتقة الأولى	$\frac{dy}{dx}$	أو	y'
المشتقة الثانية	$f''(x)$	المشتقة الثانية	$\frac{d^2y}{dx^2}$	أو	y''
المشتقة الثالثة	$f'''(x)$	المشتقة الثالثة	$\frac{d^3y}{dx^3}$	أو	y'''
المشتقة الرابعة	$f^{(4)}(x)$	المشتقة الرابعة	$\frac{d^4y}{dx^4}$	أو	y''''

مثال 6 (صفحة 36): أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

المشتقة الأولى $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ المشتقة الثالثة $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الثانية $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ المشتقة الرابعة $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

أتحقق من فهمي: ص 36

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران : $f(x) = x\sin x$

$$f(x) = x\sin x$$

$$\boxed{f'(x) = x\cos x + \sin x}$$

$$f''(x) = (x)(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$$

$$f''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x$$

$$\boxed{f''(x) = 2\cos x - x\sin x}$$

$$f'''(x) = -2\sin x - (x\cos x + \sin x)$$

$$f'''(x) = -2\sin x - x\cos x - \sin x$$

$$\boxed{f'''(x) = -3\sin x - x\cos x}$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 36)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\times(3x^2)-(x^3)\times(2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$$

2) $f(x) = x^3\sec x$

$$f'(x) = (x^3)(\sec x\tan x) + (\sec x)(3x^2)$$

$$f'(x) = x^3\sec x\tan x + 3x^2\sec x$$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\cos x + x\sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

4) $f(x) = e^x(\tan x - x)$

$$\acute{f}(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)\,(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = (e^x)(\tan^2 x) + (\tan x - x)\,(e^x)$$

$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x \leftarrow$ قاعدة فضية

$$\acute{f}(x) = e^x\tan^2 x + e^x \tan x - xe^x$$

5) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x\cos x - e^x\sin x - e^x\sin x - e^x\cos x}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-e^x 2\sin x}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2\sin x}{e^x}$$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$$\acute{f}(x) = (x^3)\,(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)\,(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$

$$\acute{f}(x) = x^3\cos x + 3x^2\sin x - x^2 \sin x + 2x\cos x$$

$$\acute{f}(x) = x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x$$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}} + 3)$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + \left(\frac{1}{3} \times 3x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

8) $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

$$f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x - \sec^2 x \tan x + \sec x \tan x + \sec^2 x \tan x}{(1-\sec x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$$

9) $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$$f(x) = \frac{\frac{2x-1}{x}}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \times \frac{1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2-6x-(4x^2-6x-2x+3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2-6x-4x^2+6x+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

10) $f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

$$f(x) = \left(x^5+2x^3-x^3-2x\right)(x^2+x+1)$$

$$\acute{f}(x) = \left(x^5+2x^3-x^3-2x\right)(2x+1)+(x^2+x+1)(5x^4+6x^2-3x^2-2)$$

$$\acute{f}(x) = \left(x^5+2x^3-x^3-2x\right)(2x+1)+(x^2+x+1)(5x^4+3x^2-2)$$

$$\acute{f}(x) = \left(2x^6+4x^4-2x^4-4x^2+x^5+2x^3-x^3-2x\right)+\left(5x^6+5x^5+5x^4+3x^4+3x^3+3x^2-2x^2-2x-2\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(2x^6+2x^4-4x^2+x^5+x^3-2x\right)+\left(5x^6+5x^5+8x^4+3x^3+x^2-2x-2\right)$$

$$\acute{f}(x) = 2x^6+2x^4-4x^2+x^5+x^3-2x+5x^6+5x^5+8x^4+3x^3+x^2-2x-2$$

$$\acute{f}(x) = 7x^6+6x^5+10x^4+4x^3-3x^2-4x-2$$

11) $f(x) = (\csc x+\cot x)^{-1}$

$$\acute{f}(x) = -1(\csc x+\cot x)^{-2}\,(-\csc x\cot x-\csc^2 x)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\csc x\cot x+\csc^2 x}{(\csc x+\cot x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\csc x\,(\cot x+\csc x)}{(\csc x+\cot x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\csc x}{\cot x+\csc x}$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ،

و كان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$

فأجد كلا مما يأتي:

12) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$

$(fg)'(0) = (5 \times 2) + (-1 \times -3)$

$(fg)'(0) = (10) + (3)$

$(fg)'(0) = 13$

13) $(\frac{f}{g})'(0)$

$$(\frac{f}{g})'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

$$(\frac{f}{g})'(0) = \frac{(-1 \times -3) - (5 \times 2)}{(-1)^2}$$

$$(\frac{f}{g})'(0) = \frac{3 - 10}{1}$$

$$(\frac{f}{g})'(0) = -7$$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

$= 7f'(0) - 2(fg)'(0)$

$= 7(-3) - 2(13)$

$= -21 - 26$

$= -47$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

15) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}\quad ,x=\ -2$

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)\times(2x)-(x^2-4)\times(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x^3+8x)-(2x^3-8x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{(x^2+4)^2\times(16)-\ (16x)\times(2)(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4}}$$

$$f''(-2)=\frac{((-2)^2+4)^2\times(16)-\ (16(-2))\times(2)((-2)^2+4)\times(2(-2))}{((-2)^2+4)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{(8)^2(16)-\ (-32)(2)(8)(-4)}{(8)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{8(16)-\ (-32)(2)(-4)}{(8)^3}$$

$$f''(-2)=\frac{128-\ 256}{512}$$

$$f''(-2)=\frac{128-\ 256}{512}$$

$$\boxed{f''(-2)=-\frac{1}{4}}$$

16) $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\ ,x=\ 8$

$$f(x)=\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{1+\sqrt[3]{x}}$$

تحليل مجموع مكعبين

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x)=1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{3} \times -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right) + \left(-\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^4}}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9(2)^5} - \frac{2}{9(2)^4}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9(32)} - \frac{2}{9(16)}$$

$$f''(8) = \frac{1}{9(16)} - \frac{2}{9(16)}$$

$$f''(8) = \frac{1}{144} - \frac{2}{144}$$

$$f''(8) = -\frac{1}{144}$$

17) $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\ , x = 4$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(-1) - (1-x)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2x}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1 + x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2\sqrt{x} - 2x - 1 + x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{x} - 2x - 1 + x}{2\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{4\sqrt{4^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{32}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتني عند النقطة المعطاة:

18) $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}\ ,(0, \frac{1}{2})$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1 + e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

ميل المماس عند النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هو :

$$\acute{f}(0) = \frac{1 - 0e^x}{(1+e^0)^2}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{1}{(1+1)^2}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(x - (0))$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

19) $f(x) = e^x \cos x + \sin x\ ,(0, 1)$

$$\acute{f}(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + (\cos x)$$

ميل المماس عند النقطة $(0, 1)$ هو :

$$\acute{f}(0) = (e^0)(-\sin 0) + (\cos 0)(e^0) + (\cos 0)$$

$$\acute{f}(0) = (1)(0) + (1)(1) + (1)$$

$$\acute{f}(0) = 2$$

معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1$$

أثبت صحة كل مما يأتي معتمداً أن $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x , \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

20) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

قاعدة(1) $\leftarrow$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{(\cos x)(0) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(\sin x)(0) - (1)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23) $f'(x) = 2 - \frac{2}{x},\ f''(x)$

$$f'(x) = 2 - 2x^{-1}$$

$$f''(x) = 2x^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^2}$$

24) $f'''(x) = 2\sqrt{x},\ f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)} = \frac{2(1)}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

25) $f^{(4)}(x) = 2x + 1,\ f^{(6)}(x)$

$$f^{(5)}(x) = 2$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

26) نباتات هجينة : وجد باحثون زراعيون انه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من نبات تباع الشمس h بالأمتار ، بإستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور . أجد معدل تغير النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t) = \frac{3t^2}{4 + t^2}$$

$$\acute{h}(t) = \frac{(4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4 + t^2)^2}$$

$$\acute{h}(t) = \frac{(24t + 6t^3) - (6t^3)}{(4 + t^2)^2}$$

$$\acute{h}(t) = \frac{24t + 6t^3 - 6t^3}{(4 + t^2)^2}$$

$$\acute{h}(t) = \frac{24t}{(4 + t^2)^2}$$

إذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = e^x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (e^x)(-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(e^x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \cos x + e^x \cos x$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x}$$

28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

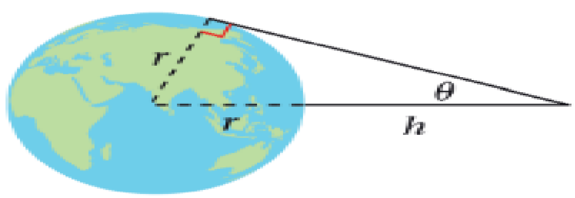
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(e^x)(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2e^x \cos x + 2e^x \sin x) - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x + 2e^x \sin x - 2e^x \sin x$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x}$$

أقمار صناعية : عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض ، فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض ،وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبينة في في الشكل المجاور . إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً.



29) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

$$\csc\theta = \frac{r+h}{r}$$

$$r + h = r\csc\theta$$

$$h = r\csc\theta - r$$

$$\boxed{h = r\,(\csc\theta - 1)}$$

30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ افترض أن $r = 6371\ km$

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371(-2 \times \sqrt{3})$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} \approx 22070\ km/rad$$

30) إذا كان : $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$\acute{f}(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + (-4x^{-3})$$

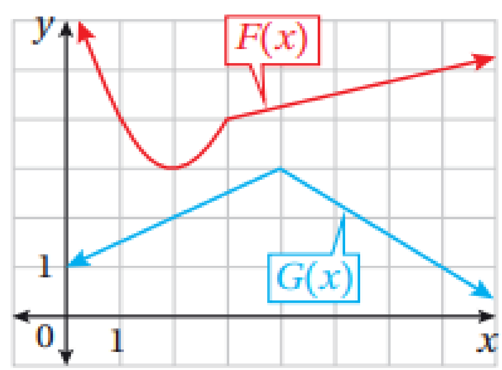
$$\acute{f}(x) = \frac{9}{x} - \frac{4}{4x^3}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{9x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}$$

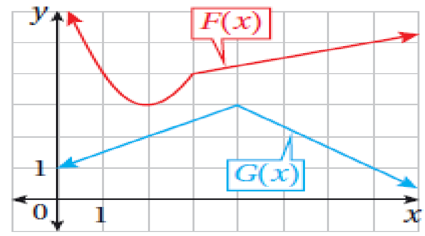
$$\acute{f}(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$



32) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $F(x)$ و $G(x)$

إذا كان $P(x) = F(x)G(x)$ و $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



32) $P'(2)$

$$P(x) = F(x)G(x)$$

$$P'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$

$G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$ و$(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-2}{4-2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$F'(2)$ ميل المماس الأفقي ويساوي صفراً .

$$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

$$P'(2) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0$$

$$P'(2) = \frac{3}{2}$$

33) $Q'(7)$

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$Q'(x) = \frac{G(x) \times F'(x) - F(x) \times G'(x)}{\left(G(x)\right)^2}$$

$$Q'(7) = \frac{G(7) \times F'(7) - F(7) \times G'(7)}{\left(G(7)\right)^2}$$

$F'(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(7,5)$ و$(3,4)$ ويساوي $\frac{1}{4}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-4}{7-3}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$\acute{G}(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(7,1)$ ويساوي $\frac{2}{3}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-1}{4-7}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2}$$

$$\acute{Q}(7) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{10}{3}}{1} = \frac{43}{12}$$

مهارات التفكير العليا: (صفحة 38)

تبرير إذا كان : $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) أجد ميل المماس عند الأصل.

$$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$y = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$y = \frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)\times(e^x)-(e^x-1)\times(e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x + e^x - 2e^x + e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2e^0}{(e^0+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

35) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y ، مبررا ً إجابتي :

إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرا ً ، أي أن : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $e^x = 0$ ، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x ،ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية .

تحد : إذا كان $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، حيث $x \neq 1$ ، فأجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعا ً :

36) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1) \times (1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

37) أعد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير x (x اقتران بالنسبة إلى y) ، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x + 1 = y(x-1)$$

$$x = yx - y - 1$$

$$x - yx = -y - 1$$

$$x(1-y) = -y - 1$$

$$x = \frac{-y-1}{1-y}$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)\times(1) - (y+1)(1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1-y-1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy}=-2\times\frac{(x-1)^2}{4}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(x-1)^2}{-2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

تبرير : إذا كان : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

39- أثبت أن $\acute{\acute{f}}(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}$ ، مبرراً إجابتي .

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{(x^3)\left(-\frac{2}{x}\right)-(1-2\ln x)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{(-2x^2)-(3x^2-6x^2\ln x)}{x^6}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

40) أجد قيمة المقدار : $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

$$= x^4 \times \frac{6\ln x - 5}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 \times 1 - 2\ln x) + (2 \times \ln x) + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 - 8\ln x) + (2\ln x) + 1$$

$$= 6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$$= 0$$

كتاب التمارين

الدرس الثاني : مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)(\cos x) - (\sin x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

$$\acute{f}(x) = (-) - \csc x \cot x - \cos x$$

$$\acute{f}(x) = \csc x \cot x - \cos x$$

3) $f(x) = \dfrac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right)(1) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x - c)(1 - \frac{c}{x^2})}{(\frac{x^2 + c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x + \frac{c}{x} - c + \frac{c^2}{x^2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2 + c)^2}$$

4) $f(x) = x \cot x$

$$\acute{f}(x) = x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1)$$

$$= x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1)$$

$$= -x \csc^2 x + \cot x$$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

$$\acute{f}(x) = 4 - (x^2 \sec^2 x + \tan x\,(2x)$$

$$= 4 - x^2 \sec^2 x - 2x \tan x$$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2(-\sin x) - \cos x(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^4}$$

$$= \frac{x(-x\sin x - 2\cos x)}{x.\, x^3}$$

$$= \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$$

7) $f(x)=x(1-\frac{4}{x+3})$

$$f(x)=x-\frac{4x}{x+3}$$

$$\acute{f}(x)=1-\frac{(x+3)(4)-(4x)(1)}{(x+3)^2}$$

$$=1-\frac{4x+12-4x}{(x+3)^2}$$

$$=1-\frac{12}{(x+3)^2}$$

8) $f(x)=\frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

$$f(x)=\frac{3-3\sin x}{2\cos x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(2\cos x)(-3\cos x)-(3-3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$$

$$=\frac{-6\cos^2 x+6\sin x-6\sin^2 x}{(2\cos x)^2}$$

$$=\frac{-6(\cos^2 x-\sin x+\sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$

$$=\frac{-6(1-\sin^2 x-\sin x+\sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$ قاعدة $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$$=\frac{-6(1-\sin x)}{4\cos^2 x}$$

$$=\frac{-6+6\sin x}{4\cos^2 x}$$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

$$\acute{f}(x) = (x+1)e^x + e^x(1)$$
$$\acute{f}(x) = xe^x + e^x + e^x$$
$$\acute{f}(x) = xe^x + 2e^x$$
$$\acute{f}(x) = (x+2)e^x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x) = x^2 \cos x \ \ , (\frac{\pi}{2}, 0)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = x^2 \cos x$$
$$\acute{f}(x) = x^2(-\sin x) + \cos x\,(2x)$$
$$\acute{f}(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$$
$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\frac{\pi}{2})^2 \sin(\frac{\pi}{2}) + 2(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}.(1) + \pi\,(0)$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **معادلة المماس:**

$$y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}(x - \frac{\pi}{2})$$
$$y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$$

11) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$, $(\pi, -1)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$\acute{f}(\pi) = \frac{1+\sin\pi}{\cos^2\pi}$$

$$= \frac{1+(0)}{(-1)^2}$$

$= \dfrac{1}{1} = 1$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$:معادلة المماس

$$y - (-1) = 1(x - \pi)$$

$$y + 1 = x - \pi$$

$$y = x - \pi - 1$$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $\acute{f}(x) = 0$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2)(2) - (2x-1)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x + 2}{x^3} = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

$$\acute{f}(1) = \frac{2(1) - 1}{(1)^2}$$

$$= \frac{2 - 1}{1}$$

$$= 1$$

النقطة المطلوبة $(1, 1)$

$$13) \quad h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\acute{h}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$2x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$\acute{h}(0) = \frac{0^2}{0^2 + 1}$$

$$\acute{h}(0) = 0$$

النقطة هي : $(0, 0)$

$$14)\quad g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{(8x-16)}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{(e^x)(8) - (8x-16)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8e^x - 8xe^x + 16e^x}{e^{2x}}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{24e^x - 8xe^x}{e^{2x}}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{24-8x}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x}$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x} = 0$$

$$8(3-x) = 0$$

$$3 - x = 0$$

$$x = 3$$

$$\acute{g}(x) = \frac{8(3-x)}{e^x}$$

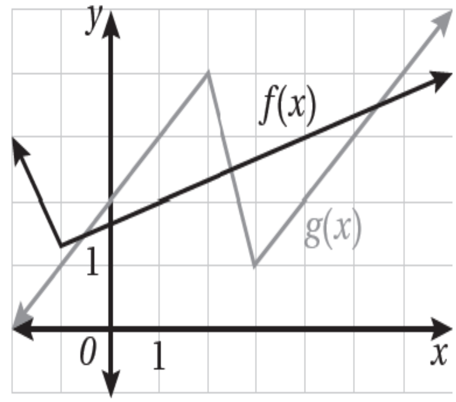
$$\acute{g}(3) = \frac{8(3-3)}{e^3}$$

$$\acute{g}(3) = 0$$

النقطة هي : $(3,0)$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $u(x) = f(x)g(x)$ ،

وكان $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



15) $\acute{u}\,(1)$

$$\acute{u}\,(x) = f(x).\,\acute{g}(x) + g(x).\acute{f}(x)$$

$$\acute{u}\,(1) = f(1).\,\acute{g}(1) + g(1).\acute{f}(1)$$

$$\acute{u}\,(1) = (2).(1) + (3).\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\acute{u}\,(1) = 3$$

16) $\acute{v}\,(x) = \dfrac{g(x).\acute{f}(x) - f(x).\,\acute{g}(x)}{(g(x))^2}$

$$\acute{v}\,(4) = \frac{g(4).\acute{f}(4) - f(4).\,\acute{g}(4)}{(g(4))^2}$$

$$\acute{v}\,(4) = \frac{(2).\left(\frac{1}{3}\right) - (3).(1)}{(2)^2}$$

$$\acute{v}\,(4) = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4}$$

$$\acute{v}\,(4) = \frac{-\frac{7}{3}}{4}$$

$$\acute{v}\,(4) = -\frac{7}{12}$$

17) إذا كان $f(x) = x\sec x$ ، فأثبت أن $f'(x) = \sec x(1 + x\tan x)$.

$$f(x) = x\sec x$$

$$f'(x) = (x).(\sec x\tan x) + (\sec x).(1)$$

$$f'(x) = x\sec x\tan x + \sec x$$

$$f'(x) = \sec x(1 + x\tan x)$$

18) إذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجد $f'(x)$ ، و $f''(x)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(x).\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x).(1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2).\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x).(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

يمثل الاقتران : $v(t)=\frac{10}{2t+15}\ ,t\geq 0$ السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم من وضع السكون ، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية :

19) أجد تسارع السيارة عندما $t=5$.

$$v(t)=\frac{10}{2t+15}$$

$$a(t)=\frac{(2t+15).(0)-(10).(2)}{(2t+15)^2}$$

$$a(t)=\frac{-20}{(2t+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{(2(5)+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}$$

$$a(5)=\frac{-20}{625}$$

$$a(5)=-\frac{4}{125}=\ -0.032\ \ ft/s^2$$

20) أجد تسارع السيارة عندما $t=20$.

$$a(20)=\frac{-20}{(2(20)+15)^2}$$

$$a(20)=\frac{-20}{(40+15)^2}$$

$$a(20)=\frac{-20}{3025}$$

$$a(20)=-\frac{4}{605}=\ -0.007\ \ ft/s^2$$

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ ، حيث t الزمن بالثواني ، والأبعاد بالسنتميترات ، أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = (\sqrt{t}).(6t + 5)$$

$$A = (t)^{\frac{1}{2}}.(6t + 5)$$

$$A = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{2}.6t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.5t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \quad cm^2/s$$