الحسنات في 2025 / 2024

الرياضيات

الثاني الثانوي العلمي 2007

$\frac{dy}{dx}$ وحدة التفاضل $f'(x)$

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 77 88 531 078

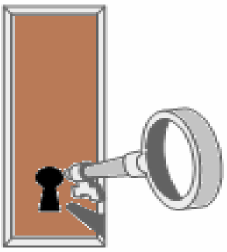
- مراجعة أهم المفاهيم والقوانين الضرورية لطالب التوجيهي
- أمثلة محلولة على كل مفهوم في الدرس
- حل جميع تمارين وتدريبات كتابي الطالب والتمارين
- جميع أسئلة الوزارة / السنوات السابقة ، مع إجابة الموضوعية منها
- اختبار نهاية كل درس ، ثم اختبار نهاية الوحدة
- عدد كبير جداً من الأسئلة الموضوعية ، وأسئلة مقالية مميزة

اللهم انصر أهلنا في فلسطين

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

I LOVE MATH SAID NO ONE EVER!

2 ∞ & >



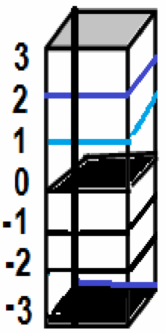
مراجعة تأسيسية مختصرة

تذكير بأهم المفاهيم الأساسية قبل التوجيهي

1) الأعداد السالبة والموجبة

أ) الجمع والطرح : عند جمع عددين نعتبر الموجب (رصيد) أو (ربح) والسالب (دين) أو (خسارة)

مثال : $(-8) + (+3)$: تعني إذا كان عليك دين مقداره (8) دنانير وحصلت على رصيد لتسديد الدَين مقداره (3) دنانير ، بعد التسديد ما هو وضعك المالي ؟



الجواب : يبقى عليك (5) دنانير دين ، إذاً الناتج (5 –)

أو : $(-8) + (+3)$:قمتَ بعمليتين تجاريتين خسرتَ في الأولى (8 JD) وربحتَ في الثانية (3 JD) ماذا حدث لرأسمالك الأصلي ؟ زادَ أم نقص ؟
الجواب : نقصَ بمقدار (5) دنانير، إذاً الناتج (5–)

* * * كذلك يمكن أن تعتبر الموجب صعود والسالب نزول: $(-3) + (+ 5)$:
أنت في الطابق الثالث تحت الأرض (3–) وصعدت خمس طوابق ، فإلى أي طابق تصل ؟ (الثاني فوق الأرض (2+))

أيضاً :$(-2)+(-3)$:أنت في الطابق الثاني تحت الأرض ونزلت ثلاث طوابق فتصبح في الخامس تحت الأرض (5–)

كما يمكن استخدام القاعدة التالية:

قاعدة الجمع للسالب والموجب

نضع إشارة العدد الذي قيمته المطلقة أكبر

متشابهان في الإشارة	مختلفان في الإشارة
++ أو – –	+– أو –+
مجموعهما	طرحهما

مع ملاحظة أن (العدد الذي قيمته المطلقة أكبر) تعني العدد الأكبر بعد حذف الإشارات

مثلاً :(5 –) قيمته المطلقة أكبر من (3+) لأن (5) أكبر من (3)

(7 –) قيمته المطلقة أكبر من (4 –) لأن (7) أكبر من (4)

مثال :

1) $(-5) + (+3) = -2$ أو $(-5 + 3 = -2)$ 5 أكبر من 3 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (2 –)

2) $(-4) + (-2) = -6$ أو $(-4 - 2 = -6)$ 4 أكبر من 2 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً ولأنهما متشابهان في الإشارة نجد المجموع (نجمع) فيكون الجواب (6 –)

3) $(-2) + (+6) = +4$ أو $(-2 + 6 = +4)$ 6 أكبر من 2 وإشارتها موجبة لذلك الناتج سيكون موجباً ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (4 +)

ملاحظة(1): إذا التقت إشارتا سالب فنحولهما إلى موجب،مثلا : $-2 - -5 = -2 + 5$

أما إذا التقت إشارتا موجب وسالب(+ –) أو العكس (– +) فنحولهما إلى سالب

$-4 -+ 5 = -4 - 5$

$\left.\begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}\right\} \Rightarrow -$	$- - \Rightarrow +$
إشارتان مختلفتان دائماً سالب سالب سالب تعني موجب

ملاحظة(2): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العدد فهو موجب : $6 = +6$

فعندما لا يكون هناك أقواس(وهذا هو الأغلب مثل : $-3 + 7$) نعتبر العملية التي أمام العدد هي إشارته فهنا 3 سالبة و7 موجبة ، والأكبر موجب ⇐ الناتج موجب : مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح :الناتج (+4)

ملاحظة(3):إذا لم يكن هناك إشارة أمام العددين وكان الجواب (لا يجوز) – أي دون التعامل مع السالب–

فنقوم بتبديل مكاني العددين ونضع إشارة سالب أمام الناتج : $a - b = -(b - a)$

$3 - 5 = -2$, $4 - 9 = -(9 - 4) = -5$

مثلا:

(على أساس أن 9 سالبة و 3 موجبة ⇐ نطرح) $1)\ -9 + 3 = -6$

(على أساس أن 7 سالبة و 2 سالبة ⇐ نجمع) $2)\ -7 - 2 = -9$

(4 موجبة و7 سالبة وهي الأكبر ،مختلفان في الإشارة ، إذاً نطرح) $3)\ 4 - 7 = -3$

(كلاهما سالب ⇐ نجمع) $4)\ -5x - 2x = -7x$

ملاحظة : لن تجد مثل هذه الأسئلة في التوجيهي (بهذه الطريقة) ، ولكن ستجدها ضمن مسائل التحليل إلى العوامل وحل المعادلات أو ضمن مسائل أكبر

ب) الضرب والقسمة:عند الضرب أو القسمة لا يوجد أكبر

(متشابهان في الإشارة الناتج موجب) ،

(مختلفان في الإشارة الناتج سالب)

مثال :

1) $(-5) \times (+3) = -15$

2) $(-4) \times (-2) = 8$

3) $(+6) \times (-2) = -12$

4) $(-5) \div (+5) = -1$

5) $(-8) \div (-2) = 4$

قاعدة الضرب والقسمة للسالب والموجب

↓

لا يوجد إشارة أكبر

متشابهان في الإشارة	مختلفان في الإشارة
++ أو – –	+– أو –+
↓	↓
موجب (+)	سالب (–)

أخطاء قاتلة :بحجة سالب وسالب = موجب (الصواب(–8) لأنه جمع وليس ضرباً) $1)\ -3 - 5 = +8$

لأن إشارة الأكبر موجبة (الصواب(–15) لا يوجد أكبر عند الضرب) $2)\ -3\times5 = +15$

(الصواب(–8)) لأن كلاهما سالب فنجمع) $3)\ -4 - 4 = 0$

السالب والموجب ... باختصار

يتم الحل على مرحلتين : حسب العملية

	جمع أو طرح	ضرب أو قسمة
المرحلة الأولى	نحدد إشارة الناتج من خلال (إشارة الأكبر) $-5-6=-$ $-3+7=+$ $4-9=-$	نحدد إشارة الناتج من خلال: متشابهان في الإشارة (- - أو ++) ⇐ الناتج موجب مختلفان في الإشارة (- +أو + -) ⇐ الناتج سالب (لا يوجد إشارة الأكبر) $(-2)\times(-3)=+$ $(-6)\times(+4)=-$ $(+8)\div(-4)=-$
المرحلة الثانية	إيجاد قيمة الناتج متشابهان في الإشارة ⇐ نجمع (- - أو ++) مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح (- +أو + -) $-5-6=-11$ $-3+7=+4$ $4-9=-5$	إيجاد قيمة الناتج نضرب أو نقسم حسب العملية المطلوبة $(-2)\times(-3)=+6$ $(-6)\times(+4)=-24$ $(+8)\div(-4)=-2$

Hasanat

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الأعداد غير النسبية (I):
أعداد لا يُمكن كتابتها في صورة نسبة بين عددين صحيحين.
$\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt{10},$
$0.070070007...$

الأعداد النسبية (Q):
$\{\frac{p}{q}, p, q \in Z; q \neq 0\}$

الأعداد الصحيحة (Z):
$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

الأعداد الكلية (W):
$\{0, 1, 2, 3, ...\}$

الأعداد الحقيقية (R): الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا.

2) الكسور العادية

أ) قاعدة الجمع والطرح : نضرب بسط الأول في مقام الثاني ثم(±) ثم بسط الثاني في مقام الأول ونقسم على حاصل ضرب المقامين

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm c \times d}{b \times d}}$$

1) $\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{2\times3+4\times5}{5\times3}=\frac{6+20}{15}=\frac{26}{15}$

2) $\frac{5}{6}-\frac{10}{3}=\frac{5\times3-10\times6}{6\times3}=\frac{15-60}{18}=\frac{-45}{18}=-\frac{5}{2}$

3) $7-\frac{4}{5}=\frac{7}{1}-\frac{4}{5}=\frac{7\times5-4\times1}{1\times5}=\frac{35-4}{5}=\frac{31}{5}$

4) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{y-3}=\frac{3y-9+2x+2}{(x+1)(y-3)}=\frac{3y+2x-7}{(x+1)(y-3)}$

$\frac{1}{5}+\frac{4}{9}=\frac{9+20}{45}=\frac{29}{45}$

$\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

ملاحظة

$\frac{-3}{7}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$

تحويل العدد الكسري إلى كسر عادي

$4\frac{1}{2}=\frac{4\times2+1}{2}=\frac{9}{2}$

$3\frac{7}{10}=\frac{(3\times10)+7}{10}$

$3\frac{4}{5}=\frac{3\times5+4}{5}=\frac{19}{5}$

ب) قاعدة الضرب:
نضرب بسط الأول في بسط الثاني مقسوما
على حاصل ضرب مقام الأول في مقام الثاني

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$b\neq 0\ ;\ c\neq 0$$

$$\frac{-2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{-2\times 1}{5\times 6}=\frac{-2}{30}$$

ج) قاعدة القسمة:نحول القسمة إلى ضرب
ونقلب المقسوم عليه ثم نطبق قاعدة الضرب السابقة

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{-4}{5}\div 2=\frac{-4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-4\times 1}{5\times 2}=\frac{-2}{5}$$

$$\frac{5}{-6}\div\frac{-3}{2}=\frac{5}{-6}\times\frac{+2}{-3}=\frac{5\times 2}{-6\times(-3)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

ملاحظة :
أيٍ عدد أو متغير يوجد معه (3 واحدات) مخفية نُظهر منها ما يلزم للعملية الحسابية المطلوبة
مثلاً:

$$6=\frac{1\times 6^{1}}{1}$$

$$7\times 7^{3}=7^{1}\times 7^{3}=7^{1+3}=7^{4}$$

$$3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2\times 1}{1\times 5}=\frac{17}{5}$$

$$4x+4=4x+4\times 1=4(x+1)$$

3) الكسور العشرية

يُسمى الكسر العادي الذي مقامه (10) أو أحد قواها (10 ، 100 ، 1000 ، ...) بالكسر العشري

مثل : $\frac{6}{1000},\frac{123}{10},\frac{4}{100}$ ويمكن كتابة الكسر العشري باستخدام الفاصلة (.)

بشرط أن يكون عدد المنازل على اليمين مساويا لعدد الأصفار أمام العدد (1) في المقام

مثلاً : $\frac{6}{1000}=0.006$, $\frac{123}{10}=1.23$, $\frac{4}{100}=0.04$

جمع وطرح الكسور العشرية :عند الجمع والطرح نكتب العددين تحت بعضهما بحيث كون الفاصلة تحت الفاصلة

$$17-8.43=\begin{array}{r} 17.0 \\ -\ 8.43 \\ \hline 8.57 \end{array}$$

$$78.9-37.43=\begin{array}{r} 78.90 \\ -\ 37.43 \\ \hline 41.47 \end{array}$$

ضرب الكسور العشرية :عند الضرب نفترض عدم وجود الفواصل ونضرب العددين الصحيحين
وفي الناتج نضع الفاصلة بحيث يكون عدد المنازل على اليمين مساويا لمجموع عددي
المنازل على يمين العددين

$$0.3\times 0.4=0.12\quad ,\quad 0.03\times 0.4=0.012\quad ,\quad (0.3)^{2}=0.3\times 0.3=0.09$$

قسمة الكسور العشرية :عند القسمة يجب أن يكون المقسوم عليه عددا صحيحا ، لذلك نُحرك الفاصلة إلى اليمين
في المقسوم والمقسوم عليه حتى يصبح الأخير صحيحا ثم نقسم إلى أن نصل الفاصلة فنرفعها إلى الناتج

$$5\div 1.25=500.0\div 123.0=4$$

4) المقادير الجبرية:

$\boxed{x + x = 2x}$

$\boxed{x \times x = x^2}$

$\boxed{\frac{x}{x} = 1}$

1) مفهوم (الحد) في الرياضيات :هو أي مقدار جبري لا يحتوي على جمع (+) أو طرح (–)
مثلاً : (3xy) حد واحد بينما (5 – 4x + 2y) يتكون من 3 حدود

يتكون الحد من جزأين : عددي وحرفي ، ويسمى العددي بالمعامل
مثلاً : (6xy) معامله (6) كذلك ($-3x^2$) معامله (– 3)

2) يتشابه حدان إذا كان فيهما نفس المتغيرات بنفس القوى

مثلاً : ($3x^2y$) ، ($5x^2y$) متشابهان ، بينما ($4x^2y^3$) ، ($5xy^3$) غير متشابهين

3) لا يمكن جمع أو طرح إلا الحدود الجبرية المتشابهة – عندها نجمع أو نطرح المعاملات

مثلاً : ($5xy^3 + 4xy^3 = 9xy^3$) بينما ($3xy^2 + 4xy^3 =$) لا يمكن جمعهما لأنهما غير متشابهين

4) عند الضرب أو القسمة لا يشترط التشابه حيث نضرب أو نقسم المعاملات
ونجمع الأسس عند الضرب ونطرحها عند القسمة : مثلاً : $(3x^2)(4x^3) = 12x^5$

ملاحظة : (x + 3 = 8) هذه معادلة تعني : ما هو العدد الذي إذا أضيف إليه (3) يعادل (8)؟ ، والجواب (5)

أما (x + 5) فهو مقدار جبري (حيث لا يحوي إشارة =)

---

5) القوس المسبوق بإشارة سالب : نعكس جميع الإشارات داخله

مثلا: $6x^2 + 5x - 8 - (4x^2 - 3x + 1) = 6x^2 + 5x - 8 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^2 + 8x - 9$

---

6) الأسس (القوى) :

$a, b \in R \quad , \quad n, m \in Z \Rightarrow$

$\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$

$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}} \quad , \quad a \neq 0$

$\boxed{(a^n)^m = a^{n \times m}}$

$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}$

$\boxed{(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad , a, b \neq 0$

$\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$

$\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$

1) الضرب المكرر يتم تحويله إلى أسس مثلاً :
$(5)(5)(5) = 5^3$

2) عند الضرب (وتساوي الأساسات) نجمع الأسس :
$(4^3)(4^2) = 4^{2+3} = 4^5$

3) عند القسمة (وتساوي الأساسات) نطرح الأسس مثلاً :
$7^8 \div 7^2 = 7^{8-2} = 7^6$

4) في حالة قوة القوة نضرب الأسس مثلاً : $(7^3)^2 = (7)^{3(2)} = 7^6$

5) توزيع القوى ، مثلاً : $(x\,y)^2 = (x)^2\,(y)^2$
كذلك $(3x)^2 = 9x^2$

$\boxed{(5^2)^3 \neq 5^{(2)^3} = 5^8}$ $\boxed{(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6}$

6) القوة السالبة يتم تغيير مكانها من البسط إلى المقام أو العكس لتصبح موجبة :
أو نعكس البسط والمقام

$\cancel{3^{-2} = -9}$

$\boxed{3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}}$ $\boxed{8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}}$ $\boxed{\frac{1}{9^{-2}} = \frac{9^2}{1} = \frac{81}{1} = 81}$ $\boxed{(\frac{3}{5})^{-2} = (\frac{5}{3})^{+2} = \frac{25}{9}}$ $\boxed{(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n}$

7) القوة الكسرية يتم تحويلها إلى جذر :

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$(25)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = (5)^3 = 125$$

$$(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8)^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

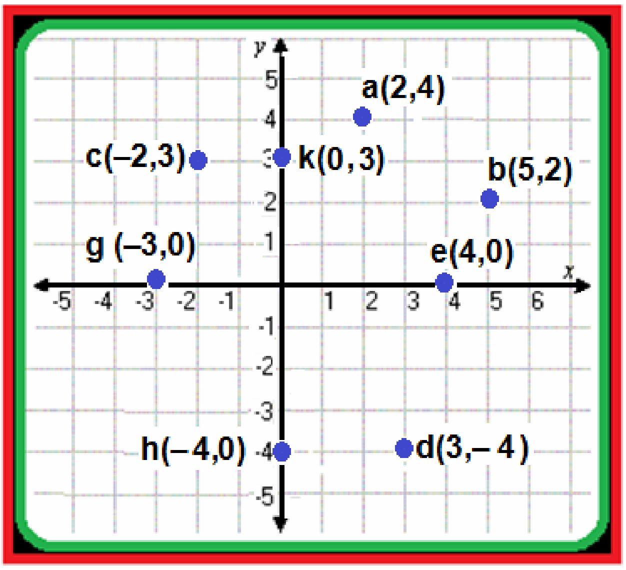
ملاحظة : أي عدد غير الصفر قوة صفر يساوي 1 ، مثلاً : $5^0 = 1$ ، $(2022)^0 = 1$ ، $(1443)^0 = 1$

---

7) المستوى الديكارتي : يتكون من مستقيمين متعامدين : الأفقي يسمى (x) ، والعمودي (y)

كل نقطة على المستوى (زوج مرتب) تتكون من جزأين : x و y ....(x ، y)

ولتحديد موقع النقطة (x ، y) ، نبدأ من نقطة الأصل ونتجه يمينا (إذا كان العدد موجبا) أو يسارا (في حالة السالب) ثم إلى الأعلى (موجب) أو الأسفل



8) الاقتران : صورة عدد ما في الاقتران هي القيمة الناتجة عن استبدال (x) بذلك العدد

مثلاً :

$f(x) = 3x - 1$

$f(2) = 3(2) - 1$

$= 5$

أي أن صورة العدد (2) في الاقتران f هي (5)

والزوج المرتب (5 ، 2) يقع على منحنى الاقتران f

$g(x) = 5x^2 + 2x - 4$

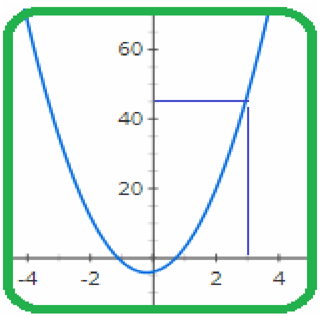
$g(3) = 5(3)^2 + 2(3) - 4$

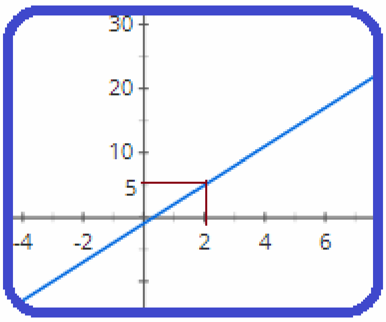
$= 47$

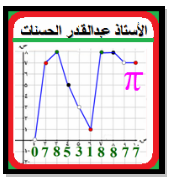
أي أن صورة العدد (3) هي (47)

والزوج المرتب (47 ، 3) يقع على منحنى الاقتران g

عند إيجاد صور عدد كبير من القيم وتعيين الأزواج المرتبة على المستوى الديكارتي ، يتشكل منحنى الاقتران







9) فك الأقواس : الأول × الأول + الأول × الثاني + الثاني × الأول + الثاني × الثاني

1) $(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

2) $(3x+1)(x-5) = 3x^2 - 15x + x - 5 = 3x^2 - 14x - 5$

3) $(2x^2 - x)(3x^3 - 5) = 6x^5 - 10x^2 - 3x^4 + 5x$

4) $(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2 + 10x + 25$

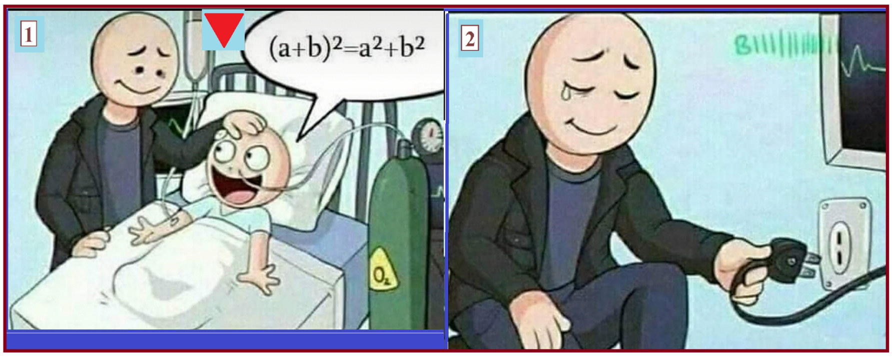
$$(a+b)^2 = (\ )^2 + 2(\ )(\ ) + (\ )^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
مربع الأول + 2 × الأول × الثاني + مربع الثاني

$$(2x+5)(x^2-1) = 2x^3 - 2x + 5x^2 - 5 = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$$

$$(a+b)^3 = (\ )^3 + 3(\ )^2(\ ) + 3(\ )(\ )^2 + (\ )^3$$
مكعب الأول + 3× مربع الأول × الثاني +3×مربع الثاني × الأول + مكعب الثاني

ملاحظة : $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

بل $(x+y)^2 = (x+y)\times(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$



انتبه... الموضوع خطير

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

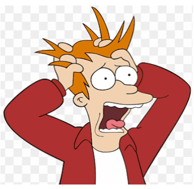
10) ترتيب العمليات الحسابية (الأولويات):

1) الأقواس : ( ) ، [ ] ، { }

2) الأسس والجذور

3) الضرب والقسمة

4) الجمع والطرح



$3+2\times 4 = 5\times 4 = 20$ ✗

$3+2\times 4 = 3+8 = 11$ ✓

$$5\times 3^2 \neq (15)^2 = 225$$
$$5\times 3^2 = 5\times 9 = 45$$

11) التحليل إلى العوامل :

التحليل إلى العوامل في المقادير الجبرية ،هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب مجموعة من المقادير كل منها أصغر منه درجة ،ولا يمكن تحليل أيا منها ، ومن طرقه (العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ...)

ولتجنب الأخطاء نقوم بذلك على شكل خطوات :

أولاً:العامل المشترك : دائماً نبدأ بالسؤال التالي : هل يوجد عامل مشترك؟

مثلاً:

1) $5x - 10 = 5x - 5(2) = 5(x - 2)$

2) $3x^2 + 6x = 3xx + 2(3)x = 3x(x+2)$

ثانياً:الفرق بين مربعين:إذا لم يكن هناك عامل مشترك، نلاحظ فيما إذا كان المقدار فرق بين مربعين أو مكعبين :

مثلاً:

1) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x - 3)(x+3)$

2) $x^2 + 4 = (b^2 - 4ac$ المميز) لا يمكن تحليلها لأن المميز سالب

3) $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

4) $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

فك : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
تحليل : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
لا يحلل : $a^2 + b^2 = \ ...$

تحليل $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

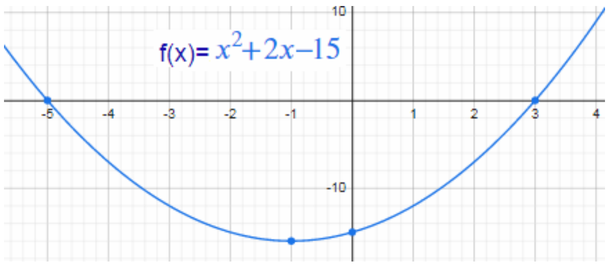
فك $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ثالثاً: إذا لم يكن كذلك نلاحظ فيما إذا كان ثلاثي حدود : $ax^2 + bx + c$

تحليل ثلاثي الحدود : $x^2 + bx + c$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)

1) $x^2 + 2x - 15 = (x-2)(x+5)$ نبحث عن عددين حاصل ضربهما (15–) ومجموعهما (2) وهما (3– ، 5) لذلك :

وهذا يعني أن الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 15$ يقطع محور السينات عند النقطتين (x = 3)،(x = – 5)



2) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

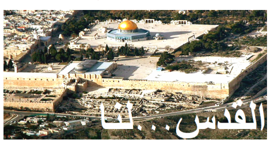
3) $x^2 + 12x + 20 = (x+2)(x+10)$

4) $x^2 + x - 20 = (x-4)(x+5)$

5) $x^2 - 8x - 20 = (x-10)(x+2)$

6) $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$

ويمكن استعمال القانون العام ، خاصة عندما $a \neq 1$



القانون العام $a, b, c \in R \ , \ a \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1) $x^2 + 8x + 12 = (x \quad)(x \quad)$

2) $x^2 - 4x - 32 = (x \quad)(x \quad)$

3) $x^2 - 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

4) $x^2 + x - 2 = (x \quad)(x \quad)$

5) $x^2 + 10x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

6) $x^2 + 12x + 35 = (x \quad)(x \quad)$

7) $x^2 - 3x - 40 = (x \quad)(x \quad)$

8) $x^2 + 3x - 4 = (x \quad)(x \quad)$

9) $x^2 + 4x - 12 = (x \quad)(x \quad)$

10) $x^2 - 14x + 45 = (x \quad)(x \quad)$

11) $x^2 + 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

12) $x^2 - 4 = (x \quad)(x \quad)$

13) $x^2 - 6x - 7 = (x \quad)(x \quad)$

14) $x^2 + 6x - 16 = (x \quad)(x \quad)$

15) $x^2 + 11x + 28 = (x \quad)(x \quad)$

16) $x^2 + 10x + 16 = (x \quad)(x \quad)$

17) $x^2 - 25x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

18) $x^2 + 12x + 27 = (x \quad)(x \quad)$

19) $x^2 - 13x + 36 = (x \quad)(x \quad)$

20) $x^2 + 5x - 24 = (x \quad)(x \quad)$

21) $x^2 - 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

22) $x^2 - 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$

23) $x^2 - 13x + 30 = (x \quad)(x \quad)$

24) $x^2 - 13x - 30 = (x \quad)(x \quad)$

ملاحظة: هناك حالات لا نجد فيها عددين صحيحين يحققان الشرطين السابقين عندها نستعمل طريقة المقص أو القانون العام ، أو التجميع المناسب أو إكمال المربع أو الطريقة الهندية ... الخ

$2x^2 + x - 6 = 0$

$(2x \quad)(x \quad)$

القريبان

البعيدان

$(2x - 3)(x + 2)$

حاصل ضرب القريبين : $-3x$

حاصل ضرب البعيدين : $4x$

المجموع = x = الحد الأوسط

أو عن طريق القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a=2 ,\ b=1 ,\ c=-6$$

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \mp \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \mp 5}{4}$$

$$x = \frac{-3}{2} \qquad x = 2$$

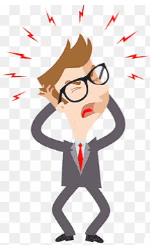
$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad a = 2 \,/\, b = 5 \,/\, c = -3$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5+7}{4} \text{ or } \frac{-5-7}{4} = \frac{2}{4} \text{ or } \frac{-12}{4} = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

رابعاً : إذا لم يكن المقدار أياً مما سبق وكان من الدرجة الثالثة أو أكثر نحلل حده الثابت ونحاول الحصول على صفر (جذر) له مثل (a) ثم نستخدم القسمة التركيبية (أو الخوارزمية) ونقسمه على (x –a)



مثلاً : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

نبحث عوامل الحد الثابت (12) وهي: (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12)

نعوض هذه العوامل بسالبها وموجبها في الاقتران إلى أن نحصل على (صفر) ونجده هنا $f(-4)=0$

نستخدم القسمة الخوارزمية أو التركيبية فنقسم $f(x)$ على $(x + 4)$ ويجب أن يكون الباقي صفرا

وبالتالي : الاقتران = الناتج × العامل $(x+ 4)$

	x^3	x^2	x	x^0
-4	1	2	-11	-12
		-4	8	$+12$
	1	-2	-3	0
	x^2	x	x^0	

ثم نحلل الناتج (التربيعي) بالطرق السابقة $f(x) = (x +4)(x^2 - 2x - 3)$

$f(x) = (x +4)(x- 3)(x +1)$

---

12) حل المعادلات: هناك نوعان من المعادلات الجبرية بمتغير واحد ، وهما : الخطية وغير الخطية

أ) الخطية : وهي على الصورة : $\underbrace{ax + b}_{\text{طرف المتغيرات (المجاهيل)}} = \underbrace{c}_{\text{طرف الأعداد (الثوابت)}}$ ، نتعامل معها مثل الميزان ذو الكفتين

طريقة الحل : يجب تجميع الحدود المحتوية على (x) في أحد طرفي المعادلة ثم القسمة على معامل (x)

1) $2x + 5 = 9$

$2x + 5 - 5 = 9 - 5$

$2x = 4$

$2x \div 2 = 4 \div 2$

$x = 2$

2) $3x - 8 = 7x +1$

$3x - 7x = 1 + 8$

$-4x = 9$

$x = \dfrac{9}{-4} = \dfrac{-9}{4}$

ملاحظة : تكافؤ الكسور : $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c}$ $\boxed{\begin{matrix} b \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}}$

ب) التربيعية : صورتها العامة : $ax^2 + bx + c = 0$:

طريقة الحل : يجب أن نجعل الطرف الأيمن صفراً ،ثم نقوم بتحليل الطرف الأيسر وكتابته على شكل حاصل ضرب مقدارين لكي نستخدم القاعدة $(a\, b = 0 \rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0)$ ثم حل المعادلتين الناتجتين

1) $x^2 - x = 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

إما $(x - 3= 0)$ أو $(x + 2= 0)$ ومنها $x = 3 , x = -2$

2) $x^3 + 2x^2 = 11x + 12 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$

$(x + 4) (x- 3) (x + 1) = 0$

إما $(x + 4= 0)$ أو $(x - 3= 0)$ أو $(x + 2= 0)$

ومنها $x = -4$, $x = 3$, $x = -2$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات 077 88 531 078

3) $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0 , x = 4$

ملاحظة(1): للمعادلة التربيعية على الأكثر حلان (جذران) : فقد لا يكون لها حل في ح

مثل : $x^2 + 4 = 0$ أو $x^2 + 3x + 4 = 0$

ملاحظة(2): يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

القانون العام :

القـــانون العـــام	$a,b,c \in R \ , \ a \neq 0$
المميـــز $\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c = 0$
	$\Delta \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ولا يوجد حل للمعادلة في R إذا كان المميز سالباً
(وتكون أولية)

13) أنظمة المعادلات

هناك طريقتان لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين (أي إيجاد زوجاً مرتباً يحقق المعادلتين في نفس الوقت)

وهما : 1) طريقة الحذف elimination

أساسها : التخلص من أحد المتغيرين
بجمع المعادلتين ثم إيجاد قيمة المتغير الآخر

$x + 2y = 6$
$x - y = 3$

نضرب المعادلة الثانية في (2)

$x + 2y = 6$
$2x - 2y = 6$

نجمع $3x = 12$

$x = 4$ ، $y=1$

وبالتالي $y = 1$

2) طريقة التعويض substitution

ملخصها :جعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون
في إحدى المعالتين وتعويض قيمته في الأخرى لحلها

$x + 2y = 6$
$x - y = 3$

نجعل (x) موضوعا للقانون في المعادلة الثانية

$x = 3 + y$

نعوض القيمة في الأولى $3 + y + 2y = 6$

$3 + 3y = 6$

ومنها $3y=3$ $y = 1$ ، $x = 4$

17) الاقترانات المثلثية

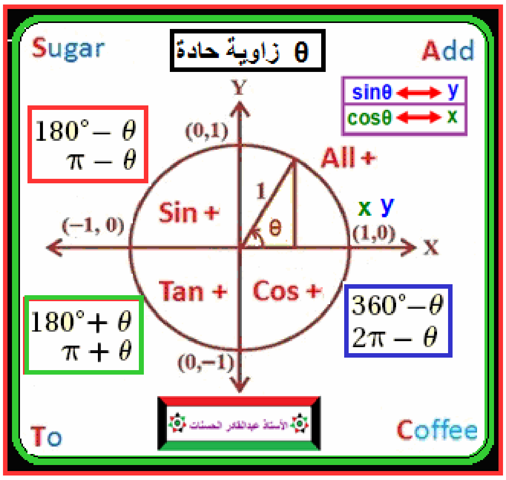
θ	30°	45°	60°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

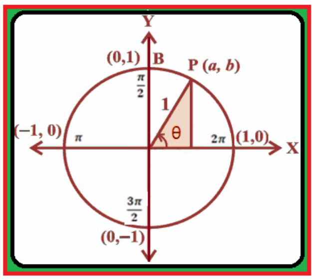
الجيب $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

الجتا $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

الظل $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

نظرية فيثاغورس
مربع الوتر=مربع الاول+مربع الثاني





y يرتبط مع sinθ

x يرتبط مع cosθ

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: (+)	$\sin\theta, \csc\theta$: (+)
$\cos\theta, \sec\theta$: (−)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (−)	$\tan\theta, \cot\theta$: (+)
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: (−)	$\sin\theta, \csc\theta$: (−)
$\cos\theta, \sec\theta$: (−)	$\cos\theta, \sec\theta$: (+)
$\tan\theta, \cot\theta$: (+)	$\tan\theta, \cot\theta$: (−)

Hasanat

متطابقات مثلثية

1) $\boxed{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ 2) $\boxed{\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}}$ 3) $\boxed{\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}}$ 4) $\boxed{\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

5) $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \Rightarrow$ 6) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow$ 7) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

بقسمة كل حد في (5) على ($\cos^2\theta$) بقسمة كل حد في (5) على ($\sin^2\theta$)

8) $\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$ 9) $\boxed{\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta}$

10) $\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta}$ $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta}$ $\boxed{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta}$

(جيب) الزاوية يساوي (جتا) متممتها والعكس

11) $\boxed{\sin(-\theta) = -\sin\theta}$ $\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$ $\boxed{\tan(-\theta) = -\tan\theta}$

(الجتا) لا يتأثر بالسالب

12) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b}$

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta \Rightarrow$ 13) $\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta}$

14) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b}$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \Rightarrow$

15) $$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \boxed{1 - 2\sin^2\theta} \\ &= \boxed{2\cos^2\theta - 1} \end{aligned}$$

16) $\boxed{\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}}$

$\tan 2\theta = \tan(\theta+\theta) \Rightarrow$ 17) $\boxed{\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}$

18) $\boxed{\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)}$ 19) $\boxed{\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)}$ 20) $\boxed{\tan^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$

$\boxed{2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$ $\boxed{2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$

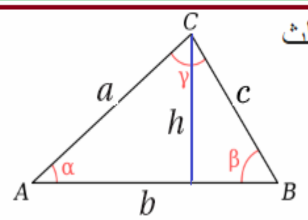
تـذكر $\boxed{\sin^2\theta = (\sin\theta)^2}$ $\boxed{2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

قوانين مهمة

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع
أو نصف حاصل ضرب أي ضلعين في (جيب) الزاوية بينهما

مساحة المثلث



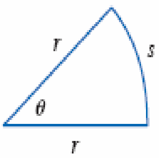
$$A=\frac{1}{2}bh \qquad A=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$A=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

القطاع الدائري

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$s=r\theta \ (\theta \text{ radian})$$

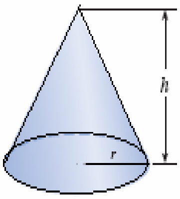


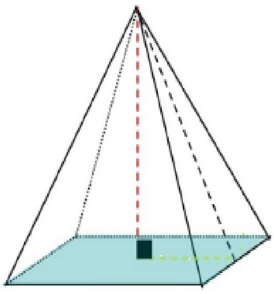
المخروط:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

الجانبية $A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

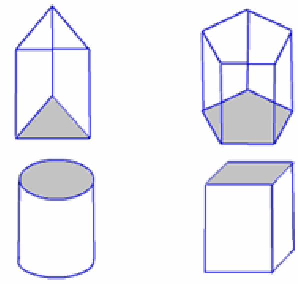
$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$$



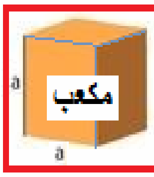


حجم الهرم = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

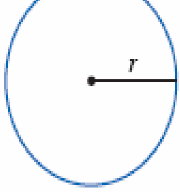


$$A=6a^2 \qquad V=a^3$$

الدائرة:

مساحة $A=\pi r^2$

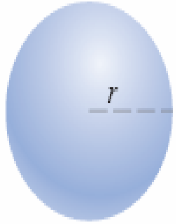
محيط $C=2\pi r$



الكرة:

حجم $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

مساحة $A=4\pi r^2$

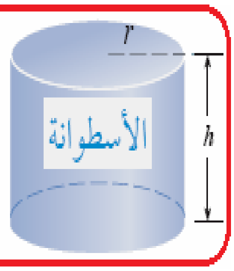


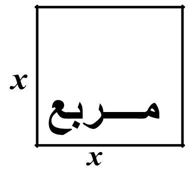
الأسطوانة

$$V=\pi r^2 h$$

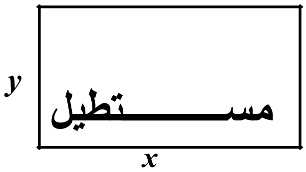
الجانبية $A=2\pi rh$

$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$

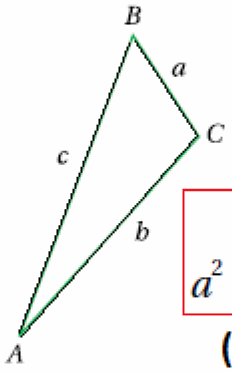




$Area = x^2$



$Area = x\ y$



قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

قانون جيوب التمام

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

(نظرية فيثاغورس العامة)

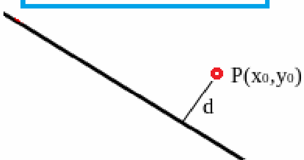
إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1P_2}$ هما:

$$M:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1,y_1)$ و $P_2\,(x_2,y_2)$ هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$ax+by+c=0$$



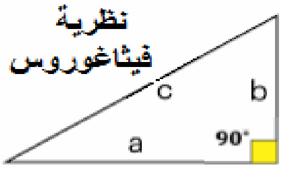
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بعد نقطة عن مستقيم

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

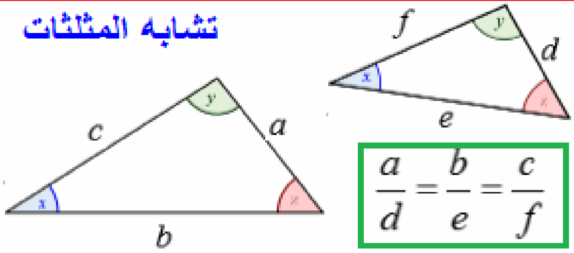
معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1\,(x_1,y_1)$، وميله m هي: $y-y_1=m(x-x_1)$

نظرية فيثاغورس

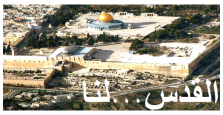


$$c^2=a^2+b^2$$

تشابه المثلثات



$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$$

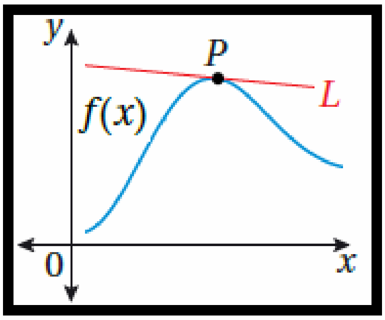


الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الدرس 1 مشتقة اقترانات خاصة
Differentiation of Special Functions

1) الاتصال والاشتقاق :

مشتقة الاقتران f(x) عند نقطة واقعة على منحناه هي
ميل المنحنى عند هذه النقطة (ميل المماس عند نقطة التماس)،
ويُرمَز إليها بالرمز f '(x)



العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق
قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال
الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق

ميل المماس = المشتقة الأولى

يكون الاقتران f(x) قابلاً للاشتقاق عند (x = a) إذا كانت f '(a) موجودة ، ويكون متصلاً عندها

باختصار :

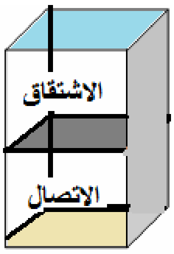
1) إذا كان f(x) متصلاً عند x = a ، فإنه قد يكون قابلاً للاشتقاق وقد يكون غير قابل للاشتقاق عندها

2) إذا كان f(x) قابلاً للاشتقاق عند x = a ، فإنه قطعاً متصل عند(a)

3) إذا كان f(x) غير متصل عند x = a ، فإنه غير قابل للاشتقاق عندها

4) قابلية الاشتقاق عند نقطة تعني أنه يمكن رسم مماس لمنحى الاقتران عند تلك النقطة
لذلك يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الرؤوس المدببة (الزوايا) مثل أصفار القيمة المطلقة
رغم اتصاله عندها ، وكذلك عندما يكون المماس رأسيا (لأن ميله غير معرف)

أو يمكن فهم الموضوع على أن هناك بناية مكونة من طابقين : الطابق الأول يمثل الاتصال والثاني يمثل الاشتقاق

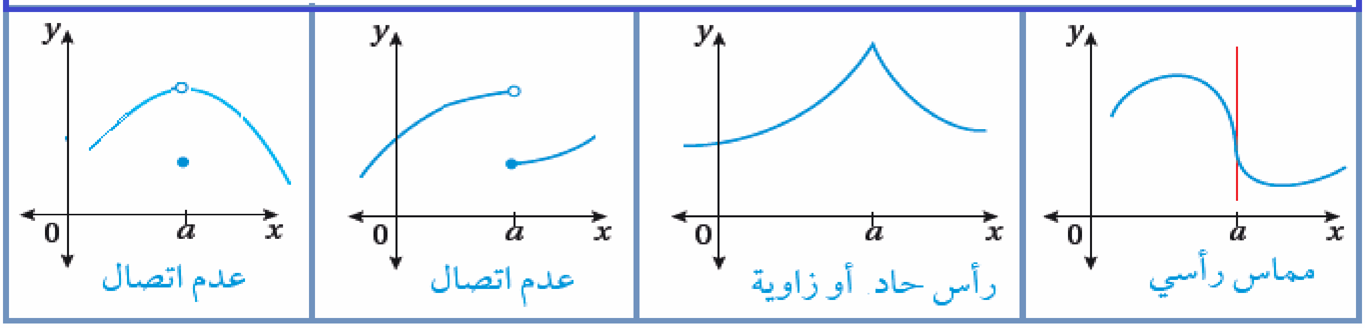


1- وجود طابق أول لا يعني وجود طابق ثاني ⇐ متصل لا يعني قابل للاشتقاق

2- وجود طابق ثاني يشترط وجود طابق أول ⇐ قابل للاشتقاق يعني متصل

3- عدم وجود طابق أول يعني استحالة وجود طابق ثاني ⇐ غير متصل يعني غير قابل للاشتقاق

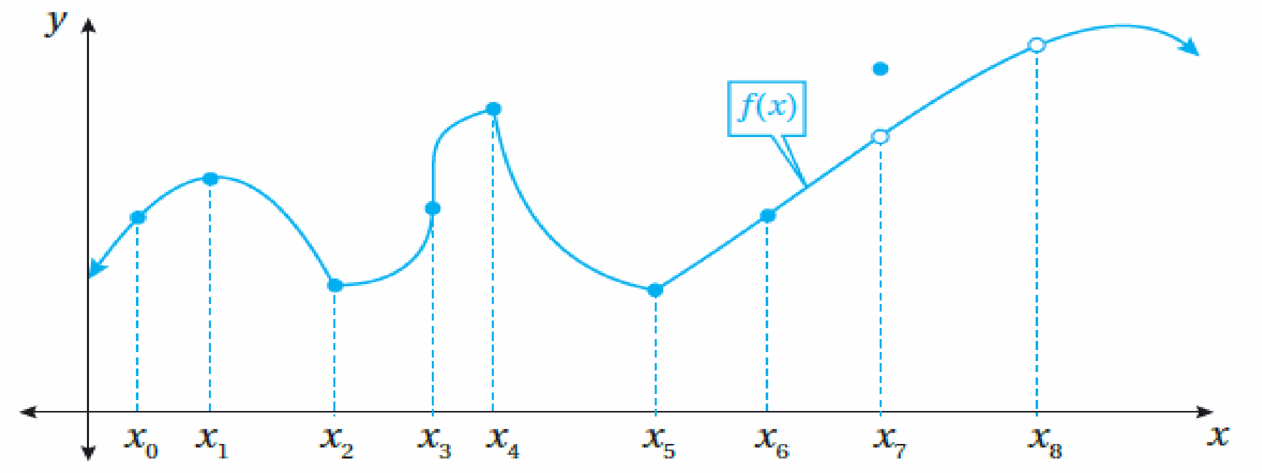
غير قابل للاشـــتقاق عندما $x = a$



ميل المستقيم الرأسي ..... غير مُعرَّف

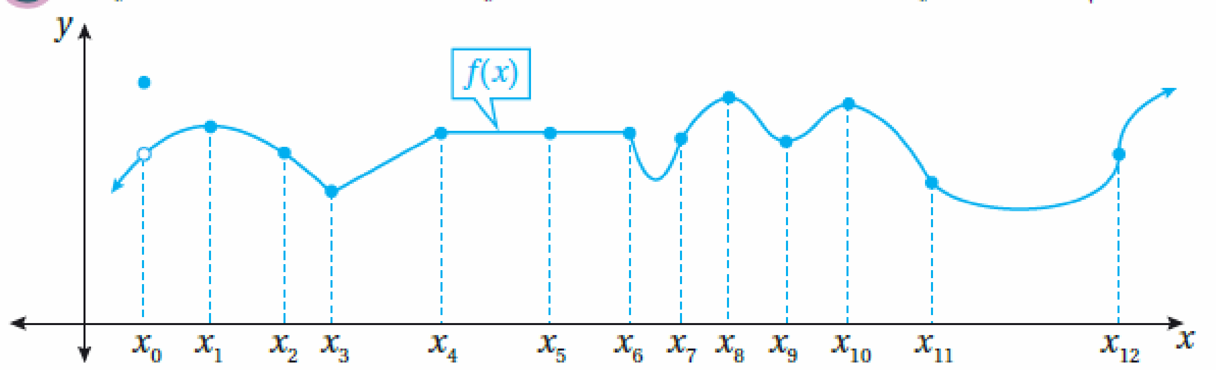
أتحقّق من فهمي 10

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.

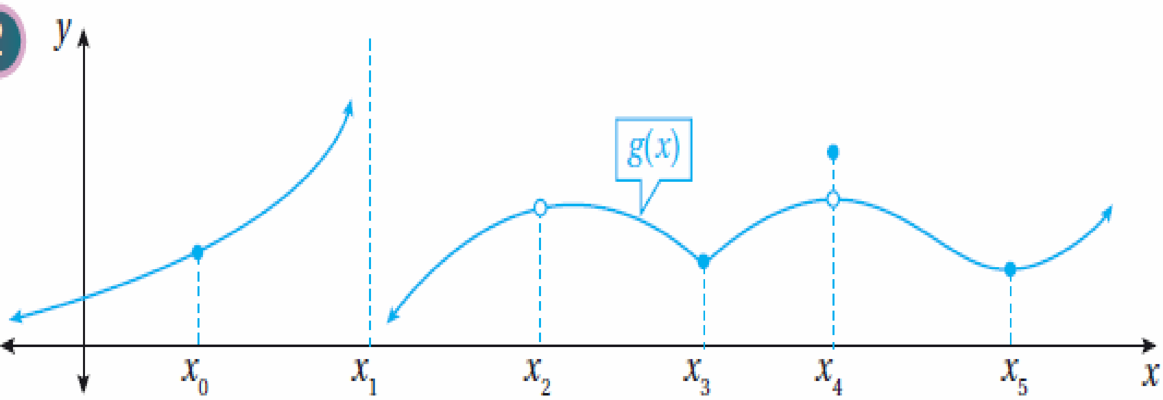


أتدرّب وأحُلّ المسائل 22

1 أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:



2



2 الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$
لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة،
وهو غير قابل للاشتقاق عندما
$x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل

1 الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما
$x = x_3, x = x_4, x = x_6$
لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط،
وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ غير متصل
وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$
نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة

أتحقّق من فهمي 10

الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما
$x = x_2, x = x_4, x = x_5$
لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط
وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_7, x = x_8$
لأنه غير متصل عندهما
$x = x_3$

2) مراجعة قواعد الاشتقاق :

أتذكَّر

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

$$y = a x^n, n \in R \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a n x^{n-1}$$

$$y = (g(x))^n, n \in R \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

u , v اقترانــــا قـــوة

$$y = u(x) \pm v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'(x) \pm v'(x)$$

y	$\frac{dy}{dx}$
x^n	$n x^{n-1}$
c	0
$a x^n$	$a n x^{n-1}$
$u \pm v$	$u \pm v$

1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 10x - 3$

2) $f(x) = 5 - 3x^{-4} - x + \pi^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^{-5} - 1$

3) $f(x) = (3x+4)(x-1) = 3x^2 + x - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x + 1$

---

4) $\frac{d}{dx}(8 - x^{\frac{3}{2}}) = (0 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$

البسط – المقام / المقام

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$$

---

5) $f(x) = x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

$\Rightarrow f'(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 = -32 + 12 = -20$

---

6) $f(x) = (3x^2 - 7x - 2)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}(3x^2 - 7x - 2)^{\frac{3}{2}}(6x - 7)$

---

7) $f(x) = \sqrt[7]{x^5} + \frac{3}{x^2} - 8 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{7}} + 3x^{-2} - 8$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}-1} + 3(-2)x^{-2-1} = \frac{5}{7}x^{\frac{-2}{7}} - 6x^{-3}$

$$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$

---

8) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^5}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$

$= x^{4-2} - 3x^{5-2} + x^{\frac{1}{3}-2} = x^2 - 3x^3 + x^{\frac{-5}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

$$\frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$$

توزيـع البسـط علـى المقـام

$$\frac{x \pm y}{z} = \frac{x}{z} \pm \frac{y}{z}$$

9) $y = \dfrac{8x^6 - 4x^3 + 9}{2x^2} \Rightarrow y = \dfrac{8x^6}{2x^2} - \dfrac{4x^3}{2x^2} + \dfrac{9}{2x^2}$

$= 4x^{6-2} - 2x^{3-2} + \frac{9}{2}x^{0-2} = 4x^4 - 2x + \frac{9}{2}x^{-2}$

$\Rightarrow y' = 16x^3 - 2 - 9x^{-3}$

ويمكن توزيع حدود البسط على المقام وحيد الحد ، ثم اشتقاق كل حد لوحده

10) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{3x^5}{x^2} + \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$

$= x^{4-2} - 3x^{5-2} + x^{\frac{1}{3}-2} = x^2 - 3x^3 + x^{\frac{-5}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

تحــذير

$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

11) $y = \dfrac{x^3 - 64}{x - 4} \Rightarrow y = \dfrac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{x - 4} = x^2 + 4x + 16$

$\Rightarrow y' = 2x + 4$

12) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^5 + x^2}{x^2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x + x^3 + 1)}{x^2} = x + x^3 + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$

أخطاء شائعة

$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{1}$ ...(خطأ)

$f(x) = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3 \Rightarrow f'(x) = 1$ ...(صح)

$f(x) = \pi^3 \Rightarrow f'(x) = 3\pi^2$ ...(خطأ)

$f'(x) = 0$ ...(صح)

$f(x) = x^2(x^3 - 5x)$
$\Rightarrow f'(x) = 2x(3x^2 - 5)$ ...(خطأ)

$f(x) = x^2(x^3 - 5x) = x^5 - 5x^3$
$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2$ ...(صح)

9) $y=\sqrt{x}-\frac{5}{x^2}$

10) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{x^2}+1$

توزيـــع البســـط علـــى المقـــام

$$\frac{x\pm y}{z}=\frac{x}{z}\pm\frac{y}{z}$$

11) $y=7-5\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$

12) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

تحـــذير

$$\frac{a}{b\pm c}\neq\frac{a}{b}\pm\frac{a}{c}$$

13) $y=\frac{x^5-x^{-2}}{x}$

14) $y=\frac{2-7x}{3x}$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3\div\frac{4}{5}=3\times\frac{5}{4}=\frac{3\times 5}{4}$$

15) $f(x)=\frac{x^4+x^2-6}{\sqrt{x}}$

16) $y=\frac{x^5-8x^6}{4x^2}$

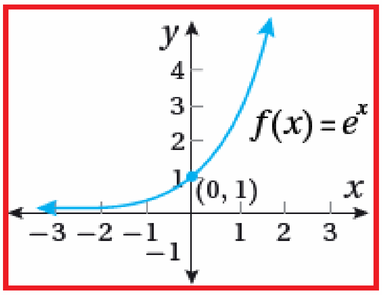
$$\frac{\frac{9}{2}}{7}=\frac{9}{2}\div 7=\frac{9}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{9}{2\times 7}$$

17) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

18) $y=\frac{1}{(1-4x^2)^3}$

3) مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



$$\boxed{f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x}$$

e: العـــــدد النيبـــــيري $e \approx 2.7$

مشتقته = نفسه

$e^{x+3}=e^x \times e^3$

*** إذا كان أساس الاقتران هو العدد النيبيري (e) فإن الاقتران $f(x)=e^x$
يسمى الاقتران الأسي الطبيعي حيث (e) عدد غير نسبي يساوي تقريباً (2.7)

---

1) $f(x)=x^3+e^x+8 \Rightarrow f'(x)=3x^2+e^x$

2) $f(x)=3x+8\,e^{x+2}=3x+8\,e^xe^2 \Rightarrow f'(x)=3+8\,e^2e^x=3+8\,e^{x+2}$

3) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{e^{-x}}-\sqrt{e^{2x}}+\sqrt[5]{x}=3x^{-2}+5\,e^x-(e^{2x})^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{5}}$

$$=3x^{-2}+5\,e^x-e^x+x^{\frac{1}{5}}=3x^{-2}+4\,e^x+x^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-6x^{-3}+4\,e^x+\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}},\ \boxed{\frac{1}{5}-1=\frac{1-5}{5}=-\frac{4}{5}}$$

4) $f(x)=3x-7e^x \Rightarrow f'(x)=3-7e^x$

$$\Rightarrow f'(0)=3-7e^0=3-7=-4 : \boxed{e^0=1}$$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{e^{3-x}}-e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=$

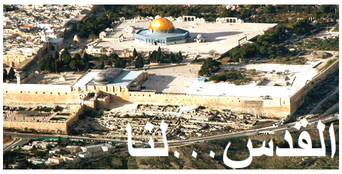
6) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}+\dfrac{6\sqrt[3]{x}-xe^x+4x^2}{2x} \Rightarrow f'(x)=$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=5e^x+3$ b) $f(x)=\sqrt{x}-4e^x$ c) $y=8e^x+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

	أتحقق من فهمي صفحة 14
a	$f'(x)=5e^x$
b	$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-4e^x=\frac{1}{2\sqrt{x}}-4e^x$
c	$f'(x)=8e^x-\frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}}=8e^x-\frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$

4) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :



الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

$$\boxed{f(x) = Ln\,x \;,\; x > 0 \Rightarrow f\,'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{Log_e x = Ln\,x}$$

اللوغاريتم الطبيعي : يُسمّى اللوغاريتم للأساس (e) اللوغاريتم الطبيعي ، ويُرمز له (Ln)

$$\boxed{\ln e = 1}$$

$$\boxed{\ln 1 = 0}$$

Ln0: غير معرف

$$\boxed{Ln\; x^3 = 3Ln\; x}$$

$$\boxed{Ln\; 3x^5 \neq 5Ln\; 3x}$$

$$\boxed{Ln\; 4x^2 = Ln\; 4 + Ln\; x^2 = Ln\; 4 + 2Ln\; x}$$

1) $f(x) = 8Lnx \Rightarrow f\,'(x) = (8)(\frac{1}{x}) = \frac{8}{x}$

2) $f(x) = Ln(5x^3) = Ln(5) + Ln(x^3) = Ln(5) + 3Ln(x)$

$$\Rightarrow f\,'(x) = 0 + \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

3) $f(x) = (Lnx)^2 \Rightarrow f\,'(x) = 2(Lnx)(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}Lnx$

4) $f(x) = Ln(x^2) = 2\,\mathrm{Lnx} \Rightarrow f\,'(x) = \frac{2}{x}$

استخدام قوانين اللوغاريتمات
يُسهل عملية الاشتقاق

5) $f(x) = Ln(5x)^2 \Rightarrow f\,'(x) =$

6) $f(x) = Ln(5x^2) \Rightarrow f\,'(x) =$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$ b) $f(x) = \ln(2x^3)$

a	$f(x)=\sqrt{x}+\ln(4x)= x^{\frac{1}{2}}+\ln 4+\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$	
b	$f(x)=\ln(2x^3)=\ln 2+3\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{x}$	أتحقق من فهمي صفحة 16

مفهوم اللوغاريتم ... وعلاقته بالأسس

$\boxed{\log_2 8}$ تعني :

كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8)؟

الجواب: 3 مرات ، إذاً $\boxed{\log_2 8 = 3}$

إذا كان: $x > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسّية
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$

كذلك: $\boxed{\log_5 25}$ تعني : (5) أس كم تساوي (25) ؟؟؟ الجواب (2) . إذاً $\boxed{\log_5 25 = 2}$

1 $12^2 = 144 \Rightarrow 12^2 = 144 \rightarrow \log_{12} 144 = 2$	3 $(3)^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow (3)^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$
2 $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$	4 $34^0 = 1 \Rightarrow 34^0 = 1 \rightarrow \log_{34} 1 = 0$

$$\boxed{10^y = x \Leftrightarrow y = Log x \ ,\ x > 0}$$

$$\boxed{e^y = x \Leftrightarrow Lne^y = Lnx \Leftrightarrow yL\cancel{ne} = Lnx \Leftrightarrow y = Lnx\ ,\ x > 0}$$

قوانين اللوغاريتمات

$$\boxed{Ln(x\,y) = Lnx + Lny}$$

$$\boxed{Ln\frac{x}{y} = Lnx - Lny}$$

$$\boxed{Ln(x)^a = a\ Ln(x)}$$

1 $\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2 = 7\log_5 x + 2\log_5 y$

2 $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4 = 2\log_7 (5x+3) - \log_7 4$

3 $\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2 = \log_4 x + 3\log_4 y - 2\log_4$

$$\boxed{Log_b a = \frac{Log(a)}{Log(b)} = \frac{Ln(a)}{Ln(b)} = \frac{Log_c(a)}{Log_c(b)}}$$

5) مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام :

$$\boxed{f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x} \quad or \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x} \qquad \boxed{\sin^2 x=(\sin x)^2}$$

$$\boxed{f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x} \quad or \quad \boxed{(\cos x)'=-\sin x} \qquad \boxed{\sin x^2 \neq (\sin x)^2}$$

1) $f(x)=\cos x+5\sin x+4 \Rightarrow f'(x)=-\sin x+5\cos x$

2) $f(x)=6\cos x+5x+4\pi \Rightarrow f'(x)=-6\sin x+5$

$$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4-\sin x \text{.....(خطأ)}$$
$$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4(-\sin x)=-4\sin x$$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y=\frac{\sin x}{2}+3\cos x$ b) $f(x)=x^2+\cos x+\sin\frac{\pi}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة 18

a	$y=\frac{1}{2}\sin x+3\cos x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos x-3\sin x$
b	$f'(x)=2x-\sin x$	

أتدرّب وأحُلّ المسائل 22 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

3) $f(x)=2\sin x-e^x$ 4) $f(x)=\frac{\ln x}{4}-\pi\cos x$ 5) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)+x^4$

6) $f(x)=e^{x+1}+1$ 7) $f(x)=e^x+x^e$ 8) $f(x)=\ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

13) إذا كان: $f(x)=\ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x>0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x)=\frac{1}{x}$.

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

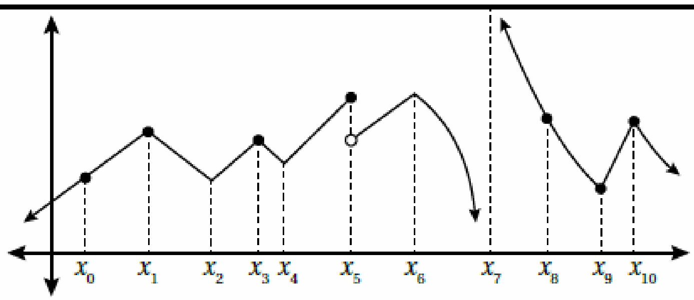
تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y=\log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29) أُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln 10}$.

30) مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y=\log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

3	$f'(x) = 2\cos x - e^x$
4	$f'(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$
5	$f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$ $= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $= -3\ln x + x^4$ $f'(x) = -\dfrac{3}{x} + 4x^3$
6	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$
7	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
8	$f(x) = \ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n\ln x$ $f'(x) = 0 - n\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{n}{x}$
13	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$
29	$y = \log x = \log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10}\ln x$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln 10} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln 10}$
30	$y = \log ax^2 = \log a + 2\log x$ $\dfrac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \dfrac{1}{x\ln 10} = \dfrac{2}{x\ln 10}$

1 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي: **4** $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x - \cos x$ **3** $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x^2}$ **2** $f(x) = 9e^x + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

1	f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل، و f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندهما.
2	$f'(x) = 9e^x - \dfrac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \dfrac{1}{6\sqrt{x^3}}$
3	$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \dfrac{2}{x^3}$
4	$f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin x$

ملخص الجزء الأول من الدرس ثم اختبار — ورقة عمل (1) — قواعد الاشتقاق (1)

	$f(x)$	$f'(x)$
1)	$a\,x^{n}$	$a\,n\,x^{n-1}$
2)	$g(x)\pm h(x)$	$g'(x)\pm h'(x)$
3)	$e^{x\pm a}$	$e^{x\pm a}$
4)	Lnx	$\frac{1}{x}$
5)	$\sin x$	$\cos x$
6)	$\cos x$	$-\sin x$

البسط – المقام / المقام

$$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$$

$$\sqrt[3]{x^{5}}=x^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{3}{x^{4}}=3x^{-4}$$

توزيع البسط على المقام

$$\frac{x\pm y}{z}=\frac{x}{z}\pm\frac{y}{z}$$

تحذير

$$\frac{a}{b\pm c}\neq\frac{a}{b}\pm\frac{a}{c}$$

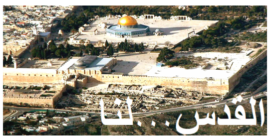
$$\frac{\frac{9}{2}}{7}=\frac{9}{2}\div 7=\frac{9}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{9}{2\times 7}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3\div\frac{4}{5}=3\times\frac{5}{4}=\frac{3\times 5}{4}$$

$\ln e=1$ $\quad$ $\ln 1=0$ $\quad$ $e^{0}=1$ $\quad$ $e^{x+3}=e^{x}\times e^{3}$ $\quad$ Ln0: غير معرف

$Ln(x\,y)=Lnx+Lny$ $\quad$ $Ln\frac{x}{y}=Lnx-Lny$ $\quad$ $Ln(x)^{a}=a\;Ln(x)$

أخطاء شائعة



$f(x)=5x^{3}\Rightarrow f'(x)=(5)(3x^{2})=15x^{2}$ ...صح

$f(x)=5+x^{3}\Rightarrow f'(x)=0+3x^{2}=3x^{2}$ ... صح

$f(x)=5x^{3}\Rightarrow f'(x)=(0)(3x^{2})=0$...(خطأ)

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=4-\sin x$ ......(خطأ)

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=4(-\sin x)=-\,4\sin x$ (صح)

$f(x)=\dfrac{x^{2}-9}{x-3}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{1}$...(خطأ)

$f(x)=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3\Rightarrow f'(x)=1$...(صح)

$f(x)=\pi^{3}\Rightarrow f'(x)=3\pi^{2}$...(خطأ) $\quad$ $f'(x)=0$...(صح)

$f(x)=x^{2}(x^{3}-5x)$
$\Rightarrow f'(x)=2x(3x^{2}-5)$...(خطأ)

$f(x)=x^{2}(x^{3}-5x)=x^{5}-5x^{3}$
$\Rightarrow f'(x)=5x^{4}-15x^{2}$...(صح)

اختبر نفسك (1)

1) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(-8)=$ a) 0 b) -4 c) 2 d) -2

2) $f(x)=\frac{16}{x} \Rightarrow f'(4)=$ a) 256 b) -16 c) 8 d) -1

3) $y=\frac{x^4-2x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=$ a) $\frac{4x^3-4x}{2x}$ b) x^2-2 c) $2x$ d) $6x^5-8x$

4) $f(x)=x^4+e^{x+1}-2x \Rightarrow f'(-1)=$ a) 0 b) 4 c) -5 d) 3

5) $f(x)=ax^3-Ln5x+ax$, $f'(-1)=3 \Rightarrow a=$
a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) -2 d) -1

6) $f(x)=x-\cos x \Rightarrow f'(x)=$ a) $1-\sin x$ b) $1+\sin x$ c) $\sin x$ d) $-\sin x$

7) $f(x)=\sqrt{2x+9}+e^3 \Rightarrow f'(0)=$ a) $3+3e^2$ b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{-1}{3}$

8) $f(x)=\ln 3x^4 \Rightarrow f'(x)=$ a) $Ln(12x^3)$ b) $Ln3+4Lnx$ c) $\frac{12}{x^4}$ d) $\frac{4}{x}$

9) $f(x)=\ln(x\ e^x) \Rightarrow f'(1)=$ a) 2 b) -2 c) e d) $1+e$

10) $f(x)=\ln(\frac{x}{e^x})^2 \Rightarrow f'(1)=$ a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) $2e$ d) 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	d	c	c	a	b	c	d	a	b

Hasanat
Hasanat

اختبر نفسك (2)

1) $f(x)=24\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(-8)=$ a) 1 b) -2 c) 2 d) -48

2) $f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(3)=$ a) 9 b) -9 c) $\dfrac{1}{9}$ d) $\dfrac{-1}{9}$

3) $f(x)=9x \Rightarrow f'(2)=$ a) 9 b) 18 c) 0 d) 81

4) $f(x)=2e^{x+1} \Rightarrow f'(0)=$ a) $2e$ b) e c) $2e^3$ d) 1

5) $f(x)=\ln x^6 \Rightarrow f'(2)=$ a) 3 b) 2 c) 6 d) 0

6) $f(x)=\ln(x^2e^{3x}) \Rightarrow f'(x)=$

a) $\dfrac{2}{x}+3e^{3x}$ b) $\dfrac{2}{x}+e^{2x}$ c) $2x+3$ d) $\dfrac{2}{x}+3$

7) $f(x)=\sin x+\sin\pi \Rightarrow f'(x)=$ a) $\cos x$ b) $-\cos x$

c) $\cos x+\cos\pi$ d) $\cos x-1$

8) $f(x)=\ln\dfrac{e^{2x}}{x^4}+3x \Rightarrow f'(-1)=$

a) e^2 b) e^2+3 c) 1 d) 9

9) $f(x)=4\ln 2+\sin\pi-\cos x+(3x+2)^2 \Rightarrow f'(0)=$

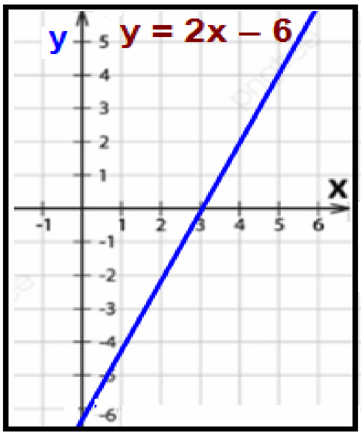
a) 13 b) 11 c) 12 d) 4

10) $f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=$ a) $\cos x+\sin x$ b) $\cos x-\sin x$

c) $-\cos x-\sin x$ d) $-\cos x+\sin x$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	d	a	a	a	c	a	d	c	b

6) تطبيقات : معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما



مراجعة المستقيمات في المستوى الديكارتي

صور معادلة المستقيم : y = 2x – 6 أو 2x – y – 6 = 0

وهي تعني مجموعة النقاط التي تحقق هذه المعادلة :

(0 , – 6) , (1 , – 4)

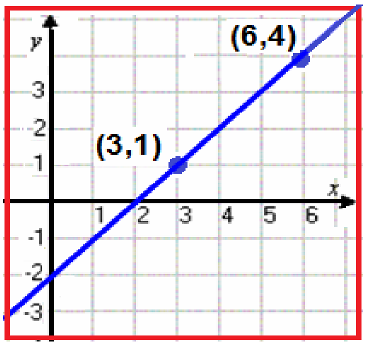
(3 , 0) , (4 , 2)

لكتابة معادلة المستقيم يلزمنا معرفة ميله ، وهناك ثلاث طرق (على الأقل) لمعرفة الميل (m) :

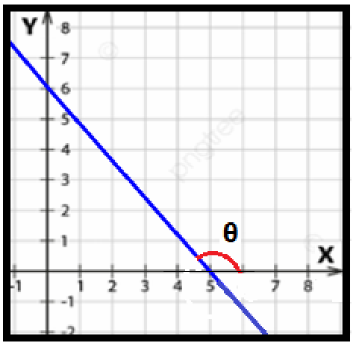
من خلال فرق الصادات على فرق السينات .....

ظل الزاوية مع محور السينات الموجب .....

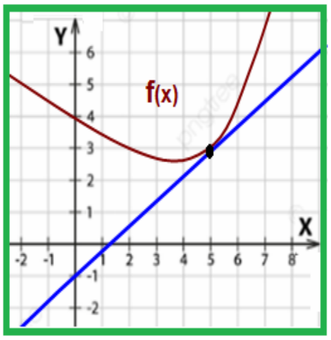
مشتقة المنحنى (عند نقطة التماس) عندما يكون المستقيم مماسا له



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-3}{4-1}=1$$



$$m=\tan\theta$$



$$m=f'(x_1)=f'(5)$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1,y_1) وميله m : $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$

إذا توازى مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني

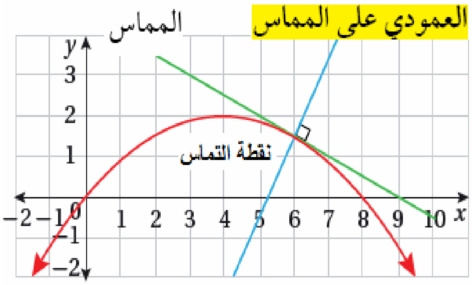
$$y=2x-5 \Rightarrow y'=2$$
$$4x+8-2y=0 \Rightarrow y=2x+8 \Rightarrow y'=2$$
$\Rightarrow$ متوازيان

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (1–)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني

$$y=3x-1 \Rightarrow y'=3 \Rightarrow \boxed{m=3}$$
$$3y+x+2=0$$
$$\Rightarrow y=-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{2}{3} \Rightarrow y'=-\tfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m=-\tfrac{1}{3}}$$
$\Rightarrow$ متعامدان

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77



معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad , \quad m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$$

ملاحظة :

معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y - y_1) = m(x - x_1)$ ،

الجديد في معادلة المماس أن الميل (m) يساوي المشتقة الأولى عند نقطة التماس

مثال : إذا كان $f(x)=Ln(\frac{1}{x})$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(e,-1)$

$$f(x)=Ln(\frac{1}{x})=Ln1-Lnx=-Lnx \Rightarrow \boxed{f'(x)=-\frac{1}{x} \Rightarrow f'(e)=-\frac{1}{e}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y--1=f'(e)(x-e) \Rightarrow \boxed{y+1=-\frac{1}{e}(x-e)} \Rightarrow \boxed{y+1=e(x-e)}$$

باختصار : هناك عدة حالات لمعادلة المماس:

1) نقطة التماس معلومة أو الإحداثي (x) لها على الأقل ، عندها نستخدم القاعدة $\boxed{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$

حيث المشتقة الأولى عنده تساوي ميل المماس ، كما في الأمثلة : 1 ، 2 ، 3 الآتية

2) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس: (المماس يوازي المستقيم ...) أو (يعامد المستقيم ...) عندها نجد مشتقة الاقتران ونساويها بميل المستقيم في حالة التوازي أو ساب مقلوبه في حالة التعامد كما في الأمثلة : 4 ، 5 ، 6 ، 7 الآتية

3) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس: (المماس يقطع المستقيم ...) أو (يمس المنحنى ...) كما في المثالين : 8 ، 9

$$\boxed{f(x) , g(x) \text{ متقاطعان عند } x_1 \Leftarrow f(x_1)=g(x_1)}$$

$$\boxed{f(x) , g(x) \text{ متماسان عند } x_1 \Leftarrow \boxed{f(x_1)=g(x_1)} \oplus \boxed{f'(x_1)=g'(x_1)}}$$

4) طلب إيجاد المقطع السيني (x) أو الصادي (y) للمماس أو العمودي عليه ، كما في مثال 10

ملاحظة	لإيجاد المقطع(x) نضع بدلاً من (y) صفر	ولإيجاد المقطع(y) نضع بدلاً من (x) صفر

5) طلب إيجاد مساحة مضلع (أو مثلث) ، أحد أضلاعه مماس أو عمودي على المماس كما في مثال 11

7) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها مماس أفقي ، في هذه الحالة نشتق ونساوي بالصفر، مثال 12
أو طلب إيجاد قيم (x) التي عندها ميل المماس يساوي قيمة معينة ، عندها نشتق ونساوي بتلك القيمة

$$\boxed{\text{المماس يوازي المحور x} \Leftarrow f'(x)=0}$$

6) نقطة التماس غير معلومة وإعطاء نقطة خارجية : نجد ميل المماس بطريقتين
ونساوي بينهما لإيجاد قيمة (x) أو y (المشتقة و فرق الصادات على السينات)

بفرض أن نقطة التماس هي (x_1 , y_1) $\boxed{f'(x_1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_1}{x-x_1}}$ لاحظ مثال (13)

مثال 1) إذا كان $y=\frac{1}{x-1}, x\neq 1$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند (x= 2)

$$y=\frac{1}{x-1}\Rightarrow y_1=\frac{1}{2-1}=1$$

$$y=\frac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-(x-1)^{-2}\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y-1=-1(x-2)}}\ ,\ \boxed{y-1=(x-2)}$$

مثال 2) إذا كان $f(x)=2e^x+\sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند (x = 0)

$$f(x)=2e^x+\sin x\Rightarrow y_1=f(0)=2$$

$$f'(x)=2e^x+\cos x\Rightarrow m=f'(0)=2+1=3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y-2=3(x-0)}}\Rightarrow \boxed{y=3x+2}$$

مثال 3) إذا كان $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند ($x=\frac{2\pi}{3}$)

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\Rightarrow y_1=f(\tfrac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{4}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\Rightarrow m=f'(\tfrac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{-1}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y-\frac{3}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{4}(x-\frac{2\pi}{3})}}\ ,\ \boxed{y-\frac{3}{4}=\frac{4}{\sqrt{3}}(x-\frac{2\pi}{3})}$$

مثال 4) جد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^3 + x - 2$
والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $y = 13x + 7$

$$f(x)=x^3+x-2\Rightarrow m=f'(x)=3x^2+1$$

$$y=13x+7\Rightarrow m=y'=13\ \boxed{3x^2+1=13\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow (2,8),(-2,-12)}$$

مثال 5) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + x$ عندما يكون المماس موازيا للمستقيم $y=5x+7$

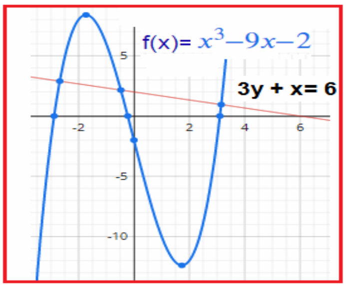
$$f(x)=x^2+x\Rightarrow m=f'(x)=2x+1$$

$$y=5x+7\Rightarrow m=y'=5$$

$$\Rightarrow 2x+1=5\Rightarrow x_1=2\Rightarrow y_1=(2)^2+2=6$$

$$\boxed{\Rightarrow y-6=5(x-2)\Rightarrow y=5x-4}$$

مثال 6) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $f(x) = x^3 - 3x - 2$ والتي يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم الذي معادلته $3y + x = 6$

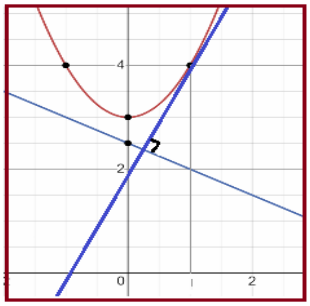


$$f(x) = x^3 - 9x - 2 \Rightarrow m = f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$3y + x = 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 6 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = 3$$

$$\boxed{3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (2,-12),(-2,8)}$$

مثال7) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)= x^2 + 3$ عندما يكون المماس عموديا على للمستقيم $2y + x = 5$



$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow m = f'(x) = 2x$$

$$2y + x = 5 \Rightarrow y' = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$$

$$\boxed{\Rightarrow y - 4 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x + 2}$$

مثال 8) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 3$

عند نقطة تقاطعة مع المستقيم $y = x - 1$

$f(x)\ ,\ g(x)$ متقاطعان عند $x = a$ $\Rightarrow$ $f(a) = g(a)$ فقط

$f'(a) \neq g'(a)$

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x - 1$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -2 \quad , \quad x = 1$$

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1,0)$	$x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-2,-3)$
$f'(1) = 4 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}$	$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(-2) = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow y - 0 = \frac{-1}{4}(x-1)$	$\Rightarrow y - -3 = \frac{1}{2}(x - -2)$

مثال 9) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2,6),(0,-2)$, يمس منحنى $f(x) = ax^2 + 2x - 1$,

فجد قيمة (قيم) الثابت (a)

$f(x)\ ,\ g(x)$ متماسان عند $x = a$ $\Rightarrow$ $f(a) = g(a)$ ، $f'(a) = g'(a)$

$$f(x) = ax^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2$$

$$(2,6),(0,-2) \Rightarrow y - 6 = \frac{6+2}{2-0}(x-2) \Rightarrow y = 4x - 2 \Rightarrow y' = 4$$

$$\Rightarrow f = y \Rightarrow ax^2 + 2x - 1 = 4x - 2 \Rightarrow \boxed{ax^2 - 2x + 1 = 0}$$

$$\Rightarrow m = y' \Rightarrow 2ax + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{ax = 1}$$

$$\Rightarrow axx - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x - 2x = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

مثال 10) جد المقطع (x) للمماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2Lnx + 6$ عند النقطة (1 , 6)

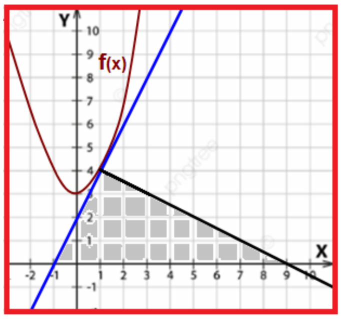
ملاحظة :
لإيجاد المقطع(x) نضع بدلاً من (y) صفر
ولإيجاد المقطع(y) نضع بدلاً من (x) صفر

$$f(x) = 2Lnx + 6$$

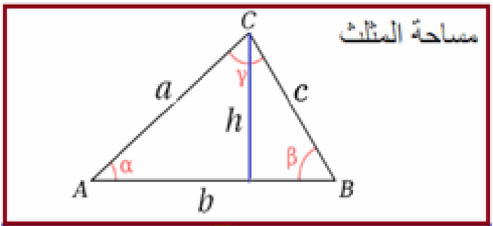
$$f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow m = f'(1) = 2 \Rightarrow \boxed{y - 6 = 2(x-1)}$$

$$y = 0 \Rightarrow -6 = 2x - 2 \Rightarrow x = -2$$

مثال11) جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس والمحور (x) لمنحنى الاقتران $f(x)= x^2 + 3$ عند النقطة (1 , 4)



مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع
أو نصف حاصل ضرب أي ضلعين في (جيب) الزاوية بينهما



$$A = \frac{1}{2}bh \qquad A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y - 4 = 2(x-1)} \quad , \quad \boxed{y - 4 = -\tfrac{1}{2}(x-1)}$$

$$y = 0 \Rightarrow -4 = 2x - 2 \quad , y = 0 \Rightarrow -4 = -\tfrac{1}{2}x + 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \qquad\qquad \Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{2}(9 - -1)(4) = 20}$$

مثال 12) إذا كان $f(x) = e^{x-3} - x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

$$\boxed{\text{المماس يوازي المحور x} \Rightarrow f'(x) = 0}$$

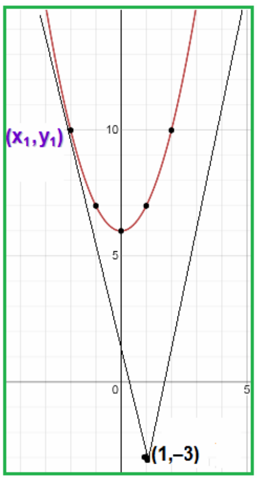
$$f'(x) = e^{x-3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x-3} = 1 = e^0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مثال 13) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 6$ عند النقطة (1 , – 3) ، $x < 0$

لاحظ أن النقطة المعطاة لا تحقق المعادلة ، لذلك فهي ليست نقطة تماس (أي خارجية) $f(1) = 1 + 6 = 7 \neq -3$

لذلك نفرض أن نقطة التماس هي (x_1 , y_1) ثم نجد الميل بطريقتين (المشتقة و فرق الصادات على السينات) ونساوي بينهما ثم نحل المعادلة الناتجة



$$f(x) = x^2 + 6 \Rightarrow m = f'(x) = 2x$$

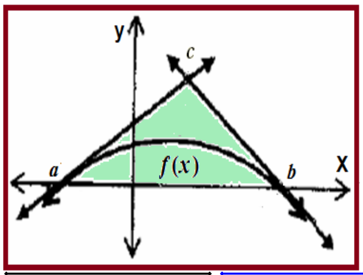
$$(x_1, y_1),(1,-3) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1+3}{x_1-1} = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x = y + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2 + 6 + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}, x = 6$$

$$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 + 6 = 10, \Rightarrow m = 2(-2) = -4$$

$$\boxed{\Rightarrow y - 10 = -4(x+2) \Rightarrow y = -4x + 6}$$

تمارين



1) رُسم مماسان من النقطتين a و b ، اللتان تمثلان نقطتي تقاطع منحنى الاقتران $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ مع محور السينات (x) ، فتقاطع المماسان في (c) (كما في الشكل المجاور) ، جد مساحة المثلث abc

ش 2019 | الجـواب: 54

---

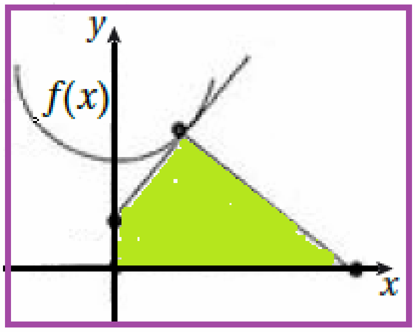
2) جد النقط التي يكون عندها المماس لنحنى الاقتران $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$, $x \neq -1$ عموديا على المستقيم $3y = 5 - 4x$

ص 2017

$(-3, -\frac{7}{2})$, $(1, \frac{3}{2})$

---

3) جد مساحة الشكل الرباعي الناتج عن تقاطع المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^2 + 4$ عند النقطة (1 , 5) والمحورين x و y



ص 2018

الجـواب: 29

---

4) إذا كان $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = 2x - \sin 4x$ ، فجد جميع قيم x التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمحور y ، ثم جد معادلة أحد هذه المماسات

ش 2009

$x = \frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل: العمودي يوازي y إذا المماس يوازي x

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أتحقّق من فهمي إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$. b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

a	$f'(x) = \frac{1}{2x} \to f'(e) = \frac{1}{2e} \to y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$ أتحقق من فهمي صفحة 19
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ $\to y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$

أتدرّب وأحُلّ المسائل إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

10 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

11 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

12 اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

9

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x \Rightarrow f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^{\pi} = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$: ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$: $y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x - \pi)$

$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}$

10

ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}} = \frac{-2}{-2+e^{\pi}} = \frac{2}{2-e^{\pi}}$

معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2-e^{\pi}}(x - \pi) \Rightarrow y = \frac{2}{2-e^{\pi}}x - \frac{2\pi}{2-e^{\pi}} + \frac{1}{2}e^{\pi}$

11

$f(x) = e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$

12

$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$

عندما $x = \pi$، فإن: $y = f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = -1$

ميل المماس عند $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi = -1$

بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1

b معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

14 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

15 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

14

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$: ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو

معادلة المماس هي: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته.

15

بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$

معادلة العمودي: $y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = -ex + e^2 + 1$

لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته $0 = -ex + e^2 + 1$

$ex = e^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{e^2+1}{e} = e + \frac{1}{e}$

مهارات التفكير العليا

25 تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجـد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

26 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبريـر: إذا كان الاقتـران: $y = ke^x$، حيـث: $k > 0$، وكان منحنـاه يقطـع المحـور y عنـد النقطـة P، فأُجيـب عـن السـؤالين الآتيـن تباعًـا:

27 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

28 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

25	$y = e^x - ax$ نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0,1)$ $x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$ $\frac{dy}{dx} = e^x - a \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$ معادلة معادلة المماس هي: $y - 1 = (1-a)(x-0) \rightarrow y = (1-a)x + 1$

26	ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$ لكل x فإن $2e^x > 0$ و لكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$ بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أنّ $y' > 3$ إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

27	الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أنّ $y = ke^0 = k$ ، أي أنّ إحداثيي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = ke^0 = k$ معادلة المماس هي: $y - k = k(x-0) \Rightarrow y = kx + k$ ولإيجاد نقطة تقاطعها مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \Rightarrow x = -1$ إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$
28	ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$ وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أنّ: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \mp 10$ ولأنّ $k > 0$ ، فإن $k = 10$

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

6 أُثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

5	$f(x) = 2e^x + x \quad , \quad x = 2$
	$f(2) = 2e^2 + 2$
	$f'(x) = 2e^x + 1 \Rightarrow f'(2) = 2e^2 + 1$
	$y - 2e^2 - 2 = (2e^2 + 1)(x - 2)$
	$y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$

6	$f'(x) = 3 + \cos x$
	عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$
	$3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$
	وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \leq \cos x \leq 1$
	إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

9	$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x \quad , x = e^2$
	$f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \quad \Rightarrow (e^2, 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$
	$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \to y = \frac{2}{e^2}x + 2$
10	ميل المستقيم $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3
	$f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

11	$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$
	$f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2$
12	نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = 2$
	ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$
	معادلة المماس: $y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$

تمارين إضافية

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لكل اقتران فيما يأتي عند قيمة (x) المبينة إزاءه : (الأسئلة من 1 – 3)

1) $f(x) = e^{x+2} + x \quad , \; x = -2$

2) $f(x) = Ln(3x) \quad , \; x = 1$

3) $f(x) = x + \cos x \quad , \; x = \pi$

4) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $f(x) = x^3 - 5x$ عند نقطة (نقاط) تقاطعه مع المستقيم $y = 4x$

5) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 7x + 3$، والتي يكون المماس عندها:

a) موازيًا للمستقيم $5x + y - 3 = 0$ b) عموديًا على المستقيم $2x + 4y = 1$

6) أوجد قيمتي a ، b ، إذا كان منحنى $y = ax^3 + bx^2$ يمس المستقيم $3x + y - 1 = 0$ عند $(1, -2)$

7) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 4x + 3$ والتي يكون المماس عندها موازيًا للمحور x

8) جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم لمنحنى $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ عند النقطة (2 , 4) والمحور (x) والمستقيم x = 4 (الجواب: 8)

9) إذا كان $f(x) = Ln\, x^4$ ، فجد قيم (x) التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $2x + 3y = 6$

10) إذا كان $f(x) = e^{2x+1} - 2x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

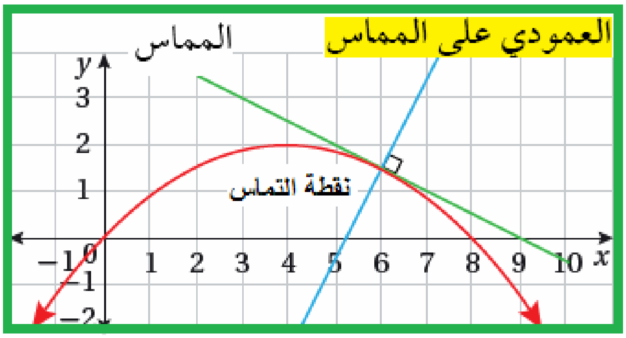
ملخص الجزء الثاني من الدرس ثم اختبار ورقة عمل (2) تطبيقات هندسية

معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1,y_1) $\quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad , m = f'(x_1)$

ملاحظة : معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y - y_1) = m(x - x_1)$ ،

الجديد في معادلة المماس أن الميل(m) يساوي

المشتقة الأولى عند نقطة التماس



إذا توازى مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني ⇐ متوازيـان

$y = 2x - 5 \Rightarrow y' = 2$

$4x + 8 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x + 8 \Rightarrow y' = 2$

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (1–)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني ⇐ متعامـدان

$y = 3x - 1 \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow \boxed{m = 3}$

$3y + x + 2 = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$

هناك عدة محاور للأسئلة ، منها :

1) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها مماس أفقي ، في هذه الحالة نشتق ونساوي بالصفر لإيجاد هذه القيم كما في السؤال (11) من كتاب الطالب والسؤال (6) من كتاب التمارين

المماس يوازي المحور x ⇐ $f'(x) = 0$

2) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها ميل المماس يساوي (أو لا يساوي) قيمة معينة ، في هذه الحالة: نساوي المشتقة بتلك القيمة ونحل المعادلة الناتجة لإيجاد هذه القيم ، كما في السؤال (26) من كتاب الطالب أو طلب إيجاد الميل عند إحدى قيم (x) : سؤال (11) من كتاب التمارين

ميل المماس يساوي المشتقة الأولى

3) نقطة التماس معلومة أو الإحداثي (x) لها على الأقل ، عندها نستخدم القاعدة $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

كما في الأسئلة (9 ، 10 ، 12) من كتاب الطالب ، والأسئلة (5 ، 9 ، 11 ، 12) من كتاب التمارين

4) طلب إيجاد المقطع السيني (x) أو الصادي (y) للمماس أو العمودي كما في الأسئلة (14 ، 15 ، 27) من كتاب الطالب

ملاحظة	لإيجاد المقطع(x) نضع بدلاً من (y) صفر	ولإيجاد المقطع(y) نضع بدلاً من (x) صفر

5) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس :

أ) المماس يوازي المستقيم .... كما في السؤال (10) من كتاب التمارين

ب) المماس يعامد المستقيم .....

ج) المماس يقطع المستقيم أو المنحنى ..... كما في الأسئلة (25 ، 28) من كتاب الطالب

د) نقطة التماس غير معلومة وإعطاء نقطة خارجية : نجد ميل المماس بطريقتين (المشتقة وفرق الصادات على السينات)

6) طلب إيجاد مساحة مضلع (أو مثلث) أحد أضلاعه مماس أو عمودي على المماس

اختبر نفسك

1) إذا كان $f(x)=e^x+x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند x = 0 هي:

$a)\ y=2x-1$ $\quad b)\ y=2x+1$ $\quad c)\ y=1-2x$ $\quad d)\ y=2-x$

2) إذا كان $f(x)=\sin x+2x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند x = π هي:

$a)\ y=x-\pi$ $\quad b)\ y=x+\pi$ $\quad c)\ y=x-3\pi$ $\quad d)\ y=2x-2\pi$

3) إذا كان f(x) = Lnx ، فإن معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند النقطة (e , 1) هي :

$a)\ y=-ex-2$ $\quad b)\ y=-ex+e^2+1$ $\quad c)\ y=-e^x+e^2+1$ $\quad d)\ y=\frac{x}{e}$

4) إذا كانت النقطة (2 , 4) تقع على منحنى الاقتران f(x) وكانت f '(2) = 8 ،
فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند هذه النقطة هي :

$a)\ y=8x-30$ $\quad b)\ y=8x-12$ $\quad c)\ y=12-8x$ $\quad d)\ y=8x$

5) إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى f(x) عند النقطة (2 ، 3) هي $y-2=\frac{4}{5}(x-3)$
فإن f '(3) تساوي

a) $\frac{4}{5}$ $\quad$ b) $\frac{5}{4}$ $\quad$ c) $\frac{-4}{5}$ $\quad$ d) $\frac{-5}{4}$

6) إذا كان $f(x)=e^{x-1}+Lnx$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة (1 , 1) هي :

$a)\ y=2x$ $\quad b)\ y=2x-1$ $\quad c)\ y=2x-2$ $\quad d)\ y=2x+1$

7) إذا كان f(x) = sinx فإن معادلة المماس لمنحنى f(x) عند النقطة (π , 0) تساوي :

a) y = π – x $\quad$ b) y = x – π $\quad$ c) y = π $\quad$ d) y = x + π

8) إذا كان $f(x)=e^x+\cos x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور(y) هي:

$a)\ y=2x$ $\quad b)\ y=-2x$ $\quad c)\ y=x+2$ $\quad d)\ y=x-1$

9) إذا كان $f(x)=\ln\frac{e^{2x}}{x^4}+3x$ فإن ميل المماس لمنحنى f عند x = 2 هو :

$a)\ e^2$ $\quad b)\ e^2+3$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)\ 7$

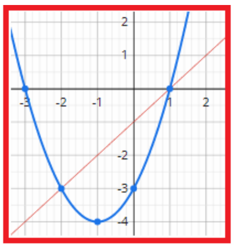
10) إذا كان $f(x)=e^{x-6}-x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي:

a) 5 $\quad$ b) ln6 $\quad$ c) 6 $\quad$ d) 0 , 6

11) جد مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=3-x^2$ عند النقطة (2 , 1) والمحورين
الجواب : 4

12) جد معادلتي المماس والعمودي عليه لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2+2x-3$
عند نقاط تقاطعه مع المستقيم y = x – 1

الجواب: $\boxed{y=4x-4\ ,\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ ,\ y=-2x-7\ ,\ y=\frac{1}{2}x-2}$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	b	b	d	b	a	c	c	c

7) تطبيقات :الحركة في خط مستقيم : هناك ثلاثة مصطلحات :

$s(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow a(t)$

المسافة أو موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة velocity والتسارع acceleration
مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ..... ومشتقة السرعة تساوي التسارع

الحركة في خط مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، فإنَّ:
سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$
وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$
أمّا سرعته فهي $|v(t)|$.

تُسمّى النقطة 0 على خط الأعداد نقطة الأصل.

سكون لحظي تعني أن السرعة تساوي صفرا $v(t) = 0$

يعود الجسم إلى موقعه الأصلي عندما $s(t) = s(0)$

وليس $s(t) = 0$

قواعد مهمة : 1) إذا عاد الجسم إلى موقعه الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً ($s(t) = s(0)$)

2) إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)
وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)
وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

3) لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم نساوي السرعة بالصفر ونجد t

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)
بينما الموقع كمية متجهة

1) يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$
أوجد سرعته عندما ينعدم التسارع.

$s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$
$v = 3t^2 - 6t + 5$
$a = 6t - 6$

عندما ينعدم التسارع، فإن $a = 0$ ⟸ $6t - 6 = 0 \to t = 1$

$(v)_{t=1\text{sec}} = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2 \text{ cm/sec}$

2) يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = 12t^2 - t^3$ ، فجد
1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما t =2   3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي
2) قيم (t) التي يكون عندها في حالة سكون لحظي   4) اتجاه حركة الجسم عند t =3

$s(t) = 12t^2 - t^3$

1) $v(t) = 24t - 3t^2 \Rightarrow v(2) = 48 - 12 = 36$

1+) $a(t) = 24 - 6t \Rightarrow a(2) = 24 - 12 = 12$

2) $v(t) = 0 \Rightarrow 24t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0$ أو $t = 8$

3) $s(0) = 0 \Rightarrow s(t) = 12t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(12 - t) = 0 \Rightarrow t = 12$

4) $v(3) = 24(3) - 3(9) = 45 > 0 \Rightarrow +$

مثال : إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - t^2 + 6$ موقع جسم ، فجد

1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 3$ ، $t = 0.5$

الحل:

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$s(t) = t^3 - t^2 + 6$$

$$1)\quad v(t) = 3t^2 - 2t \Rightarrow v(2) = 3(2)^2 - 2(2) = 8$$

$$1+)\quad a(t) = 6t - 2 \Rightarrow a(2) = 6(2) - 2 = 10$$

$$2) v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(3t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{أو} \quad t = \frac{2}{3}$$

$$3) s(t) = s(0) = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 + 6 = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 = 0$$

$$t^2(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$4)\ v(3) = 3(3)^2 - 2(3) = 21 \Rightarrow +$$

$$v(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{4}) - 2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -$$

مثال : يتحرك جسم ويحدد موقعه بالاقتران : $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ ، جد

1) موقع الجسم بعد (5) ثوان ، 2) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$

$s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9 \longrightarrow s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6$

$v(t) = 1.8t^2 - 1.5 \longrightarrow v(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5$

$a(t) = 3.6t \longrightarrow a(5) = 3.6(5) = 18$

أتحقق من فهمي يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم،

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

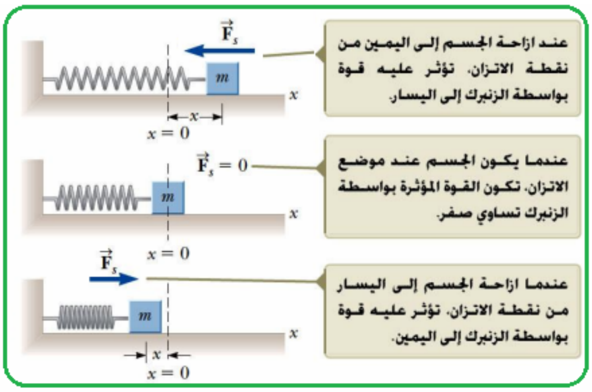
c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

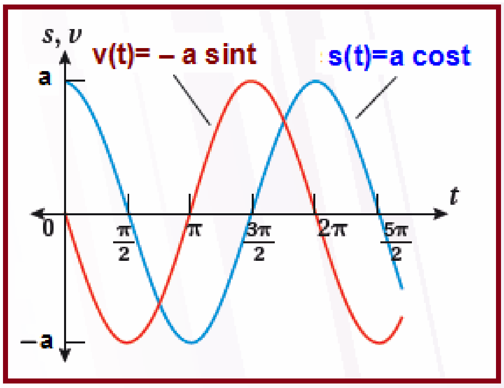
d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

	أتحقق من فهمي صفحة 22
a	$s(t) = t^2 - 7t + 8$ $v(t) = 2t - 7 \rightarrow v(4) = 1\ m/s$ $a(t) = 2 \rightarrow a(4) = 2\ m/s^2$
b	$v(t) = 2t - 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{2}\ s$
c	$v(2) = -3\ m/s$ بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك لليسار عندما $t = 2$
d	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8\ m$ $s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t - 7) = 0 \rightarrow t = 0\ or\ t = 7$ إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7\ s$

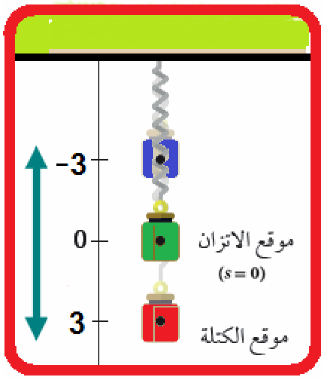
(7-1) تطبيقات : الحركة التوافقية البسيطة

هي حركة جُسيم تحت تأثير قوة يتناسب مقدارها مع بعد الجُسيم عن موضع اتزانه واتجاهها دائمًا نحو موضع الاتزان





مثال) يُبيِّن الشكل المجاور كتلة معلقة بزنبرك ، تم شدها (3) وحدات أسفل الاتزان ،
ثم تُرك ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل حيث يُعطى موقعه بالاقتران S(t)= 3 cost
جد سرعة الكتلة المتجهة وتسارعها



الحل: السرعة = مشتقة الموقع $v(t) = S'(t)= – 3 \sin t$

التسارع = مشتقة السرعة $a(t) = v'(t) = – 3 \cos$

ملاحظات :

– يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 3$ والموقع $s = -3$ على المحور s،
والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان.

– تكون قيمة السرعة أكبر ما يُمكِن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| =1$.
وفي هذه الحالة، فإنَّ ($\cos t = 0$) أي أن قيمة اقتران الموقع تُصبِح صفرًا عند (موقع الاتزان)
وبالتالي فأنَّ سرعة الجسم تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

– قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ لأنَّ : مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وتسحبه الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

– يكون التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان ؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تتساويان ، ولا يكون التسارع صفرًا.

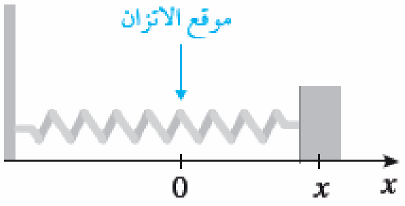
مثال) يُبيِّن الشكل المجاور جسماً مثبتاً في زنبرك بشكل أفقي على سطح أملس ،ويعطى موقعه بالاقتران
S(t)= 4 sint ، جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه

الحل: السرعة = مشتقة الموقع $v(t) = S'(t) = 4 \cos t$

التسارع = مشتقة السرعة $a(t) = v'(t) = – 4 \sin t$

مسألة اليوم

يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًّا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، وx الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الجسم، وسرعته المتجهه، وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$؟

مسألة اليوم صفحة 8

1	$x(t) = 8\sin t \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2$
2	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جســـم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقق من فهمي صفحة 24

a	$s(t) = 7\sin t$ $v(t) = 7\cos t$ $a(t) = -7\sin t$
b	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7\ m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودا وهبوطا بين الموقعين $s = 7\ m, s = -7\ m$ ، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi\ s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7\ m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $\lvert 7\cos t\rvert = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $v(t) = 0 \rightarrow \lvert s(t)\rvert = 7$ (اللحظات) $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

18 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

17 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

19 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

20 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

21 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

22 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

23 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

24 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

32 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون لحظي أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

33 أجد موقع الجُسَيْم عندما يكون تسارعه صفرًا، مُبرِّرًا إجابتي.

16	$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ $v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \Rightarrow v(5) = 40$ m/s $a(t) = 6t - 8 \Rightarrow a(5) = 22$ m/s^2
17	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $\rightarrow t = \frac{5}{3}$ s or $t = 1$ s
18	$v(4) = 21$ m/s إشارة السرعة موجبة ⇦ الاتجاه موجب
19	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0$ m $s(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$ $\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0 \Rightarrow t = 0$ $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية. إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا.
20	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1$ m
21	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0 \Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t \Rightarrow a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4$ m/s^2

22	$s(t) = 4\cos t \Rightarrow v(t) = -4\sin t \Rightarrow a(t) = -4\cos t$
23	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ \text{m/s}$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$

24	من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 4\text{ m}, s = -4\text{m}$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين 4 m/s، و-4 m/s ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان. نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرًا.

31	$s(t) = 4 - \sin t \Rightarrow v(t) = -\cos t \Rightarrow a(t) = \sin t$

32	$v(t) = -\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد الانطلاقة عندما $t = \frac{\pi}{2}$ ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3\text{ m}$
33	$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أنَّ: $s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$ أي أن الجسيم يكون عند $s = 4\text{ m}$ عندما يكون تسارعه صفرًا.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

7) أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

8) أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

7	$s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$ التسارع: $a(t) = 6 - 6t$

8	يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ $v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$ $s(0) = 0, \quad s(2) = 12 - 8 = 4$ إذن يكون الجسيم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0\text{ m}, s = 4\text{ m}$

تمارين إضافية

1) إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ موقع جُسَيْم يتحرك في خط مستقيم ، فجد

1) جد سرعة الجُسَيْم عندما تكون سرعته 6 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 3$ ، $t = 1$

---

2) إذا مثل الاقتران $s(t) = 18\,t^2 - t^3$ موقع جسم ، فجد

1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، 2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي 4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 1$

---

3) يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4e^t - 8t + 2$, $t \geq 0$, موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

1) حدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

---

4) يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويُحدِّد الاقتران : $s(t) = 6\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق:

1) جد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة. 2) صِف حركة الجسم.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

ملخص الجزء الثالث من الدرس ثم اختبار ورقة عمل (3) تطبيقات فيزيائية

هناك ثلاثة مصطلحات : المسافة أو موقع الجسم *s(t)* ، السرعة velocity والتسارع acceleration

$$\boxed{s(t) : s'(t) = v(t) \quad , \quad v'(t) = a(t)}$$

مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ..... ومشتقة السرعة تساوي التسارع

قواعد مهمة : 1) إذا عاد الجسم إلى موقعه الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً (s(t) = s(0))

يعود الجسم إلى موقعه الأصلي : $\boxed{s(t) = s(0)}$ وليس $\boxed{s(t) = 0}$

2) إذا كانت قيمة v(t) > 0 ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)

وإذا كانت قيمة v(t) < 0 ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)

وعندما تكون v(t) = 0 فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون. سكون لحظي $\Leftarrow \boxed{v(t) = 0}$

3) الموقع الابتدائي للجسم يعني أن الزمن صفر (t = 0)....أي نجد s(0)

4) المسافة كمية قياسية (ليست متجهة) ... الموقع كمية متجهة

مثال 1) يُمثِّل الاقتران : $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5 \quad , \quad t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

1) جد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية

2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تنعدم سرعته (بعد بدء الحركة)

3) جد الموقع الابتدائي للجُسَيْم

4) متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

5) جد قِيَم t التي يكون عندها الجُسَيْم في حالة سكون لحظي

6) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجُسَيْم عند t = 4

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 5 \quad , \quad t \geq 0$$

1) $v(t) = 3t^2 - 6t \quad , \quad a(t) = 6t - 6$

2) $v(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2} \Rightarrow a(2) = 6(2) - 6 = 6$

3) $s(0) = 5$

4) $s(0) = 5 \Rightarrow s(t) = t^3 - 3t^2 + 5 = 5 \Rightarrow t^2(t-3) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 3}$

5) $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 3t(t-2) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2}$

6) $v(4) = 3(4)^2 - 6(4) = 24 > 0 \Rightarrow +$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مثال 2) يُمثِّل الاقتران : $s(t) = 6t^2 - t^3 \quad , \quad t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم :

1) متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

2) جد سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه

$$s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow a(t) = 12 - 6t$$

1) $s(t) = s(0) = 0 \Rightarrow 6t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(6 - t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 6}$

2) $a(t) = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2} \Rightarrow v(2) = 12(2) - 3(2)^2 = \boxed{12}$

اختبر نفسك

1) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^2 - 5t + 6$, $t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن اتجاه حركة الجسم عندما $t = 1$ هو : a) موجب b) سالب c) سكون d) لا شيء مما ذكر

2) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = e^t - 5t \;, t \geq 0$
فإن الموقع الابتدائي للجسم هو : d) 0 c) 1 b) – 4 a) 5

3) إذا كان الاقتران : $s(t) = e^t - 3t + 2 \;, t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسـم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته يساوي : d) 4 c) ln3 b) e^3 a) 3

4) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^3 - t^2 + t \;, t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسـم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن سرعة الجسم عندما يكون تسارعه (4) يساوي : d) 4 c) 6 b) 0 a) 2

5) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = 6 - \sin t$ ،
فإن موقع الجسم عندما ينعدم تسارعه يساوي : d) π c) 0 b) 4 a) 6

6) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = t^3 - 4t^2 + 4$ ،
فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : d) 8 s c) 4 s b) 1 s a) 2 s

7) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t \geq 0$ ، يُمِّثل موقع جسـم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : d) 3 s c) 1 s b) 9 s a) 2 s

8) إذا كان الاقتران $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \;, t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسـم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي هي :
$a)\ 3 , 1 \quad b)\ 1 \quad c)\ 3 \quad d)\ 2 , \frac{2}{3}$

9) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5$, $t \geq 0$ ، يُمِّثل موقع جسـم يتحَّرك في مسـار مسـتقيم ،
فإن الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي :
$a)\ (0 , 2) \quad b)\ (2 , \infty) \quad c)\ (0 , 1) \quad d)\ (1 , \infty)$

10) يتحرك جسم معلق في زنبرك إلى الأعلى والأسفل ،ويعطى موقعه بالاقتران $S(t)= 4\sin t$ ،
فإن الاقتران الذي يمثل تسارع الجسم عند أي لحظة هو :
a) 4sint b) 4cost c) – 4cost d) – 4sint

11) يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4e^t - 8t + 2$, $t \geq 0$, موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،
1) حدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

12) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد
أ) سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 1$
ب) تسارع الجسم عندما $t = 2$
ج) قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي
د) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	a	a	c	d	c	a	d

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

3) يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t \;,\; t \geq 0$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما قيم t بالثواني التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي؟

a) $1 , \frac{3}{2}$ b) $1 , 2$ c) $\frac{3}{2} , 2$ d) $1 , 3$

15) يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 5 \;,\; t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

a) $(4 , \infty)$ b) $(0 , 4)$ c) $(2 , 4)$ d) $(2 , \infty)$

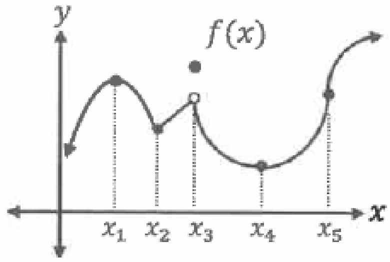
من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

3) إذا كان الاقتران: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2 \;,\; t \geq 0$ يمثّل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. فإنّ تسارع هذا الجسم عندما يكون في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه، هو:

$-8\ m/s^2$ b) $8\ m/s^2$ c) $-16\ m/s^2$ d) $16\ m/s^2$

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

1) معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثّل منحنى الاقتران f ، فإنّ عدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق، هو:



a) 4 c) 2

b) 3 d) 1

2) إذا كان: $f(x) = 2\sin(x + \pi) - \frac{x^2}{\pi}$ ، فإنّ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ، هي:

a) 1 b) 2 c) −1 d) −2

3) يُمثّل الاقتران: $s(t) = 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 + 4 ,\; t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني، فإنّ سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية في اللحظة التي يعود فيها إلى موقعه الابتدائي، هي:

a) −8 b) −1.5 c) −2.5 d) 0

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

2- إذا كان: $f(x) = \ln\left(\frac{e}{x}\right)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{e}{x}$ b) $\frac{x}{e}$ c) $\frac{1}{x}$ $\boxed{\text{d)}}$ $-\frac{1}{x}$

4- إذا كانت: $y = 2x - 3$ معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(2,1)$،

فإنّ قيمة ميل العمودي على المماس عند النقطة $(2,1)$ هي:

$\boxed{\text{a)}}$ $-\frac{1}{2}$ b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

5- الإحداثي x للنقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin x + 1 \ , \ x\in[0, 2\pi]$

التي يكون المماس عندها أفقيًا هو:

$\boxed{\text{a)}}$ $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) π d) 2π

6- إذا كان: $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{4}{x^2}$ b) $-\frac{1}{x^2}$ $\boxed{\text{c)}}$ $\frac{1}{x^2}$ d) $-\frac{3}{x^2}$

السـؤال الثاني: (34 علامة)

a) يمثّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 12t^2 - 14t \ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني. جد كلًا ممّا يأتي: (12 علامة)

1) سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه. 2) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

2- إذا كان: $f(x) = \ln\left(\frac{5}{x^2}\right)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{10}{x}$ b) $\frac{-2}{x}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{-10}{x}$

b) يمثّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 8t^2 - 10t \quad , \quad t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني، جد كلًا مما يأتي: (13 علامة)

1) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي. 2) سرعة الجسم عندما يكون تسارعه $8\ \text{m/s}^2$

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

1) إذا كان: $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 2\sin\pi$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-\frac{\cos x}{2}$ b) $\frac{\cos x}{2}$ c) $-\frac{\cos x}{2} + 2\cos\pi$ d) $\frac{\cos x}{2} + 2\cos\pi$

3) إذا كان: $y = \ln(ax^2)\, ,\ x > 0$ ، حيث a عدد حقيقي موجب، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{2}{x}$ b) $-\frac{2}{x}$ c) $-\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x}$

4) مَيْل العمودي على المماس لمُنحنى الاقتران: $g(x) = 3x - x^2$ عند النقطة $(2,2)$ هو:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

b) يُمثّل الاقتران: $s(t) = 8t^2 - t^3,\ t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني . جد كلاً ممّا يأتي: 1) سرعة الجسم عندما $t = 3$. (12 علامة)

2) قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لَحظي.

3) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

اختبار الدرس الأول

1) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow f'(-2)=?$

2) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\pi^2\Rightarrow f'(x)=?$

3) $f(x)=\frac{x^3-3x+\sqrt{x}-5}{x^2}\Rightarrow f'(x)=?$

4) $f(x)=Ln(3x^2)+Ln(2x)^3+2e^{x+1}-e^3\Rightarrow f'(x)=?$

5) $f(x)=3\sin x-4\cos x+x\Rightarrow f'(x)=?$

6) $f(x)=Ln(\frac{4}{3x})^2+\sqrt{e^{4x-6}}\Rightarrow f'(x)=?$

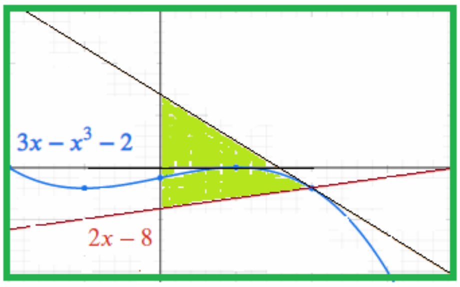
7) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{2x+1}}+Ln3\Rightarrow f'(x)=?$

8) $f(x)=Ln(ax^2)+\frac{a}{x}+a^2\quad,\ f'(-1)=6\Rightarrow a=?$

9) $f(x)=Ln(\frac{e^2}{x^3})\Rightarrow f'(1)=?$

10) $f(x)=Ln5+\frac{\pi}{x}+\sin\pi-e^3+\sqrt{2}\Rightarrow f'(3)=?$

11) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 3x - x^3 - 2$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = 2x - 8$
ثم جد مساحة المثلث المكون من هذا المماس وذلك المستقيم والمحور y



الجواب : المماس $y = -9x + 14$ ، المساحة : 22

12) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^3 + x + 3$ المرسوم من النقطة (0 , 1) ،
الجواب: $y = 4x+1$

13) إذا كان $f(x) = 2x - 4\sin x \quad , \quad x \in [0 \, , \, \pi]$ ،
فجد جميع قيم x التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمحور y ، ثم جد معادلات هذه المماسات

الجـواب : $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3} + 2$

14) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد
أ) سرعة الجسم المتجهة عندما t = 2
ب) تسارع الجسم عندما 3 = 2
ج) قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي
د) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي

15) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3 + 4$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد
أ) سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه
ب) الفترة الزمنية التي يتحرك فيها في الاتجاه السالب
ج) موقع الجسم الابتدائي
د) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الأصلي

الدرس 2 مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

1) مشتقة ضرب اقترانين

$$\boxed{A(x)=f(x)\times g(x)\Rightarrow A'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $f(x),g(x)$

أو :

(مشتقة حاصل ضرب اقترانين = مشتقة الأول × الثاني + مشتقة الثاني × الأول) : أربعة أقواس: ( )( )+( )( )

1) $f(x)=(x^2+1)(2x^3-5x)$

$$\Rightarrow f'(x)=(2x)(2x^3-5x)+(6x^2-5)(x^2+1)$$

2) $f(x)=x^5\sin x$

$$\Rightarrow f'(x)=(5x^4)(\sin x)+(\cos x)(x^5)$$

3) $f(x)=e^x\cos x$

$$\Rightarrow f'(x)=(e^x)(\cos x)+(-\sin x)(e^x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

4) $f(x)=x\,Lnx\Rightarrow f'(e)=?$

$$\Rightarrow f'(x)=(1)(Lnx)+(\frac{1}{x})(x)=Lnx+1$$

$$\Rightarrow f'(e)=Lne+1=1+1=2$$

5) $f(6)=4\ ,\ f'(6)=-2\ ,\ g(6)=-3\ ,\ g'(6)=1\Rightarrow (f\times g)'(6)=?$

$$\Rightarrow (f\times g)'(6)=f'g+g'f=(-2)(-3)+(1)(4)=10$$

$$\boxed{(f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)}$$

6) $f(2)=-7\ ,\ f'(2)=-1\ ,\ g(2)=2\ ,\ (f\times g)'(2)=12\Rightarrow g'(2)=?$

$$\Rightarrow (f\times g)'(2)=f'g+g'f$$

$$12=(-1)(2)+(g')(-7)\Rightarrow g'(2)=-2$$

ويمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد مشتقة حاصل ضرب أي مقدارين

7) $f(x)=5x^3=(5)(x^3)$

$$f'(x)=(0)(x^3)+(3x^2)(5)$$

$$=(0)+15x^2=15x^2$$

Hasanat

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \cos x$

a	$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$ $= 14x^4 - 4x^3 - 28x^3 + 8x^2 + 42x - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$ $= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$
b	$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

تمارين / واجب

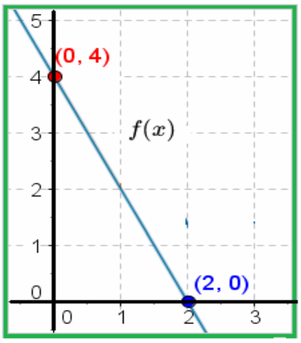
$$1)\ f(x) = (x^3 - 2)(3x^2 + 1) \Rightarrow f'(-1) = ?$$

$$2)\ f(x) = 3x \cos x \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$3)\ f(x) = x^3\ Lnx \Rightarrow f'(1) = ?$$

$$4)\ f(e) = -2\ ,\ f'(e) = -1\ ,\ g'(e) = 4\ ,\ (f \times g)'(e) = 8 \Rightarrow g(e) = ?$$

ملاحظة مهمة



*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم لاقتران خطي (خط مستقيم) :

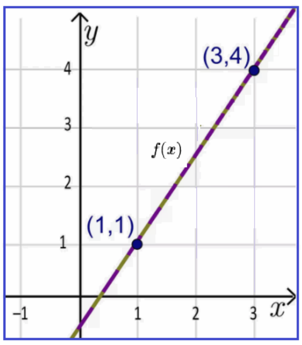
$$f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

المشتقة عند أي نقطة على المستقيم = ميل ذلك المستقيم

$$f'(1) = f'(0) = f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{0-2} = -2$$

لاحظ أن الزاوية التي يصنعها المستقيم مع السينات الموجب منفرجة لذلك قيمة الميل سالبة

وبالتالي المشتقة الأولى سالبة حيث الميل يساوي ظل الزاوية والظل في الربع الثاني سالب

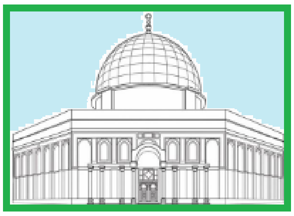


$$f'(1) = f'(3) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

* الزاوية حادة ، لذلك الميل موجب (الربع الأول) وبالتالي المشتقة الأولى موجبة

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

2) مشتقة قسمة اقترانين



$$A(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow A'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2}$$

بشـرط قابليـة الاشـتقاق لكـل مـن $f(x), g(x)$ $\quad g(x)\neq 0$

مشتقة خارج قسمة اقترانين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$

خمسة أقواس: $\dfrac{(\ )(\ )-(\ )(\ )}{(\ )^2}$

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+e^x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(-\sin x)\times(1+e^x)-(e^x)\times(\cos x)}{(1+e^x)^2}$

2) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sin x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1)\times(1+\sin x)-(\cos x)\times(x)}{(1+\sin x)^2}$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(-2)=?$

$$f'(x)=\frac{(1)\times(x^2+1)-(2x)\times(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{(1)\times(4+1)-(-4)\times(-2+1)}{(4+1)^2}=\frac{5-4}{(5)^2}=\frac{1}{25}$$

4) $f(7)=5\ ,\ f'(7)=-1\ ,\ g(7)=-2\ ,\ g'(7)=1 \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(7)=?$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(7)=\frac{f'g-g'f}{(g)^2}=\frac{(-1)(-2)-(1)(5)}{(-2)^2}=\frac{2-5}{4}=\frac{-3}{4}$$

5) $f(3)=-2\ ,\ f'(3)=1\ ,\ g'(3)=3\ ,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(3)=1 \Rightarrow g(3)=?$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=\frac{(1)(g)-(3)(-2)}{(g)^2}=1 \Rightarrow g^2=g+6 \Rightarrow g^2-g-6=0$$

$$\Rightarrow (g-3)(g+2)=0 \Rightarrow \boxed{g(3)=3}\ \ \boxed{\text{or}}\ \ \boxed{g(3)=-2}$$

أتحقّق من فهمي 30 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

a	أتحقق من فهمي صفحة 30 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$ $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$	b	$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$ $f'(x)=\dfrac{e^x(\cos x)-(\sin x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

تمارين

1) إذا كان $f(2)=4\ ,\ f\ '(2)=-3\ ,\ g(2)=-1\ ,\ g\ '(2)=-5$

فجد $a)(f\times g)'(2)$ $b)(\dfrac{f}{g})'(2)$ $c)\ (2f-3g)'(2)$

2) $f(5)=2\ ,\ f\ '(5)=-2\ ,\ g(5)=-3\ ,\ g\ '(5)=3\Rightarrow$

$a)(f\times g)'(5)$ $b)(\dfrac{g}{f})'(5)$ $c)\ (4f-2g)'(5)$ $d)(f-f\times g)'(5)$

3) $f(1)=4\ ,\ f\ '(1)=5\ ,\ g(1)=-3$

$a)(f\times g)'(1)=8\ \Rightarrow g\ '(1)=$

$b)(\dfrac{g}{f})'(1)=6\ \ \Rightarrow g\ '(1)=$

3) مشتقة المقلوب : إذا كان بسط الاقتران الكسري (ثابتا) فإن المشتقة = سالب الثابت × مشتقة المقام / (المقام)²

$$f(x)=\frac{c}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-c\, f'(x)}{(g(x))^2}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لـ $g(x)$, $g(x)\neq 0$

$$1)\ f(x)=\frac{4}{x+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-(4)\times(1+2x)}{(x+x^2)^2}$$

$$2)\ f(x)=\frac{3}{\sin x-e^x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-(3)\times(\cos x-e^x)}{(\sin x-e^x)^2}$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{5+\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{5+x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-(1)\times(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})}{(5+x^{\frac{2}{3}})^2}$$

ملاحظة : يُمكن الاستغناء عن هذه القاعدة وعدم حفظها بتطبيق قاعدة القسمة حيث البسط مشتقته صفر

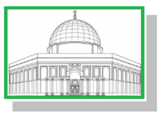
$$1^+)\ f(x)=\frac{4}{x+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(0)(x+x^2)-(1+2x)(4)}{(x+x^2)^2}=\frac{-(1+2x)(4)}{(x+x^2)^2}$$

أتحقّق من فهمي 33 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

a
$$f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$$
$$f'(x)=\frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$$

b
$$f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$$
$$f'(x)=\frac{-\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$



$$1)\ f(x)=\frac{7}{\text{x}-\cos\text{x}} \Rightarrow f'(x)=?$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{\text{Lnx}} \Rightarrow f'(x)=?$$

$$3)\ f(3)=5\ ,\ f'(3)=4 \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(3)=?$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

3 $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

5 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6 $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7 $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

9 $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x-3}$

10 $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

1	$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$
3	$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$
5	$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{-2\sin x}{e^x}$
6	$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$ $= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$
7	$f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9	$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2 - 3x}$ $f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f'(x) = (x^3 - x)\left((x^2+2)(2x+1) + (x^2+x+1)(2x)\right) + (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $= (x^3 - x)(x^2+2)(2x+1) + (x^3-x)(x^2+x+1)(2x) + (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 $(fg)'(0)$

13 $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14 $(7f - 2fg)'(0)$

12	$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$ $= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$
13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$
14	$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

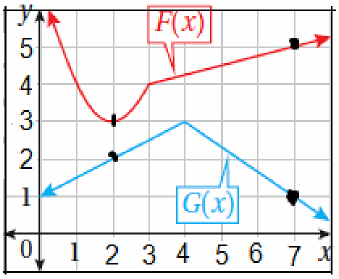
18 $f(x)=\frac{1+x}{1+e^x},\ (0,\frac{1}{2})$

19 $f(x)=e^x\cos x+\sin x,\ (0,1)$

18	$f'(x)=\frac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ ميل المماس عند النقطة $(0,\frac{1}{2})$ هو: $f'(0)=\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\ \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$
19	$f'(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+\cos x$ ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو: $f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$ معادلة المماس هي: $y-1=2(x-0)\ \Rightarrow y=2x+1$

31 إذا كان: $f(x)=9\ln x+\frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنّ $f'(x)=\frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

31	$f'(x)=9\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-1(4x)}{4x^4}=\frac{9}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{9x^2-1}{x^3}=\frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$



يُبيّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x)=F(x)G(x)$، وكان: $Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

32	$P'(2)=F(2)G'(2)+G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$ و $(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل المماس الأفقي، ويساوي صفرًا $P'(2)=3\times\frac{1}{2}+2\times 0=\frac{3}{2}$
33	$Q'(7)=\frac{G(7)F'(7)-F(7)G'(7)}{G^2(7)}=\frac{1\times\frac{1}{4}-5\times-\frac{2}{3}}{1}=\frac{43}{12}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

34	$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرًا، أي أنّ : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ ، وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان $e^x = 0$، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

36	$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow x+1 = y(x-1) \rightarrow x(1-y) = -y-1$ $x = \frac{y+1}{y-1} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} = \frac{(x-1)^2}{-2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10 $f(x) = x^2 \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

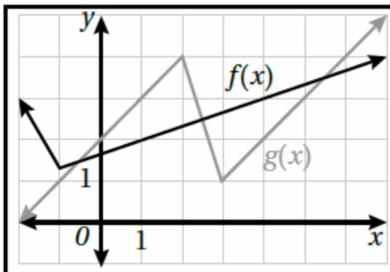
11 $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

10	ميل المماس: $f'(x) = -x^2 \sin x + 2x\cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$ معادلة المماس: $y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$
11	$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + \sin x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$ ميل المماس: معادلة المماس: $y+1 = 1(x-\pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ **13** $h(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ **14** $g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$

12	$f'(x)=\frac{2x^2-4x^2+2x}{x^4}=\frac{-2x+2}{x^3}=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,f(1))=(1,1)$
13	$h'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,h(0))=(0,0)$
14	$g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$ $g'(x)=\frac{8e^x-8e^x(x-2)}{e^{2x}}=\frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}}=\frac{8(3-x)}{e^x}=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \left(3,\frac{8}{e^3}\right)$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $u(x)=f(x)g(x)$،

وكان: $v(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 $u'(1)$ **16** $v'(4)$

15	$u'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times1+3\times\frac{1}{3}=3$
16	$v'(4)=\frac{g(4)f'(4)-f(4)g'(4)}{(g(4))^2}=\frac{2\times\frac{1}{3}-3\times1}{(2)^2}=-\frac{7}{12}$

يُمثِّل الاقتران: $v(t)=\frac{10}{2t+15}, t\geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

19 أجد تسارع السيّارة عندما $t=5$.

20 أجد تسارع السيّارة عندما $t=20$.

19	$a(t)=\frac{-20}{(2t+15)^2} \Rightarrow a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}=-0.032\ \text{ft/s}^2$
20	$a(20)=\frac{-20}{(40+15)^2}\approx -0.007\ \text{ft/s}^2$

تمارين

1) $f(x) = Lnx \ \sin x \Rightarrow f'(x) = ?$

2) $f(x) = x(e^x - x^2) \Rightarrow f'(0) = ?$

3) $f(x) = \frac{5}{x} \Rightarrow f'(3) = ?$

4) $f(x) = \frac{Ln2x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = ?$

5) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(2) = ?$

6) $f(x) = ax + 4\sin x \quad , \quad f'(0) = 2 \Rightarrow a = ?$

7) $f(x) = \frac{2x-1}{x^3} \quad , f'(a) = 0 \Rightarrow a = ?$

***$f(2) = -4 \ , f'(2) = -5 \ , g(2) = 1 \ , g'(2) = -1 \Rightarrow$

8) $(f \times g)'(2) =$

9) $(\frac{g}{f})'(2) =$

10) $(f - 3g)'(2) =$

11) إذا كان $f(x) = \sin x \ \cos x$ فأثبت أن $f'(x) = \cos 2x$

12) إذا كان $f(x) = e^x \sin x + \cos x$ فجد معادلة المماس لمنحنى f(x) عند x = π

4) مشتقات الاقترانات المثلثية

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \ \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \ \cot x$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

1) $f(x)=\sin x+\tan x-x^2$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2x$$

2) $f(x)=\sec x+\cos x-x$

$$\Rightarrow f'(x)=\sec x \ \tan x-\sin x-1$$

3) $f(x)=x^2\cot x \Rightarrow f'(x)=(2x)(\cot x)+(-\csc^2 x)(x^2)$

4) $f(x)=\tan x \ \sec x \Rightarrow f'(x)=(\sec^2 x)(\sec x)+(\sec x \ \tan x)(\tan x)$

$$=\sec^3 x+\sec x \ \tan^2 x$$

5) $f(x)=\dfrac{e^x+\cot x}{1+\sec x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(e^x-\csc^2 x)(1+\sec x)-(\sec x \ \tan x)(e^x+\cot x)}{(1+\sec x)^2}$$

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad$ $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ $\quad$ $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad$ $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=x\cot x$

b) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

a	$f'(x)=(x)(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)=-x\csc^2 x+\cot x$
b	$f'(x)=\dfrac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2) $f(x) = x^3 \sec x$ 4) $f(x) = e^x(\tan x - x)$ 8) $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ 11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

2	$f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$ $= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$
4	$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$ $= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - xe^x$
8	$f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$ $= \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$
11	$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$ $f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي مُعتمِدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

20) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ 21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ 22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

20	$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
21	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ $= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$
22	$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$

من كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
2. $f(x) = -\csc x - \sin x$
3. $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$
4. $f(x) = x \cot x$
5. $f(x) = 4x - x^2 \tan x$
6. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$
7. $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$
8. $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$
9. $f(x) = (x+1)e^x$

1	$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
2	$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$
3	$f'(x) = \frac{(2x+c)(x^2+c) - 2x(x^2+cx)}{(x^2+c)^2} = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2+c)^2}$
4	$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$
5	$f'(x) = 4 - x^2\sec^2 x - 2x\tan x$
6	$f'(x) = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4} = \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$
7	$f'(x) = 1 - \frac{4(x+3) - 4x}{(x+3)^2} = 1 - \frac{12}{(x+3)^2}$
8	$f'(x) = \frac{-6\cos^2 x - (3 - 3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2} = \frac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$
9	$f'(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$

17 إذا كان: $f(x) = x\sec x$، فأُثبِت أنّ $f'(x) = \sec x\,(1 + x\tan x)$.

17	$f'(x) = x\sec x\tan x + \sec x = \sec x\,(1 + x\tan x)$

تمارين

1) $f(x) = x\sec x \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = \frac{\cot x}{1+\csc x} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = (Lnx^4)(sex) \Rightarrow f'(x) =$

المشتقات العليا

المشتقة	الأولى	الثانية	الثالثة	رتبتها n
رموزها	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
	y'	y''	y'''	$y^{(n)}$
	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

1) $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$

$\Rightarrow f''(x)=12x^2$

$\Rightarrow f'''(x)=24x$

2) $y=x^2+\sin x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=2x+\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=2-\sin x \Rightarrow \dfrac{d^3y}{dx^3}=-\cos x$

أتحقّق من فهمي 38

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

$$f'(x)=\frac{(x)(\cos x)-(\sin x)(1)}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2}-\frac{(x^2)(\cos x)-(\sin x)(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x}{x^4}$$

ويمكن التوصل إلى الإجابة نفسها بتحويل الاقتران إلى $x^{-1}\sin x$ وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\,,\ x=-2$

16) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\,,\ x=8$

17) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}\,,\ x=4$

15

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)(2x)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4)^2(16)-(16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{(16)(8)-(-32)(2)(-4)}{(8)^3}=-\frac{1}{4}$$

16

$$f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}}=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{144}$$

17

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\sqrt{x}(2)(1+\sqrt{x})^1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x(1+\sqrt{x})^4}=\frac{2+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(4)=\frac{2+\frac{1+2}{2}}{16(1+2)^3}=\frac{7}{864}$$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$ 24) $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ 25) $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

23	$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^2}$
24	$f'''(x) = 2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
25	$f^{(4)}(x) = 2x+1$ $f^{(5)}(x) = 2$ $f^{(6)}(x) = 0$

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا: 27) أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$. 28) أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

27	$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$
28	$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$ $= 2e^x \cos x = \frac{d^2y}{dx^2}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39) أُثبِت أنَّ $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

40) أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

39	$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $f''(x) = \frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{x^6} = \frac{-5x^2 + 6x^2\ln x}{x^6} = \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$
40	$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$ $= x^4 \times \frac{-5 + 6\ln x}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$ $= -5 + 6\ln x + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1 = 0$

من كتاب التمارين

18) إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$ و $f''(x)$.

18	$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$

مُعدّل التغيُّر

المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلاً ، إيجاد $\frac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x ، وفي كثير من المواقف الحياتية يكون التغير بالنسبة إلى الزمن.

مثال : ينتقل الدم من القلب إلى الشرايين الرئيسة والشعيرات الدموية، ثم يعود إليه من خلال الأوردة، إذا كان ضغط الدم الانقباضي P لشخص ما (بالملمتر الزئبقي) يتناقص باستمرار خلال 10 ثوانٍ وفقًا للاقتران :

$$P(t) = \frac{25t^2+125}{t^2+1} \quad , \quad 0 \le t \le 10$$

حيث t بالثواني،

فكم يكون معدل ضغط دم هذا الشخص في الثانية الخامسة؟

$$P'(t) = \frac{\frac{d}{dt}(25t^2+125)\cdot(t^2+1) - (25t^2+125)\cdot\frac{d}{dt}(t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{(50t)\cdot(t^2+1) - (25t^2+125)\cdot(2t)}{(t^2+1)^2}$$

$$P'(5) = \frac{(50(5))((5)^2+1) - (25(5)^2+125)(2(5))}{((5)^2+1)^2} = \frac{-1000}{676} \approx -1.48$$

أتحقّق من فهمي يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

a	$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - (500t^2)(2)}{(2t+9)^2} = \frac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$
b	$P'(12) = \frac{9000(12)+1000(12)^2}{(24+9)^2} \approx 231.405$

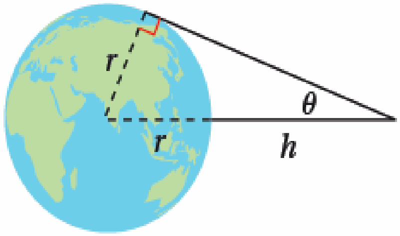
Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتدرّب وأحُلّ المسائل

26 نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

26	$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

29	$\csc\theta = \dfrac{r+h}{r} \rightarrow r + h = r\csc\theta$ $\rightarrow h = r(\csc\theta - 1)$

30	$\dfrac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$ $\left.\dfrac{dh}{d\theta}\right\rvert_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6}\right) = 6371(-2\times\sqrt{3}) \approx -22070\ km/rad$

من كتاب التمارين

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات.
أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

21	$A = \sqrt{t}(6t+5) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$ $\dfrac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \dfrac{5}{2\sqrt{t}} \quad cm^2/s$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

تمارين

1) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1} \Rightarrow f''(-1) = ...$ الجواب: -1

2) $f(x) = x^5 \Rightarrow f^{(5)}(-1) = ...$ الجواب: 120

3) $f(x) = x^2\sin x \Rightarrow f''(x) =$

4) $f(x) = x^2 + \cos x \Rightarrow f''(x) =$

5) $f(x) = Lnx \Rightarrow f^{(4)}(2) = ...$ الجواب: $\frac{-3}{8}$

تمارين عامة

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	c	c	a	b	b	b	b	c	b

1) $f(x) = x\cos x \Rightarrow f'(x) =$

a) $-\sin x$ b) $1-\sin x$

c) $\cos x + x\sin x$ d) $\cos x - x\sin x$

2) $f(x) = e^{x}\sin x \Rightarrow f''(x) =$ a) 0 b) $2e^{x}\sin x$

c) $2e^{x}\cos x$ d) $-2e^{x}\cos x$

3) $f(x) = \dfrac{x}{Lnx} \Rightarrow f'(x) =$ a) $\dfrac{Lnx-1}{2Lnx}$ b) x c) $\dfrac{Lnx-1}{(Lnx)^2}$ d) $\dfrac{Lnx+1}{(Lnx)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$ $, g(x) \neq 0,\ g(3) = 1\ ,\ g'(3) = -1 \Rightarrow f'(3) =$

a) 4 b) -2 c) 3 d) -3

5) $f(5) = -1\ ,\ f'(5) = 1\ ,\ g(5) = -2\ , g'(5) = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{g}{f}\right)'(5) =$

a) 1 b) -1 c) $\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{-1}{4}$

6) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x+Lnx} \Rightarrow f'(1) =$ a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1} \Rightarrow f'(x) =$ a) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ b) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

c) $\dfrac{-\cos x}{\sin x + 1}$ d) $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

8) $f(x) = \dfrac{\sec x}{\sec x - 1} \Rightarrow f'(x) =$ a) 1 b) $\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$

c) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ d) $\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f''(-1) =$ a) 0 b) 1 c) -1 d) 3

10) $f(x) = Ln(x)^2 \Rightarrow f^{(4)}(2) =$ a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{-3}{4}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) $Ln4$

ملخص الدرس الثاني ثم اختبار ��� ورقة عمل (4) ��� مشتقتا الضرب والقسمة

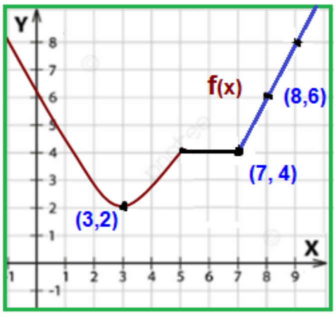
إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، فإنَّ : $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّ : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$
y'	y''	y'''	$y^{(n)}$

*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم ، على الأغلب هناك ثلاثة احتمالات :



1) أن تقع النقطة على خط مستقيم : عندها المشتقة = ميل ذلك المستقيم

$$f'(9) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{8-7} = 2$$

2) أن تقع النقطة على رأس مدبب :عندها المشتقة = غير موجودة مثل f '(7) , f '(5)

3) أن تقع النقطة على مستقيم أفقي أو تكون قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) :
عندها المشتقة = صفر : f '(3) = 0 , f '(6) = 0

1) $f(x) = x^3 \cos x \Rightarrow f'(x) = ?$

2) $f(x) = x^2 \, Ln(x^2) \Rightarrow f'(x) = ?$

3) $f(3) = 2 \;,\; f'(3) = -2 \;,\; g(3) = -5 \;,\; g'(3) = 4 \Rightarrow (f \times g)'(3) = ?$

4) $f(2) = -3 \;,\; f'(2) = -5 \;,\; g'(2) = 2 \;,\; (f \times g)'(2) = 8 \Rightarrow g(2) = ?$

$5)\ f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x} \Rightarrow f'(x)=?$

$6)\ f(1)=4\ ,\ f'(1)=-1\ ,\ g(1)=-3\ ,\ g'(1)=1 \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(1)=?$

$7)\ f(8)=5\ ,\ f'(8)=-2\ ,\ g(8)=-8\ ,\ g'(8)=-1 \Rightarrow$

$a)\ (f\times g)'(8)=?$ $b)\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(8)=?$ $c)\ (2f-3g)'(8)$ $d)\ \left(\dfrac{3}{g}\right)'(8)=?$

$8)\ f(x)=x^2+3\cot x-2\sec x \Rightarrow f'(x)=$

$9)\ f(x)=\dfrac{\csc x}{x+\frac{3}{x}} \Rightarrow f'(x)=$

$10)\ f(x)=Lnx \Rightarrow f^{(3)}(2)=?$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

2) إذا كان: $f(x) = (x-1)\cos x$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $\cos x + (1-x)\sin x$
b) $\cos x\,(x-1) + \sin x$
c) $\cos x\,(1-x) + \sin x$
d) $\cos x + (x-1)\sin x$

4) إذا كان: $y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ هي:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ d) -2

5) إذا كان: $x \neq 0$ ، $f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$ ، فإن $f^{(3)}(x)$ هي:

a) $-120x^6$ b) $\frac{6}{x^4}$ c) $-24x^5$ d) $-\frac{24}{x^5}$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

4) إذا كان: $f(x) = \frac{-1}{6x-x^2}$ ، فإن $f'(2)$ ، هي:

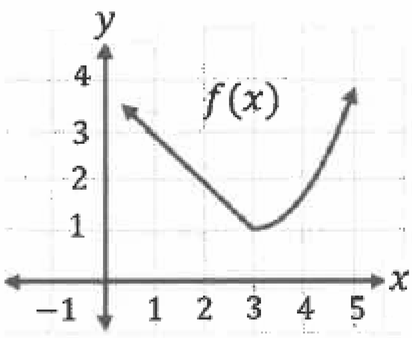
a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{32}$

5) إذا كان: $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$ ، فإن $f''(-1)$ ، هي:

4 b) -4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

4) يُمثّل الشكل الآتي منحنى الاقتران f ، إذا كان: $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ ، فإنّ $g'(2)$ ، هي:



a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $-\frac{1}{4}$
d) $-\frac{1}{2}$

5) إذا كان: $f(x) = \csc x + e^2$ ، فإن $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، هي:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+2$ c) $3\sqrt{2}+2$ d) $3\sqrt{2}$

6) إذا كان: $f(x) = e^x - 3x$ ، فإنّ الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم الذي معادلته: $4x + 2y + 2 = 0$ ، هو:

a) $\ln 5$ b) $\ln 7$ c) 0 d) 1

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

7- إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 1$ ، وكان:
$f(1) = -1 , f'(1) = 5 , g(1) = 1 , g'(1) = 2$ ، فإنّ قيمة $(fg)'(1)$ هي:

a) 3 b) -7 c) 10 d) -3

9- إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{5x-1}$ ، فإنّ قيمة $f'(1)$ هي:

a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

2) $y = \frac{2}{3+\sqrt{x}}$, $x = 4$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

3- إذا كان: $f(x)$ ، $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 2$ ، وكان: $g(2) = -3$ ، $g'(2) = -4$ ، $f(2) = 3$ ، $f'(2) = -2$ ، فإنّ $(fg)'(2)$ هي:

a) -18 b) 18 c) -6 d) 6

4- إذا كان: $f(x) = 6 - \frac{1}{e^x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{1}{e^{2x}}$ b) $\frac{-1}{e^{2x}}$ c) $\frac{-1}{e^x}$ d) $\frac{1}{e^x}$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

1) $y = \frac{e^x+x^2}{\cos x}$, $x = 0$

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

5) إذا كان: f, g اقترانيْن قابلَيْن للاشتقاق عند $x = -1$، وكان: $f(-1) = 3$ ، $f'(-1) = 2$ ، $g(-1) = 3$ ، $g'(-1) = 6$ ، فإنّ $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$ هي:

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

7) إذا كان: $f(x) = x \tan x$ ، فإنّ قيمة $f'(\pi)$ هي:

a) π b) $\pi - 1$ c) $-\pi$ d) $1 - \pi$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكلّ ممّا يأتي عند القيمة المُعطاة إزاء كلٍّ منها:

2) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $x = 0$

اختبار الدرس الثاني

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) إذا كان $f(x) = x\, e^{x}$, فإن $f'(0) =$

$a)\ 1 \qquad b)\ 0 \qquad c)\ e^{2} \qquad d)\ e$

2) إذا كان $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, فإن $f'(2) =$

$a)\ \dfrac{1}{2} \qquad b)\ \dfrac{1}{9} \qquad c)\ \dfrac{5}{9} \qquad d)\ \dfrac{-1}{9}$

3) إذا كان $f(x) = \ln x^{2}$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 2\ln x \qquad b)\ \dfrac{-2}{x^{2}} \qquad c)\ \dfrac{2}{x} \qquad d)\ \dfrac{2}{x^{2}}$

4) إذا كان $f(x) = \dfrac{2x-8}{e^{x}}$, فإن قيم (x) التي عندها مماس أفقي هي:

$a)\ 4 \qquad b)\ -2 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ 5,0$

5) إذا كان $f(x) = (x^{2}-1)(x^{2}+1)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 4x^{2} \qquad b)\ -4x \qquad c)\ 4x \qquad d)\ 4x^{3}$

6) إذا كان $f(x) = \sin x \cos x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ \sin 2x \qquad b)\ \cos 2x \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -\sin x \cos x$

$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$ $\boxed{\cos 2x = \cos^{2} x - \sin^{2} x}$

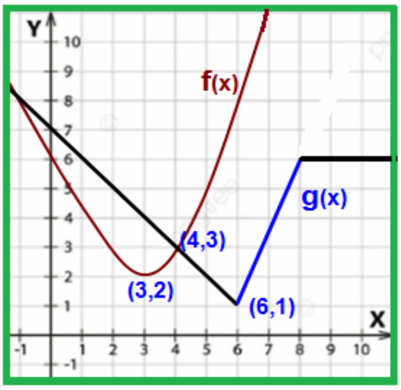
***معتمدا المعلومات الآتية ، أجب عن الأسئلة (7، 8، 9): $f(1) = 5, f'(1) = -2, g(1) = 2, g'(1) = 4$

7) $(f\,g)'(1)$ تساوي: $a)\ 16 \qquad b)\ -2 \qquad c)\ -24 \qquad d)\ -8$

8) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(1)$ تساوي: $a)\ 6 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ -4 \qquad d)\ -6$

9) $(3f - g)'(1)$ تساوي: $a)\ -2 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -10 \qquad d)\ -6$

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنيي الاقترانين ، أجب عن الأسئلة (10 – 16)



10) $g'(6)$ تســاوي: a) 3 b) 0 c) 5 d) غير موجودة

11) $g'(9)$ تســاوي: a) 3 b) 0 c) 5 d) غير موجودة

12) $f'(3)$ تســاوي : a) 4 b) 0 c) 2 d) غير موجودة

13) $g'(2)$ تســاوي : a) -1 b) 0 c) 5 d) 1

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

14) $(f\ g)'(3)$ تســاوي : a) 4 b) 2 c) 0 d) -2

15) $\left(\frac{g}{f}\right)'(3)$ تســاوي : a) $\frac{-1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$

16) $g''(5)$ تســاوي: a) 2 b) 0 c) 1 d) غيــر موجــودة

---

17) إذا كان $g'(2)=2\,,\ g(2)=1\,,\ f(2)=4$ وكانــت $(f\ g)'(2)=5$ فــإن $f'(2)=$

a) 2 b) 13 c) -3 d) -2

18) إذا كان $f'(3)=8\,,\ f(3)=g'(3)=4$ وكانــت $\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=1$ فــإن $g(3)=$

a) -4 b) 8 c) $-4,4$ d) 4

19) إذا كان $f(x)=x^3\ g(x)\,,\ g(-1)=-2\,,\ g'(-1)=2$ فــإن $f'(-1)=$

a) -4 b) -8 c) -6 d) 8

20) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t)=t^2\ e^{-t}$

فإن قيمة (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي بعد حركته هي :

a) 2 b) 1 c) 0.5 d) 1.5

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

21) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x$ ، فإن $f'(3)$ يساوي :

$a)\ 0$ $b)\ \frac{8}{9}$ $c)\ \frac{-8}{9}$ $d)\ \frac{2}{9}$

22) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x$ ، فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 0$ $b)\ \frac{2}{x}$ $c)\ \frac{-2}{x^3}$ $d)\ \frac{2}{x^3}$

23) إذا كان $f(x)=e^x+\ln x$ ، فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1$ $b)\ e$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{e}$

24) إذا كان $f(x)=e^x\ln x$ ، فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1$ $b)\ e$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{e}$

25) إذا كان $f(x)=e^x\sin x$ ، فإن $f'(0)$ يساوي:

$a)\ 1$ $b)\ 2e$ $c)\ 0$ $d)\ 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	c	d	b	a	d	c	d

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	b	a	d	d	b	c	d	b	a

21	22	23	24	25
b	d	a	b	a

السؤال الثاني :إذا كان عدد السكان في بلدة ما يُعطى بالعلاقة $P(t)=\frac{100t^2}{2t+5}$ حيث (t) الزمن بالسنوات

جد معدل التغير في عدد السكان بعد (10) سنوات

السؤال الثالث : إذا كان $f(x)=\cot x$ فأثبت أن $f'(x)=-\csc^2 x$

السؤال الرابع : جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة (x) المعطاة :

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1} \quad , x=-2$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$2)\ f(x)=x\ \sin x \quad , x=\pi$$

$$3)\ f(x)=x^2\ \ln x \quad , x=e$$

السؤال الخامس : جـد معادلــة المماــس لمنحـنى الاقـتران $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ عنـد $x=e$

السؤال السادس : جـد معادلــة العمـودي علـى المماـس لمنحـنى $f(x)=\frac{x-2}{1+e^x}$ عنـد النقطـة $(0,-1)$

السؤال السابع :

إذا كـان $f(x)=\frac{g(x)}{x^2h(x)}$, $f(1)=g'(2)=2$, $g(1)=8$, $f'(1)=5$ فجـد قيمـة $h'(1)$

الجواب : 17 –

السؤال الثامن : إذا كـان $f(x)=x^n$, $f''(x)=12x^{n-2}$, فجـد قيمـة n

الجواب : 3 , 4 –

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

الدرس 3 قاعدة السلسلة The Chain Rule

1) قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$y=u^4 \quad ، \quad u=5x^3-2x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=4u^3\times(15x^2-2)=4(5x^3-2x)^3(15x^2-2)$$

$y=\cos u. \quad u=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin u\times 2x$$

$$=-2x\sin x^2$$

$\boxed{y=e^{x^3}}$

$u=x^3 \Rightarrow y=e^u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^u\times 3x^2$$

$$=3x^2e^{x^3}$$

$\boxed{y=(2x-5)^{10}}$

$u=2x-5 \Rightarrow y=u^{10}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=10u^9\times 2$$

$$=20(2x-5)^9$$

وبشكل عام ،يمكن تكرار القاعدة أكثر من مرة

$$y=f(u),u=g(t),t=h(x)\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dt}\times\frac{dt}{dx}}$$

$y\to u\to t\to x$

$$f(x)=(goh)(x)=g(h(x))\Rightarrow \boxed{f'(x)=(goh)'(x)=g'(h(x))\times h'(x)}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $h(x),g(x)$

مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ هي : حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$

1) $f(x)=x^3+1 \quad , \quad g(x)=x^2-1\Rightarrow (fog)'(-2)=?$

$f'(x)=3x^2 \quad , \quad g'(x)=2x$

$g(-2)=3 \quad , \quad g'(-2)=-4 \quad , f'(3)=27$

$$\Rightarrow (fog)'(-2)=f'(g(-2))\times g'(-2)=f'(3)\times(-4)=27\times(-4)=-108$$

2) $f(x)=\sin x \quad , \quad g(x)=x^2-4\Rightarrow (fog)'(2)=?$

$f'(x)=\cos x \quad , \quad g'(x)=2x \quad , \quad g(2)=0$

$$\Rightarrow (fog)'(2)=f'(g(2))\times g'(2)=f'(0)\times 2(2)=1\times 4=4$$

3) $f(x)=Lnx \quad , \quad g(x)=x^3+1 \Rightarrow (fog)'(x)=?$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad g'(x)=3x^2$$

$$\Rightarrow (fog)'(2)=f'(g(x))\times g'(x)=f'(x^3+1)\times 3x^2=\frac{1}{x^3+1}\times 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+1}$$

---

4) $f(5)=3 \ , f'(6)=2 \ , \ g(5)=6 \ , \ g'(5)=4 \Rightarrow (fog)'(5)=?$

$$(fog)'(5)=f'(g(5))\times g'(6)=f'(6)\times 4=(2)(4)=8$$

---

5) $f'(5)=6 \ , \ g(7)=5 \ ,(fog)'(7)=-12 \ \Rightarrow g'(7)=?$

$$\Rightarrow (fog)'(7)=f'(g(7))\times g'(7)=f'(5)\times g'(7)=-12$$

$$\Rightarrow 6\times g'(7)=-12 \quad \Rightarrow g'(7)=-2$$

---

6) $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \ , \ g'(1)=3 \ , g(1)=2 \Rightarrow (fog)'(1)=?$

$$(fog)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)$$

$$=f'(2)\times 3=\frac{2}{(2)^2+1}\times 3=\frac{6}{5}$$

---

7) $f(x)=3\tan x \ , \ g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{4})=?$

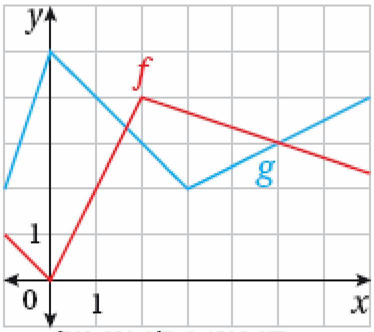
$$f'(x)=3\sec^2 x \ , \ g'(x)=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$(gof)'(\tfrac{\pi}{4})=g'(f(\tfrac{\pi}{4}))\times f'(\tfrac{\pi}{4})$$

$$=g'(3)\times 6=\frac{2-2(3)^2}{((3)^2+1)^2}\times 6=\frac{-16\times 6}{100}=\frac{-96}{100}$$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$، فأجـد $A'(5)$.

23	$A(x) = f(g(x))$ $A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5) = f'(-2) \times g'(5) = 4 \times 6 = 24$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

40 $h'(1)$ **41** $p'(1)$

40	$h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$
41	$p(x) = g(f(x))$ $p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ $p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$ **29** $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

28	$f(u) = u^5 + 1 \Rightarrow f'(u) = 5u^4$ $u = g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
29	$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2\sec^2 u \tan u$ $u = g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi$ $(fog)'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi = 5\pi$

2) نتائج قاعدة السلسلة : هناك خمس نتائج لقاعدة السلسلة ، وهي :

1) مشتقة الزاوية للاقتران المثلثي :

$$\boxed{f(x)=\sin(3x-2)}\ \leftarrow \text{الزاوية}$$

عندما تكون الزاوية في الاقتران المثلثي تختلف عن (x)، دائما نضرب في مشتقتها بعد اشتقاق الاقتران المثلثي

وكذلك بقية الاقترانات المثلثية

$$\boxed{f(x)=\sin(g(x))\Rightarrow f'(x)=\cos(g(x))\times(g'(x))}$$

بشرط قابلية الاشتقاق للاقتران $g(x)$

خطأ شائع

$$1)\ f(x)=\sin 4x^3\Rightarrow f'(x)=\cos 4x^3(12x^2)\ ,\ \boxed{f'(x)=\cos 12x^2}$$

$$2)\ f(x)=4\cos(Lnx)\Rightarrow f'(x)=-\ 4\sin(Lnx)(\frac{1}{x})$$

$$3)\ f(x)=x\tan(e^x)\Rightarrow f'(x)=(1)(\tan(e^x))+\sec^2(e^x)\times(e^x)(x)$$

$$4)\ f(x)=\csc(\sin x)\Rightarrow f'(x)=-\csc(\sin x)\cot(\sin x)\times(\cos x)$$

$$5)\ f(x)=\cot(1-x^2)\Rightarrow f'(x)=$$

$$6)\ f(x)=\sec(xe^x)\Rightarrow f'(x)=$$

$$7)\ f(x)=x^2\sin(2x)\Rightarrow f'(x)=$$

$$8)\ f(x)=\cos(\tan(x^3))\Rightarrow f'(x)=$$

$$9)\ f(x)=\sin 2x\cos 3x\Rightarrow f'(x)=$$

$$10)\ f(x)=\frac{\tan 5x}{1-\sec 2x}\Rightarrow f'(x)=$$

ملاحظة: عندما تكون القوة في الاقتران الأسي تختلف عن (x)، نضرب في مشتقتها بعد (اشتقاق) الاقتران الأسي

$$\boxed{f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\times(g'(x))}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=7e^{3x-1} \Rightarrow f'(x)=7e^{3x-1}(3)$

2) $f(x)=e^{x^2+3x} \Rightarrow f'(x)=e^{x^2+3x}(2x+3)$

3) $f(x)=2x\ e^{x^3} \Rightarrow f'(x)=(2)(e^{x^3})+(e^{x^3})(3x^2)(2x)$

$\Rightarrow f'(0)=(2)(1)+(1)(0)(0)=2$

4) $f(x)=\frac{3}{x^2}\ e^{-x^3} \Rightarrow f'(x)=$

5) $f(x)=x^2\ e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=e^{\sin x}\cos x \Rightarrow f'(x)=$

7) $f(x)=e^{x^2+\tan 4x}\sec 2x \Rightarrow f'(x)=$

8) $f(x)=\sqrt[3]{e^{x^3}\sec 3x} \Rightarrow f'(x)=$

مشتقة ما بداخل اللوغاريتم
ما بداخل اللوغاريتم

3) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (Ln( )) :

عندما يكون ما بداخل اللوغاريتم يختلف عن (x) ، تكون المشتقة =

$$f(x)=Ln(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$g(x)$ قابل للاشتقاق , $g(x)>0$

1) $f(x)=Ln(x^2-5x+7) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}$

2) $f(x)=Ln(\sin 3x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}=3\cot 3x$

3) $f(x)=x\ Ln(x^2+1) \Rightarrow f'(x)=(1)(Ln(x^2+1))+(\dfrac{2x}{x^2+1})(x)$

4) $f(x)=Ln(x^2+4) \Rightarrow f''(x)=$

5) $f(x)=Ln(\sec 2x) \Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=\cot(x^2+1)+e^{x^2+2}+Ln(x^2+x) \Rightarrow f'(x)=$

7) $f(x)=Ln(x^2\ \tan 3x) \Rightarrow f'(x)=$

8) $f(x)=Ln(e^{\sin 2x\ \cos 3x}+\csc 4x) \Rightarrow f'(x)=$

9) $f(x)=Ln(x^2+\tan 3x) \Rightarrow f'(x)=$

10) $f(x)=Ln(x^4\cos 5x) \Rightarrow f'(x)=$

4) قاعدة سلسلة القوَّة : (القوس المرفوع إلى قوة)

عند اشتقاق القوس المرفوع إلى قوة ، نشتق القوة أولاً ثم نضرب في مشتقة ما بداخل القوس

$$\boxed{f(x)=(g(x))^n \Rightarrow f'(x)=n\ (g(x))^{n-1}(g'(x))}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=(2x+5)^3 \Rightarrow f'(x)=3(2x+5)^2(2)$

2) $f(x)=(2x^3+5x)^7 \Rightarrow f'(x)=7(2x^3+5x)^6(6x^2+5)$

3) $f(x)=\sqrt[4]{(x^2+5)^3} \Rightarrow f(x)=(x^2+5)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}(x^2+5)^{\frac{-1}{4}}(2x)$

4) $f(x)=\sqrt{\sin x+1} \Rightarrow f(x)=(\sin x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(\sin x+1)^{\frac{-1}{2}}(\cos x)$

5) $f(x)=(x^2+\sin 3x)^4 \Rightarrow f(x)=$

6) $f(x)=\sqrt[7]{x^3\sin 2x-3} \Rightarrow f(x)=$

7) $y=\dfrac{\sec x^2}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=$

ملاحظة :عند وجود اقتران مثلثي مرفوع إلى قوة، يُفضل كتابته على شكل قوس مرفوع إلى قوة ثم الاشتقاق

$\boxed{\sin^2 x=(\sin x)^2}$ $\boxed{\cos^3 8x=(\cos 8x)^3}$ $\boxed{\tan^5(2x+1)^2=(\tan(2x+1)^2)^5}$

1) $y=\cot^3 x^2=(\cot x^2)^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=3(\cot x^2)^2(-\csc^2 x^2)(2x)$

2) $f(x)=\sin^4(x^2+1)=(\sin(x^2+1))^4 \Rightarrow f'(x)=4(\sin(x^2+1))^3(\cos(x^2+1)(2x)$

3) $f(x)=\tan^2(\sin 5x)=(\tan(\sin 5x))^2$

$\Rightarrow f'(x)=2\tan(\sin 5x)(\sec^2(\sin 5x)(\cos 5x)(5)$

5) حالة خاصة في مشتقة الجذر التربيعي :

مشتقة الجذر التربيعي: $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$g(x)$ قابــل للاشــــتقاق , $g(x)>0$

1) $f(x)=\sqrt{x^2+\sec x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x \;\; \tan x \;\; \sec x}{2\sqrt{x^2+\sec x}}$

2) $f(x)=\sqrt{x^3 \sin 2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3x^2)(\sin 2x)+(\cos 2x)(2)(x^3)}{2\sqrt{x^3 \sin 2x}}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2 \cot 2x} \Rightarrow f'(x)=$

4) $f(x)=\sqrt{\sin 2x \;\; \cos 3x} \Rightarrow f'(x)=$

5) $f(x)=\sqrt{8-x^3} \Rightarrow f'(-1)=?$

مُلخص نتائج السلسلة

	من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77 — $f(x)=\sin(3x-2)$ ← الزاوية
1	$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right)=\cos\left(g(x)\right)\times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية
2	$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right)=e^{g(x)}\times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسي : نضرب في مشتقة القوة
3	$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل الوغاريتم}}$
4	$\frac{d}{dx}(g(x))^n=n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة: نضرب في مشتقة ما بداخل القوس
5	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

أتحقّق من فهمي 41 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\cot x)$

a	$f(x) = \tan 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x\sec^2(3x^2)$	أتحقق من فهمي صفحة 41
b	$f(x) = e^{\ln x} = x \Rightarrow f'(x) = 1$	
c	$f(x) = \ln\cot x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$	

أتحقّق من فهمي 42 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ c) $f(x) = (\ln x)^5$

a	$f'(x) = \dfrac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \dfrac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$	أتحقق من فهمي صفحة 42	
b	$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$	c	$f'(x) = 5(\ln x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{5(\ln x)^4}{x}$

أتحقّق من فهمي 45 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$ b) $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

a	$f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1) = (\cos(7x^3+6x-1))^2$ $f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$ $= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$ $= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$
b	$f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ $f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2\left(4(x^2+1)^3(2x)\right)$ $= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 53 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = e^{4x+2}$
2. $f(x) = 50e^{2x-10}$
3. $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$
4. $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$
6. $f(x) = x^2\tan\dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$
9. $f(x) = (\ln x)^4$
10. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$
11. $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$
15. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$
17. $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$
18. $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

1	$f(x)=e^{4x+2}$ $f'(x)=4e^{4x+2}$	2	$f(x)=50e^{2x-10}$ $f'(x)=100e^{2x-10}$
3	$f(x)=\cos(x^2-3x-4)$ $f'(x)=-(2x-3)\sin(x^2-3x-4)$ $=(3-2x)\sin(x^2-3x-4)$		
4	$f(x)=10x^2e^{-x^2}$ $f'(x)=(10x^2)(-2xe^{-x^2})+(e^{-x^2})(20x)=20xe^{-x^2}(1-x^2)$		
5	$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$		
6	$f'(x)=(x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right)+\left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$ $=-\sec^2\frac{1}{x}+2x\tan\frac{1}{x}$		

7	$f'(x)=3+5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2=3+10\pi^2x\sin(\pi x)^2$
8	$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)=\ln(1+e^x)-\ln(1-e^x)$ $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f'(x)=\frac{4}{x}(\ln x)^3$
10	$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}+\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
11	$f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}=(x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x)=\frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$

15	$f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ $f'(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1\times\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ $=2\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\times\frac{1}{1+\cos x}$ $=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$
17	$f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$ $f'(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$
18	$f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))=(\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x)=4(\tan(\sec(\cos x)))^3\sec^2(\sec(\cos x))\times\sec(\cos x)\tan(\cos x)$ $\times(-\sin x)$ $=-4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

24 إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأثبت أنَّ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

24	$f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1})(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x)=\sin \pi x\ ,f'''(x)$ 28 $f(x)=\cos(2x+1), f^{(5)}(x)$ 29 $f(x)=\cos x^2, f''(x)$

27	$f(x)=\sin \pi x$ $f'(x)=\pi\cos \pi x$ $f''(x)=-\pi^2\sin \pi x$ $f'''(x)=-\pi^3\cos \pi x$
28	$f(x)=\cos(2x+1)$ $f'(x)=-2\sin(2x+1)$ $f''(x)=-4\cos(2x+1)$ $f'''(x)=8\sin(2x+1)$ $f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$ $f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$
29	$f(x)=\cos x^2$ $f'(x)=-2x\sin x^2$ $f''(x)=(-2x)(2x\cos x^2)+(\sin x^2)(-2)$ $=-4x^2\cos x^2-2\sin x^2$

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 49 $y=e^x\sin^2 x\cos x$

48	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$
49	$\frac{dy}{dx}=(e^x\sin^2 x)(-\sin x)+(\cos x)\left((e^x)(2\sin x\cos x)+(\sin^2 x)(e^x)\right)$ $=-e^x\sin^3 x+2e^x\cos^2 x\sin x+e^x\cos x\sin^2 x$

من كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$
2) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
3) $f(x) = \cos^2 x$
4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$
6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$
8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$
9) $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)^2$
10) $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$
11) $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

1	$f'(x) = -10e^{-0.1x}$
2	$f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$
3	$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$
4	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$
10	$f'(x) = x^2 \times \dfrac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$ $= \dfrac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \dfrac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$

6	$f(x) = 2(\cot(\pi x + 2))^2$ $f'(x) = -4\pi\cot(\pi x+2)\csc^2(\pi x + 2)$
8	$f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+2}$
9	$f'(x) = 2 \times \dfrac{x^2}{x^3+2} \times \dfrac{2x(x^3+2) - 3x^4}{(x^3+2)^2}$ $= \dfrac{2x^2}{x^3+2} \times \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^2} = \dfrac{8x^3 - 2x^6}{(x^3+2)^3}$
11	$f'(x) = \dfrac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$ $= \dfrac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16) أُثبِت أنَّ $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17) أجد $f''(x)$.

16	$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$ $= 3\cos x(1 - \sin^2 x)$ $= 3\cos x(\cos^2 x)$ $= 3\cos^3 x$
17	$f''(x) = -9\cos^2 x \sin x$

21) إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22) إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) = 4f(x)$.

21	$h(x) = \sqrt{4+3f(x)} = (4+3f(x))^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = \dfrac{1}{2}(3f'(x))(4+3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$ $h'(1) = \dfrac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}} = \dfrac{12}{2\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$
22	$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ $f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$

23) إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) + 16f(x) = 0$.

23	$f'(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$ $f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$ $= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$ $f''(x) + 16f(x) = 0$

3) قواعد الاشتقاق الأساسية ، وقاعدة السلسلة

*** تطبيقات الاشتقاق من هندسية ، فيزيائية وغيرها لاقترانات حلها عن طريق قاعدة السلسلة

مثال1) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 4\sqrt{2x} - 6e^{2-x}$ عند (x = 2)

$$f(2) = 4(2) - 6e^{0} = 2$$

$$f'(2) = \frac{4}{2} + 6e^{0} = 8$$

$$f(x) = 4(2x)^{\frac{1}{2}} - 6e^{2-x}$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(2x)^{-\frac{1}{2}}(2) - 6e^{2-x}(-1)$$

$$= 4(2x)^{-\frac{1}{2}} + 6e^{2-x} \quad = \frac{4}{\sqrt{2x}} + 6e^{2-x}$$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 8(x - 2) \rightarrow \boxed{y = 8x - 14}$

مثال2) يتحرك جسم على المحور (x) بحيث يعطى موقعه بالاقتران $s(t) = \cos(t^2 + 1)$ ،
جد سرعته اللحظية بدلالة (t)

الحل :

$s(t) = \cos(t^2 + 1)$

$v(t) = -\sin(t^2 + 1)(2t) = -2t\sin(t^2 + 1)$

أتحقّق من فهمي a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$ عندما $x = 1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

	أتحقق من فهمي صفحة 47
a	$f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$ $f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + (x^3 - x + 1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$
b	$f'(x) = \frac{e^{2x} \times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$
	$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin\pi - 2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}} = 0$ ميل المماس يساوي صفرًا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسيا وميله غير معرف.

أتحقّق من فهمي

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران:

$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

b) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

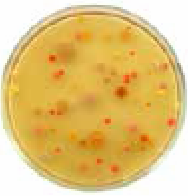
a	$U'(x) = 80 \times \frac{\frac{(3x+4)(2) - (2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$ $= \frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$
b	$U'(20) = \frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}} \approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبا

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x)=4e^{-0.5x^2}\,,\,x=-2$ 20 $f(x)=x+\cos 2x\,,\,x=0$ 22 $f(x)=\sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}\,,\,x=3$

19	$f(x)=4e^{-0.5x^2} \Rightarrow f(-2)=4e^{-0.5(-2)^2}=\frac{4}{e^2} \Rightarrow f'(x)=-4xe^{-0.5x^2}$ ميل المماس هو: $m=f'(-2)=-4(-2)e^{-0.5(-2)^2}=\frac{8}{e^2}$ معادلة المماس هي: $y-\frac{4}{e^2}=\frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y=\frac{8}{e^2}x+\frac{20}{e^2}$
20	$f(x)=x+\cos 2x \Rightarrow f(0)=0+\cos(0)=1 \Rightarrow f'(x)=1-2\sin 2x$ ميل المماس هو: $m=f'(0)=1-2\sin 2(0)=1$ معادلة المماس هي: $y-1=1(x-0) \Rightarrow y=x+1$
22	$f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$ $f(3)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ $f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)+\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ ميل المماس هو: $m=f'(3)=(2)(0)+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y+2=-\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t)=Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:



25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

25	$A(t)=Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(t)=0.1Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(3)=0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k)=0.1Ne^{0.1k}$ $0.2=0.1Ne^{0.1k} \Rightarrow$ $e^{0.1k}=\frac{0.2}{0.1N}=\frac{2}{N} \Rightarrow 0.1k=\ln\frac{2}{N} \Rightarrow k=10\ln\frac{2}{N}$

30 إذا كان الاقتران: $y=e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

30	$\frac{dy}{dx}=e^{\sin x}\cos x \Rightarrow m=\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=0}=e^{\sin 0}\cos 0=1$ ميل المماس هو:

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسـفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

32	$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$ $v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177 \text{ cm/s}$
33	$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0 \Rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\lvert\sin 2.4t\rvert = 1$ أي أن : $\sin 2.4t = 1, or -1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1$ or, $s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو -0.1 cm
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t$ $a(t) = 0 \Rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$،

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax+b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد قيمة كلٍّ من a و b، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

44 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

42	$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$ ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1+b} = 1 \Rightarrow a = ax_1 + b \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{b}{a}$ المقدار $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين. إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1
43	ميل المماس عند $P(0, 2)$ يساوي 1، أي أنّ: $f'(0) = 1$ $y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b}$ $f'(0) = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow f(0) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2 \Rightarrow a = b = e^2$
44	أفترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1). بتعويض قيمة كل من a، و b نجد أن: $f(x) = \ln(e^2x + e^2) = \ln(e^2(x+1)) = 2 + \ln(x+1)$ $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ $y_1 = f(x_1) = f(1) = \ln(e^2 + e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2$ إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2 + \ln 2)$.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَيم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

53 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

54 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

55 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

53	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \frac{2t-2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \frac{(t^2-2t+1.9)(2) - (2t-2)(2t-2)}{(t^2-2t+1.9)^2} = \frac{-2t^2+4t-0.2}{(t^2-2t+1.9)^2}$
54	$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ $s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9$ m $a(1) = \frac{-2+4-0.2}{(1-2+1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2$ m/s^2
55	الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$ $s(t) = \ln(1.9) \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9) \Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$ $\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0$ or $t = 2$ يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13. $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \frac{\pi}{2}$
14. $f(x) = (x^2+2)^3,\ x = -1$
15. $f(x) = \tan 3x,\ x = \frac{\pi}{4}$

13	$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$ ، عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$ $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$
14	$f'(x) = 6x(x^2+2)^2 \qquad f'(-1) = -54$ $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = 27$ $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$

15	$f'(x) = 3\sec^2 3x \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19. أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

20. أُثبِت أنّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

19	$a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$ $a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032\ \text{ft/s}^2$
20	$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} \approx -0.007\ \text{ft/s}^2$

27. سـيّارة: يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ ســرعة (بالمتر لكل ثانية) سـيّارة تتحرّك في مســار مسـتقيم، حيث: $0 \leq t \leq 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

27	$a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$ $a(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$ $v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}\ \ \text{m/s}$

ملخص الجزء الأول من الدرس الثالث ثم اختبار ورقة عمل (5) قاعدة السلسلة ونتائجها

$$y = f(u),\ u = g(t),\ t = h(x) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx}}$$

$$y \to u \to t \to x$$

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) \Rightarrow \boxed{f'(x) = (goh)'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)}$$

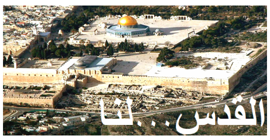
بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $h(x), g(x)$

مشتقة الاقتران المُركَّب ((f(g(x هي : حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي (g(x في مشتقة الاقتران الداخلي (g(x

ملخص نتائج السلسلة

	من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77 — f(x)=sin (3x−2) ← الزاوية
1	$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية
2	$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)} \times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسي : نضرب في مشتقة القوة
3	$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : مشتقة ما بداخل اللوغاريتم / ما بداخل الوغاريتم
4	$\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)^n = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة : نضرب في مشتقة ما بداخل القوس
5	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : مشتقة ما بداخل الجذر / 2 × الجذر نفسه

أخطاء شائعة



$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(2x)$ ..... خطأ

$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2)(2x)$ ... صح

$f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x$ ..... خطـــــأ

$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(\sin x)(\cos x)$ ... صح

$f(x) = Ln(x^2+9) \Rightarrow f'(x) = Ln\,\frac{2x}{x^2+9}$ خطأ

$f(x) = Ln(x^2+9) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+9}$ صح

اختبر نفسك

السـؤال الأول

1) $f(x)=x+\sin x \quad , \quad g(x)=x^2-1 \Rightarrow (fog)'(1)=$ a) 4 b) −4 c) 0 d) 2

2) $f(x)=Lnx \quad , \quad g(x)=x^2 \Rightarrow (fog)'(x)=$ a) x b) $\frac{2}{x}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\text{Ln}\frac{1}{x}$

3) $f(x)=x^3+1 \, , \, g(2)=1 \, , g'(2)=-4 \Rightarrow (fog)'(2)=$ a) −8 b) 12 c) −12 d) 4

4) $f(x)=\sin 3x^2 \Rightarrow f'(x)=?$

a) $-6x\cos 3x^2$ b) $6x^2\cos 3x^2$ c) $2\sin 3 \ \cos 6x$ d) $6x\cos 3x^2$

5) $f(x)=4\cos(Lnx) \Rightarrow f'(x)=?$

a) $-4\sin(\text{Lnx})$ b) $4-\sin(\frac{1}{x})$ c) $4-\frac{1}{x}\sin(\text{Lnx})$ d) $-\frac{4}{x}\sin(\text{Lnx})$

6) $f(x)=Ln(\tan x) \Rightarrow f'(x)=?$

a) $\text{Ln}\frac{\sec^2 x}{\tan x}$ b) $\frac{\sec x}{\tan x}$ c) $\sec^2(\frac{1}{x})$ d) $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

7) $f(x)=2\sin^3 x \Rightarrow f'(x)=?$

a) $3\sin x \ \sin 2x$ b) $6\sin x \ \cos x$ c) $6\sin x$ d) $6\sin^2 x$

8) $f(x)=\cos x \ e^{\sin x} \Rightarrow f'(\pi)=$ a) 1 b) −1 c) −2 d) 0

9) $f(x)=\sqrt{1-x^3} \Rightarrow f'(-2)=$ a) −24 b) −2 c) 2 d) −12

10) $f(x)=e^{x^2\cos(x-1)} \Rightarrow f'(1)=$ a) 1 b) −1 c) 2e d) e

11) $f(x)=(x \ g(x))^2 \quad , \quad g'(-1)=-2 \quad , g(-1)=4 \Rightarrow f'(-1)=?$

a) −16 b) −8 c) 48 d) −48

12) $f(x)=(\sin 2x-2)^4 \Rightarrow f'(0)=$ a) −64 b) 32 c) −32 d) 2

1	a
2	b
3	c
4	d
5	d
6	d
7	a
8	a
9	b
10	c
11	d
12	a

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

1) $f(x)=x^3e^{x^2}$

2) $f(x)=\cot(3-x^2)$

3) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin e^{4x}$

4) $f(x)=Ln(\sin^3 x)$

5) $f(x)=(Ln(\sin x))^3$

6) $f(x)=Ln(\sin x^3)$

7) $f(x)=\frac{\sin 3x^2}{\tan^2 x^3}$

8) $f(x)=Ln\frac{4x}{\csc 2x}$

9) $f(x)=\sin^3(\cot(\sec(\cos x^2)))$

السؤال الثالث : أثبت أن : $\boxed{f(x)=Ln(\tan x) \Rightarrow f'(x)=2\csc 2x}$

$$a^x = e^{\ln a^x} \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$$

4) مشتقة $a^{(g(x))}$

$y = a^x$

$y = \boxed{a}^x$

$y = \boxed{e^{\ln(a)}}^x$

$y = e^{x.\ln(a)}$

$\frac{dy}{dx} = \ln(a) \,.\, e^{x.\ln(a)}$

$= \ln(a) \,.\, e^{\cancel{\ln}(a)^x}$

$\frac{dy}{dx} = \ln(a) \,.\, a^x$

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

عند اشتقاق الاقتران الأسي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e) : نضرب في Ln(الأساس)

مثال :

1) $f(x) = 3^{2x} \Rightarrow f'(x) = Ln(3)(3^{2x})(2) = 2Ln3(3^{2x})$

2) $f(x) = 4^{x^3-2x} \Rightarrow f'(x) = Ln(4)(4^{x^3-2x})(3x^2-2)$

3) $f(x) = 2^{x^2}\sin x^3 \Rightarrow f'(x) = Ln(2)(2^{x^2})(2x)(\sin x^3) + (\cos x^3)(3x^2)(2^{x^2})$

تمارين

1) $f(x) = x^5 e^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = e^{3x+1} + 4^{2x-1} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = \dfrac{3^{x+1}}{2^x} \Rightarrow f'(x) =$

4) $f(x) = \dfrac{3^x}{2^x+1} \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = 3^x Lnx \Rightarrow f'(x) =$

6) $y = 8^{x^2-5}\cos 3x \Rightarrow y' =$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$ b) $f(x) = 6^{1-x^3}$ c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

a	$f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1}\ln\pi$
b	$f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$
c	$f'(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

5) مشتقة $\log_a g(x)$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

عند اشتقاق الاقتران اللوغاريتمي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e) : نقسم على Ln(الأساس)

نظرية

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

1) $f(x) = \log \sin x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{(\ln 10)\sin x}$

2) $f(x) = \log(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x)}{(x^2+1)\ln 10}$

3) $f(x) = \log_3 \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \log_3(x^3+1) - \log_3(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)\ln 3} - \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$$

4) $f(x) = 4Log_3(x^2-1) \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = \dfrac{1}{Log_4 x^3} \Rightarrow f'(x) =$

6) $f(x) = 4Log_8 \tan x \Rightarrow f'(x) =$

7) $f(x) = Log \dfrac{8}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x) =$

8) $f(x) = 4Log_8 \sin 2x \Rightarrow f'(x) =$

أتحقَّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_8(x^2+3x)$

a	$f(x) = \log \sec x$ $f'(x) = \dfrac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \dfrac{\tan x}{\ln 10}$	b	$f(x) = \log_8(x^2+3x)$ $f'(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

12 $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{x}$

13 $f(x)=2^{-x}\cos \pi x$

14 $f(x)=\dfrac{10\log_4 x}{x}$

16 $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

12	$f'(x)=\dfrac{(x)(2\ln 3)3^{2x}-3^{2x}}{x^2}=\dfrac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$
13	$f'(x)=(2^{-x})(-\pi\sin \pi x)+(\cos \pi x)(-\ln 2)2^{-x}=-\pi\, 2^{-x}\sin \pi x-2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$
14	$f'(x)=\dfrac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}=\dfrac{\frac{10}{\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$
16	$f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}=\dfrac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

21 $f(x)=2^x\ ,\ x=0$

21	$f(x)=2^x \Rightarrow f(0)=2^0=1 \Rightarrow f'(x)=(\ln 2)2^x$
	ميل المماس هو: $m=f'(0)=(\ln 2)2^0=\ln 2$
	معادلة المماس هي: $y-1=(\ln 2)(x-0)\ \Rightarrow\ y=(\ln 2)x+1$

31 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t)=20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t=2$.

31	$A(t)=20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} \Rightarrow A'(t)=\dfrac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$
	$A'(2)=\dfrac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\approx -0.098$

من كتاب التمارين

5 $f(x)=\log_3\dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$ **7** $f(x)=\log 2x$ **12** $f(x)=3^{\cot x}$

5	$f(x)=\log_3\dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}=\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3(x-1)-\log_3 2$
	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+\dfrac{1}{2(x-1)\ln 3}$

7	$f'(x)=\dfrac{2}{2x\ln 10}=\dfrac{1}{x\ln 10}$
12	$f'(x)=-(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$

6) مشتقة المعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ: $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$x = 3\cos t,\ y = 2\sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$

$\frac{dy}{dt} = 4\cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos t}{-3\sin t}$$

$x = 2\sin t,\ y = 3\cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$ جد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

الجواب: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$

a. $x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4$

b. $x(t) = 2t + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t + 4, \quad -2 \le t \le 2$

c. $x(t) = 5\cos t, \quad y(t) = 5\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

الجواب:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2}.$

$\frac{dy}{dx} = -\cot t.$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

(a) $x = 2t^3 + 1\ ,\ y = te^{-2t}$

(b) $x = 3\cos t\ ,\ y = 3\sin t$

(c) $x = t + \sqrt{t}\ ,\ y = t - \sqrt{t}$

(d) $x = 2t^3 + 1\ ,\ y = t^2 \cos t$

(e) $x = te^{-t}\ ,\ y = 2t^2 + 1$

$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t, \quad -2 \le t \le 3$

$x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4$

$x = t^5 - 4t^3\ ,\quad y = t^2$

الجواب:

$\frac{3t^2 - 3}{t - 2}$

$\frac{1}{t}$

$\frac{2}{5t^3 - 12t}$

أتحقَّق من فهمي أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t\ ,\quad y = \tan t\ ,\quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t\ ,\quad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\ ,\quad y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35) $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

36) $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

37) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

38) $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

35	$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$ $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$ $x = 1 + 2 = 3$, $y = (1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6$
36	$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$ $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$ $x = -\frac{1}{2}$, $y = (-1)^2 - 4 = -3 \Rightarrow y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 5$

37	$\frac{dy}{dt} = \sin t$, $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$

38	$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$, $\frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2\sec^2 t \tan t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2}\cot t \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1$, $y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية: $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$، حيث: $0\le t\le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t=\frac{\pi}{4}$ هما: $1+\sqrt{2}$، و $1-\sqrt{2}$ على الترتيب.

39

$$\frac{dy}{dt}=2\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

ميل المماس: $$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

ميل العمودي على المماس: $$m=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=1-\sqrt{2}$$

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x=t^2 , y=2t$:

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2 , 2t)$.

47 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

45

$$\frac{dy}{dt}=2 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=2t \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$$

46

$$\underbrace{m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}}_{\text{ميل المماس}} \Rightarrow \underbrace{m=\frac{-1}{\frac{1}{t}}=-t}_{\text{ميل العمودي}}$$

$$y-2t=-t(x-t^2) \quad \Rightarrow \quad y=-tx+t^3+2t$$

47

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y=0$ في معادلته:

$$0=-tx+t^3+2t \Rightarrow x=\frac{t^3+2t}{t}=t^2+2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x=0$:

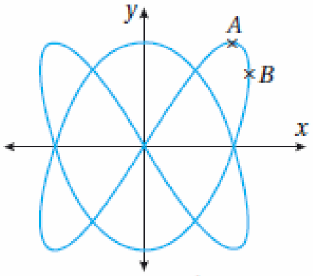
$$y=-t(0)+t^3+2t=t^3+2t$$

مساحة المثلث:

$$A=\frac{1}{2}|t^2+2||t^3+2t|=\frac{1}{2}|t^2+2||t(t^2+2)|$$

$$=\frac{1}{2}|t(t^2+2)^2|=\frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية: $x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$



50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

52 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

50	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$ $\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ $x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.
51	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52	عند نقطة الأصل $x = y = 0$ أي أنّ: $\sin 2t = \sin 3t = 0$ تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$ كما تتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$

من كتاب التمارين

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.
أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

18	$\frac{dy}{dt} = b\cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$ $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ معادلة المماس: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$

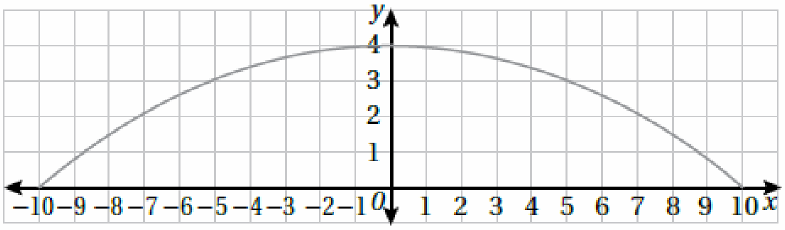
يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

24	$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$
25	$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \rightarrow -\sec\theta = \sqrt{2} \rightarrow \sec\theta = -\sqrt{2} \rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y = 2\cos\theta = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}$
26	$\frac{dy}{dx} = -\sec\theta = -\frac{1}{\cos\theta}$ يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos\theta = 0$ وعندها يكون: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0 = 1$, $y = 2\cos\theta = 2 \times 0 = 0$ فالنقطة المطلوبة هي: $(1, 0)$



مـرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t,\ y = 2 + 2\cos 2t$ حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

30

$$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t\,, \quad \frac{dx}{dt} = 10\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t \quad , -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

31

يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا

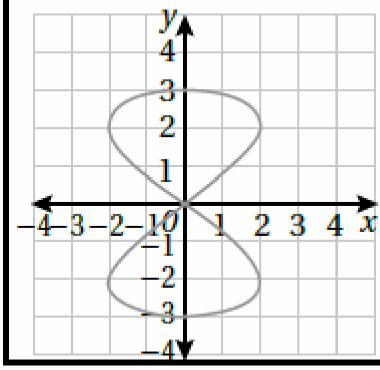
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \qquad 10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا

أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4،

$$2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2$$

$$\Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$



32 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t\,,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.

32

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t} \,, 0 \le t \le 2\pi$$

$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2\sin 2t\,, 3\cos t) = (0, 0) \Rightarrow \sin 2t = 0 \text{ و } \cos t = 0$$

$$\sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \qquad \cos t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

ملخص الجزء الثاني من الدرس الثالث ثم اختبار ورقة عمل (6) قاعدة السلسلة ونتائجها

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

$$a^x = a^{Ln(a)^x} \Rightarrow a^x = a^{(x)Lna}$$

عند اشتقاق اقتران أسي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e) : نضرب في Ln(الأساس)

$$\frac{d}{dx}(7^x) = 7^x\,Ln7$$

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

عند اشتقاق اقتران لوغاريتمي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e):نقسم على Ln(الأساس)

$$\frac{d}{dx}(Log_7 x) = \frac{1}{x\,Ln7}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ ، $\frac{dx}{dt} \neq 0$

السؤال الأول :

1) $f(x) = 5^{x+1} \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ 5^{x+1} \qquad b)\ 5^{x+1}Ln5 \qquad c)\ Ln5^{x+1} \qquad d)\ (x+1)5^x$

2) $f(x) = \pi^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ (2Ln\pi)\pi^{2x} \qquad b)\ (Ln\pi)\pi^{2x} \qquad c)\ (2Ln\pi)\pi^x \qquad d)\ 2x\pi^x$

3) $f(x) = 4^x \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ 4^x \qquad b)\ 4x-1 \qquad c)\ (2Ln2)4^x \qquad d)\ \text{Ln}(4^x)$

$$3Ln2 = Ln2^3 = Ln8$$

4) $f(x) = e^{3x} + 3^{2x} \Rightarrow f'(0) =$

$a)$ 3+Ln9 $\qquad b)$ 3+Ln3 $\qquad c)$ 4 $\qquad d)$ 1+2Ln3

5) $f(x) = 7^{-x} \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ 7^{-x}Ln7 \qquad b)\ 7^{-x} - Ln7 \qquad c)\ -7 \qquad d)\ -7^{-x}Ln7$

$$\boxed{Ln6 = Ln(2\times 3) = Ln2 + Ln3}$$

6) $f(x) = 4^{x^2-3x} \Rightarrow f'(0) =$

a) $Ln4$ b) $3Ln4$ c) $-3Ln4$ d) $Ln(64)$

7) $f(x) = Log_3(x^2+4) \Rightarrow f'(x) =$

a) $\dfrac{2x}{x^2+4}$ b) $\dfrac{2x\ Ln3}{x^2+4}$ c) $\dfrac{2x}{(x^2+4)Ln3}$ d) $\dfrac{2x}{(x^2+4)Log_3x}$

8) $f(x) = Log_2x \Rightarrow f'(x) =$ a) $\dfrac{1}{xLn2}$ b) $\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{1}{2Lnx}$ d) $\dfrac{Ln2}{x}$

9) $f(x) = Ln9\times Log_3x \Rightarrow f'(1) =$ a) 2 b) 3 c) $Ln3$ d) $Ln9$

10) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2^x$ عند $x = 1$ هي :

a) $y = xLn4 - Ln4 + 2$ b) $y = xLn4 - Ln4 - 2$

c) $y = xLn4 - Ln4 + 1$ d) $y = 2x - 2$

11) $x = \sin^2\theta \ , \ y = 1 - 2\cos\theta \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} =$

a) $\csc\theta$ b) $\sec\theta$ c) $-sec\theta$ d) 1

12) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = 3t + 2$, $y = 3t^2 - 1$ عند $t = 1$ هي :

a) $y = 2x - 10$ b) $y = 2x - 8$ c) $y = 2x - 5$ d) $y = 2x$

13) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = \sin t$, $y = \cos t$ عند $t = \dfrac{\pi}{4}$ هي :

a) $y = \sqrt{2} + x$ b) $y = \sqrt{2} - x$ c) $y = \sqrt{2}x$ d) $y = -x$

1	b
2	a
3	c
4	a
5	d
6	c
7	c
8	a
9	a
10	a
11	b
12	b
13	b

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

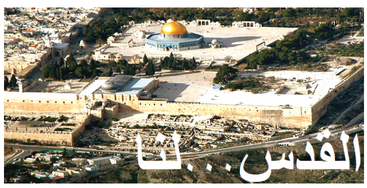
1) $f(x) = Log\ \dfrac{3^x - 1}{x+1}$ 2) $f(x) = x^2Log_2(\sin x)$ 3) $f(x) = 3^{Log_2x}$

السؤال الثالث : جد المشتقة الأولى لكل من المعادلات الوسيطية الآتية عند القيم المبينة إزاء كل منها :

1) $x = t - \cos t \ , \ y = 2 - \sin t \ , \ t = \dfrac{\pi}{3}$

2) $x = \frac{1}{2}t^2 - 1 \ , \ y = t^3 - 2t \ , \ t = 1$

3) $x = 2^{t+1} \ , \ y = Log_2(t^2+1) \ , \ t = 0$



Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

1) إذا كان: $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $2\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}$ c) $3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}$ d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$

6) إذا كان: $x > 0$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ c) $\frac{1}{2xf(x)}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

7) إذا كان: $f(x) = 3^{(x^2+1)}$ ، فإنّ قيمة x التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي هي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

8) إذا كان: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $y = \sec^2 t$, $x = \tan^2 t$ ، فإنّ مشتقة المعادلة الوسيطية هي:

a) $\tan t$ b) -1 c) $\tan t \sec t$ d) 1

b) جد مشتقة الاقتران: $f(x) = \left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^5$ (10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

1) إذا كان: $f(x) = e^2 - e^{-x}$ ، فإنّ $f'(1)$ ، هي:

a) $2e + \frac{1}{e}$ b) $2e - \frac{1}{e}$ $\frac{1}{e}$ d) $-\frac{1}{e}$

2) إذا كان: $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2}$ ، فإنّ $f'(2\pi)$ ، هي:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ d) -1

6) إذا كان: $f(x) = (\log_e x)^5$ ، فإنّ $f'(x)$ ، هي:

a) $\frac{5\log_e x}{x}$ $\frac{5(\log_e x)^4}{x}$ c) $\frac{5(\log_e x)^4}{x\ln x}$ d) $\frac{5\log_e x}{x\ln x}$

7) إذا كان: $f(x) = 7^{(x+1)^2}$ ، فإنّ للاقتران f مماسًا أفقيًا عندما x تساوي:

a) 7 b) 1 c) -2 -1

b) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^5$ ، عندما $x = 1$ (10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

7) إذا كان: $f(x) = a^{(x^2-4x)}$ ، فإنّ قيمة الثابت a التي تجعل $f'(4) = 4$ ، هي:

a) e b) e^{-1} c) e^4 d) e^{-4}

8) إذا كان: $y = \log(\tan x)\,, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ ، هي:

a) $\frac{\sec x}{\ln 10\,\tan x}$ b) $\frac{\sec^2 x \cot x}{\ln 10}$ c) $\frac{\sec x \cot^2 x}{\ln 10}$ d) $\frac{\csc^2 x\,\cot x}{\ln 10}$

a) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}} + 1$ ، عند نقطة تقاطع المنحنى مع المحور y (10 علامات)

b) إذا كان: $y = \cot^2\left(\cos\sqrt{e^{\pi-2x}}\right)$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$ (12 علامة)

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

1- إذا كان: $f(x) = e^{2x} + \ln(4x)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $e^{2x} + \frac{4}{x}$ b) $2e^{2x} + \frac{1}{4x}$ c) $2e^{2x} + \frac{1}{x}$ d) $e^{2x} + \frac{1}{x}$

3- إذا كان: $f(t) = \cos 4t$ ، فإنّ $f'(t)$ هي:

a) $\sin 4t$ b) $-\sin 4t$ c) $4\sin 4t$ d) $-4\sin 4t$

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

1) $y = \frac{\sin 2x}{e^x}$, $x = 0$

3) $y = t^2 - 4$, $x = \frac{1}{2}t$, $t = -1$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

1- إذا كان: $f(x) = e^{1-2x} + 3\cos x$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-2e^{1-2x} - 3\sin x$ b) $-2e^{1-2x} + 3\sin x$

c) $2e^{1-2x} - 3\sin x$ d) $2e^{1-2x} + 3\sin x$

5- إذا كان: $f(x) = \sqrt{2+\sin x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ b) $\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ c) $-\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ d) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

6- إذا كان: $x = 2\sin t$, $y = 5\cos t$ ، فإنّ ميل المماس للمعادلة الوسيطية عند $x = \frac{\pi}{4}$ هو:

a) $-\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{2}{5}$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

1) $y = \frac{e^x+x^2}{\cos x}$, $x = 0$

2) $y = x\ln x + \sqrt{3-x^2}$, $x = 1$

3) $y = u^3 - 1$, $u = 6-2x$, $x = 2$

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

2) إذا كان: $f(x) = \cos 3x + e^{-x}$ ، فإنّ قيمة $f'(0)$ هي:

a) 1   b) 2   c) −2   d) −1

6) إذا كان: $f(x) = \left(2+\frac{1}{x}\right)^2$, $x \neq 0$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-2(\frac{1}{x^2})$ b) $-2(2+\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2})$ c) $2(2+\frac{1}{x})$ d) $2(2+\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2})$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكلّ ممّا يأتي عند القيمة المُعطاة إزاء كلٍّ منها:

1) $y = e^{(\frac{x}{2})}\ln(x+1)$, $x = 2$

2) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $x = 0$

3) $x = t+2$, $y = t^2 - 1$, $t = 1$

اختبار الدرس الثالث

1) $f(x)=Ln(2x+1)$, $g(x)=x^2+x \Rightarrow a)\ (fog)'(x)=?\quad b)\ (fog)'(0)=?$

2) $f'(2)=4$, $g(3)=2$,$(fog)'(3)=24 \Rightarrow g'(3)=?$

3) $f(x)=4\sin x$, $g(x)=\dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{6})=?....\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$

4) $f(x)=6\cos(\tan 2x) \Rightarrow f'(x)=?$

5) $f(x)=\cot(1-\sec(3x^2)) \Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=x^3\sin^2 x \Rightarrow f'(x)=$

7) $f(x)=\dfrac{\cot 3x}{1+\tan 2x} \Rightarrow f'(x)=$

8) $f(x)=e^{x^2+\sin 4x}+Ln(1+\cos(x^2+x)) \Rightarrow f'(x)=?$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+\tan^3 x} \Rightarrow f'(x)=?$

10) $y=\sin^3 x^2+\cos^2 x^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=?$

11) $f(x)=Ln(\sin 2x)^2+(Ln(\cos x))^2 \Rightarrow f'(x)=?$

12) $f(x)=\sqrt{\sec\sqrt{x}}+e^{\csc x} \Rightarrow f'(x)=?$

13) $f(x)=3^{x^2-x}+x^3 \Rightarrow f'(x)=?$

14) $f(x)=3Log_6(\sin x)+Ln(\cos x) \Rightarrow f'(x)=$

15) $f(x)=2^{-x}\cos^3\pi x \Rightarrow f'(x)=?$

16) $x=t+\sqrt{t}\ ,\ y=3t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$

17) $x=(2t+3)^2\ ,\ y=t^2+1 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=?$

18) $x=t+\sin 2t\ ,\ y=1+\cos t \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=?$

19) $x=Log_2(2t+1)\ ,\ y=t\ 2^{-t} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$

20) $x=5\cos 2t\ ,\ y=10\sin^2 t \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$

21) إذا كان $f(x) = x + \sin 2x + 4$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عند x = 0

22) إذا كان $f(x) = 2e^{3\sin x}$ ، فجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى هذا الاقتران عند x = 0

23) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = \cos\theta \;,\; x = \sin\theta \;,\; 0 \le \theta \le \pi$

جد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عندما يكون الميل (1)

24) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 6t \;,\; x = t^3$

جد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عند النقطة $(t^3, 6t)$

25) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = t - \sin t \;,\; x = t + \cos t \;,\; 0 \le t \le 2\pi$

أثبت أن ميل المماس لمنحنى هذا الاقتران عند $t = \frac{\pi}{3}$ يساوي $2 + \sqrt{3}$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الدرس 4 الاشتقاق الضمني Implicit Differentiation

العلاقة الضمنية هي التي لا يمكن (أو يصعب) كتابتها على الصورة $y = f(x)$ ، مثل : $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ ، $x = \sin^2 y$

وتتلخص عملية الاشتقاق الضمني : باشتقاق كل حد على حدة ، وعند اشتقاق (y) نضرب بـ ($\frac{dy}{dx}$) أو y' ثم جعل (y') موضوعا للقانون

1) العلاقة الضمنية ومشتقتها

1) $x^3 + y^2 + 2y = 3x \Rightarrow 3x^2 + 2yy' + 2y' = 3$

$3x^2 + y'(2y + 2) = 3 \Rightarrow y'(2y + 2) = 3 - 3x^2$

$$y' = \frac{3 - 3x^2}{2y + 2}$$

2) $y = \sin x + \cos y \quad \dots \quad . \quad \dots y' = \frac{\cos x}{1 + \sin y}$

3) $x^3 + y^2 - 7x + 5y = 8 \quad \dots \quad . \quad \dots y' = \frac{7 - 3x^2}{2y + 5}$

4) $3xy + y^2 = x^2 - 7 \quad \dots \quad . \quad \dots y' = \frac{2x - 3y}{3x + 2y}$

5) $x^3 - 5xy + y^3 = 4x$

$\sin(x + y) = x \Rightarrow \cos(x + y) \times y' = 1$...خطأ
$\sin(x + y) = x \Rightarrow \cos(x + y)(1 + y') = 1$...صح

6) $x^2 y + y^2 x = 25$

7) $\sin 2y = y \cos(3x - y)$

8) $\tan 2x + \cot y = xy$

أتحقّق من فهمي 58 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$ b) $2x + 5y^2 = \sin y$

a	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$	b	$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$

أتحقّق من فهمي 60 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$ b) $\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$ c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

a	$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$

b	$\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)\sec^2(x - y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\frac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x-y)) = \sec^2(x-y) - 2y^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x-y)}$

c	$2x = \frac{(x+y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$ $2x(x+y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$ $2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x} = \frac{y - x(x+y)^2}{x}$

أو يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي:

c	$x^2 = \frac{x-y}{x+y} \rightarrow x^3 + x^2y = x - y \rightarrow 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 - \frac{dy}{dx}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - 2xy \quad \rightarrow \frac{dy}{dx}(1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{1 + x^2}$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي: 67

1) $x^2 - 2y^2 = 4$
2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$
3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$
4) $e^x y = xe^y$
5) $3^x = y - 2xy$
6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$
7) $x = \sec \frac{1}{y}$
8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$
9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$
10) $x + y = \cos(xy)$
11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$
12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد y' لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$
14) $y^3 + 2x^2 = 11y, \ y = 1$

28) إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$، حيث: $x > 0, y > 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

32) إذا كان $y = \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

1

$$x^2 - 2y^2 = 4$$
$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

2

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$$
$$\frac{-2x}{x^4} + \frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^4} \times \frac{y^4}{-2y} = -\frac{y^3}{x^3}$$

3

$$(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$$
$$2(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 50\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right)$$
$$\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$$

4

$$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x)$$
$$= (x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$$
$$\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$$

5

$$3^x = y - 2xy$$
$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$$
$$\frac{dy}{dx}(1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$$

6

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

7

$$1 = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = -y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$$

8 $(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$

$3(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 \left(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx}\right) = 0$

$3\frac{dy}{dx}(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2}{3(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$

9 $\frac{y^2(1) - x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)}{y^4} + \frac{2y\frac{dy}{dx}(x) - 1(y^2)}{x^2} = 0$

$\frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} = -\frac{2xy\frac{dy}{dx} - y^2}{x^2}$

$x^2(y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}) = -y^4(2xy\frac{dy}{dx} - y^2)$

$2xy^5\frac{dy}{dx} - 2x^3y\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$

$(2xy^5 - 2x^3y)\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - x^2y^2}{2xy^5 - 2x^3y} = \frac{y^2(y^4 - x^2)}{2xy(y^4 - x^2)} = \frac{y}{2x}$

10 $1 + \frac{dy}{dx} = -\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\sin xy$

$\frac{dy}{dx}(-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$

11 $2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2} \rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x+y}$

$\frac{dy}{dx}(xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$

12 $(\sin x)\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}(\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$

13 $2y^2 + 2xy - 1 = 0$

أجد قيمة y عندما $x = \frac{1}{2}$: $2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$

$\rightarrow (2y-1)(y+1) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, y = -1$

$4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$

14

$y^3 + 2x^2 = 11y$

أجد قيمة x عندما $y = 1$:

$1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

$3y^2 \frac{dy}{dx} + 4x = 11 \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{11 - 3y^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ $\quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

28

$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10 \;, x \neq 0 \,, y \neq 0$

$$\frac{\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} = 0 \rightarrow \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\rightarrow \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$x^2 y\sqrt{\frac{y}{x}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}} = \frac{y\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}{x\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)} = \frac{y}{x}$$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفراً إلاّ إذا كان $y = x$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.

32

$y = \ln x \,, x > 0 \Rightarrow e^y = x$ بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن:

باشتقاق الطرفين ضمنيًا بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $e^y \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$

بتعويض $e^y = x$ ينتج أنّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

من كتاب التمارين

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^3y^3 = 144$
2. $xy = \sin(x+y)$
3. $y^4 - y^2 = 10x - 3$
4. $x\sin y - y\cos x = 1$
5. $\cot y = x - y$
6. $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

1	$3x^3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$
2	$x\frac{dy}{dx} + y = \left(1+\frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y)$ $\Rightarrow x\frac{dy}{dx} - \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y + \cos(x+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y+\cos(x+y)}{x-\cos(x+y)}$
3	$4y^3\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{4y^3-2y} = \frac{5}{2y^3-y}$
4	$x\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y + y\sin x - \cos x\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y + y\sin x}{\cos x - x\cos y}$
5	$-\csc^2 y\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\csc^2 y} = \frac{-1}{\cot^2 y} = -\tan^2 y$
6	$\frac{x\frac{dy}{dx}+y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y+2\sqrt{xy}}{x+4y\sqrt{xy}}$

2) ميل المماس ومعادلته لمنحنى علاقة ضمنية :

لا جديد بالنسبة لميل المماس أو معادلته : فقط الاشتقاق ضمنياً لإيجاد الميل

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{2-1} = 4\sqrt{\pi}$$

Hasanat

Hasanat

أتحقّق من فهمي 61

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

a
$$y^2 = \ln x \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

b
نجد قيمة y عندما $x = 6$
$$(y-3)^2 = 4(6-5) \rightarrow (y-3)^2 = 4$$
$$\rightarrow y - 3 = \pm 2$$
$$\rightarrow y = 5 \ or\ y = 1$$

باشتقاق طرفي العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$

وميل المماس عند النقطة الثانية هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1$

أتحقّق من فهمي 63 أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

بتعويض $x = 2$، و $y = 3$ ينتج أنّ: $3(2)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} - 3(2)\frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$

$$\rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

إذن، معادلة المماس هي: $y - 3 = -\frac{1}{7}(x-2) \Leftarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$

تمارين إضافية

1) جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة

$(y-3)^2 = x+4$ موازيا للمستقيم $2x+4y+1=0$

ص 2012

الجواب: $(-3,2)$

---

2) جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة

$(y-4)^2 = 2x+5$ عموديا على المستقيم $3x+6y=1$

الجواب: $(-4,5)$

---

3) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x+2y)^3 - 4x + 6y = 43$

عند نقطة تقاطع منحنى العلاقة مع المستقيم : $6y = 9-3x$

ص 2016

الجواب: $y-2 = \frac{60}{23}(x+1)$

---

4) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة $2y^2 + 2x^2 - 4x + 12y + 4 = 0$

عند النقطة (3 , 1–) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم جد معادلة هذا المماس

ص 2019

---

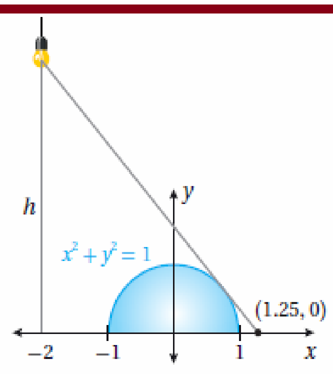
5) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 5$ عند نقطتي تقاطع منحناها مع المستقيم $y = 1-x$

ص 2019

---

6)

42 مصباح: يُبيِّن الشكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$، فأجد ارتفاع المصباح h.



من الطبعة الأولى قبل أن يتم إلغاؤه 71

42

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

لتكن $P(x,y)$ نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة:

$m = \frac{0-y}{1.25-x} = -\frac{x}{y} \rightarrow y^2 = 1.25x - x^2$

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + 1.25x - x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{4}{5} \rightarrow y = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

فتكون النقطة $P\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ ⇦ ميل المماس عند النقطة P : $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

$m = \frac{h-0}{-2-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{3} \rightarrow h = \frac{13}{3}$

ارتفاع المصباح يساوي $\frac{13}{3}$ وحدة

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15 $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16 $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

15	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $2(3) + 2(-4)\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(3,-4)} = \frac{3}{4}$
16	$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$ $4\frac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4\frac{dy}{dx} \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(2,1)} = -\frac{1}{2}$

17	$e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$ $e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} - e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0$

18	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}(1)\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

19	$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $-8 - 4\frac{dy}{dx} + 3 + 6\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$ $y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4) \rightarrow y = \frac{5}{2}x + 13$

20	$x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2)$ $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$ $1 + \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)} = 1$ $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x - 6)(y + 4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

24	$(x - 6)(y + 4) = 2$ $(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4) = 0$ $(7 - 6)\frac{dy}{dx} + (-2 + 4) = 0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(7,-2)} = -2 \rightarrow$ ميل العمودي $= \frac{1}{2}$ $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$ إذن معادلة العمودي

25 أثبت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

25	$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x-y}{x+y}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-3x-y}{x+y} = 0 \rightarrow -3x - y = 0 \rightarrow y = -3x$ $3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x = \pm 1$ إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1,-3), (-1,3)$
26	$1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$ ميل المستقيم $x + 2y = 0$ هو $-\frac{1}{2}$ $\frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 1$ $\rightarrow x + (1)^2 = 1 \rightarrow x = 0$ النقطة المطلوبة هي $(0,1)$

27 أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$، حيث: $y \neq 0$.

27	$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$, $y \neq 0$ ميل المستقيم $y + 3x - 5 = 0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ $\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = y^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$ $y^3 = x^2 \rightarrow y^3 = \frac{1}{4}y^4 \rightarrow 1 = \frac{1}{4}y \rightarrow y = 4$ $\rightarrow x = \frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x = 8$ النقطة المطلوبة هي $(8,4)$

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

30	$x^2 + y^2 = 100$ $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow -\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x$ $x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$ $\rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$ إذا كانت $x = 6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(6) = -8$ وإذا كانت $x = -6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$ إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6,-8), (-6,8)$

إذا كانت العلاقة: $x^3+y^3=6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y=x$ في الربع الأوَّل.

40 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًا.

39
$$x^3+y^3=6xy$$
$$y=x \rightarrow x^3+x^3=6x^2$$
$$\rightarrow x^3=3x^2$$
$$\rightarrow x^2(x-3)=0$$
$$\rightarrow x=0 \text{ or } x=3$$

نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6x\frac{dy}{dx}+6y \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{6-9}{9-6}=-1$

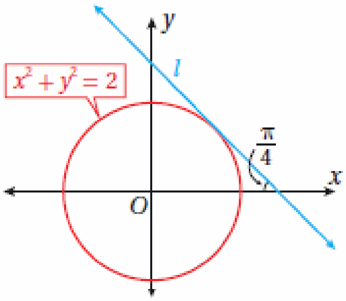
معادلة المماس هي: $y-3=-(x-3) \rightarrow y=-x+6$

40
بما أن المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{2y-x^2}{y^2-2x}=0 \Rightarrow 2y-x^2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2$$
$$x^3+y^3=6xy \Rightarrow x^3+\frac{1}{8}x^6=3x^3 \Rightarrow \frac{1}{8}x^6-2x^3=0 \Rightarrow x^6-16x^3=0$$
$$\Rightarrow x^3(x^3-16)=0 \Rightarrow x=0\,,x=\sqrt[3]{16} \quad \Rightarrow y=0\,,y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $\left(\sqrt[3]{16},\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

41 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2+y^2=2$، والمستقيم l الذي يُمثِّل مماسًّا لمنحنى العلاقة في الربع الأوَّل. أجد معادلة المستقيم l.



41
لتكن نقطة التماس $A(x_1,\ y_1)$

باشتقاق طرفي العلاقة $x^2+y^2=2$ بالنسبة إلى x نجد أنّ: $2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x_1}{y_1}$ لكن ميل المماس l هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ إذن، $-\frac{x_1}{y_1}=-1 \Rightarrow x_1=y_1$

وبتعويض $(x_1,\ y_1)$ في المعادلة المعطاة نجد أنّ: $x_1{}^2+y_1{}^2=2$

وبتعويض $x_1=y_1$ في هذه المعادلة نجد أنّ: $x_1{}^2+x_1{}^2=2 \Rightarrow 2x_1{}^2=2 \Rightarrow x_1{}^2=1 \Rightarrow x_1=1$

إذن، نقطة التماس هي: $A(1,1)$، ومعادلة المماس l هي: $y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$

46 تبرير: إذا مثّـل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، فأثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

46	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0 \to \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} \Rightarrow y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$ المقطع x والمقطع y للمماس: $x=0 \to y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \to y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ $y=0 \to y_1=\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1) \to x=x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ مجموع المقطعين: $y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}=y_1+2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1=\left(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{k}\right)^2=k$

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7 $x^2+3xy+y^2=x+3y,\ (2,-1)$

8 $xe^y+y\ln x=2,\ (1,\ln 2)$

9 $4xy=9,\ \left(1,\frac{9}{4}\right)$

10 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1,\ (1,2)$

7	$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx} \Rightarrow$ نعوض $(x,y)=(2,-1)$ $\Rightarrow 4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$ معادلة المماس: $y+1=0(x-2) \Rightarrow y=-1$
8	$xe^y\frac{dy}{dx}+e^y+\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow$ نعوض $(x,y)=(1,\ln 2)$ $e^{\ln 2}\frac{dy}{dx}+e^{\ln 2}+\ln 2+0=0$ $2\frac{dy}{dx}+2+\ln 2=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1-\frac{1}{2}\ln 2$ $y-\ln 2=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)(x-1) \Rightarrow y=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)x+1+\frac{3}{2}\ln 2$
9	$4x\frac{dy}{dx}+4y=0 \Rightarrow 4\frac{dy}{dx}+9=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$ نعوض $(x,y)=\left(1,\frac{9}{4}\right)$ معادلة المماس: $y-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{9}{2}$
10	$x+\frac{1}{4}y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 1+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2$ نعوض $(x,y)=(1,2)$ معادلة المماس: $y-2=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+4$

15 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأوّل على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون ميل المماس عندها -0.5

21 أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثم أُثبِت أنَّ مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

15

$$3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

نعوض $(x,y)=(1,0)$ ⇐ ميل المماس: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ ⇐ ميل العمودي على المماس هو 2

معادلة العمودي على المماس: $y - 0 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

20

نفرض أن النقطة المطلوبة هي $P\ (x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى.

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x فينتج أنّ:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y} = -\frac{9x}{4y}$$

ميل المماس عند P هو: $-\frac{9x_1}{4y_1}$ لكن ميل المماس يساوي -0.5

إذن، $-\frac{9x_1}{4y_1} = -0.5 \Rightarrow 2y_1 = 9x_1$

وبضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أنّ: $4y^2 + 9x^2 = 36$

وبتعويض إحداثيي P نجد أنّ:

$$4{y_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36$$

$$\Rightarrow 81{x_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36 \Rightarrow 90{x_1}^2 = 36 \Rightarrow {x_1}^2 = 0.4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{0.4}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}\sqrt{0.4} = \sqrt{8.1}$$

النقطة المطلوبة هي: $P(\sqrt{0.4}, \sqrt{8.1})$

21

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow P_1 = (\sqrt{7}, 0), P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_1} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2 \quad , \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_2} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2$$

ميلا المماسين متساويان، إذن هذان المماسان متوازيان.

3) المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

في الاشتقاق للمرة الثانية : عندما نشتق (y) نضربها بـ ($\frac{dy}{dx}$) أيضا ، ويمكن تعويض قيمتها من المشتقة الأولى

1) $x^2 + y^3 + 2y = 3x \Rightarrow 2x + 3y^2 y' + 2y' = 3$

$2x + y'(3y^2 + 2) = 3 \Rightarrow y'(3y^2 + 2) = 3 - 2x$

$$y' = \frac{3-2x}{3y^2+2}$$

$$y'' = \frac{(-2)(3y^2+2) - (6y)(3-2x)}{(3y^2+2)^2}$$

أو :

$x^2 + y^3 + 2y = 3x \Rightarrow 2x + 3y^2 y' + 2y' = 3$

$2 + (6yy')(y') + (y'')(3y^2) + 2y'' = 0$ $\quad \boxed{y' = \frac{3-2x}{3y^2+2}}$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$2 + 6y(y')^2 + (y'')(3y^2) + 2y'' = 0$

$$y'' = \frac{-2-6y(y')^2}{3y^2+2} = \frac{-2-6y\left(\frac{3-2x}{3y^2+2}\right)^2}{3y^2+2}$$

---

2) $y^2 = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

3) $y^2 - 4y = x - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

أتحقّق من فهمي 64 إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$xy + y^2 = 2x \rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)^3} = \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21) $x + y = \sin y$ 22) $4y^3 = 6x^2 + 1$ 23) $xy + e^y = e$

21	$x + y = \sin y$ $1 + \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-1 + \cos y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y \frac{dy}{dx}}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y \left(\frac{1}{-1 + \cos y}\right)}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y}{(-1 + \cos y)^3}$
22	$12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}}{y^4} = \frac{y - 2x\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^3} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
23	$x \frac{dy}{dx} + y + e^y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y \frac{dy}{dx}\right)}{(x + e^y)^2} = \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y\left(1 + e^y \frac{-y}{x + e^y}\right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3} = \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$

من كتاب التمارين

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

11) $x^2 y - 4x = 5$ 12) $x^2 + y^2 = 8$ 13) $y^2 = x^3$

11	$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2xy}{x^2} = 4x^{-2} - 2yx^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1} \frac{dy}{dx}$ $= -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}(4x^{-2} - 2yx^{-1}) = -16x^{-3} + 6yx^{-2} = -\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$
12	$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -xy^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2} \frac{dy}{dx} - y^{-1} = xy^{-2}(-xy^{-1}) - y^{-1} = -x^2y^{-3} - y^{-1}$ $= -\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{8}{y^3}$
13	$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2 \frac{dy}{dx}}{4y^2} = \frac{12xy - 6x^2 \times \frac{3x^2}{2y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$

4) المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مفهوم أساسي

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشـــتقاق عند t، وكان كلٌّ من: $x=h(t)$، و $y=g(t)$، و $\frac{dy}{dx}$ قابلًا للاشتقاق عند t، فإنَّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\ ,\ \frac{dx}{dt}\neq 0$$

باختصار :

عندما نشتق المقدار ($\frac{dy}{dx}$) بالنسبة للمتغير (t) نضرب هذه المشتقة بالمقدار($\frac{dt}{dx}$) أو نقسم على ($\frac{dx}{dt}$)

ملاحظة مهمة جداً :

لضمان عدم نسيان الضرب في ($\frac{dt}{dx}$) ، يُفضل فرض المشتقة الأولى Q(t) مثلا ، ثم إيجاد المشتقة الثانية لها

في المعادلة الوسيطية : بما أن المشتقة الأولى هي اقتران بالنسبة إلى (t) ، فإن الاشتقاق مرة أخرى يكون ضمنيا بالنسبة إلى (x)

1) $x(t)=4t^2\ ,\ y(t)=3t\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=?$

$$\frac{dx}{dt}=8t\ ,\ \frac{dy}{dt}=3\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3}{8t}.....\boxed{Q(t)=\frac{3}{8t}}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(Q(t))=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}=Q'(t)\times\frac{dt}{dx}=\frac{dQ}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{-3}{8t^2}\times\frac{1}{8t}=\frac{-3}{64t^3}$$

---

2) $x(t)=8+2\sin t\ ,\ y(t)=4\cos t-2\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=?$

$$\frac{dx}{dt}=2\cos t\ ,\ \frac{dy}{dt}=-4\sin t\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-4\sin t}{2\cos t}=-2\tan t.....\boxed{Q(t)=-2\tan t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(Q(t))=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}=\frac{-2\sec^2 t}{2\cos t}=-\sec^3 t$$

---

3) $x(t)=t^3,\ y(t)=3t^4\ \Rightarrow \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=?$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=4t\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=4.....\boxed{\text{خطأ}}}$$

$$\frac{dx}{dt}=3t^2\ ,\ \frac{dy}{dt}=12t^3\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{12t^3}{3t^2}=4t.....\boxed{Q(t)=4t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(Q(t))=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}=\frac{4}{3t^2}\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=\frac{4}{3(2)^2}=\frac{1}{3}$$

4) $x = \cot t \quad , \quad y = \csc t \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$\frac{dx}{dt} = -\csc^2 t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\csc t \ \cot t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\csc t \ \cot t}{-\csc^2 t} = \cos t \ ..... \boxed{Q(t) = \cos t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}}} = \frac{-\sin t}{-\csc t} = \sin^3 t$$

أتحقّق من فهمي

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة الآتية عندما $t = 2$

$x = 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطة ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

37) $x = \sin t, y = \cos t, \ t = \dfrac{\pi}{4}$

38) $x = e^{-t}, \ y = t^3 + t + 1, t = 0$

37

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

38

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2 - 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t) + (-3t^2 - 1)(e^t)}{-e^{-t}}$$

$$= e^{2t}(1 + 6t + 3t^2)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^0(1) = 1$$

5) الاشتقاق اللوغاريتمي : وهو نوعان : إجباري و اختياري

إذا كانت القوة متغيرة ، فيجب استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

$y = x^{2x} \quad , f(x) = (\sin x)^{\sqrt{x}} \quad , y = (3x^2+1)^{x-1}$

$\boxed{y = x^x \Rightarrow y' = x\,(x)^{x-1}}$ (خطأ)

أما إذا كان اشتقاق الاقتران صعباً بسبب الجذور أو القوى ، فيمكن تبسيطه بالاشتقاق اللوغاريتمي (اختياري)

$$y = \sqrt{(x-2)^3(x)^5\sin 4x} \quad , f(x) = \frac{3x^2\sin 2x}{(x+1)^2+5}$$

وتتلخص الطريقة بما يأتي : نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة ($y = f(x)$) ثم نشتق ضمنيا بالنسبة لـ(x)
(ويشترط أن يكون الاقتران موجباً)

1) $y = x^{2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

$\boxed{y = x^{2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x(x)^{2x-1}}$ ... خطأ

$$y = x^{2x} \Rightarrow Ln(y) = Ln(x^{2x}) \Rightarrow Ln(y) = (2x)Ln(x)$$

$$\frac{y'}{y} = (2)(Lnx) + (\frac{1}{x})(2x) \Rightarrow y' = y\,(2Lnx+2) = x^{2x}(2Lnx+2)$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2\sin^5 x} \Rightarrow f'(x) = ?$

$$Ln(f(x)) = Ln(\sqrt[3]{x^2\sin^5 x})$$

$$= Ln(x^2\sin^5 x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}Ln(x^2\sin^5 x)$$

$$= \frac{1}{3}(Ln(x^2) + Ln(\sin^5 x))$$

$$Ln(f(x)) = \frac{1}{3}(2Lnx + 5Ln\sin x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}(2\frac{1}{x} + 5\frac{\cos x}{\sin x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2\frac{1}{x} + 5\frac{\cos x}{\sin x}) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{2}{x} + \frac{5\cos x}{\sin x})\sqrt[3]{x^2\sin^5 x}$$

$$\frac{d}{dx}(a^b) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ln x)$$

Abdulkadir Hasanat

3) $y=\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-1}}(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-1})$

4) $y=(2x^4+1)^{\tan x}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=(2x^4+1)^{\tan x}(\sec^2 x\ Ln(2x^4+1)+\dfrac{8x^3\tan x}{2x^4+1})$

5) $y=(\sin x)^{2x}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=(\sin x)^{2x}(2x\ \cot x+2Ln(\sin x))$

6) $y=\sqrt{x}e^{x^2}(x^2-1)^{10}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=\sqrt{x}e^{x^2}(x^2-1)^{10}(\dfrac{1}{2x}+2x+\dfrac{20x}{x^2+1})$

7) $y=(Lnx)^{\sin x}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=(Lnx)^{\sin x}(\cos x\ Ln(Lnx)+\dfrac{\sin x}{xLnx})$

8) $y=(1+x^2)^{e^x}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=(1+x^2)^{e^x}(e^x Ln(1+x^2)+e^x\dfrac{2x}{1+x^2})$

9) $y=x^{ax+b}$ ... $\Rightarrow$ ... $y'=x^{ax+b-1}(aLnx+\dfrac{ax+b}{x})$

أثبت أن : 10) $y=x^{Lnx}\Rightarrow y'=(Lnx^2)(x^{Lnx-1})$

أتحقّق من فهمي 67 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

a) $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

a
$$y = x^{\sqrt{x}} \to \ln y = \ln x^{\sqrt{x}} \to \ln y = \sqrt{x}\ln x$$
$$\to \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x \to \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln x$$

b
$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \to \ln y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \to \ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$$
$$\to \ln y = \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x^4+1))$$
$$\to \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{1/x}, x > 0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

31 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33 $y = (x^2+3)^x$

34 $y = \dfrac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

35 $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

36 $y = x^{\sin x}, x > 0$

47 تحدٍّ: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = (x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 1)$ يقطع المحور x في النقطة B، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأصل.

29
$$y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0 \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$$
$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-\ln x)}{x^2}$$
$$\frac{y(1-\ln x)}{x^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e \to y = e^{\frac{1}{e}}$$
النقطة المطلوبة $\left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$

31
$$s(t) = t^{1/t} \Rightarrow \ln s(t) = \ln t^{1/t} \Rightarrow \ln s(t) = \frac{1}{t}\ln t$$
$$\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1-\ln t}{t^2} \Rightarrow v(t) = s(t)\times\frac{1-\ln t}{t^2}$$
باشتقاق طرفي العلاقة
$$a(t) = v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= s(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + t^{1/t}\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= t^{1/t}\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} + t^{1/t}\left(\frac{-t - 2t + 2t\ln t}{t^4}\right) = t^{1/t}\left(\frac{(1-\ln t)^2 - 3t + 2t\ln t}{t^4}\right)$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

33	$y=(x^2+3)^x \Rightarrow \ln y=\ln(x^2+3)^x$ $\Rightarrow \ln y = x\ln(x^2+3)$ $\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)+\ln(x^2+3)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{2x^2}{x^2+3}+\ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$
34	$y=\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1} \Rightarrow \ln y=\ln\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$ $\Rightarrow \ln y=\ln(x^4+1)+\ln(\sqrt{x+2})-\ln(2x^2+2x+1)$ $\Rightarrow \ln y=\ln(x^4+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\ln(2x^2+2x+1)$ $\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{1}{2x+4}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{1}{2x+4}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$

35	$y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \Rightarrow \ln y=\ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x^2(x+1)(x+2) \Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$ $\Rightarrow \ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2) \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$
36	$y=x^{\sin x} \Rightarrow \ln y=\ln x^{\sin x}$ $\Rightarrow \ln y=(\sin x)\ln x \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sin x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(\cos x)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$

47	$y=x^{\sqrt{x}}$ $\ln y=\ln x^{\sqrt{x}}$ $\ln y=\sqrt{x}\ln x$ $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \rightarrow \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}(x^{\sqrt{x}})$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(4,16)}=\frac{2+\ln 4}{2\sqrt{4}}(16)=8+4\ln 4$ معادلة المماس: $y-16=(8+4\ln 4)(x-4)$ المقطع x والمقطع y للمماس: $x=0 \rightarrow y-16=(8+4\ln 4)(-4) \rightarrow y=-16-16\ln 4$ $y=0 \rightarrow -16=(8+4\ln 4)(x-4) \rightarrow x=\frac{4+4\ln 4}{2+\ln 4}$ مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي: $A=\frac{1}{2}\times\frac{4+4\ln 4}{2+\ln 4}\times\|-16-16\ln 4\|=\frac{32(1+\ln 4)^2}{2+\ln 4}$

من كتاب التمارين

14 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$.

16 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17 $y = (x-2)^{x+1}$

18 $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

19 $y = (\cos x)^x$

14	$y = (x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln (x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$
	$\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = x^2 \times \dfrac{1}{x} + 2x\ln x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = xy + 2xy\ln x$
	$x = 2 \Rightarrow y = (2)^{2^2} = 16 \quad \Rightarrow (2, 16)$
	ميل المماس: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = 2 \times 16 + 2 \times 2 \times 16 \ln 2 = 32 + 64\ln 2$
	معادلة المماس: $y - 16 = (32 + 64\ln 2)(x - 2)$

16	$y = x(\ln x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x(\ln x)^x) \quad \Rightarrow \ln y = \ln x + x\ln(\ln x)$
	$\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = \dfrac{1}{x} + x \times \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \ln(\ln x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$
	$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{\ln x} + y\ln(\ln x) \Rightarrow x = e \quad \Rightarrow y = e(\ln e)^e = e \quad \Rightarrow (e, e)$
	ميل المماس: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=e} = \dfrac{e}{e} + \dfrac{e}{1} + 0 = 1 + e$
	معادلة المماس: $y - e = (1+e)(x-e) \quad \Rightarrow y = (1+e)x - e^2$

17	$y = (x-2)^{x+1} \Rightarrow \ln y = (x+1)\ln(x-2)$
	$\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x+1) \times \dfrac{1}{x-2} + \ln(x-2) \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x+1)}{x-2} + y\ln(x-2)$
	$= \dfrac{(x-2)^{x+1}(x+1)}{x-2} + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$
	$= (x-2)^x(x+1) + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$

18	$y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}} \Rightarrow \ln y = 10\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+5) - \dfrac{1}{3}\ln(8x^2+2)$
	$\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = \dfrac{10}{x} + \dfrac{x}{x^2+5} - \dfrac{16x}{3(8x^2+2)}$
	$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}\left(\dfrac{10}{x} + \dfrac{x}{x^2+5} - \dfrac{16x}{3(8x^2+2)}\right)$

19	$y = (\cos x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\cos x)$
	$\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = x \times \dfrac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x) \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln(\cos x))$

ملخص الدرس الرابع ثم اختبار **ورقة عمل (7)** **الاشتقاق الضمني**

العلاقة الضمنية هي التي لا يمكن (أو يصعب) كتابتها على الصورة $y = f(x)$ ،

مثل : $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ ، $x = \sin^2 y$

خطوات الحل : (1) اشتقاق كل حد على حدة ، وعند اشتقاق (y) نضرب بـ ($\frac{dy}{dx}$) أو y'

(2) تجميع الحدود المحتوية على (y') على الطرف الأيسر

(3) إخراج (y') عامل مشترك ثم القسمة على معاملها الناتج لتصبح موضوعا للقانون

$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)\times y'=1$ ...خطأ	$y^2+3y=4x^2 \Rightarrow \boxed{2y'}+\boxed{3}=8x$ ...خطأ
$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)(1+y')=1$ ...صح	$y^2+3y=4x^2 \Rightarrow 2y\ y'+3y'=8x$ ...صح

في الاشتقاق للمرة الثانية : عندما نشتق (y) نضربها بـ ($\frac{dy}{dx}$) أيضا ، ويمكن تعويض قيمتها من المشتقة الأولى

$$y=\sin y \Rightarrow y'=\cos y\ y' \Rightarrow y''=(-\sin y\ y')(y')+(y'')(\cos y)$$

$(y')(y')=y''$ ... خطأ

$(y')(y')=(y')^2$ ...صح

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

عندما نشتق المقدار ($\frac{dy}{dx}$) بالنسبة للمتغير (t) نضرب هذه المشتقة بالمقدار($\frac{dt}{dx}$) أو نقسم على ($\frac{dx}{dt}$)

خطأ $\frac{dy}{dx}=2t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=2$.....

$$x(t)=3t^2\ ,\ y(t)=4t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{12t^2}{6t}=2t=Q(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(Q(t))=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{6t}=\frac{1}{3t}$$ ...صح

الاشتقاق اللوغاريتمي : وهو نوعان : إجباري و اختياري

(خطأ) $y=x^x \Rightarrow y'=x\ (x)^{x-1}$

إذا كانت القوة متغيرة ، فيجب استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي : $y=x^{2x}\ ,f(x)=(\sin x)^{\sqrt{x}}\ ,y=(3x^2+1)^{x-1}$

أما إذا كان اشتقاق الاقتران صعباً بسبب الجذور أو القوى ،
فيمكن تبسيطه بالاشتقاق اللوغاريتمي (اختياري)

$$y=\sqrt{(x-2)^3(x)^5\sin 4x}\ ,\ f(x)=\frac{3x^2\sin 2x}{(x+1)^2+5}$$

وتتلخص الطريقة بما يأتي :

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (y= f(x))

ثم نشتق ضمنيا بالنسبة لـ(x) (ويشترط أن يكون الاقتران موجباً)

$$\frac{d}{dx}(a^b)=0$$
$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$$
$$\frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\ln x)$$

Abdulkadir Hasanat

اختبر نفسك

1) $x = \sin y \Rightarrow y' =$

$a)\ \cos y \quad b)\ \sec y \quad c)\ \sec x \quad d)\ \csc y$

2) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{x}{y} \quad b)\ -\dfrac{x}{y} \quad c)\ -\dfrac{y}{x} \quad d)\ \dfrac{y}{x}$

3) $\sin x + \cos y = 5x - 2y + 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,0)} =$

$a)\ 2 \quad b)\ -2 \quad c)\ -4 \quad d)\ 5$

4) $xy + x^2y^2 = 6 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} =$

$a)\ 2 \quad b)\ -6 \quad c)\ -2 \quad d)\ 5$

5) $\tan y = x + y \Rightarrow y' =$

$a)\ \cot y \quad b)\ \tan^2 y \quad c)\ \sec^2 y \quad d)\ \cot^2 y$

6) $e^y = e^x + 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} =$

$a)\ e^y \quad b)\ e^x \quad c)\ e^{x+y} \quad d)\ e^{x-y}$

7) $Lnx + Lny = x + y \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{xy - y}{x - xy} \quad b)\ \dfrac{xy + y}{x - xy} \quad c)\ \dfrac{x}{y} \quad d)\ \dfrac{xy + y}{x + xy}$

8) $xe^y - ye^x = 0 \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{ye^x - e^y}{xe^y - e^x} \quad b)\ \dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x} \quad c)\ \dfrac{y-1}{x-1} \quad d)\ \dfrac{ye^x - e^y}{xe^y + e^x}$

9) $x^2 - xy + y^2 = 7 \ , \ y > 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = 2} =$

$a)\ -\dfrac{1}{4} \quad b)\ -\dfrac{5}{4} \quad c)\ \dfrac{5}{4} \quad d)\ \dfrac{7}{8}$

10) $y^2 + y = (Lnx)^3 + 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \quad a)\ e \quad b)\ 3 \quad c)\ 3e^2 \quad d)\ e^{-1}$

11) $x = \cos y \Rightarrow y'' =$

$a)\ \cot y\ \csc^2 y \qquad b)\ -\cot y\ \csc^2 y \qquad c)\ -\sin y\ \cos y \qquad d)\ -\cos^2 y$

---

12) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y'' =$

$a)\ \dfrac{1}{y^2} \qquad b)\ -\dfrac{x^2}{y^2} \qquad c)\ -\dfrac{1}{y^2} \qquad d)\ -y^2 - x^2$

Hasanat

Hasanat

---

13) $x - y = \cos y \Rightarrow y'' =$

$a)\ \dfrac{\cos y}{1-\sin y} \qquad b)\ \dfrac{\cos y}{(\sin y - 1)^3} \qquad c)\ \dfrac{\cos y}{(1-\sin y)^3} \qquad d)\ \dfrac{\sin y}{(1-\cos y)^3}$

---

14) $x(t) = t^2\ ,\ y(t) = 4t^5 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \ a)\ 15t \qquad b)\ 10t^3 \qquad c)\ 30t^2 \qquad d)\ 60t^3$

---

15) $x(t) = \sin t\ ,\ y(t) = \cos t \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \ a)\ 8 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -4 \qquad d)\ \dfrac{-8}{3\sqrt{3}}$

---

16) $x(t) = \cos t\ ,\ y(t) = \sin t \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \ a)\ -\csc^2 t \qquad b)\ \sec^3 t \qquad c)\ \csc^3 t \qquad d)\ -\csc^3 t$

---

17) $x(t) = 2t\ ,\ y(t) = 6e^{t^2} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2} = \ a)\ 9 \qquad b)\ 9e \qquad c)\ 6e \qquad d)\ 27e^2$

---

18) $y = x^x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \ a)\ x(x^{x-1}) \qquad b)\ (x)(x) \qquad c)\ x^x Lnx + x^x \qquad d)\ Lnx + 1$

---

19) $y = (x^2)^x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} =$

$a)\ Lnx^2 + 2 \qquad b)\ 2Lnx + x \qquad c)\ x^{2x} Lnx^2 + 2 \qquad d)\ 2x^x$

---

20) $y^y = 2^x \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{2^x Ln2}{Lny + 1} \qquad b)\ \dfrac{2^x Ln2}{y} \qquad c)\ 2^x y^{y-1} \qquad d)\ \dfrac{Ln2}{Lny + 1}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	a	c	d	d	a	a	a	d

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	c	a	b	d	b	c	a	d

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

9) إذا كان: $y^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}e^{\ln x}\right)$ ، فإنّ ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند النقطة $(1\,,1)$ هو:

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

10) إذا كان: $x>0$, $y = x^{x^2}$ ، فإنّ $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي:

a) $x(1-\ln x^2)$ b) $x(1+(\ln x)^2)$ c) $x(1+\ln x^2)$ d) $x(1-(\ln x)^2)$

a) إذا كان: $3y^2 = 4x^2 + xy$ ، فأثبت أنّ: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a\,,a)} = -1$ ، حيث a عدد حقيقي لا يساوي الصفر.
(8 علامات)

b) جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=1$:
(10 علامات)

$$x = t^3 - 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^2 + 2$$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

8) إذا كان: $5y = \log(x - x^3)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{1-3x^2}{(x-x^3)\ln 10}$ b) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)}$ c) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)\ln 10}$ d) $\frac{1-3x^2}{x-x^3}$

9) ميل المماس لمنحنى العلاقة: $(x-3)(y+2) = 5$ عند النقطة $(4\,,3)$ ، هو:

a) -5 b) 5 c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

10) إذا كان: $x>0$, $y = x^{2x}$ ، فإنّ $\frac{d}{dx}(\ln y)$ ، هي:

a) $1+\ln x$ b) $2(1+\ln x)$ c) $2(x+\ln x)$ d) $2x^{2x}(1+\ln x)$

a) إذا كانت B هي نقطة تقاطع منحنى العلاقة: $x^3 + 4xy + y^3 = 0$ مع المستقيم: $y = x$ في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، وكان مماس منحنى العلاقة عند النقطة B يقطع المحور y في النقطة C ، فجد مساحة المثلث OBC ، حيث O هي نقطة الأصل. (10 علامات)

b) إذا كانت: $y = t^3 + 3t^2$, $x = 3t^2 + 1$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$ (8 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

9) إذا كانت: $y^2 = \ln(xy)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(e,1)$ ، هي:

a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{3e}$ c) $\frac{1+e}{2e}$ d) $\frac{1-e}{2e}$

10) إذا كانت: $x > 0$, $y = x^{\frac{1}{x}}$ ، فإنّ ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند أيّ نقطة تقع عليها، هو:

a) $1 - \ln x$ b) $\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$ c) $\frac{1-\ln x}{x^2}$ d) $y(1-\ln x)$

a) إذا رُسم مماسان لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 12$ من النقطة $C(6,0)$ ، فمسّا المنحنى عند النقطتين A, B ، فجد مساحة المثلث ABC (12 علامة)

b) إذا كانت: $x = 5 - 2t \,, y = t^4 + 2t^2$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $x = 1$ (8 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

c) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $5xy - y^2 = 4$ عند النقطة $(1,4)$. (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

7- إذا كان: $\ln y = x^{-2}$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{2y}{x^3}$ b) $-\frac{2y}{x^3}$ c) $2yx^3$ d) $-2yx^3$

8- معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 45$ عند النقطة $(6\,,-3)$ هي:

a) $y = 2x + 15$ b) $y = -2x + 15$ c) $y = 2x - 15$ d) $y = -2x - 15$

c) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^3 = 28 + \ln x$ ، عند النقطة $(1,3)$ (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

9) إذا كانت: $y^2 - x^2 = 3$ ، فإنّ قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,2)$ هي:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 2 d) -2

c) جد معادلة المماس لمُنحنى العلاقة: $2y^2 + 2xy - 3 = x$ عند النقطة $(1,1)$. (9 علامات)

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

اختبار الدرس الرابع

1) $y = \sec x + \tan y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

2) $x = \sin y + \cos^2 y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

3) $xy + y^2x^3 = x^2 - 3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

4) $2x^3 - y^2 = 15y \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=1} = ?$

5) $x \sin y + y \cos x = 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

6) $y^2 = \dfrac{1}{x} + 4x + 2y \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

7) $yLnx - \cos x = e^y + e^2 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

8) $x(t) = t^2 \ , \ y(t) = 2t \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

9) $x(t) = \sin t \ , \ y(t) = \cos t \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = ?$

10) $y = (\sin 2x)^x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

11) $y = x^{Lnx} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

12) $Log_2 y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

13) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(y-1)^2 = 3x+6$ عند النقطة التي يكون عندها المماس عموديا على المستقيم $y = 2x+6$

الجـواب : $y = \dfrac{-x-3}{2}$

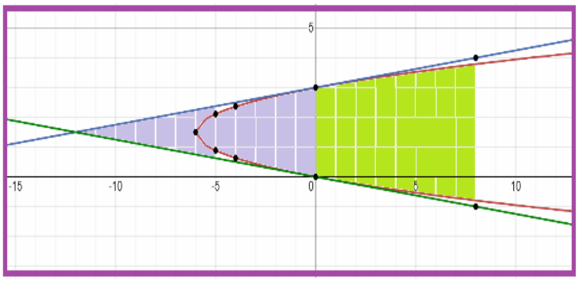
14) رُسم مماسان لمنحنى العلاقة $8y^2 - 24y = 3x$ عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات (y)

أ) جد معادلتي المماسين

ب) جد إحداثيي نقطة تقاطع هذين المماسين

ج) جد مساحة المثلث المكون من المماسين والمحور (y)

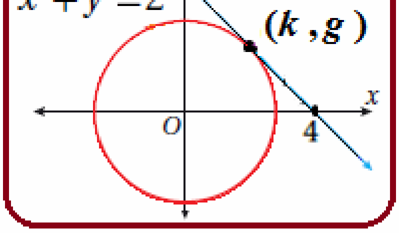
د) جد مساحة المثلث المكون من المماسين والمستقيم x = 8



$8y + x = 0 \;,\; 8y - x = 24$

$(-12 \,,\, \frac{3}{2}) \;,\; 36 \;,\; 60$

15) رُسم المستقيم (L) فمَّس منحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ عند النقطة (k, g) وقطع المحور السيني (x) عند x = 4 ، كما في الشكل المجاور جد معادلة هذا المستقيم



$7y = \sqrt{7}(x-4)$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمثّل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجُسَيْم. إحدى الآتية تُمثّل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجُسَيْم صفرًا:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2 (4t)$ d) $4 \sec^2 (4t)$

5 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log (2x - 3)$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(2x-3) \ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3) \ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = e^x (x + x\sqrt{x})$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$

11 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

13 $f(x) = 5^{2-x}$

14 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

16 $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$ وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $(fg)'(2)$

18 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

19 $(3f - 4fg)'(2)$

اختبار نهاية الوحدة

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = x^2 \ln x$

21 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

22 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

23 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

24 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}, x = 1$

25 $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}, x = \frac{\pi}{4}$

26 $f(x) = \ln(x+5), x = 0$

27 $f(x) = \sin x + \sin 3x, x = \frac{\pi}{4}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

28 $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

29 $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \frac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x\ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

31 أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

32 $x(x+y) = 2y^2$

33 $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

34 $y\cos x = x^2 + y^2$

35 $2xe^y + ye^x = 3$

36 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^2}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37 $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, x > 2$

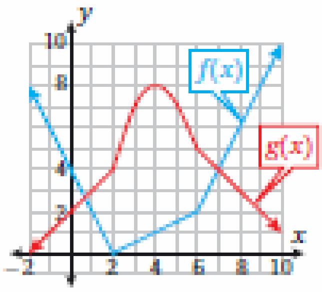
38 $y = x^{\ln x}, x > 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

39 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

40 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

44 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عيِّنة كتلتها 200 g من عنصر مُشِعٍّ بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

45 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

اختبار نهاية الوحدة صفحة 70	
1	c
2	b
3	d
4	d
5	c
6	a
7	d
8	$f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$ $f'(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$ $= e^x\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right)$
9	$f(x) = \frac{x}{\tan x}$ $f'(x) = \frac{(\tan x)(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$
10	$f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x \tan x$
11	$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{(\ln x)(e^x) - (e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$
12	$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$
13	$f(x) = 5^{2-x}$ $\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$ $\ln f(x) = (2 - x)\ln 5$ $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$ $f'(x) = -(\ln 5)f(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$

14	$f(x) = 10\sin 0.5x$ $f'(x) = 5\cos 0.5x$
15	$f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$ $= -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4}\right)$
16	$f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$ $f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2)+(\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$ $= -e^{-1.5x}(2x\sin x^2+1.5\cos x^2)$
17	$(fg)'(2) = f(2)g'(2)+g(2)f'(2)$ $= 3\times 2+1\times -4 = 2$
18	$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \frac{1\times -4-3\times 2}{(1)^2} = -10$
19	$(3f-4fg)'(2) = 3f'(2)-4(fg)'(2) = 3(-4)-4(2) = -20$
20	$f(x) = x^7\ln x$ $f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(7x^6) = x^6+7x^6\ln x$ $f''(x) = 6x^5+(7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(42x^5) = 13x^5+42x^5\ln x$
21	$f(x) = \frac{\cos x}{x}$ $f'(x) = \frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^3\cos x+2x^2\sin x+2x\cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x}{x^3}$

22	$f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\dfrac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\dfrac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $f''(x)=\dfrac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$ $=\dfrac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$
23	$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $f'(x)=\dfrac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x)=\dfrac{(1+x^2)^2(-4)-(-4x)\left(2\times 2x(1+x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$ $=\dfrac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$
24	$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ نقطة التماس: $f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x)=\dfrac{(1+x)(2x)-(x^2)(1)}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$ $f'(1)=\dfrac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

25

$$f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

نقطة التماس:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)$$

ميل المماس:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(2x) - (x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

معادلة المماس:

$$y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = \frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

26

$$f(x) = \ln(x+5)$$

نقطة التماس:

$$f(0) = \ln(0+5) = \ln(5) \Rightarrow (0, \ln 5)$$

ميل المماس:

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(0) = \frac{1}{5}$$

معادلة المماس:

$$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x-0) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \ln 5$$

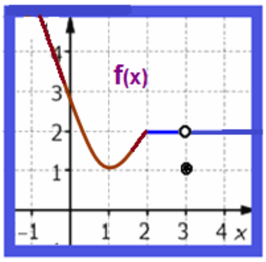
27	$f(x) = \sin x + \sin 3x$ نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x) = \cos x + 3\cos 3x$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=4} = \frac{1}{8}$ نقطة التماس: $x = (4)^2 = 16\ ,\ y = 4 + 2 = 6 \Rightarrow (16, 6)$ معادلة المماس: $y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + 4$
29	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t}{-4\sin t} = -\frac{3}{4}\cot t$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}$ نقطة التماس: $x = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\ ,\ y = 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ معادلة المماس: $y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$

30	$y = x\ln x$ ميل المماس: $f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$ $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$ معادلة المماس: $y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$
31	$f'(x) = 2 \Rightarrow 1 + \ln x = 2$ $\Rightarrow \ln x = 1$ $\Rightarrow x = e \Rightarrow y = e\ln e = e$ النقطة المطلوبة هي (e, e)
32	$x(x+y) = 2y^2 \Rightarrow x^2 + xy = 2y^2$ $\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4y-x}$
33	$x = \frac{2y}{x^2-y}$ $1 = \frac{2\frac{dy}{dx}(x^2-y) - 2y(2x - \frac{dy}{dx})}{(x^2-y)^2}$ $(x^2-y)^2 + 4xy = 2x^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-y)^2+4xy}{2x^2}$
34	$y\cos x = x^2 + y^2 \Rightarrow -y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{-2y + \cos x}$
35	$2xe^y + ye^x = 3 \Rightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y + ye^x}{2xe^y + e^x}$

36	$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ $2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2)-(x^3)(-1)}{(2-x)^2}$ $2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3)-(1)(-1)}{(2-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$ ميل المماس: $m=-2$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس : $y+1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
37	$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $\ln y = \ln\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$ $\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)y$ $= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$

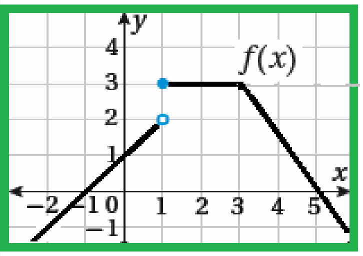
38	$y = x^{\ln x}$ $\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2 \Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = 2(\ln x) \times \dfrac{1}{x}$ $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2\ln x}{x}\right) y = \left(\dfrac{2\ln x}{x}\right) x^{\ln x}$	
39	$x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$ $2x + 3x\dfrac{dy}{dx} + 3y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ $4 + 6\dfrac{dy}{dx} - 3 - 2\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(2,-1)} = 0 \Rightarrow y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$	ميل المماس عند (2, -1): معادلة المماس:
40	$x^2 e^y = 1 \Rightarrow x^2 e^y \dfrac{dy}{dx} + 2xe^y = 0$ $\dfrac{dy}{dx} + 2 = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)} = -2$ $y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$	ميل المماس: معادلة المماس:
41	$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times -2 = -4$	
42	$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5 = 4$	
43	$q'(7) = \dfrac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{(g(7))^2} = \dfrac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2} = \dfrac{3}{4}$	
44	$R(t) = 200(0.9)^t$ $\dfrac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$ $\left.\dfrac{dR}{dt}\right\|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9 \approx -17.1 \text{ g/day}$	
45	$s(t) = 10 + \dfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$ $v(t) = \dfrac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$ $a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$	

اختبار وحدة التفاضل أسئلة متوقعة (مراجعة مكثفة)



1) معتمداً الشكل المجاور ، فإن قيم (x) التي يكون عندها منحنى الاقتران f(x) غير قابل للاشتقاق هي :

a) 1 b) 2 , 3 c) 3 d) 1 , 2



2) معتمدا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران f(x) ، فإن قيم (x) التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق هي :

a) 1 b) 1 , 3 c) 3 d) – 1 , 5

3) إذا كـــــان $f(x)= 3e^{x+1}$ فـإن $f'(0)=$

a) 3 b) 3e c) $3e^2$ d) 0

4) إذا كان $f(x)=e^x+\ln(x+1)$ فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة (0 , 1) هي :

$a)\ y=2x$ $b)\ y=2x-1$

$c)\ y=2x-2$ $d)\ y=2x+1$

5) إذا كـان $f(x)=\dfrac{2x-8}{e^x}$, فـإن قيـم(x) الـتي عنـدها ممـاس أفقـي هـي:

$a)\ 4$ $b)\ -2$ $c)\ 5$ $d)\ 5\ ,0$

6) إذا كان $f(x)=\sin x+\sin\pi$ فإن معادلة المماس لمنحنى f(x) عند النقطة (π , 0) تساوي :

a) y = π – x b) y = x – π c) y = π d) y = x + π

7) إذا كان $f(x)=e^x+\cos x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور(y) هي:

$a)\ y=2x$ $b)\ y=-2x$ $c)\ y=x+2$ $d)\ y=x-1$

8) إذا كان $f(x)=e^{2x-6}-2x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي:

a) 3 b) ln2 c) 6 d) 3 , 2

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

1	2	3	4	5	6	7	8
b	b	b	d	c	a	c	a

9) إذا كان $f(x) = \ln\frac{e^{2x}}{x^4} + 3x$ فإن ميل المماس لمنحنى f عند x = 2 هو :

$a)\ e^2 \qquad b)\ e^2+3 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ 7$

---

10) إذا كان $f(x) = \sin x + 3$ ، فإن ميل العمودي على المماس عند $x = \frac{\pi}{6}$ يساوي:

$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad c)\ \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad d)\ -\frac{2}{\sqrt{3}}$

---

11) مساحة المثلث المحصور بين المماس لمنحنى $f(x) = e^{1-x}$ والمحورين الإحداثيين عند النقطة (1 , 1) تساوي :

$a)\ 4 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 3$

---

12) إذا كان الاقتران $s(t) = t^2 - 8t + 7$, $t \ge 0$, يُمّثل موقع جسم يتحَرك في مسار مستقيم ، فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد :

a) 7 s b) 8 s c) 1 s d) 4 s

---

13) إذا كان الاقتران $t \ge 0$, $s(t) = 4t^2 - t^3$, يُمّثل موقع جسم يتحَرك في مسار مستقيم ، فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد :

a) 6 s b) 8 s c) 3 s d) 4 s

---

14) إذا كان الاقتران : $t \ge 0$, $s(t) = e^t - 6t$, يُمّثل موقع جسم يتحَرك في مسار مستقيم ، فإن تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة تساوي (4 m/s) يساوي :

a) 10 b) 6 c) ln10 d) 4

---

15) إذا كان الاقتران : $t \ge 0$, $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t$, يُمّثل موقع جسم يتحَرك في مسار مستقيم ما قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي ؟

$a)\ 2\ ,\ 3 \qquad b)\ 6\ ,\ 1 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 3$

---

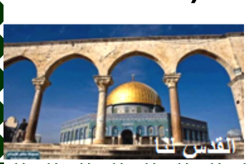
16) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 - 8$, $t \ge 0$, ، يُمّثل موقع جسم يتحَرك في مسار مستقيم ، فإن الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي :

$a)\ (0\ ,\ 4) \qquad b)\ (4\ ,\ \infty) \qquad c)\ (0\ ,\ 9) \qquad d)\ (12\ ,\infty)$

---

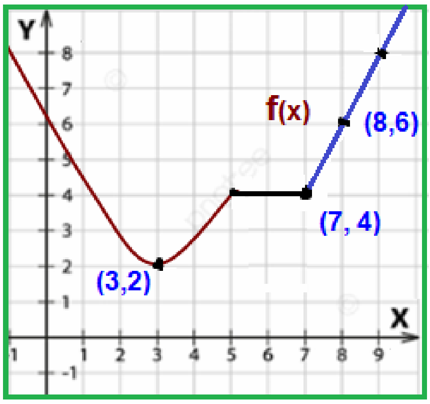
17) يتحرك جسم معلق في زنبرك إلى الأعلى والأسفل ،ويعطى موقعه بالاقتران S(t) = 2 sint ، فإن الاقتران الذي يمثل تسارع الجسم عند أي لحظة هو :

a) 2sint b) 2cost c) – 2sint d) – 2cost



9	10	11	12	13	14	15	16	17
c	d	c	b	d	a	a	a	c

*** معتمدا لشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران f (x) ،
أجب عن الأسئلة (18 ، 19 ، 20 ،21 ، 22) الآتية :



18) $f'(6) =$ $a)\ 1$ $b)\ 4$ $c)\ 0$ $d)$ غير موجودة

19) $f'(5) =$ $a)\ 4$ $b)\ 0$ $c)\ 7$ $d)$ غير موجودة

20) $f'(3) =$ $a)\ 0$ $b)\ 2$ $c)\ 3$ $d)$ غير موجودة

21) $f'(8) =$ $a)\ 8$ $b)\ 2$ $c)\ 6$ $d)$ غير موجودة

22) $g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(9) = a)\ 8 \quad b)\ 16 \quad c)\ 32 \quad d)\ 4$

---

23) $f(x) = x^2 + \cos x \Rightarrow f'(x) =$ $a)\ 2x + \sin x$ $b)\ 2x - \sin x$
$c)\ 2x \sin x$ $d)\ -2x \sin x$

---

24) $f(x) = x^2 \cos x \Rightarrow f'(x) =$ $a)\ 2x \sin x$ $b) -2x \sin x$
$c)\ 2x \cos x - x^2 \sin x$ $d)\ 2x \cos x + x^2 \sin x$

---

25) $f(x) = x^2 + \sin x^2 \Rightarrow f'(x) =$
$a)\ 2x + \cos x^2$ $b)\ 2x + 2x \cos x^2$
$c)\ 2x + 2 \sin x \cos x$ $d)\ 2x \sin x^2 + 2x^3 \cos x$

$f(2) = 1, f'(2) = -4, g(2) = -1, g'(1) = 5 \Rightarrow$
معتمدا هذه المعلومات ، أجب عن الأسئلة (26 – 30)

26) $(f\ g)'(2) =$ $a)\ 9$ $b) -9$ $c)\ 1$ $d) -1$

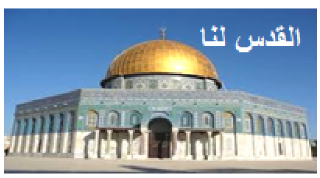
27) $(\frac{f}{g})'(2) =$ $a)\ 9$ $b) -1$ $c) -9$ $d)\ 1$

28) $(3f - g)'(2) =$ $a)\ 7$ $b) -7$ $c) -17$ $d)\ 4$

29) $(\frac{g}{f})'(2) =$ $a)\ 6$ $b)\ 1$ $c) -9$ $d)\ 9$

30) $(\frac{3}{f})'(2) =$ $a)\ 12$ $b) -12$ $c) -3$ $d)\ 0$

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c	d	a	b	c	b	c	b	a	b	c	b	a



31) $f(x)=\ln x^{3} \Rightarrow f''(x)=$ $a)\ 3\ln x$ $b)\ \dfrac{-3}{x^{2}}$ $c)\ \dfrac{3}{x}$ $d)\ \dfrac{3}{x^{2}}$

32) $f(x)=(x^{3}-2)(x^{3}+2) \Rightarrow f'(-1)=$ $a)\ 6$ $b)\ -6$ $c)\ 5$ $d)\ 30$

33) $f(x)=\ln x \Rightarrow x^{2}f'(x)+x^{3}f''(x)+x^{4}f^{(3)}(x)=$

a) $-x$ b) $2x$ c) $4x$ d) $-4x$

34) $f(x)=4\sin^{2}x\cos^{2}x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=$ $a)\ \sqrt{3}$ $b)\ 4\sqrt{3}$ $c)\ 2$ $d)\ -2$

35) $f(x)=4\sin^{2}2x\cos^{2}2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=$ $a)\ -2\sqrt{3}$ $b)\ 4\sqrt{3}$ $c)\ 2\sqrt{3}$ $d)\ -2$

36) $f(x)=2\sin^{2}x\cos^{2}x \Rightarrow f'(x)=$

$a)\ 2\sin 4x$ $b)\ 4\sin 4x$ $c)\ \sin 4x$ $d)\ 8\cos 2x$

37) $f(x)=\sin(\pi e^{x}) \Rightarrow f'(0)=$ $a)\ \pi$ $b)\ e$ $c)\ -1$ $d)\ -\pi$

38) $f(x)=x^{2}+\sin^{2}x \Rightarrow f'(x)=$

$a)\ 2x+\cos x^{2}$ $b)\ 2x+\sin 2x$

$c)\ 2x+2\cos x$ $d)\ 2x-2\sin x\cos x$

39) $g'(3)=-1,\ g(3)=2,\ f(x)=g^{3}(x) \Rightarrow f'(3)=$

$a)\ -12$ $b)\ -10$ $c)\ 6$ $d)\ -3$

40) $f(x)=4\sin^{2}x \Rightarrow f'(x)=$

$a)\ 4\sin x\cos x$ $b)\ 4\sin 2x$ $c)\ 8\cos x$ $d)\ 4\cos^{2}x$

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
b	b	b	a	a	c	d	b	a	b

41) إذا كان $f(x) = \ln(\tan x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ \sec^2 x$ b) $\cot x$ c) $-\cot x$ d) $\sec x \csc x$

42) إذا كان $f(x) = \sin(\ln x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ x\cos x$ b) $\cos(\ln x)$ c) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ d) $\dfrac{\cos(\ln x)}{\text{sins}(\ln x)}$

43) إذا كان $f(x) = \sin^3 x$ فإن $f'(\frac{\pi}{3})$ تساوي :

$a)\ \dfrac{-9}{8}$ b) $\dfrac{9}{8}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\dfrac{3}{2}$

44) إذا كان $f(x) = g^3(x)$, $g(3) = 2$, $g'(3) = -1$ فإن $f'(3)$ تساوي

$a)-12$ $b)-10$ c) 6 d) -3

45) إذا كان $f(x) = \cos x^2$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 2\sin x\ \cos x$ b) $2x\sin x$ c) $2x\cos x^2$ d) $-2x\sin x^2$

46) إذا كان $f(x) = \ln(\tan x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ \sec^2 x$ b) $\cot x$ c) $-\cot x$ d) $\sec x \csc x$

47) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x^2 \Rightarrow (fog)'(-1) =$

$a)\ 12$ $b)-6$ $c)\ 36$ $d)-36$

48) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4 - x^2 \Rightarrow (f\circ g)'(2) =$

a) 4 b) −4 c) 0 d) −2

49) $f'(6) = 3$, $g(4) = 6$, $g'(4) = -2 \Rightarrow (fog)'(4) =$

$a)\ 12$ $b)-6$ $c)\ 24$ $d)-36$

50) $F(x) = g(h(x))$, $h(5) = -3$, $h'(5) = -1$, $g'(-3) = 4$

$\Rightarrow F'(5) =$ $a)-12$ $b)-4$ $c)\ 12$ $d)\ 4$

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d	c	b	a	d	d	d	b	b	b

(51 إذا كان $f(x) = 6^{4x}$ فإن $f'(x)$ تساوي :

a) $6^{4x}(4)$ b) $6^{4x}(\ln 4x)$ c) $6^{4x}(4\ln 6)$ d) $6^{4x}(\ln 6)$

(52 إذا كان $f(x) = \log_3 x$, فإن $f'(x)$ تساوي :

a) $\dfrac{1}{x\ln 3}$ b) $\dfrac{\ln 3}{x}$ c) $\dfrac{3}{x}$ d) 3^x

---

(53 إذا كان $f(x) = \ln(xe^{2x})$, فإن $f'(-\frac{1}{2})$ تساوي :

a) -1 b) 0 c) 2 d) -4

(54 إذا كان $f(x) = 2^x \sin x$ فإن $f'(0)$ تساوي :

a) 0 b) 1 c) $\ln 2$ d) $-\ln 2$

(55 إذا كانت $y = x^x$, فإن $\dfrac{dy}{dx} =$

a) $x^x \ln x + 1$ b) $x^x \ln x + x^x$ c) $x\, x^{x-1}$ d) x^2

(56 إذا كان $f(x) = \pi^x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

a) π^{x-1} b) $\pi^x - 1$ c) $\pi^x(\ln \pi)$ d) π^x

(57 إذا كان $f(x) = 6^{4x}$ فإن $f'(x)$ تساوي :

a) $6^{4x}(4)$ b) $6^{4x}(\ln 4x)$ c) $6^{4x}(4\ln 6)$ d) $6^{4x}(\ln 6)$

(58 إذا كان $f(x) = 2^{4-x^2}$ فإن $f'(-2)$ تساوي :

a) $\ln 4$ b) $2\ln 4$ c) $\ln 2$ d) $\ln 16$

(59 إذا كان $f(x) = \log_3 x$, فإن $f'(x)$ تساوي :

a) $\dfrac{1}{x\ln 3}$ b) $\dfrac{\ln 3}{x}$ c) $\dfrac{3}{x}$ d) 3^x

---

(60 إذا كان $f(x) = \log(x^2+1)$, فإن $f'(1)$ تساوي :

a) $\dfrac{1}{\ln 2}$ b) $\dfrac{2}{\ln 100}$ c) $\dfrac{2}{\ln 10}$ d) $\dfrac{1}{\ln 100}$

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
c	a	b	b	b	c	c	d	a	b

61) إذا كان $f(x) = 2^x \sin x$ فإن $f'(0)$ تساوي :

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ \ln 2$ $d)\ -\ln 2$

---

62) إذا كانت $y = x^{\frac{1}{x-2}}$, فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(4,2) =$

a) $\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ b) $\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$ c) $4-\ln 4$ d) $4+\ln 4$

---

63) إذا كان $f(x) = e^{\sin x} + 1$، فإن ميل المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور(y) يساوي:

a) 2 b) ln2 c) 1 d) 3

---

64) إذا كان منحنى العلاقة الوسيطية يُعطى: $x=t^2$, $y=6t$, فإن $\frac{dy}{dx} =$

$a)\ 2t$ $b)\ 12t$ $c)\ \frac{3}{t}$ $d)\ \frac{2}{t}$

---

65) ميل المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = t^2$, $y = t + 2$

عند t=3 يساوي : $a)\ 6$ $b)\ 3$ $c)\ \frac{1}{3}$ $d)\ \frac{1}{6}$

---

66) إذا كان منحنى العلاقة الوسيطية يُعطى: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$,

فإن $\frac{dy}{dx}$ عند $x = \frac{\pi}{4} =$ $a)\ \sqrt{2}$ $b)\ \sqrt{2}+1$ $c)\ 2\sqrt{2}+1$ $d)\ 2\sqrt{2}$

---

67) ميل المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = \sec^2 t - 1$, $y = \tan t$

عند $t = \frac{\pi}{4}$ يساوي : $a)\ 2$ $b)\ -2$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{-1}{2}$

---

68) إذا كانت : x = sint ، y = 2cost ، فإن المشتقة الثانية لهذه المعادلة الوسيطية تساوي:

a) $-2\sec^3 t$ b) $2\sec^3 t$ c) $2\sec^2 t$ d) -2

---

69) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = 3t + 2$, $y = 3t^2 - 3$ عند $t = 1$ هي :

$a)\ y = 2x - 10$ $b)\ y = 2x - 8$ $c)\ y = 2x - 5$ $d)\ y = 2x$

---

70) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = \sin t$, $y = \cos t$ عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي :

$a)\ y = \sqrt{2} + x$ $b)\ y = \sqrt{2} - x$ $c)\ y = \sqrt{2}x$ $d)\ y = -x$

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
b	a	c	c	d	b	c	a	a	b

71) إذا كانت $\sin x + \cos y = 1$ ، فإن $\frac{dy}{dx} =$

$a)\ \cot xy \qquad b)\ \frac{\sin y}{\cos x} \qquad c)\ \frac{-\cos x}{\sin y} \qquad d)\ \frac{\cos x}{\sin y}$

---

72) إذا كانت $x - x^2 = y + y^2 = 12$ ، فإن $\frac{dy}{dx} =$

$a)\ \frac{-x}{y} \qquad b)\ \frac{1+2x}{1-2y} \qquad c)\ \frac{1-2y}{1+2x} \qquad d)\ \frac{1-2x}{1+2y}$

---

73) إذا كانت $x^2 = \ln y$ ، فإن $\frac{dy}{dx} =$

$a)\ -2xy \qquad b)\ 2xy \qquad c)\ 2x \qquad d)\ 2y$

---

74) واحدة من النقط الآتية والواقعة على منحنى العلاقة $(y-4)^2 = x + 2$ يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $3x - 6y + 2 = 0$:

a) $(1, 7)$ b) $(-1, 5)$ c) $(-1, 3)$ d) $(2, 2)$

---

75) واحدة من النقط الآتية والواقعة على منحنى العلاقة $(y-3)^2 = x + 4$ يكون عندها المماس عمودياً على للمستقيم $y = 2x + 1$:

a) $(-3, 4)$ b) $(-3, 2)$ c) $(-4, 3)$ d) $(5, 0)$

---

76) إذا كانت $x = \sin y$ ، فإن $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$a)\ \cot y\ \csc y \qquad b)\ \sec^2 y \qquad c)\ \sec y\ \tan y \qquad d)\ \sec^2 y\ \tan y$

---

77) إذا كانت : $x = 3t^2 + 4$ ، $y = t^3 - 4t^2$ ، فإن المشتقة الثانية لهذه المعادلة الوسيطية تساوي:

a) $6t$ b) $\frac{1}{6t}$ c) $\frac{1}{12t}$ d) $12t$

---

78) إذا كانت $x^2 - y^2 = 5$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$a)\ \frac{5}{y^3} \qquad b)\ \frac{-5}{y^3} \qquad c)\ \frac{-x}{y} \qquad d)\ \frac{1-x^2}{y^3}$

---

79) إذا كانت $y = \sin 2x$ فإن $\frac{d}{dx}(y\ y')$ تساوي:

$a)\ 4 \qquad b)\ 4\sin 2x$

$c)\ -4\cos 2x \qquad d)\ 4\cos 2x$

---

80) إذا كانت $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ فإن $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(2,2)}$ تساوي:

$a)\ -2 \qquad b)\ 2 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -1$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
d	d	b	c	b	d	c	b	d	a