المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هـبـه مـاهـر التميمـي يوسف سليمان جرادات أ.د محمد صبح صبابحة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2024/4)، تاريـخ 2024/6/6 م، وقرار مجلـس التربيـة والتعليم رقـم (2024/64) تاريـخ 2024/6/26 م بـدءًا من العـام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 651 - 8

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2024/6/3446)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات (كتاب الطالب): الصف الحادي عشر، الفصل الدراسي الأول.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2024
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1445 هـ / 2024 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاريّ، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقــد روعي في إعداد كتــب الرياضيات للمرحلة الثانويــة تضمينها الموضوعات الرياضيــة الأكثر أهمية واســتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراسة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعــات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشــادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاســة مــن دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها ســابقًا وتســاعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومســائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّة فقد تضمّن كتابا الطالــب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 1

الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات
Functions, Sequences, and Series

ما أهمّية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات المتشعّبة واقترانات القيمة المطلقة؛ لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل حساب أثمان المياه والكهرباء وفق شرائح الاستهلاك المختلفة، أو حساب ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المتعدّدة. ويُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال المتتاليات والمتسلسلات؛ ما يساعد على تحليل تلك المواقف وفهمها.

تعلّمت سابقًا:

- تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس.
- إكمال نمط عددي معطى.
- إيجاد الحدّ العام لكلّ من: المتتالية التربيعية، والمتتالية التكعيبية.
- التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا.
- تمثيل الاقترانات بيانيًّا باستعمال تحويلات الانسحاب والتمدّد والانعكاس.
- المتسلسلات، وعلاقتها بالمتتاليات.
- المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (13–6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الاقترانات المتشعّبة

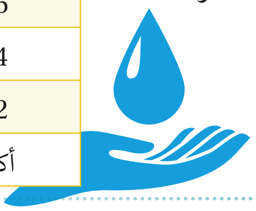
Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرّف الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا، وتحديد مجال كلّ منهما ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعّب، اقتران القيمة المطلقة، رأس الاقتران.

مسألة اليوم يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟

شرائح الاستهلاك مقرّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JD/m^3
0 – 18	0.361
19 – 36	0.450
37 – 54	0.550
55 – 72	1.000
أكثر من 72	1.200



الاقتران المتشعب

أُلاحظ في المسألة السابقة، أنّه لا يُمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمّيّة المياه المستهلكة x يمكن من خلالها حساب ثمن المياه لأي قِيَم x؛ لذا، نحتاج إلى معادلة خاصّة بكلّ واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمّى الاقتران المعرّف بقواعد مختلفة عند أجزاء مختلفة في مجاله **اقترانًا متشعّبًا** (piecewise function).

مثال 1

إذا كان
$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & , -3\le x<1\\ x^2 & , x\ge 1\end{cases}$$

1 أُحدّد مجال $f(x)$

أُلاحظ أنّ الاقتران معرّف بالقاعدتين؛ الأولى $f(x) = -2x+1$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-3 \le x < 1$، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$. إذن: مجال $f(x)$ هو الفترة $[-3 , \infty)$

2 أجد قيمة $f(-2)$.

بما أنّ $-3 < -2 < 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الأولى.

$f(x) = -2x + 1$ القاعدة الأولى

$f(-2) = -2(-2) + 1$ بتعويض $x = -2$

$= 5$ بالتبسيط

3 أجد قيمة $f(1)$.

بما أنّ $1 \leq 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الثانية.

$f(x) = x^2$ القاعدة الثانية

$f(1) = (1)^2$ بتعويض $x = 1$

$= 1$ بالتبسيط

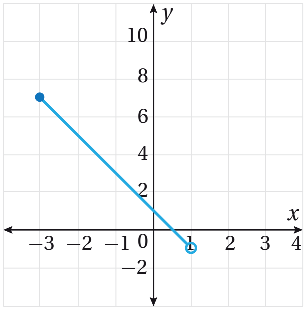
4 أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الخطوة 1: أُمثّل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$، عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أُعيّن النقطتين $(-3, 7), (1, -1)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أنّ العدد (-3) يُحقّق المتباينة $-3 \leq x < 1$؛ أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-3, 7)$، أمّا العدد (1) فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أُنهي التمثيل بدائرة غير مظلّلة عند النقطة $(1, -1)$.



الخطوة 2: أُمثّل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$ هو جزء من منحنى قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى، أنشئ جدول قِيَم؛ لأرسم الجزء من منحنى القطع المكافئ، الذي يقع يمين العدد 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

أتذكّر

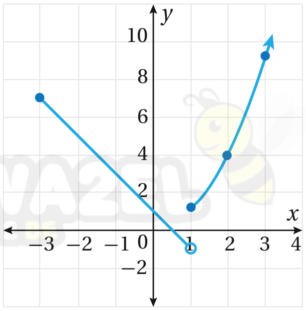
بما أنّ $f(x) = -2x+1$ اقتران خطّي؛ لذا، تكفي نقطتان لتمثيله بيانيًّا.

أتذكّر

يُمثّل الاقتران $f(x) = ax^2+bx+c$ قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت قيمة $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت قيمة $a < 0$، ويُمكن إيجاد إحداثيَي رأس القطع المكافئ على النحو الآتي:

$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

أُعيّـن النقــاط $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ فـي المســتوى الإحداثي، ثم أصل بينها بخط منحنٍ، وبما أنّ العدد 1 يُحقّق المتباينة $x \geq 1$، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند $(1, 1)$. بالنظر إلى التمثيل البياني؛ أُلاحظ أنّ مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويُمكن التعبير عنه بالفترة $(-1, \infty)$.



أتحقّق من فهمي

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & , x<2 \\ 5 & , x=2 \\ 2x-1 & , x>2 \end{cases}$:

a) أُحدّد مجال $f(x)$

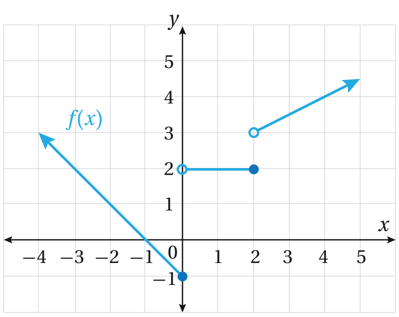
b) أجد قيمة كلّ من $f(5)$، وَ $f(2)$

c) أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعّب؛ إذا أُعطيتُ تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

مثال 2

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أكتـبُ الاقتران الذي يُمثّـل كلّ جزء في التمثيل البياني.

الخطوة 1: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيسر في التمثيل البياني.

الجزء الأيسـر في التمثيل البياني هــو اقتران خطي مقطعه مع المحــور y هو -1 وميله -1 وباســتعمال صيغة الميل والمقطع فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) = -x - 1$، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0, -1)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty, 0]$ من مجال $f(x)$.

أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1), (x_2, y_2) هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل والمقطع هي: $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y، ومعادلته بصيغة الميل ونقطة هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الخطوة 2: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأوسط في التمثيل البياني.

الجزء الأوسط في التمثيل البياني هو الاقتران الثابت $f(x) = 2$، ووجود دائرة مظلّلة عند $(2, 2)$، ودائرة غير مظلّلة عند $(0, 2)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(0, 2]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 3: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيمن في التمثيل البياني.

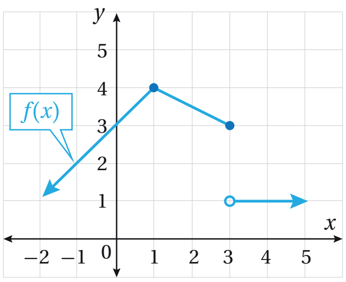
الجزء الأيمن في التمثيل البياني اقتران خطي ميله 0.5 وباستعمال صيغة الميل ونقطة، فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) - 4 = 0.5\ (x - 4)$، ويمكن إعادة كتابتها على الصورة: $f(x) = 0.5x + 2$، ووجود دائرة غير مظلّلة عند $(2, 3)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران المتشعّب على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \ x \leq 0 \\ 2 & , \ 0 < x \leq 2 \\ 0.5x + 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أتعلّم

بما أن المقطع y للجزء الأيمن من الاقتران لا يظهر في التمثيل البياني مثل الجزء الأيسر، أبدأ بكتابة قاعدة هذا الجزء من التمثيل بصيغة الميل ونقطة أولًا، ثم أعيد كتابته بصورة الميل والمقطع.

يُمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعّبة.

مثال 3: من الحياة

أجرة ساعة العمل الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع الشركة لكلّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات العمل المعتاد. أكتبُ اقترانًا لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعًا لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \leq x \leq 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

أتعلّم

أجرة ساعة العمل الإضافي تساوي أجرة ساعة ونصف من العمل النظامي.

$4 \times 1.5 = 6$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x)=\begin{cases}4x & ,\ 0\le x\le 40\\ 6x-80 & ,\ x>40\end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

زادت شـركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسـس الآتية: الرواتب التي تقلّ عن 400 دينار زيدت بنسـبة 15%، والرواتب من 400 دينار إلى أقلّ من 600 دينار زيدت بنسبة 10%، مع علاوة ثابتة بقيمـة 20 دينارًا، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيـدت 80 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الراتب الجديد لموظّفي الشركة.

أتذكّر

القيمة المطلقة لأيّ عدد حقيقـي x والتـي يُرمز إليها بالرمز $|x|$ تسـاوي بعده عن الصفر على خط الأعداد، وبما أنّ البعد لا يكون سـالبًا، فإنه توجد حالتان:

$|x|=x\ ,\ x\ge 0$

$|x|=-x\ ,\ x<0$

مثال عددي:

$\left|-\frac{1}{2}\right|=\left|+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

اقتران القيمة المطلقة

اقتـران القيمة المطلقـة (absolute value function) هو اقتران يحتـوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثلته:

$$f(x)=2|x|+3\quad ,\quad f(x)=|x^2-2x-3|\quad ,\quad f(x)=\left|\frac{x+2}{2x-6}\right|$$

ومن أبسط اقترانات القيمة المطلقة الاقتران $f(x)=|x|$، ويُمكن كتابته بصورة اقتران متشعّب كما يأتي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & ,\ x<0\\ x & ,\ x\ge 0\end{cases}$$

تُسـمّى إعادة كتابة أيّ اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشـعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

مثال 4

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x)=|2x+4|$

الخطوة 1: أُساوي ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x+4=0$ بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر

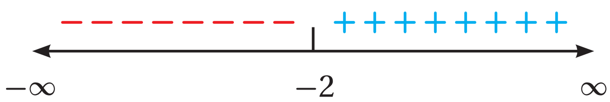
$2x+4-4=0-4$ بطرح 4

$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$ بالقسمة على 2

$x=-2$ بالتبسيط

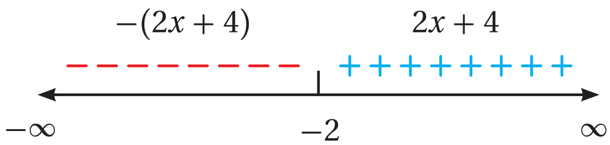
الخطوة 2: أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيه.

أُعيّن صفر المعادلة (-2) على خط الأعداد، ثمّ أُحدّد الإشارة على جانبَيه، وذلك بتعويض أيّ قيمة أقلّ من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض سالب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يسار -2 سالبة. وأُعوّض أيّ قيمة أكبر من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض موجب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3: أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتبُ ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو دون تغيير في الجزء الموجب، وأكتبُ في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في -1



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x < -2 \\ 2x + 4 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = |3x - 9|$

أتعلّم

يأخذ الاقتران الخطّي يمين صفره إشارة معامل x نفسها، ويسار صفره عكس إشارة معامل x.

أتعلّم

يمكن أيضًا كتابة الاقتران $f(x)$ بالصورة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x \leq -2 \\ 2x + 4 & , \ x > -2 \end{cases}$$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا

يتكوّن التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة الذي على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث $m \neq 0, a \neq 0$، من شعاعين على شكل حرف V متماثلين حول المحور $x = \frac{-b}{m}$،

ورأس الاقتران (function vertex) هو النقطة التي يصل عندها إلى أعلى قيمة أو أقلّ قيمة وإحداثياها $(\frac{-b}{m}, c)$.

يُمكن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 5

أُمثِّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

1) $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيّا نقطة الرأس	$\left(\frac{-b}{m}, c\right)$
بتعويض $b = 0, m = 1, c = 0$	$= \left(\frac{0}{1}, 0\right)$
بالتبسيط	$= (0,0)$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(0, 0)$، ومعادلة محور التماثل $x = 0$ (المحور y).

الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

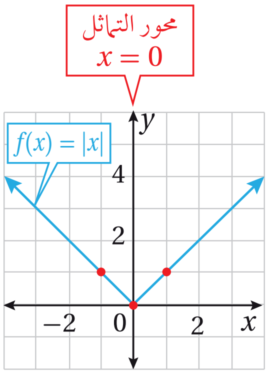
بمـــا أنّ محور التماثل $x = 0$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من 0 (مثلًا 1) وقيمة أخرى أقلّ من 0 (مثلًا -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V.

يُلاحظ من التمثيــل البياني أنّ المجــال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $[0, \infty)$.



2 $f(x) = -|x+2| + 3$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$، ومعادلة محور التماثل $x = -2$.

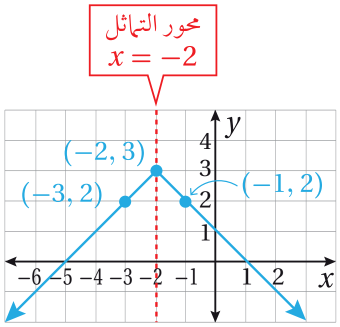
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = -2$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من -2 (مثلًا -1) وقيمة أخرى أقلّ من -2 (مثلًا -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = -\|x+2\| + 3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V مقلوب.



ألاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $(-\infty, 3]$.

أتعلّم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث $m \neq 0,\ a \neq 0$، مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

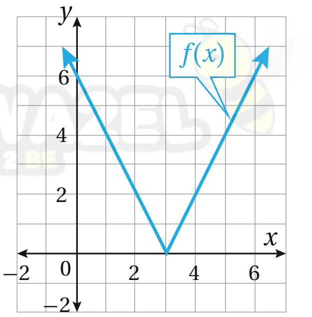
a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |2 - \frac{1}{2}x|$

يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطّي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6

أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يظهر من الشكل أنّ التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة $f(x)$ على شكل حرف V؛ لذا، يُمكن كتابة قاعدته على الصورة $f(x) = a|mx + b| + c$. حيث m ميل المستقيم $y = mx + b$، وإحداثيا الرأس $(\frac{-b}{m}, c)$.

الخطوة 1: أجد ميل المعادلة الخطّية داخل رمز القيمة المطلقة.

أُلاحظ من التمثيل البياني أنّ الشعاع الأيمن يمرّ في النقطتين $(5, 4)$ و$(3, 0)$، ومنه فإنّ ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

الخطوة 2: أجد إحداثيَي نقطة الرأس، ثم أُعوّض الميل وإحداثيَي نقطة الرأس في قاعدة الاقتران.

يظهر من التمثيل البياني أن النقطة $(3, 0)$ تمثل رأس التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة، إذن: يُمكن إيجاد قيمة b من الإحداثي x للرأس كما يأتي:

$$x = \frac{-b}{m}$$ الإحداثي x للرأس

$$3 = \frac{-b}{2}$$ بتعويض $m = 2$ و $x = 3$

$$-b = 6$$ بالضرب التبادلي

$$b = -6$$ بالقسمة على -1

وبتعويض إحداثيَي نقطة الرأس والميل وقيمة b في قاعدة الاقتران؛ فإنّ:

$$f(x) = a|2x - 6| + 0 \longrightarrow f(x) = a|2x - 6|$$

أتعلّم

مــن الســهل تعويــض نقطة تقاطــع الاقتران مع المحور y لإيجاد قيمة a؛ لأنّ قيمة x فيها تســاوي صفرًا.

الخطوة 3: أجد قيمة a.

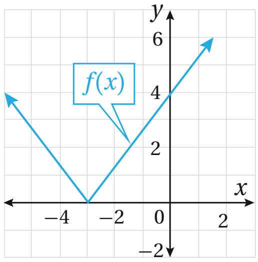
لإيجــاد قيمة a؛ أُعوّض في قاعــدة الاقتران إحداثيَي نقطة تقع علــى منحنى الاقتران (مثلًا: $(0, 6)$)، وأحلّ المعادلة الناتجة.

قاعدة الاقتران	$f(x) = a\|2x - 6\|$
بتعويض $(0, 6)$	$6 = a\|2(0) - 6\|$
بالتبسيط	$6 = 6a$
بالقسمة على 6	$a = 1$

إذن: قاعدة الاقتران هي: $f(x) = |2x-6|$.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة اقتــران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \leq x \leq 4 \\ 2 & , x > 4 \end{cases}$ ، فأجد كلًّا من:

1) $f(-2)$
2) $f(-1)$
3) $f(0)$
4) $f(4)$
5) $f(8)$
6) $f(5)$

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

7) $f(x) = |3x - 6|$
8) $f(x) = |7x - 5| + 3$

أُمثّل كلاًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

9 $f(x)=\begin{cases}3-2x & , x<-1\\ 6 & , -1\le x\le 3\\ x^2 & , x>3\end{cases}$

10 $f(x)=\begin{cases}3 & , x=1\\ -x+2 & , x\ne 1\end{cases}$

11 $f(x)=\begin{cases}x+2 & , x\ne 2\\ 6 & , x=2\end{cases}$

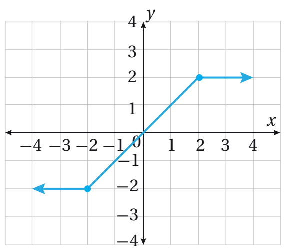
12 $f(x)=\begin{cases}2 & , x\le 3\\ -2 & , x>3\end{cases}$

13 $f(x)=-|2x-4|$

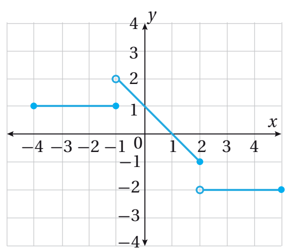
14 $f(x)=|x-4|+1$

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

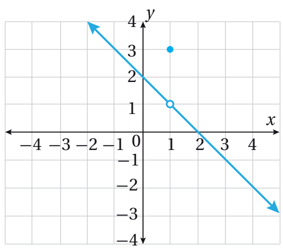
15



16

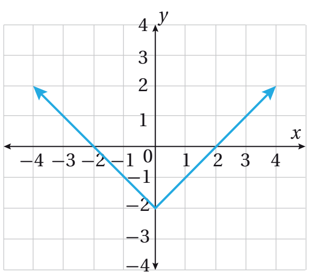


17

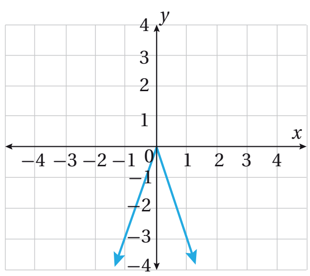


أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

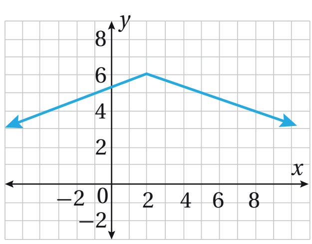
18



19



20



خيمة: يُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = -1.4\,|x - 2.5| + 3.5$ حافتَي الوجه الأمامي لخيمة، ويُمثّل العمود الذي يتوسّط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل، أمّا المحور x فيُمثّله سطح الأرض.

21 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

22 أجد مجال الاقتران ومداه.

عاصفة: تبدأ العاصفة المطرية بالهطل على شكل رذاذ ثم يزداد معدل الهطل، ثم تعود ثانية للهطل على شكل رذاذ، ويُمثّل الاقتران $r(t) = -0.5|t-1| + 0.5$، معدل الهطل r (بالإنش لكلّ ساعة)، حيث t الزمن بالساعات منذ بداية الهطل.

23 أُمثّل اقتران معدّل الهطل بيانيًّا.

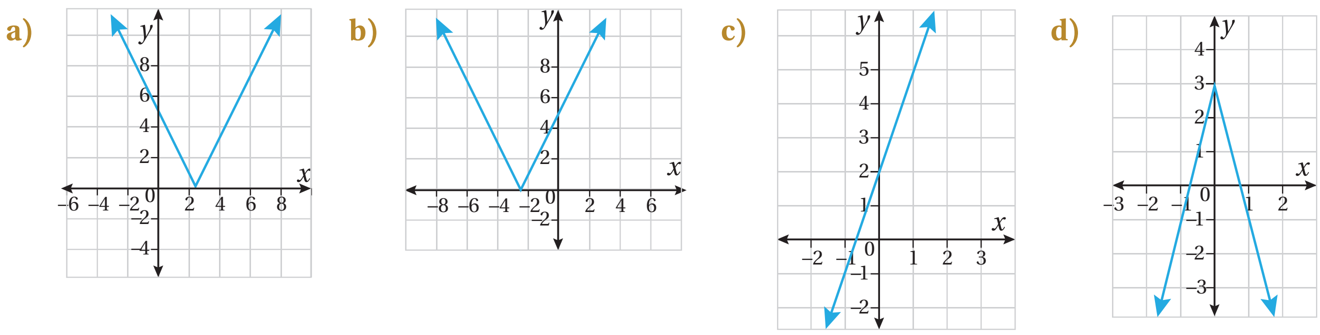
24 أجد كم ساعة استمر الهطل.

25 بعد كم ساعة كان أعلى معدل هطل؟ أُبرّر إجابتي.

26 أعود إلى مسألة اليوم، وأكتبُ الاقتران المتشعّب الذي يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة.

مهارات التفكير العليا

27 **تبرير:** أيّ الآتية تُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = |2x-5|$؟ أُبرّر إجابتي:



تحدٍّ: يُمكن كتابة المقدار $x^2 + px - q$ على الصورة $(x-2.5)^2 - 0.25$

28 أجد قيمة كلّ من p، و q.

29 أجد إحداثيَي كلّ من نقطتَي تقاطع منحنى $f(x) = |x^2 + px - q|$ مع محور x.

الدرس 2

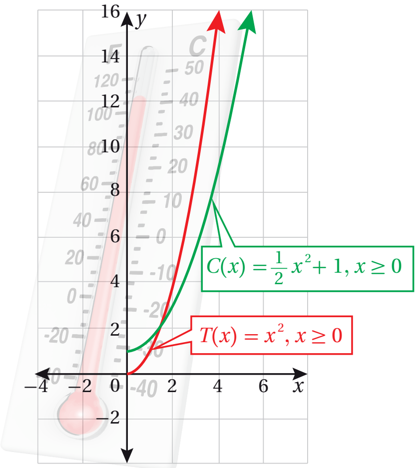
التحويلات الهندسية للاقترانات

Transformations of Functions

فكرة الدرس رسم منحنيات اقترانات باستعمال التحويلات الهندسية، وكتابة معادلة التحويل لمنحنى معطى.

المصطلحات عائلة الاقترانات، الاقتران الرئيس، الانسحاب الرأسي، الانسحاب الأُفقي، الانعكاس، التمدّد الرأسي، التمدّد الأُفقي.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, x \geq 0$ درجة الحرارة $^\circ C$ في أحد أيام الشتاء في مدينة الشوبك، ويُمثّل الاقتران $T(x) = x^2, x \geq 0$ درجة الحرارة في مدينة السلط في اليوم نفسه، حيث x عدد الساعات بعد شروق الشمس. بالنظر إلى التمثيل البياني للاقترانين الذي يظهر جانبًا، ما العلاقة بين منحنيي الاقترانين $C(x)$ و $T(x)$؟



الاقترانات الرئيسة

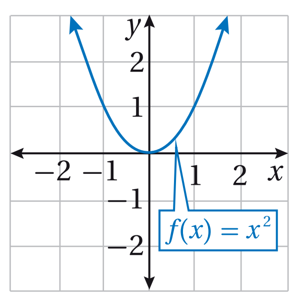
عائلة الاقترانات (family of functions) هي مجموعة الاقترانات التي تتشابه منحنياتها في صفة واحدة أو أكثر، ويُسمّى أبسط اقترانات هذه العائلة **الاقتران الرئيس** (parent function). فمثلًا، الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات الخطّية هو $f(x) = x$، ومن أمثلة اقترانات هذه العائلة الاقترانات الآتية:

$$h(x) = x + 3, \quad g(x) = 5x, \quad j(x) = -7x + 1$$

وفي ما يأتي بعض الاقترانات الرئيسة الأكثر شيوعًا:

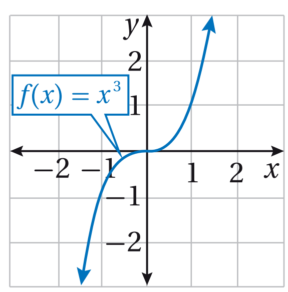
الاقتران التربيعي الرئيس

$f(x) = x^2$



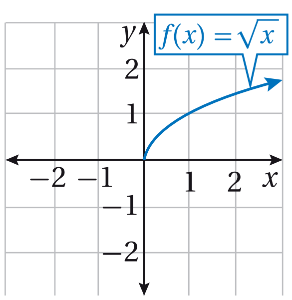
الاقتران التكعيبي الرئيس

$f(x) = x^3$



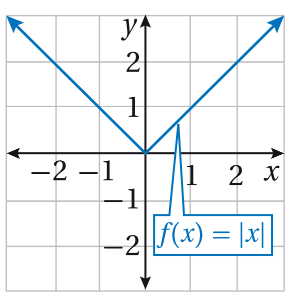
اقتران الجذر التربيعي الرئيس

$f(x) = \sqrt{x}$



اقتران القيمة المطلقة الرئيس

$f(x) = |x|$



تساعد معرفة شكل منحنى الاقتران الرئيس على تحليل وتمثيل منحنيات اقترانات أكثر تعقيدًا ناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس، فبعض هذه التحويلات يُغيّر موقع المنحنى فقط ولا يُغيّر في شـكله وأبعاده، مثل تحويلات الانعكاس والانسحاب. وبعضها يُغيّر شـكل المنحنى بحيث يبدو أوسع من منحنى الاقتران الرئيس أو أضيق منه، مثل تحويلات التمدد.

الانسحاب الرأسي

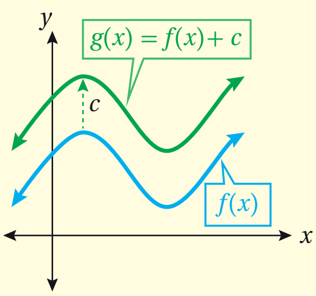
الانسحاب الرأسي (vertical shift) هو تحويل هندسـي ينقل منحنى الاقتران إلى الأعلى عند إضافة ثابت موجب إلى الاقتران، وإلى الأسفل عند طرح ثابت موجب من الاقتران.

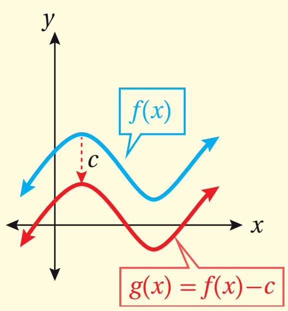
مفهوم أساسي

الانسحاب الرأسي

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x) + c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأعلى c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأسفل c وحدة.





أتعلّم

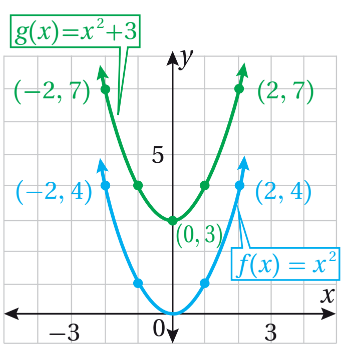
في الانسـحاب الرأسي، يزيـد الإحداثـي y لكلّ نقطـة علـى منحنـى $g(x) = f(x) + c,\ c > 0$ بمقـدار c وحـدة على الإحداثـي y للنقطـة المقابلـة لهـا علـى منحنـى $f(x)$، وبالمثـل فـإنّ الإحداثـي y لكلّ نقطـة علـى منحنـى $g(x) = f(x) - c,\ c > 0$ يقلّ بمقـدار c وحدة عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$

مثال 1

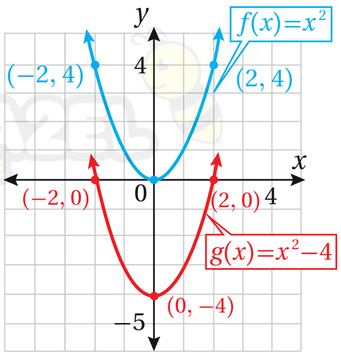
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = x^2 + 3$

منحنـى $g(x) = x^2 + 3$ هـو منحنـى $f(x) = x^2$ مزاحًـا 3 وحدات إلى الأعلى؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار 3 وحدات على الإحداثـي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



2 $g(x) = x^2 - 4$



منحنى $g(x) = x^2 - 4$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى الأسفل؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يقلّ بمقدار 4 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 2$

b) $g(x) = |x| - 5$

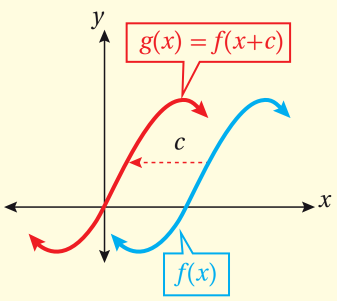
الانسحاب الأُفقي

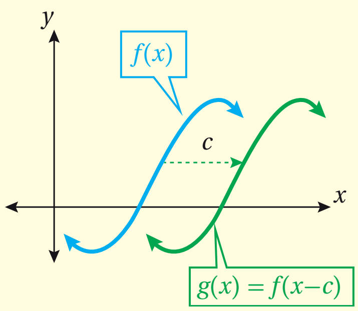
الانسحاب الأُفقي (horizontal shift) تحويل هندسي ينقل منحنى الاقتران إلى اليسار عند إضافة ثابت موجب إلى قِيَم x جميعها في مجال الاقتران، وإلى اليمين عند طرح ثابت موجب من قِيَم x جميعها في مجال الاقتران.

مفهوم أساسي — الانسحاب الأُفقي

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x + c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليسار c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x - c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليمين c وحدة.





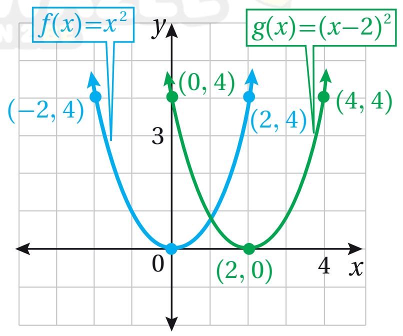
أتعلّم

قيمة $f(x-c)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $x - c$ في الانسحاب الأُفقي.

مثال 2

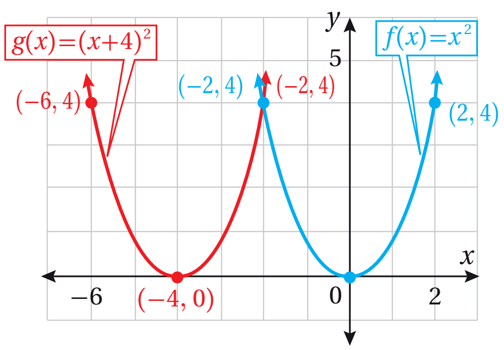
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = (x-2)^2$



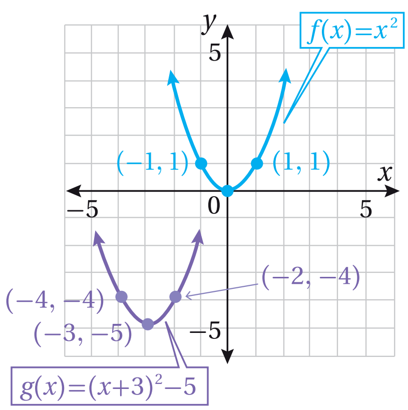
منحنى $g(x)=(x-2)^2$ هو منحنى $f(x)=x^2$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار وحدتين على الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.

2 $g(x) = (x+4)^2$



منحنى $g(x)=(x+4)^2$ هو منحنى $f(x)=x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى اليسار؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g يقلّ بمقدار 4 وحدات عن الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.

3 $g(x) = (x+3)^2 - 5$



منحنى $g(x)=(x+3)^2-5$ هو منحنى $f(x)=x^2$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار، و5 وحدات إلى الأسفل، كما في الشكل المجاور.

أتعلّم

في الفرع 3 من المثال 2، يُمكن البدء بإزاحة الاقتران f بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل ثمّ 3 وحدات إلى اليسار.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

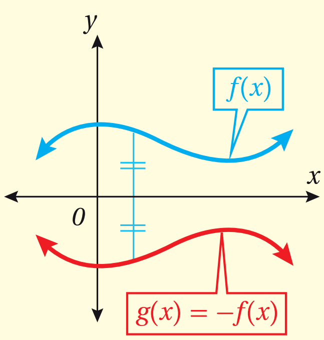
a) $g(x) = (x-1)^3$ b) $g(x) = (x+1)^3$ c) $g(x) = (x+2)^3 - 4$

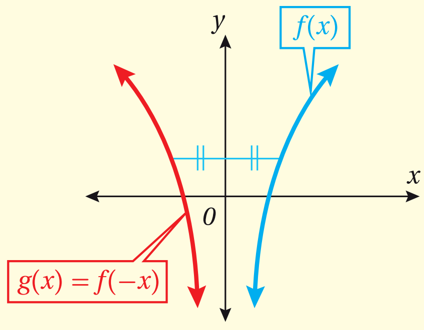
الانعكاس

الانعكاس (reflection) هو تحويل هندسي يعكس منحنى الاقتران حول مستقيم محدّد.

مفهوم أساسي

- منحنى $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x.
- منحنى $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.





أتعلّم

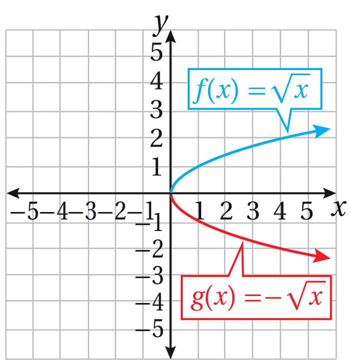
عند إجراء تحويل الانعكاس يكون الإحداثي y لكل نقطة على منحنى $g(x) = -f(x)$ هو معكوس الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$، ومن جهة أخرى تكون قيمة $g(x) = f(-x)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $-x$

مثال 3

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

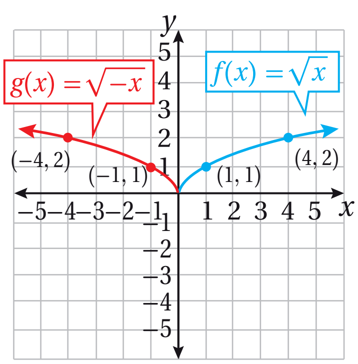
1 $g(x) = -\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = -\sqrt{x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(x, -y)$ على منحنى g.



2 $g(x) = \sqrt{-x}$

منحنى $g(x) = \sqrt{-x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(-x, y)$ على منحنى g.



أتعلّم

مجال الاقتران $g(x) = \sqrt{-x}$ هو الفترة $(-\infty, 0]$.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = -|x|$

b) $g(x) = |-x|$

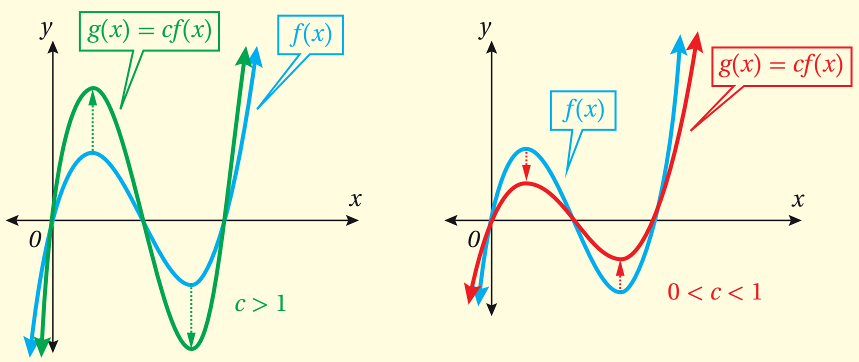
التمدّد الرأسي

التمدّد الرأسي (vertical dilation) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه رأسيًّا.

مفهوم أساسي — التمدّد الرأسي

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنّ منحنى $g(x) = cf(x)$ هو:

- توسيع رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$
- تضييق رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$



أتعلّم

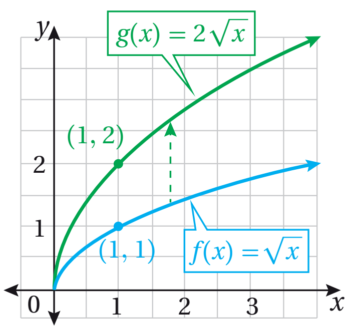
الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = cf(x)$، ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في c.

مثال 4

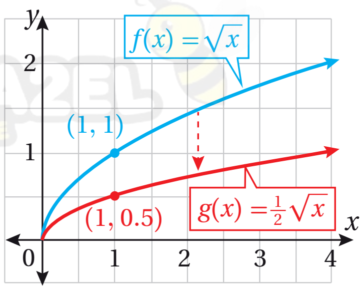
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = 2\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = 2\sqrt{x}$ هو توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2



2 $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



منحنى $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في $f(x)$ في $\frac{1}{2}$.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

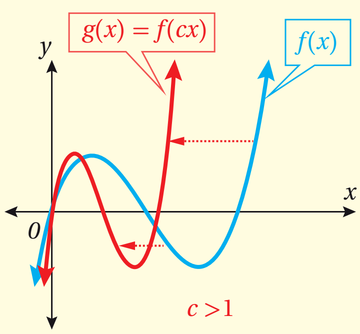
التمدّد الأفقي

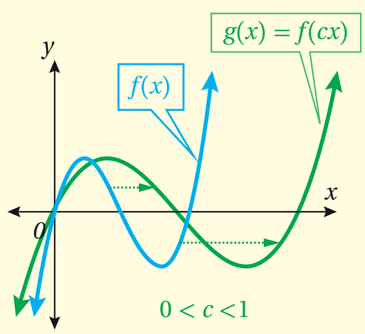
التمدّد الأفقي (horizontal dilation) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه أفقيًّا.

مفهوم أساسي — التمدّد الأفقي

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ منحنى $g(x) = f(cx)$ هو:

- تضييق أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.
- توسيع أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.





أتعلّم

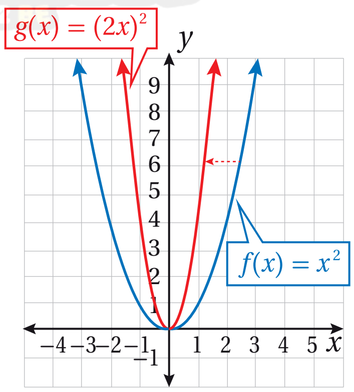
الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(cx)$، ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{c}$.

مثال 5

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

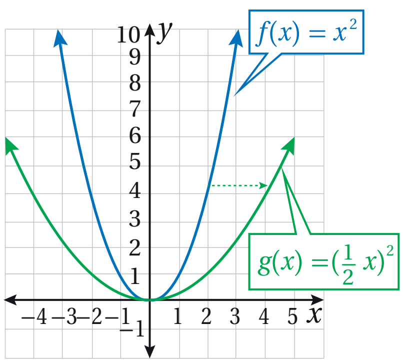
1 $g(x) = (2x)^2$

منحنى $g(x) = (2x)^2$ هو تضييق أُفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{2}$.



2 $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$

منحنى $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$ هو توسيع أُفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2



أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = (3x)^2$

b) $g(x) = (\frac{1}{3}x)^2$

سلسلة التحويلات الهندسية

يُمكن تمثيل منحنى اقتران ناتج عن تطبيق أكثر من تحويل هندسي على الاقتران الرئيس؛ بتطبيق التحويلات على الاقتران الرئيس بالترتيب الآتي:

1 الانعكاس ← 2 التمدّد ← 3 الانسحاب

مثال 6

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=\sqrt{x}$، لتمثيل منحنى $g(x)=\sqrt{1-x}+2$ بيانيًّا.

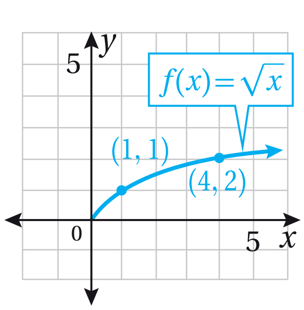
بما أنّ الانسحاب الأُفقي إلى اليمين يُكتب على صورة $x-c$، أبدأ بإعادة كتابة الاقتران g على الصورة الآتية:

$$g(x)=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$$

يُمكنني الآن تمثيل منحنى الاقتران باتّباع الخطوات الآتية:

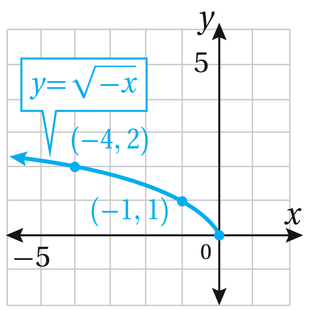
الخطوة 1:

أُمثّل منحنى $f(x)=\sqrt{x}$



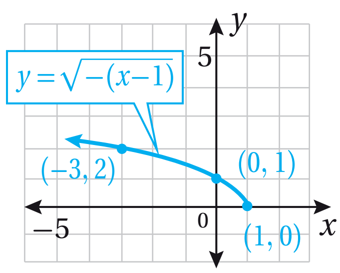
الخطوة 2:

أُمثّل منحنى $y=\sqrt{-x}$ بإجراء انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.



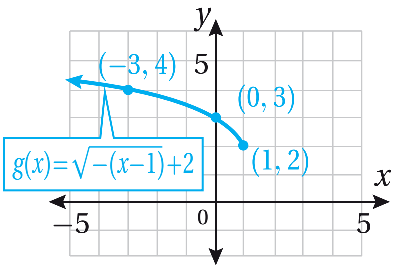
الخطوة 3:

أُمثّل منحنى $y=\sqrt{-(x-1)}$ بإجراء انسحاب لمنحنى $y=\sqrt{-x}$ وحدة واحدة إلى اليمين.



الخطوة 4:

أُمثّل منحنى $y=\sqrt{-(x-1)}+2$ بإجراء انسحاب لمنحنى $y=\sqrt{-(x-1)}$ وحدتان إلى الأعلى.



أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=x^2$ لتمثيل منحنى $g(x)=-(x-2)^2+3$ بيانيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1) $g(x) = x^2 - 6$

2) $q(x) = -(x-1)^2$

3) $s(x) = 3x^2 + 4$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

4) $g(x) = \sqrt{x - 3}$

5) $h(x) = \sqrt{x - 2} + 5$

6) $p(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

7) $g(x) = |x| + 5$

8) $h(x) = |x + 4| - 2$

9) $q(x) = |x - 3| - 2$

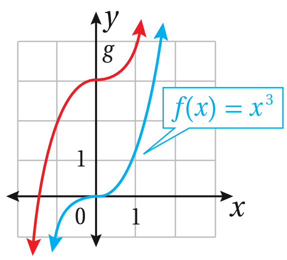
10) $r(x) = -2|x| + 1$

11) $s(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

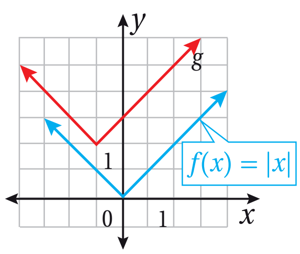
12) $p(x) = \frac{1}{4}|x|$

إذا كان منحنى الاقتران g ناتج عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران f؛ فأجد قاعدة الاقتران g في كلّ ممّا يأتي:

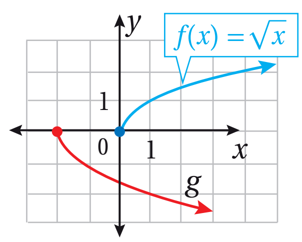
13)



14)



15)



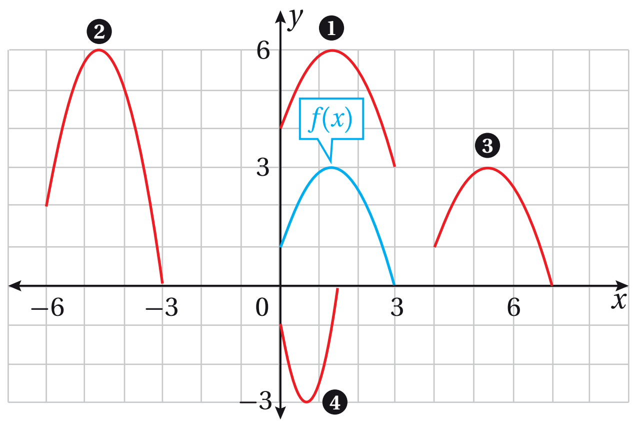
16) يُبيّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ (باللون الأزرق). أُحدّد رقم منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $g(x) = f(x-4)$

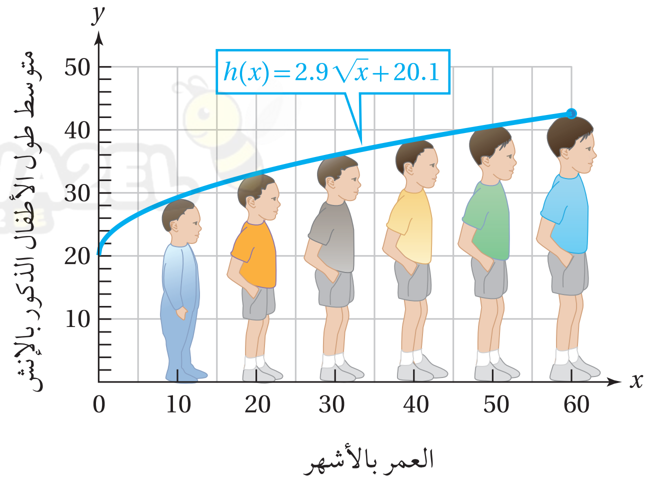
b) $h(x) = f(x) + 3$

c) $g(x) = 2f(x+6)$

d) $h(x) = -f(2x)$



يُمثّل الاقتران $h(x) = 2.9\sqrt{x} + 20.1$ متوسّط طول الأطفال الذكور بالإنش، حيث x العمر بالأشهر.



17 أصف التحويلات التي طُبّقت على الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على $h(x)$.

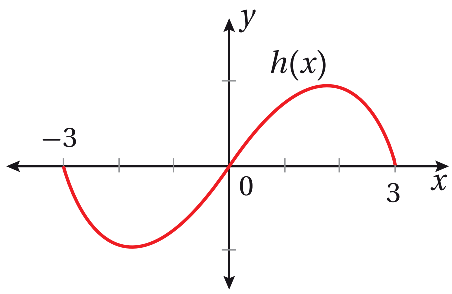
18 أجد متوسّط طول الأطفال الذكور بعمر 5 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

19 ماذا يُمثّل الثابت 20.1 في الاقتران $h(x)$ بالنسبة إلى متوسّط أطوال الأطفال الذكور؟

20 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

تبرير: أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $h(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأبرّر إجابتي:



21 $f(x) = h(3x)$

22 $f(x) = h(\frac{1}{3}x)$

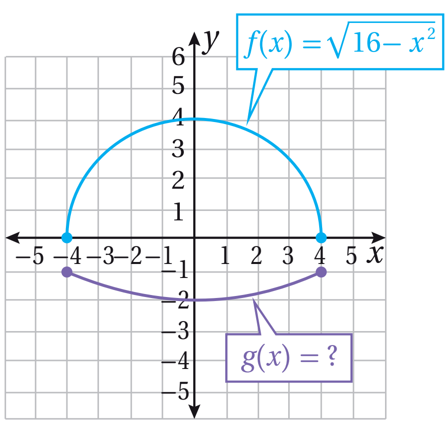
تبرير: أفترضُ أنّ (a, b) نقطة على منحنى الاقتران f. أُحدّد النقطة المقابلة لها على منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

23 $h(x) = f(-x)$

24 $g(x) = 2f(x)$

25 $p(x) = f(3-x)$

26 **تحدّ:** في الشكل المجاور إذا كان منحنى الاقتران g ناتج عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران f؛ فأجد قاعدة الاقتران g.



الدرس 3

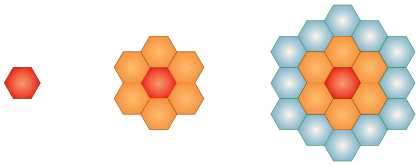
المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

فكرة الدرس

- تعرُّف المتتالية المنتهية وغير المنتهية، والمتسلسلة المنتهية وغير المنتهية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة المنتهية.
- تعرُّف المتتالية الحسابية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

المصطلحات المتتالية المنتهية، المتتالية غير المنتهية، المتسلسلة، المتتالية الحسابية، أساس المتتالية الحسابية، المتسلسلة الحسابية، المجموع الجزئي.

مسألة اليوم يصنع النحل قرص العسل ببناء الخلية الأولى على شكل سداسي منتظم، ثم إحاطتها بحلقات من الخلايا المُطابِقة للخلية الأولى كما في الشكل المجاور.



1 2 3

ما عدد الخلايا في قرص العسل بعد بناء النحل الحلقة العاشرة؟

المتتاليات، والمتسلسلات، ورمز المجموع

تعلَّمْتُ سابقًا مفهوم المتتالية، وأنَّ كل عدد فيها يُسمّى حدًّا.

تكـون **المتتاليــة منتهيــة** (finite sequence) إذا حوت عددًا منتهيًا مــن الحدود، وتكون **غير منتهية** (infinite sequence) إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

متتالية غير منتهية	متتالية منتهية
5, 10, 15, 20, 25 , …	5, 10, 15, 20, 25

المتتاليات بوصفها اقترانات

مفهوم أساسي

بالكلمات: المتتالية اقتــران مجاله مجموعــة الأعداد الصحيحــة الموجبة، أو مجموعة جزئيــة منها، ومداه مجموعة جزئية مــن مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث يرتبط كل عدد صحيــح في المجال بعدد حقيقي في المدى، هو أحد حدود المتتالية.

بالرموز:

المجال: $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad n$ ترتيب الحدِّ

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

المدى: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n$ الحدُّ

حيث: a_1: الحدُّ الأول للمتتالية، و a_2: الحدُّ الثاني للمتتالية، و a_n: الحدُّ العام للمتتالية.

أتذكَّر

الحدُّ العام هو علاقة جبرية تربط كل حدٍّ في المتتالية برتبته. ويُمكِن اســتعمال الحدِّ العام لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ فــي المتتالية، وذلك بتعويض رتبــة ذلك الحدِّ في الحدِّ العام.

يُطلَق على مجموع حدود المتتالية اسم **المتسلسلة** (series)، ويُمكِن إيجاد هذا المجموع بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتالية بدلًا من الفواصل.

وكما هو حال المتتالية، فإنَّ المتسلسلة تكون منتهية، أو غير منتهية.

متسلسلة غير منتهية	متسلسلة منتهية
$1+2+3+4+5+\dots$	$1+2+3+4+5$

يُمكِن التعبير عن المتسلسلة بطريقة مختصرة باستعمال رمز المجموع (Σ) (يُقرَأ: سيغما) على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

آخر قِيَم k ← n

أول قِيَم k ← $k=1$

الحدُّ العام للمتتالية ← a_k

فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المتسلسلتين السابقتين باستعمال رمز المجموع Σ كما يأتي:

$$1+2+3+\dots=\sum_{k=1}^{\infty} k \qquad 1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5} k$$

لغة الرياضيات

يُقرَأ $\sum_{k=1}^{5} k$: مجموع (k) من ($k=1$) إلى ($k=5$).

مثال 1

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

1 $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\dots+\sqrt{68}$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $\sqrt{2+1}$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $\sqrt{2+2}$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $\sqrt{2+3}$، وأنَّ الحدَّ الأخير يساوي $\sqrt{2+66}$

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي: $a_k=\sqrt{2+k}$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{66}\sqrt{2+k}$$

2 $5+10+15+\dots$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $5(1)$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $5(2)$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $5(3)$.

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي: $a_k = 5\,k$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\,k$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

a) $7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 25$

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$

إيجاد مجموع المتسلسلة

يُمكِن إيجاد **مجموع المتسلسلة** المنتهية بجمع حدودها، أما إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، فإنَّني أستعمل الحدَّ العام لإيجاد حدودها، ثم أجمعها.

مثال 2

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{4} k^2$

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4$ في الحدِّ العام للمتسلسلة، وهو $a_k = k^2$:

$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ حدود المتسلسلة

$= 1 + 4 + 9 + 16$ بإيجاد مربع كل عدد

$= 30$ بالجمع

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{7} \frac{5k-2}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2$

حالات خاصة من المتسلسلات

في ما يأتي بعض خصائص رمز المجموع.

خطأ شائع

أتجنَّب الخطأ الشائع الآتي:

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

مفهوم أساسي خصائص رمز المجموع

إذا كان a_k و b_k الحدَّين العامين لمتتاليتين، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

إذا كان في المتسلسلة عدد كبير من الحدود، فإنَّ إيجاد مجموعها لن يكون سهلًا. ولكنْ توجد قواعد يُمكِن استعمالها لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات الخاصة على نحوٍ سهل كما يأتي.

مفهوم أساسي صيغ لمجموع متسلسلات خاصة

1) $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$ مجموع الحدِّ الثابت (c) إلى نفسه (n) من المرّات.

2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

مثال 3

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $\sum_{k=1}^{20} 2k$

$\sum_{k=1}^{20} 2k = 2\left(\sum_{k=1}^{20} k\right)$ بإخراج الثابت خارج رمز المجموع

$= 2\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (20)

$= 420$ بالتبسيط

2 $\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2)$

$$\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} 2$$ بتوزيع رمز المجموع على الجمع

$$= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 + 2(10)$$ مجمـوع مكعبـات الأعـداد الصحيحـة المتتالية مـن (1) إلى (10)، ومجمـوع الحدِّ الثابت (2) إلى نفسه (10) مرّات

$$= 3045$$ بالتبسيط

3 $\sum_{k=1}^{25} (k^2 - 1)$

$$\sum_{k=1}^{25} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{25} k^2 - \sum_{k=1}^{25} 1$$ بتوزيع رمز المجموع على الطرح

$$= \left(\frac{25(25+1)(2(25)+1)}{6}\right) - 1(25)$$ مجمـوع مربعـات الأعـداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (25)، ومجموع الحدِّ الثابت (1) إلى نفسه (25) مرَّة

$$= 5500$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{10} 3k^2$

b) $\sum_{k=1}^{20} (7k - 2)$

c) $\sum_{k=1}^{5} (-4k^3)$

المتتالية الحسابية

إذا كان الفرق بين كل حدَّين متتاليين في متتالية عددية يساوي قيمة ثابتة، فإنَّ هذه المتتالية تُسمّى **متتالية حســابية** (arithmetic sequence)، ويُسمّى الفرق الثابت **أساس المتتالية الحسابية** (common difference)، ويُرمَز إليه بالرمز d. فمثلًا، المتتالية: $5, 10, 15, 20, \ldots$ حسابية؛ لأنَّ لحدودها فرقًا مشتركًا، بحيث يزيد كل حدٍّ على الحدِّ الذي يسبقه بمقدار 5

$$5\,,\quad 10\,,\quad 15\,,\quad 20\,,\ \ldots \longleftarrow \text{حدود متتالية حسابية}$$

$$+5 \qquad +5 \qquad +5 \longleftarrow \text{الأساس}$$

مفهوم أساسي

المتتاليات الحسابية

بالكلمات: تكون المتتالية حســابية إذا كان الفرق بين كل حــدٍّ فيها والحدِّ الذي يسبقه يساوي قيمة ثابتة.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ حسابية إذا كان:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d$$

مثال 4

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1 $\mathbf{5, 9, 13, 17, \cdots}$

أطرح كل حدَّين متتالين:

بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني $a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$

بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث $a_3 - a_2 = 13 - 9 = 4$

بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع $a_4 - a_3 = 17 - 13 = 4$

أُلاحِظ أنَّ الفرق ثابت، وأنَّه يساوي 4؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $d = 4$.

إذن، المتتالية: $5, 9, 13, 17, \ldots$ حسابية.

أتعلَّم

يُمكِــن إيجــاد الحــدِّ الخامس للمتتالية بإضافة الأساس إلى الحدِّ الرابع كالآتي:

$$a_5 = a_4 + d$$
$$= 17 + 4 = 21$$

2) 23, 15, 9, 5, ...

أطرح كل حدَّين متتالين:

بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني $a_2 - a_1 = 15 - 23 = -8$

بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث $a_3 - a_2 = 9 - 15 = -6$

بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع $a_4 - a_3 = 5 - 9 = -4$

أُلاحِظ أنَّ الفرق غير ثابت.

إذن، المتتالية: $23, 15, 9, 5, \ldots$ ليست حسابية.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

a) $7, 4, 1, -2, \ldots$

b) $0, 6, 13, 19, \ldots$

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد كل حدٍّ من حدود المتتالية الحسابية بإضافة الأساس إلى الحدِّ الذي يسبقه، ويُمكِن استعمال هذه الخاصية لإيجاد الحدِّ العام للمتتالية الحسابية باستعمال حدِّها الأول a_1، وأساسها d كالآتي:

الحدُّ	رمزه	الحدُّ بدلالة a_1 و d
الحدُّ الأول	a_1	a_1
الحدُّ الثاني	a_2	$a_1 + d$
الحدُّ الثالث	a_3	$a_1 + 2d$
الحدُّ الرابع	a_4	$a_1 + 3d$
الحدُّ الخامس	a_5	$a_1 + 4d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الحدُّ العام	a_n	$a_1 + (n-1)d$

مفهوم أساسي

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

الحدُّ العام للمتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d، يعطى بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث n عدد صحيح موجب.

أتعلَّم

يمكن أحيانًا إيجاد الحدِّ العام للمتتالية الحسابية ذهنيًّا من دون الحاجة إلى استعمال صيغة مجاورة.

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن كتابة حدود المتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d كما يأتي:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d,\ \ldots.$$

مثال 5

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العاشر منها:

1 $20, 13, 6, \ldots$

الخطوة 1: أجد الحدُّ العام للمتتالية.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 20$، والأساس $d = 13 - 20 = -7$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = a_1 + (n-1)\, d$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$= 20 + (n-1)(-7)$ بتعويض $a_1 = 20,\ d = -7$

$= -7n + 27$ بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = -7n + 27$

الخطوة 2: أجد الحدَّ العاشر للمتتالية.

لإيجاد الحدِّ العاشر من المتتالية، أُعوِّض $n = 10$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = -7n + 27$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$a_{10} = -7(10) + 27$ بتعويض $n = 10$

$= -43$ بالتبسيط

أتعلَّم

يمكــن التحقق من صحة الحدِّ العام بتعويض رُتَبِ بعــض حــدود المتتالية الحســابية المعطــاة في الحدِّ العام ومقارنة القيم الناتجة بتلك الحدود.

2 $a_7 = 27, a_{15} = 59$

الخطوة 1: أستعمل صيغة الحدِّ العام: $a_n = a_1 + (n-1)d$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $a_7 = 27, n = 7$	$27 = a_1 + (7-1)d$
بالتبسيط	$27 = a_1 + 6d \quad ......(1)$
بتعويض $a_{15} = 59, n = 15$	$59 = a_1 + (15-1)d$
بالتبسيط	$59 = a_1 + 14d \quad ......(2)$

الخطوة 2: أَحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالحذف.

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)	$32 = 8d$
بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 8	$d = 4$
بتعويض قيمة d في المعادلة (1)	$27 = a_1 + 6\times4 \quad ......(1)$
بحلِّ المعادلة	$a_1 = 3$

الخطوة 3: أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و d في صيغة الحدِّ العام للمتتالية.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض $a_1 = 3, d = 4$	$a_n = 3 + (n-1)(4)$
بالتبسيط	$a_n = 4n-1$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 4n-1$

أتذكّر

يمكن أيضًا حلّ نظام المعادلات باستعمال التعويض.

أتعلّم

ألاحظ أن أسّ المتغير n في الحدِّ العام للمتتالية يساوي 1، فتكون المتتالية حسابية.

أتحقّق من فهمي

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الخامس عشر منها:

a) $1, -2, -5, ...$ **b)** $a_{10} = -11, d = 2$ **c)** $a_7 = 71, a_{16} = 26$

المتسلسلات الحسابية

تنتج **المتسلسلة الحسابية** (arithmetic series) من جمع حدود المتتالية الحسابية. ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة **مجموعًا جزئيًّا** (partial sum)، ويُرمَز إليه بالرمز S_n.

أتعلَّم

من المُلاحَظ أنَّ المجموع S_n يتكوَّن من الوسط الحسابي لكلٍّ من الحدِّ الأول والحدِّ الأخير مضروبًا في عدد الحدود التي يراد جمعها.

المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية

مفهوم أساسي

يُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا من حدود متتالية حسابية باستعمال إحدى الصيغتين الآتيتين:

1) $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$

2) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

مثال 6

1 أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $60 + 64 + 68 + 72 + \ldots + 120$

الخطوة 1: أجد عدد حدود المتتالية n.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 60$، والأساس $d = 64-60 = 4$، والحدِّ الأخير $a_n = 120$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية:

$a_n = a_1 + (n-1)\, d$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$120 = 60 + (n-1)(4)$ بتعويض $a_n = 120, a_1 = 60, d = 4$

$60 = 4\,(n-1)$ بطرح 60 من طرفي المعادلة

$15 = n-1$ بقسمة طرفي المعادلة على 4

$n = 16$ بجمع 1 إلى طرفي المعادلة

أتعلَّم

لا يُمكِن إيجاد مجموع حدود المتتالية الحسابية غير المنتهية.

الخطوة 2: أستعمل إحدى صيغتي المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n.

صيغة المجموع الجزئي $$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

بتعويض $a_1 = 60, a_{16} = 120, n = 16$ $$S_{16} = (16)\left(\frac{60 + 120}{2}\right)$$

بالتبسيط $$= 1440$$

إذن، مجموع حدود المتسلسلة الحسابية المعطاة هو 1440

2 **أجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية:**

$$\mathbf{7 + 12 + 17 + 22 + \ldots}$$

أُعـوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 7$، والأســاس $d = 12-7 = 5$ فــي الصيغة الثانية للمجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n:

صيغة المجموع الجزئي $$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

بتعويض $a_1 = 7, d = 5, n = 15$ $$S_{15} = \frac{15}{2}(2(7) + (15-1)(5))$$

بالتبسيط $$S_{15} = 630$$

إذن، مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من هذه المتسلسلة الحسابية هو 630

أُفكِّر

لمــاذا يُفضَّل اســتعمال الصيغة الثانية من مجموع المتسلســلة الحسابية في الفرع 2 من المثال؟

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $\mathbf{7 + 15 + 23 + \ldots + 159}$

b) أجد مجموع الحدود السبعة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية: $\mathbf{8 + 5 + 2 + \ldots}$

يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الحسابية في كثير من التطبيقات الحياتية والعملية.

مثال 7 : من الحياة

هندسة برمجيات: في مسابقة عالمية للغات البرمجة، تُمنَح جائزة نقدية لأول 50 مركزًا، ويُمنَح الفائز بالمركز الأول جائزة نقدية قيمتها JD 5000، وتقل قيمة الجائزة بمقدار JD 100 لكل مركز بعد ذلك عن المركز الذي يسبقه:

معلومة

يستند علم البرمجة إلى علم الرياضيات بشكل أساسي؛ إذ تتضمّن عملية البرمجة عادةً توظيف نماذج رياضية، مثل: تحديد الأنماط، واختبار القيم اختبارًا منظّمًا.

1 **أُبيِّن أنَّ قِيَم الجوائز النقدية في المسابقة تُمثِّل متتالية حسابية.**

قِيَم الجوائز النقدية المتتالية هي: $5000, 4900, 4800, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الفرق بين كل حدَّين متتاليين في هذا النمط يساوي -100

إذن، تُمثِّل قِيَم الجوائز النقدية في هذه المسابقة متتالية حسابية أساسها: $d = -100$

2 **أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$$= 5000 + (n-1)(-100)$$ بتعويض $a_1 = 5000, d = -100$

$$= -100\, n + 5100$$ بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = -100\, n + 5100$

3 **ما قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة؟**

قيمة الجائزة هي الحدُّ الخمسون (a_{50}):

$$a_n = -100\, n + 5100$$ الحدُّ العام للمتتالية

$$a_{50} = -100\,(50) + 5100$$ بتعويض $n = 50$

$$= 100$$ بالتبسيط

إذن، قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة هي JD 100.

4 ما مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة؟

لإيجاد مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة، أُعوِّض قيمة $a_1 = 5000$، وقيمة $a_{50} = 100$، وقيمة $n = 50$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$$S_{50} = (50)\left(\frac{5000 + 100}{2}\right)$$ بتعويض $a_1 = 5000, a_{50} = 100, n = 50$

$$= 127500$$ بالتبسيط

إذن، مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة هو JD 127500.

أتحقَّق من فهمي

اقتصاد: ضمن خطة إحدى المؤسسات الخيرية لزيادة التوعية بالأضرار الاقتصادية للتدخين، أنفقت المؤسسة JD 300 في السنة الأولى على حملات التوعية، وخطّطت لزيادة إنفاقها السنوي على هذه الحملات بنحو JD 400 سنويًّا على مدار 10 أعوام:

a) أُبيِّن أنَّ إنفاق الجمعية السنوي يُمثِّل متتالية حسابية.

b) أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

c) ما قيمة المبلغ الذي سوف تُنفِقه المؤسسة في آخر عام من الخطة؟

d) أجد مجموع ما سوف تُنفِقه المؤسسة في 10 أعوام.

معلومة

للتدخين أضرار اقتصادية كبيرة جدًّا على الصعيد الفردي والاجتماعي والوطني؛ ما يتطلب تضافر الجهود من أجل التوعية بتلك الأضرار.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

1) $1 + 4 + 9 + \ldots + 100$

2) $2 + 4 + 6 + \ldots + 20$

3) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{13}{14}$

4) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + \frac{64}{729}$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

5) $\sum_{n=1}^{6} (-2)^n$

6) $\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2+1}{n+1}$

7) $\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3^n+1}$

8) $\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{2}$

9) $\sum_{k=1}^{9} (12k-24)$

10) $\sum_{k=1}^{20} (k^3-1)$

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

11) $10, 11, 14, 15, 18, 19, \ldots$

12) $12, 6, 0, -6, -12, \ldots.$

13) $3, 5, 9, 15, 23, \ldots$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الثلاثين منها:

14) $25, 58, 91, 124, \ldots$

15) $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \ldots.$

16) $a_{17} = -5, d = -\frac{1}{2}$

17) $a_5 = 58, a_{12} = 30$

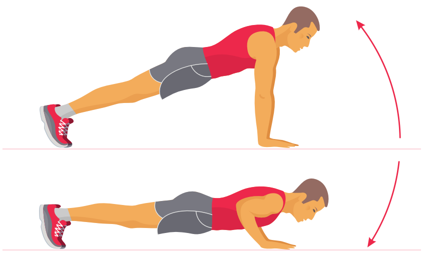
أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

18) $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

19) $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

20) $\sum_{n=1}^{80} (2n-2)$

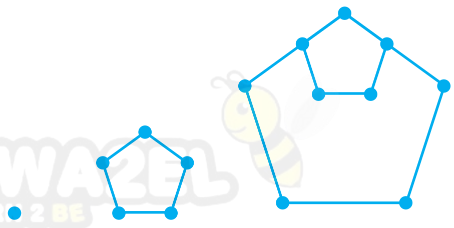
21) رياضة: يمارس هيثم تمارين الضغط بانتظام، وقد استطاع أداء 25 ضغطة بصورة مستمرة في الأسبوع الأول، ثم تمكَّن من زيادة عددها أسبوعيًّا بمقدار 5 ضغطات على نحوٍ مستمر. ما عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها بشكل مستمر في الأسبوع السادس عشر؟



22) متسلسلة حسابية منتهية، حدُّها الأول 10، وأساسها 4، ومجموع حدودها 792، ما عدد حدود هذه المتسلسلة؟

23) إذا كان مجموع أول n حدًّا من حدود متسلسلة حسابية هو $n^2 + 4n$، فأجد حدَّها المئة.

يُبيِّن الشكل المجاور نمطًا هندسيًّا يُمثِّل عدد النقاط في نماذجه متتالية:



24 أُبيِّن أنَّ عدد النقاط في النماذج يُمثِّل متتالية حسابية.

25 أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

26 هل يوجد نموذج يحوي 397 نقطة؟ أُبرِّر إجابتي.

متسلسلة حسابية، حدُّها الأول a، وأساسها d، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى يساوي ضعف مجموع حدودها العشرين الأولى:

27 أُثبِت أنَّ $a = \frac{11d}{2}$.

28 إذا كان مجموع الحدود الثلاثين الأولى هو 400، فأجد قيمتي a و d.

29 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

30 تبرير: هل للمتسلسلتين: $9 + 7 + 5 + 3 + 1$ و $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ المجموع نفسه؟ هل يُمكِن التعبير عنهما بالطريقة نفسها باستعمال رمز المجموع؟ أُبرِّر إجابتي.

31 أكتشف الخطأ: أوجدت ولاء مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5} (2k + 7)$ على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{5} (2k+7) = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 7$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ ولاء، ثم أُصحِّحه.

32 تحدٍّ: إذا كانت $3,\ a - b,\ 3a - 4b,\ 2a + 2b$ تُمثِّل الحدود الأربعة الأولى من متسلسلة حسابية، حيث a و b ثابتان، فأجد مجموع أول 25 حدًّا من المتسلسلة.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+2 & , x<3 \\ -2x^2+5x+7 & , x\geq 3 \end{cases}$ ،

فما قيمة $f(-2)$؟

d) -18 e) -11

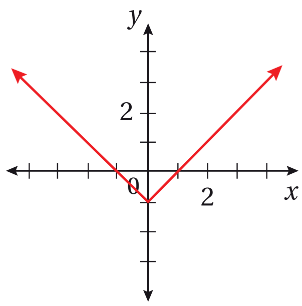
f) 11 g) 22

2 ما التحويل الذي يجري على منحنى $f(x)$ للحصول على منحنى الاقتران $g(x)=2f(x)$؟

a) تضييق أُفقي. b) توسيع رأسي.

c) انسحاب رأسي. d) انسحاب أُفقي.

3 أيّ الاقترانات الآتية يُمثّل قاعدة المنحنى المجاور؟



a) $g(x)=|x+1|$ b) $g(x)=|x-1|$

c) $g(x)=|x|-1$ d) $g(x)=-|x|$

4 أيّ الاقترانات الآتية ناتج عن انسحاب الاقتران الرئيس $f(x)=x^3$ إلى الأعلى 4 وحدات وإلى اليمين 5 وحدات؟

a) $g(x)=(x+5)^3-4$

b) $g(x)=(x-5)^3-4$

c) $g(x)=(x+5)^3+4$

d) $g(x)=(x-5)^3+4$

5 مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{6} k^2$ هو:

a) 36 b) 55

c) 91 d) 273

6 إحدى صيغ المجموع أدناه تُعبِّر عن المتسلسلة الآتية:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$$

a) $\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

c) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2k}$ d) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k+2}$

7 الحدُّ العام لمتتالية حسابية، حدُّها الثامن -13، وأساسها -8، هو:

a) $a_n=51+8n$

b) $a_n=35+8n$

c) $a_n=51-8n$

d) $a_n=35-8n$

8 المتتالية الحسابية ممّا يأتي هي:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

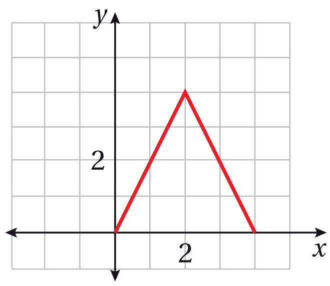
d) $2, 4, 7, 11, \ldots$

أُمثّل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًّا:

9 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 0 \\ -1 & , 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 4 & , x > 3 \end{cases}$

10 $f(x) = |3x - 12| + 2$

أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية:



11 $h(x) = f(x-2)$

12 $g(x) = -f(x) + 3$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

13 $g(x) = (x-3)^3 + 2$

14 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

15 $\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 1)$

16 $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^k$

17 $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$

18 $\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العشرين منها:

19 $200, 191, 182, 173, \ldots$

20 $215, 192, 169, 146, \ldots$

21 $a_5 = 41, a_{10} = 96$

22 $a_{10} = 7, d = -2$

أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

23 $7 + 1 - 5 - 11 - \ldots - 299$

24 $-10 - 9.9 - 9.8 - \ldots - 0.1$

25 $\sum_{k=1}^{20} (88 - 3k)$

26 أجد مجموع الحدود الاثني عشر الأولى من المتسلسلة:

$$120 + 111 + 102 + 93 + \ldots$$

27 متتالية حسابية، حدُّها الأول 20، وحدُّها الثاني 24، ومجموع أول k حدًّا من حدودها 504، أجد قيمة k.

28 أراد أحمد توفير جزء من راتبه، فوفَّر في الشهر الأول 50 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثاني 55 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثالث 60 دينارًا. ما مجموع المبالغ التي سيُوفِّرها أحمد إذا استمر على هذا النمط مدَّة عامين؟

الوحدة
2

النهايات والمشتقّات
Limits and Derivatives

ما أهمّية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق في كثير من التطبيقات الحياتية. ومن ذلك؛ إيجاد معدّلات التغيّر بالنسبة إلى الزمن، مثل السـرعة والتكاثر والتغيّر في درجات الحرارة، إضافة إلـى أهمّيته في تحديـد النقطة العظمى أو الصغرى، في كثير من المواقف، مثل تحديد أعلى ربح وأقل تكلفة.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تبسيط المقادير الجبرية النسبية.
- ✓ تمثيل الاقترانات المتشعّبة والاقترانات النسبية وكثيرات الحدود بيانيًّا.
- ✓ إيجاد المشتقّة الأولى لكثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والصغرى.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجـاد نهاية اقتـران عند نقطة بيانيًّـا وعدديًّا وجبريًّا، والبحث في اتّصاله عند نقطة.
- ◄ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.
- ◄ اسـتعمال قاعدة السلسـلة؛ لإيجاد مشـتقّة تركيب اقترانين.
- ◄ رسم منحنى كثيرات الحدود؛ باستعمال المشتقّة.
- ◄ حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

أستعمل تدريبات (أسـتعد لدراسـة الوحدة) في الصفحات (18–30) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

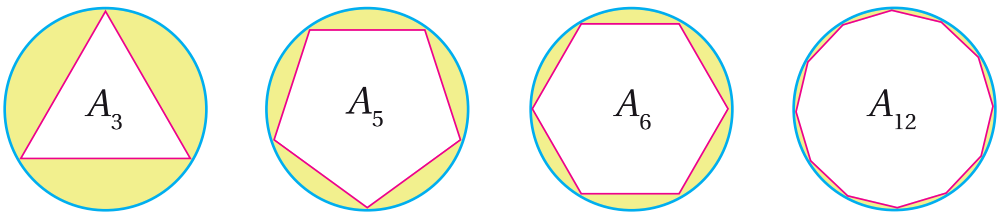
الدرس 1

النهايات والاتّصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس
- إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المحدّدة، الاقتران المتصل.

مسألة اليوم بالنظر إلى الأشـكال أدناه، كم تصبح مسـاحة المنطقة المحصورة بين الدائـرة والمضلع المنتظم (A_n)، عندما تزداد قيمة n زيادة كبيرة جدًّا؟

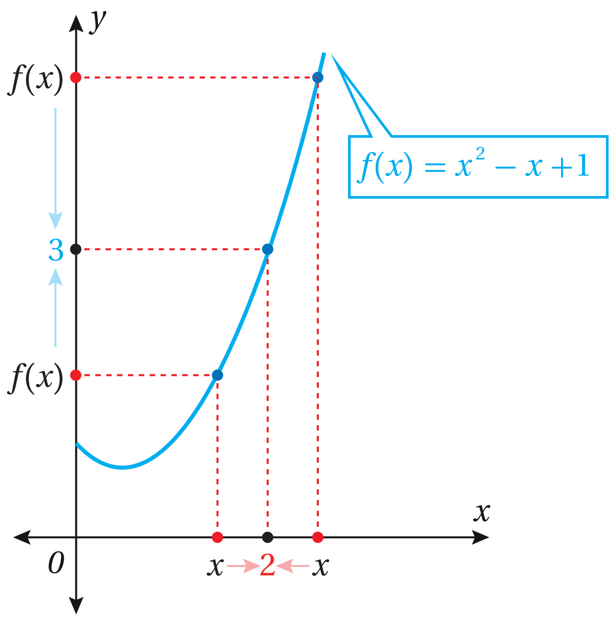


إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا

تعلّمتُ سـابقًا كثيرًا من خواصّ الاقترانات، مثل المجال والمدى والتزايد والتناقص، وذلك عـن طريق تحليل تمثيلاتها البيانية أو دراسـة جـدول قِيَم يُمثّل الاقتران، وسـأتعلّم في هذا الدرس تحليل سلوك اقتران معطى، وتحديد إذا كانت قِيَم الاقتران (المخرجات) تقترب أكثر فأكثر من عدد ما.

عندمـا تقترب قيـم x (المدخلات) أكثر فأكثر من عدد محدّد مثل (c)، عندها يُسـمّى العدد الذي تقترب منه قيـم الاقتران **النهاية** (limit)، فمثلًا: إذا كان $f(x) = x^2 - x + 1$ واخترت قِيَمًا للمتغيّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، عندها سألاحظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني الآتي لمنحنى $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $f(x)$ تقترب من العدد (3)، وكلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم الاقتران تقترب من العدد (3)، عندها يُمكنني القول: إنّ نهاية $(x^2 - x + 1)$ هي 3 عندما تقترب x من العدد 2 من جهتَي اليمين واليسار، وتُكتب على الصورة:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$$



2

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار   جهة اليمين

النهاية عند نقطة

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت قيمة الاقتران $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c؛ فإنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

وتُقرأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

لغة الرياضيات

تُقرأ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ أيضًا على الصورة: يقترب $f(x)$ من L عندما تقترب x من c.

عند كتابة $\lim\limits_{x \to c} f(x)$، فهذا يُشير إلى أنّ x تقترب من c من جهتَي اليمين واليسار، وإذا أردت تحديد الجهة التي تقترب منها قِيَم x من القيمة c، فإنّني أستعمل التعبيرين الآتيين:

- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث $x < c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار.
- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث $x > c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين.

وتكون نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة؛ إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

مفهوم أساسي

بالكلمات: تكـون النهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$

مثال 1

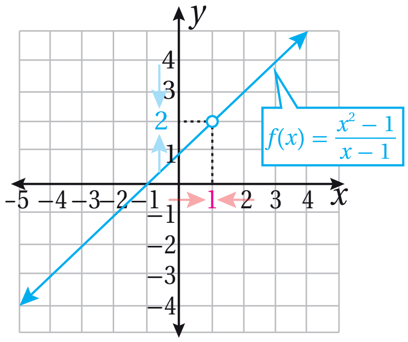
1 إذا كان $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$؛ فأجد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ بيانيًّا وعدديًّا.

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.

إنّ مجال الاقتران $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ما عدا 1 أو $(R-\{1\})$،
وبما أنّ:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

فإنّ التمثيل البياني لـ $f(x)$ هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم $y = x+1$ مع دائرة صغيرة غير مظلّلة عند $x = 1$ كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني لـ $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من الجهتين، فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (2) من الجهتين، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

1

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

2

جهة اليسار   جهة اليمين

أُفكّر

لماذا مجال $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 1؟

إرشاد

أُلاحظ أنّ الاقتران $f(x)$ غير معرّف عند $x = 1$، إلّا أنّ النهاية موجودة عندما $x\to 1$

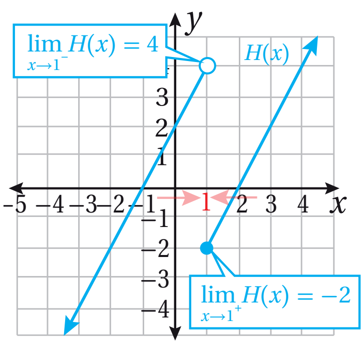
أُلاحـظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) مــن الجهتين؛ فإنّ قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

أُلاحظ ممّا سبق، أنّ قيمة النهاية متساوية في كلا الطريقتين.

2 إذا كان $H(x) = \begin{cases} 2x + 2 & , x < 1 \\ 2x - 4 & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد $\lim\limits_{x \to 1} H(x)$

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.



إنّ الاقتران $H(x)$ متشــعّب، وتمثيلــه البياني كما يظهر في الشــكل المجاور. أُلاحظ من التمثيل البياني أنّه كلّما اقتربت قِيَم x مــن العدد (1) من جهة اليســار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = 4$$

ولكن، كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (−2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) = -2$$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x \to 1} H(x)$ غير موجودة.

إرشاد

أُلاحظ أنّ $H(1) = -2$، مــا يعنــي أنّ الاقتــران معرّف عند $x = 1$، ولكن النهاية عندما تقترب x من العدد (1) غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشــئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

→ 1 ←

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		−1.998	−1.98	−1.8

جهة اليسار → 4   −2 ← جهة اليمين

أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب مــن العدد (4)، وأنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لهــا تقترب من العدد (−2)، وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليســار غير متســاويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x \to 1} H(x)$ غير موجودة.

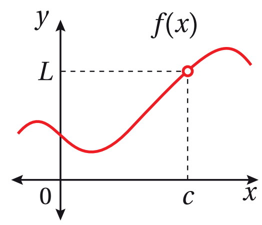
أتحقّق من فهمي

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

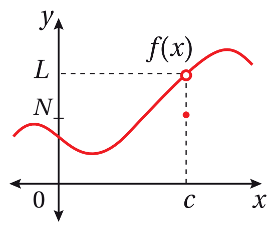
b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ ,\ f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$

أُلاحظ من المثال الســابق، أنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c لا علاقة لها بقيمة $f(c)$، فمثلًا $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ في الحالات الثلاث الآتية:



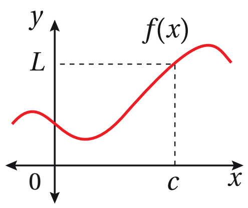
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرّفة



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = N$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

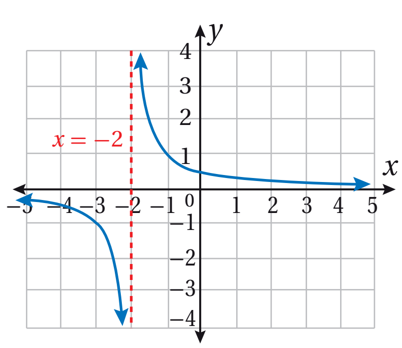
$f(c) = L$

أتعلّم

الرمــزان ∞، $-\infty$ ليســا عددين حقيقيّين، ولكنّهما يصفان ســلوك الاقترانات عنــد خطــوط التقــارب الرأســية؛ لــذا، لا تنطبق عليهما القواعد الجبرية مثل الجمع والطرح والمقارنة، فمثــلًا: $\infty \neq \infty$؛ لأنّ (المالانهاية) لا تقف عند قيمة ما.

نهايات تتضمن (المالانهاية)

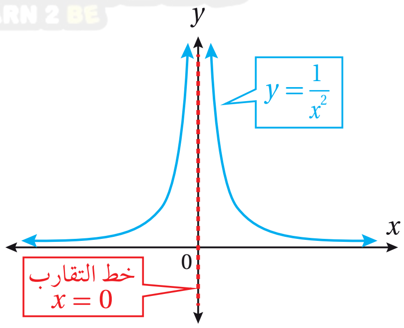
في بعض الأحيان، تكون النهايــة من اليمين أو اليســار (أو كليهما) غير موجــودة عند قيمة ما؛ لأنّ الاقتران يزداد أو ينقص بصورة غير محدودة قرب تلك القيمة. وفي هذه الحالة، نصف سلوك الاقتران بأنّه يقترب مــن (المالانهاية) الموجبة (∞) أو السالبة ($-\infty$).



مثال 2

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$



أُلاحظ مــن التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x^2}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليســار، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهــذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليســـار غير موجودة. أُلاحظ أيضًا أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليمين غير موجودة.

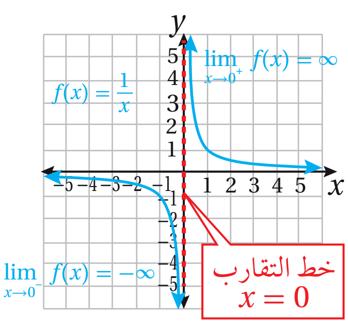
على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

وبما أنّــه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من الجهتين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، فإنه يمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$



أُلاحظ من التمثيل البيانــي للاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليسار، قلّت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليســار غيــر موجودة. على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من الصفر من جهة اليســار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أتذكّر

تعلّمتُ سابقًا أنّ الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ مــن أبســط الاقترانــات النســبية، ويُسمّى اقتران المقلوب.

أُلاحظ أيضًا أنّــه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعنــي أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليمين غير موجــودة. على الرغم مــن أنّ النهاية عندما تقتــرب x من الصفر من جهــة اليمين غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

وبما أنّ النهاية من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إذن: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة.

أفكّر

لماذا لم نســتطع وصف سلوك الاقتران باستعمال النهايــة في الفــرع 2 من المثــال 2، كمــا جــرى وصفه في الفرع 1؟

أتحقّق من فهمي

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2}$

إيجاد النهايات جبريًّا

تعلّمتُ في الأمثلة الســابقة كيفية إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا، وســأتعلّم الآن طرائق جبرية لإيجاد النهايات.

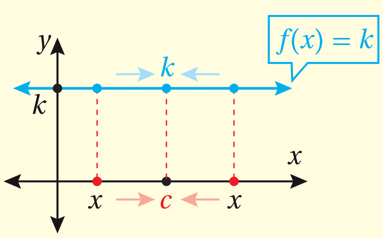
نهايات الاقترانات

مفهوم أساسي

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهايــة الاقتــران الثابــت عند أيّ نقطــة c هي القيمــة الثابتة للاقتران.

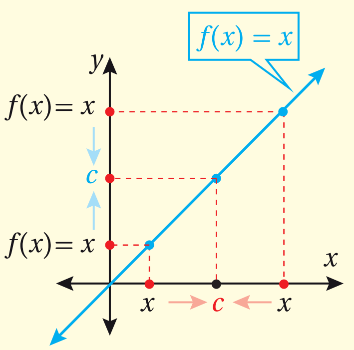
بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} k = k$



نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهاية الاقتــران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} x = c$



وتُعدّ الخصائص الآتية أدوات أساسية لإيجاد النهايات جبريًّا:

خصائص النهايات

مفهوم أساسي

إذا كان k, c عددين حقيقيّين، و n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x\to c} f(x), \lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودتين؛ فإنّ كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصّية المجموع: **1)** $\lim\limits_{x\to c} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية الفرق: **2)** $\lim\limits_{x\to c} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية الضرب في ثابت: **3)** $\lim\limits_{x\to c} (k\,f(x)) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$

خاصّية الضرب: **4)** $\lim\limits_{x\to c} (f(x)\times g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \times \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية القسمة: **5)** $\lim\limits_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}, \ \lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصّية القوّة: **6)** $\lim\limits_{x\to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to c} f(x))^n$

خاصّية الجذر النوني: **7)** $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$

شريطة أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ عندما يكون n عددًا زوجيًّا.

مثال 3

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 6)$

$\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x+6) = \lim\limits_{x\to -1} x^3 - \lim\limits_{x\to -1} 4x + \lim\limits_{x\to -1} 6$ خاصّيتا المجموع والفرق

$= (\lim\limits_{x\to -1} x)^3 - 4\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 6$ خاصّيتا القوة والضرب في ثابت

$= (-1)^3 - 4(-1) + 6$ نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$= 9$ بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x-1}}$$ خاصّية الجذر النوني

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 5} x^2}{\lim\limits_{x \to 5} (x-1)}}$$ خاصّية القسمة

$$= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x \to 5} x)^2}{\lim\limits_{x \to 5} x - \lim\limits_{x \to 5} 1}}$$ خاصّية القوّة والفرق

$$= \sqrt{\frac{(5)^2}{5-1}}$$ نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= \frac{5}{2}$$ بالتبسيط

أتحقّق من فهمي

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}$

أتذكّر

في الفرع 2 من المثال، يجب التحقّق أنّ $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$؛ لأنّ دليل الجذر عدد زوجي.

في المثال السابق، أُلاحظ أنّ نهاية كلّ اقتران عندما تقترب x من c تساوي $f(c)$؛ لذا، أستنتج أنّه يُمكن إيجاد هذه النهايات **بالتعويض المباشر**، ولكن هذا لا ينطبق على الاقترانات جميعها، إلّا أنّه ينطبق على اقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النسبية ما دامت قيمة مقام الاقتران النسبي عند c لا تساوي صفرًا.

مفهوم أساسي — النهايات بالتعويض المباشر

نهايات كثيرات الحدود

إذا كان $f(x)$ كثير حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا؛ فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

نهايات الاقترانات النسبية

إذا كان $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, \; q(c) \neq 0$$

مثال 4

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

1 $\lim\limits_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$

بما أنّها نهاية كثير حدود، إذن: يُمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = (2)^4 - 5(2)^3 + (2)^2 - 7$$ بالتعويض المباشر

$$= -27$$ بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

بما أنّ $x = -1$ تقع في مجال الاقتران النسبي (ليست صفر مقام)، إذن: يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= -\frac{4}{3}$$ بالتبسيط

3 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

بما أنّ $x = -3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (المقام يساوي صفرًا عندها)،

إذن: لا يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

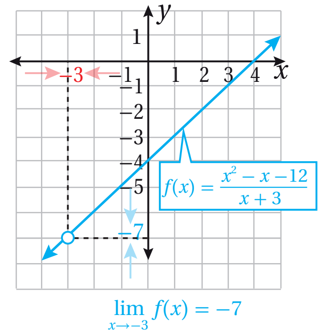
a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 + 4x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x - 6}{x^2 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

إنّ ناتج التعويض المباشر في الفرع 3 من المثال السابق ($\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$) يُعطي الناتج $\frac{0}{0}$ ، وتُسمّى هذه النتيجة **الصيغة غير المحددة** (indeterminate form)، ولكنّ هذا لا يعني أنّ النهاية غير موجودة، فالتمثيل البياني المجاور للاقتران $f(x)=\frac{x^2-x-12}{x+3}$ يُظهر أنّ النهاية موجودة عند $x=-3$ وتساوي -7



$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-7$

نحتاج في مثل هذه الحالة (ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$) إلى البحث عن صيغة مكافئة للاقتران، عن طريق تبسيطه جبريًّا؛ وذلك بتحليل كلّ من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة، أو إنطاق البسط أو المقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 5

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ، أُحلّل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{x+3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x\to -3} (x-4)$$ بالتبسيط

$$= -3-4=-7$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ، أُنْطِقُ البسط أولًا، ثمّ أختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$ أضرب كلًّا من البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x+1}+1)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر

أتعلّم

بشكل عام، إذا كان ناتج التعويض المباشر يساوي $\frac{0}{0}$ ؛ فإنّه يجب تبسيط الاقتران النسبي جبريًّا، وذلك بإيجاد عوامل مشتركة بين البسط والمقام، واختصارها.

أتعلّم

تعلّمت سابقًا كيف أتخلّص من الجذر في المقدار النسبي عن طريق عملية تُسمّى (إنطاق المقام) تتضمّن ضرب البسط والمقام في مقدار جذري، بحيث لا يحوي ناتج الضرب جذورًا في المقام، وبالطريقة نفسها يمكن إنطاق البسط.

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أحتاج إلى تبسيط الاقتران النسبي عن طريق إعادة تعريف القيمة المطلقة أولًا، ثمّ اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

الخطوة 1: أُعيد تعريف الاقتران.

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & , x > 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2} & , x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , x > 2 \\ -1 & , x < 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

ألاحظ أنّه توجد قاعدتان مختلفتان عن يمين العدد 2 وعن يساره؛ لذا، يجب إيجاد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (1) = 1$

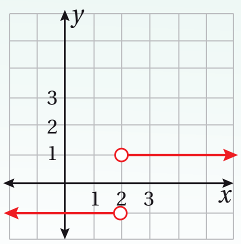
وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ غير موجودة.

أتذكّر

إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة: هي إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة على صورة اقتران متشعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

الدعم البياني

ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ أنّ النهاية غير موجودة.



أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7x - x^2}{x}$

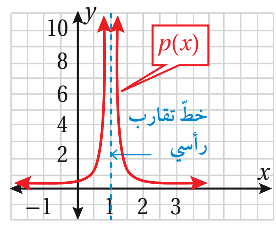
b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$

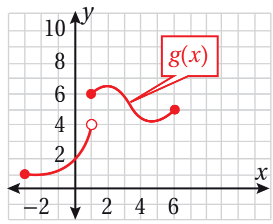
الاتّصال

يكون **الاقتران متّصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيّ انقطاع أو قفزة أو فجوة، ويكون الاقتران متّصلًا عند نقطة إذا كان منحناه يمرّ عبر هذه النقطة دون انقطاع.

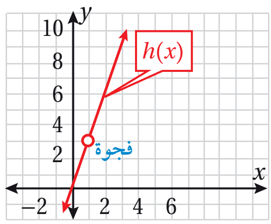
توضّح التمثيلات البيانية الآتية بعض حالات الاتصال أو عدم الاتصال:



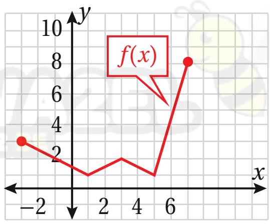
غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



متّصل عند $x = 1$

ألاحظ أنّ منحنيي الاقترانين $p(x)$ و $h(x)$ أعلاه غير متّصلين عند $(x = 1)$؛ لأنّ كلًّا من الاقترانين غير معرّف عند $(x = 1)$ على الرغم من أنّ نهاية الاقتران $h(x)$ موجودة عندما $(x = 1)$. أمّا الاقتران $g(x)$ فإنّه غير متّصل عند $(x = 1)$ بسبب وجود قفزة (ما يعني أنّ النهاية غير موجودة).

ممّا سبق، يُمكن التوصّل إلى أنّ الاقتران يكون متّصلًا عند نقطة إذا كانت النهاية تساوي قيمة الاقتران عند تلك النقطة.

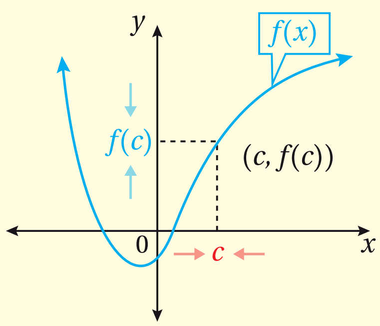
أتذكّر

النهاية موجودة تعني أنّ نهايتي اليمين واليسار متساويتان، ووجود النهاية عند نقطة لا يعني بالضرورة أنّ الاقتران معرّف عند تلك النقطة.

مفهوم أساسي — **الاتّصال عند نقطة**

يكون الاقتران $f(x)$ متّصلًا عند النقطة $x = c$ إذا حقّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(x)$ مُعرّف عند c.
- $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$



مثال 6

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

1 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \le -1 \\ x - 1 & , x > -1 \end{cases} \quad , x = -1$

لتحديد إذا كان الاقتران h متّصلًا عند $x = -1$، يجب التحقّق من أنّ $h(x)$ مُعرَّف عند $x = -1$، وأنّ $\lim_{x \to -1} h(x) = h(-1)$.

- $h(-1) = (-1)^2 - 3 = -2$
- $\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 - 3) = -2$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = -2$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2$، فإنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -2$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = h(-1) = -2$، إذن: $h(x)$ متّصل عند $x = -1$.

2 $f(x) = x^3 - x\ ,\ x = 3$

لتحديد إذا كان الاقتران f متّصلًا عند $x = 3$، يجب التحقّق من أنّ $f(x)$ معرّف عند $x = 3$، وأنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

- $f(3) = (3)^3 - (3) = 24$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = (3)^3 - (3) = 24$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$، إذن: $f(x)$ متصل عند $x = 3$.

3 $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}\ ,\ x = 2$

الاقتران g غير متّصل عند $x = 2$؛ لأنه غير معرّف عند $x = 2$ (صفر مقام).

4 $p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & , x \neq 4 \\ 7 & , x = 4 \end{cases}\ ,\ x = 4$

لتحديد إذا كان الاقتران p متّصلًا عند $x = 4$، يجب التحقّق من أنّ $p(x)$ مُعرَّف عند $x = 4$، وأنّ $\lim\limits_{x \to 4} p(x) = p(4)$.

- $p(4) = 7$
- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)}{x+3}$ بتحليل الفرق بين مربّعين

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$ باختصار العامل المشترك

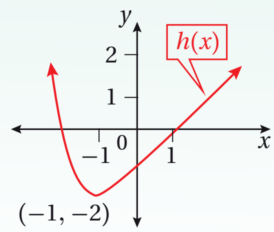
$= \lim\limits_{x \to 4} (x + 4)$ بالتبسيط

$= 4 + 4 = 8$ بالتعويض المباشر والتبسيط

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 4} p(x) \neq p(4)$، إذن: $p(x)$ غير متّصل عند $x = 4$.

الدعم البياني

يوضح التمثيل البياني الآتي للاقتران $h(x)$ أنّه متصل عند $x = -1$.

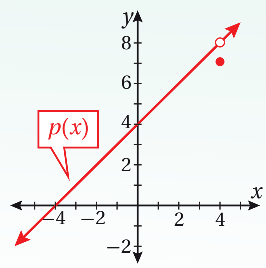


أتذكّر

يمكن إيجاد نهاية كثيرات الحدود بالتعويض المباشر.

الدعم البياني

يوضح التمثيل البياني الآتي للاقتران $p(x)$ أنه غير متصل عند $x = 4$.



أتحقّق من فهمي

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x \,, x = 1$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x - 5} \,, x = 5$

c) $h(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases} \,, x = 3$

d) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & , x \neq 5 \\ 10 & , x = 5 \end{cases} \,, x = 5$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} (x + 7)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

4) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 5)$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} -1 & , x \neq 3 \\ 1 & , x = 3 \end{cases}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} p(x), p(x) = \begin{cases} x + 6 & , x < -2 \\ -\dfrac{1}{2}x + 1 & , x > -2 \end{cases}$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4x + 7)$

10) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

11) $\lim\limits_{x \to 9} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

12) $\lim\limits_{x \to 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3)$

13) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x - 3}{2x + 4}}$

14) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x^2 + 11}$

15) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

16) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1}$

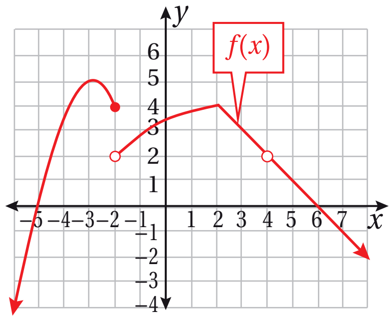
17) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$

18) $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 3x - 7 & , x > 3 \end{cases}$

19) $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{2}}{t - 4}$

20) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

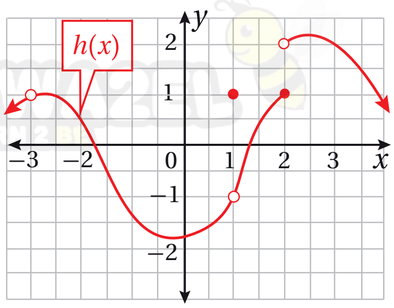
أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



21 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

22 $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



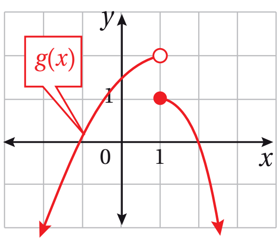
23 $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

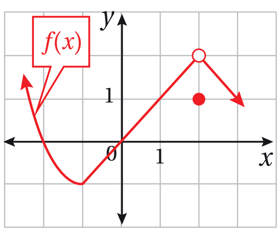
24 $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

25 $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

26 إذا كان $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$، وكان $f(0) = 0$، $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$، $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 8$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c.

أستعملُ التمثيلين البيانيين المجاورين؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:





27 $\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

28 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

29 $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \times g(x))$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

30 $f(x) = \pi x^2 + 4.2x + 7 \, , x = -5$

31 $g(x) = \dfrac{16}{x^2 + 25} \, , x = -5$

32 $h(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 3 & , x \geq 0 \end{cases} \, , x = 0$

33 إذا كان $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \neq 3 \\ 2 + \sqrt{k} & , x = 3 \end{cases}$، متّصلًا عند $x = 3$؛ فأجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

34 **تحدٍّ:** أجد $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + |x-1| - 1}{|x - 1|}$ بيانيًّا وجبريًّا.

35 **تبرير:** أجد قيمتَي الثابتين m و b اللتين تجعلان $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{mx + b} - 3}{x} = 1$، وأبرّر إجابتي.

36 **تبرير:** أجد قيمة الثابت a التي تجعل $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{a}{x^2 - 1} \right)$ موجودة، وأبرّر إجابتي.

الدرس 2

مشتقّة اقتران القوّة

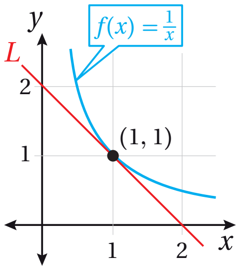
Derivative of Power Function

فكرة الدرس

- اشتقاق اقتران القوّة.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما.

المصطلحات التعريف العام للمشتقّة، اقتران القوّة، المماسّ، العمودي على المماس.

مسألة اليوم يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$:

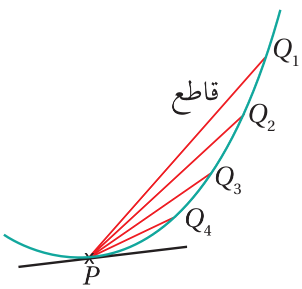


1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.

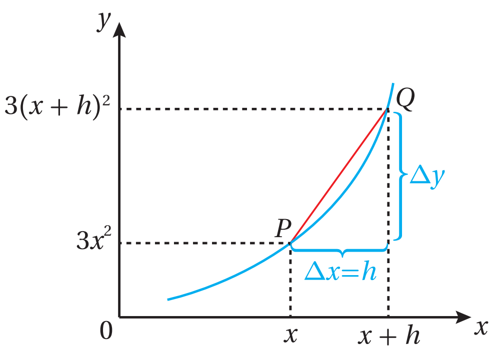
2) أجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L؟

التعريف العام للمشتقّة



يُبيّن الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى اقتران عند النقطة P. أُلاحظ أنّه في أثناء حركة النقطة Q_1 على منحنى الاقتران نحو النقطة P فإنّها تمر بالنقاط Q_2 و Q_3 و Q_4، وأُلاحظ كذلك أنّ ميل كلّ من القواطع $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ و $\overline{PQ_4}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.



إذا علمتُ أنّ النقطة Q على منحنى الاقتران $y = 3x^2$ تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$ كما يظهر في الشكل المجاور، فإنّ إحداثيَي النقطة Q هما: $(x + h, 3(x + h)^2)$

إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

$$= \frac{6hx + 3h^2}{h} = 6x + 3h$$

وعندما تقترب Q من P؛ فإنّ h تصبح أصغر فأصغر، وعندها يُمكنني القول: إنّ h تقترب من الصفر، وتُكتب على الصورة $h \to 0$.

ومنه: يكون ميل المماس (m) عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

تُسمى $6x$ مشتقّة الاقتران $y = 3x^2$، ويُرمز إليها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن: إذا كان $y = 3x^2$ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 6x$

تُسمّى هذه الطريقة في إيجاد مشتقّة اقتران عند أي نقطة **التعريف العام للمشتقّة** (the definition of the derivative).

أفكّر

لماذا يجب علينا تجنّب أن تكون قيمة $h = 0$؟

رموز رياضية

يُرمز إلى مشتقّة $y = f(x)$ بالرموز الآتية:

$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), y'$

مفهوم أساسي — التعريف العام للمشتقّة

مشتقّة الاقتران f بالنسبة إلى المتغير x هي f' الذي قيمته عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وبشرط وجود النهاية.

مثال 1

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عندما $x = 3$:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ التعريف العام للمشتقّة

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ بتعويض $x = 3$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$ بتعويض $f(3+h) = (3+h)^2,\ f(3) = (3)^2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$ بالتبسيط

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$= \lim\limits_{h \to 0} (6+h)$ بالقسمة على h

$= 6$ بتعويض $h = 0$

أتعلّم

$f(x+h) \neq f(x) + f(h)$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = 4x^2 + 1$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = -1$.

يُمكن أيضًا استعمال التعريف العام للمشتقّة لإيجاد اقتران جديد يُمثّل **مشتقّة الاقتران الأصلي** عند جميع قيم المجال، وليس عند قيمة محددة.

مثال 2

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^3$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقّة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$ بتعويض $f(x+h) = (x+h)^3, \ f(x) = x^3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h}$$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 3x^2$$ بتعويض $h = 0$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $y = 8 - x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

معلومة

يعود تاريخ إيجاد المشتقّة باستعمال النهايات إلى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط بالرياضيين: إسحاق نيوتن، وغوتفريد لايبنتس؛ إذ اكتشفاه بصورة مستقلّة.

مشتقّة اقترانات القوّة

يُسمّى الاقتران $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، **اقتران قوّة** (power function)، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^7 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad h(x) = \sqrt{x^3}$$

إنّ إيجاد المشتقّة باستعمال التعريف العام للمشتقّة ليس سهلًا في كثير من الأحيان؛ ولكن توجد بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد المشتقّة، ومنها: مشتقّة اقتران القوّة.

مفهوم أساسي

مشتقّة اقتران القوّة

بالكلمات: عند اشتقاق الاقتران $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ أسّ x في المشتقّة يكون أقل بواحد من أسّ x في الاقتران الأصلي، ويكون معامل x في المشتقّة مساويًا لأسّ x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ — بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1}$ — قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ — تعريف الأُسّ السالب

2 $y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ — قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ — بالتبسيط

3 $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ — بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ — قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — تعريف الأُسّ السالب والجذر التربيعي

أتذكّر

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-11}$

b) $y = \frac{1}{x^5}$

c) $y = \sqrt[3]{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد مشتقّة الاقترانات التي بعض حدودها اقترانات قوّة.

مفهوم أساسي

قواعد أخرى لمشتقّة اقترانات القوّة

مشتقّة الثابت: إذا كان $y = c$ حيث c عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$، أي إنّ مشتقّة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقّة مضاعفات القوّة: إذا كان $y = ax^n$، حيث n و a عددان حقيقيان؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

مشتقّة المجموع ومشتقّة الفرق: إذا كان $y = u(x) \pm v(x)$، حيث u و v اقترانا قوّة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

مثال 4

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = x + 2\sqrt[3]{x}$

$y = x + 2\sqrt[3]{x} = x + 2x^{\frac{1}{3}}$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \times \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ قاعدتا مشتقّتَي مضاعفات القوى، والمجموع

$= 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = \frac{5 - 7x}{x}$

$y = \frac{5 - 7x}{x} = \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$ بقسمة كلّ حد في البسط على x

$= 5x^{-1} - 7$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{-2} - 0$ قواعد مشتقّات الثابت، ومضاعفات القوّة، والفرق

$= -\frac{5}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$

b) $y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$

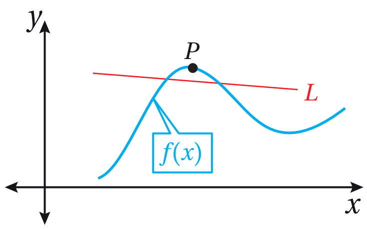
معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند نقطة

تعلّمت ســابقًا أن **مماس** (tangent) منحنى الاقتران عند نقطة ما هو مســتقيم يمسُّ منحنى الاقتران عند هذه النقطة كما في الشكل الآتي، حيث يُمثِّل المستقيم L مماسًّا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة P.

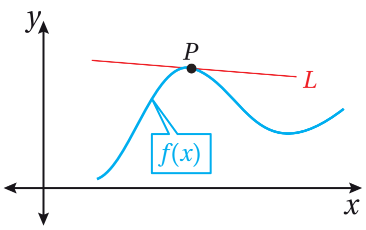
أتعلَّم

قد يمسُّ المماس منحنى الاقتــران أو يقطعــه عند نقطة أُخرى.

ليس مماسًّا عند النقطة P:



مماس عند النقطة P:



تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقّة الاقتران عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المماس عند هذه النقطة. ومن ثَمَّ يُمكِن استعمال المشتقّة لإيجاد معادلة مماس منحنى الاقتران عند النقطة نفسها.

أتذكَّر

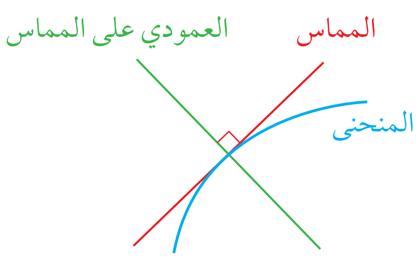
معادلة المســتقيم الذي ميله m، والمــارُّ بالنقطة (x_1, y_1) هي: $y-y_1 = m(x-x_1)$.

مفهوم أساسي — **معادلة مماس منحنى الاقتران**

إذا كان $f(x)$ اقترانًا، فإنَّ معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

العمودي علــى الممــاس (the normal) عند نقطة التماس هو مســتقيم يصنــع زاوية قائمة مع مماس منحنى الاقتــران عند هذه النقطة، ويمكن استعمال ميل المماس لإيجاد ميل العمودي على المماس ومعادلته.



أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهمــا ليس رأســيًّا، فإنَّ حاصل ضــرب ميليهما هــو (-1)؛ أيْ إنَّ ميــل أحدهما يســاوي سالب مقلوب ميل الآخر.

مفهوم أساسي — **معادلة العمودي على المماس**

إذا كان $f(x)$ اقترانــًا، وكان: $f'(a) \neq 0$، فإنَّ معادلـة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مثال 5

إذا كان الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الاقتران المعطى	$y = x - \frac{1}{8}x^2$
قاعدة مشتقّة اقتران القوّة والفرق	$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{4}x$
بتعويض $x = 6$	$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=6} = 1 - \frac{1}{4}(6)$
بالتبسيط	$= -0.5$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويض $x_1 = 6 , y_1 = 1.5, m = -0.5$	$y - 1.5 = -0.5\,(x - 6)$
بالتبسيط	$y = -0.5x + 4.5$

إذن: معادلة المماس هي: $y = -0.5x + 4.5$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

بما أنّ ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ يساوي -0.5 فإنّ ميل العمودي على المماس يساوي 2، ومنه: فإنّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ هي:

$$y - 1.5 = 2(x - 6)$$

$$y = 2x - 10.5$$

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان؛ فإنّ حاصل ضرب ميليهما يساوي -1

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = 8x - \frac{1}{x}$؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عن النقطة $(0.25, -2)$.

إيجاد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران إذا عُلِمت نقطة التماس. والآن سأتعلَّم كيف أجد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس.

مثال 6

1 **أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة التماس.

$f(x) = \sqrt{x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بإيجاد المشتقّة

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ بتعويض $f'(x) = \frac{1}{2}$

$2\sqrt{x} = 2$ بالضرب التبادلي

$\sqrt{x} = 1$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

$x = 1$ بتربيع طرفي المعادلة

أتذكَّر

$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$،

حيث: $x > 0$.

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

أجد $f(1)$:

$f(x) = \sqrt{x}$ الاقتران المعطى

$f(1) = \sqrt{1}$ بتعويض $x = 1$

$= 1$ بالتبسيط

إذن، نقطة التماس هي: $(1, 1)$.

2 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة (نقاط) التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بإيجاد المشتقّة	$f'(x) = -3x^2 + 12x$
بتعويض $f'(x) = 0$	$-3x^2 + 12x = 0$
بإخراج $-3x$ عاملًا مشتركًا	$-3x(x-4) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$-3x = 0 \quad \text{or} \quad x-4 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 4$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطتي التماس.

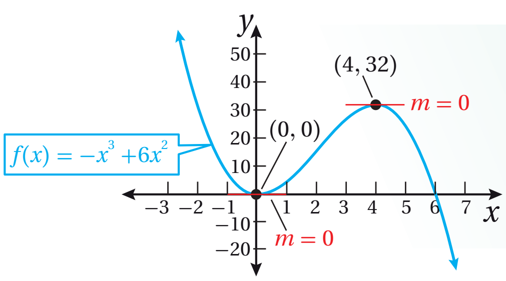
أجد $f(0)$، و $f(4)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بتعويض $x = 0$	$f(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 = 0$
بتعويض $x = 4$	$f(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 = 32$

إذن، إحداثيا كلّ من نقطتي التماس اللتين يكون عندهما المماس أفقيًّا هما: $(0, 0)$، و $(4, 32)$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ وجود مماسين أفقيين عندما $x = 0$، و $x = 4$.



أتحقَّق من فهمي

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتذكَّر

ميل المماس الأفقي يساوي صفرًا، إذن: $m = f'(x) = 0$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

1) $f(x) = 4x^2, \quad x = 1$

2) $f(x) = 1 - x^2, \quad x = -2$

3) $f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$

4) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العامّ للمشتقّة:

5) $f(x) = 4x + 1$

6) $y = 1 - x$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

8) $y = \frac{2x + 4}{6}$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

9) $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$

10) $y = x^8 - x^{-8}$

11) $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$

12) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

13) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$

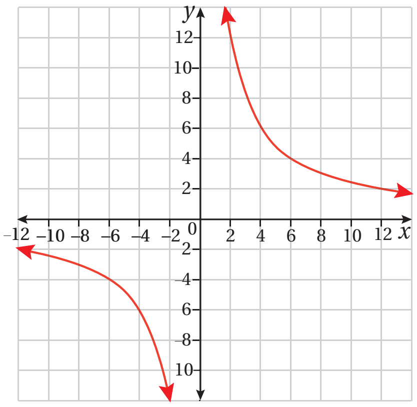
14) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

إذا كان الاقتران $y = x^2 - x$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

15) معادلة المماس عندما $x = 4$

16) معادلة العمودي على المماس عندما $x = 4$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{24}{x}, x \neq 0$.



17) أجد $f'(x)$.

18) أُبيّن أنّ ميل المماس سالب دائمًا عند أيّ نقطة.

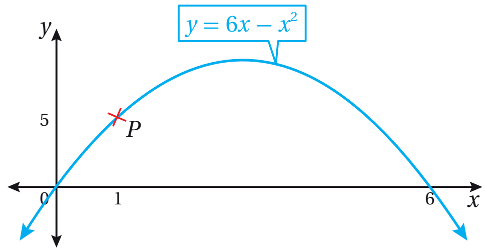
19) أجد معادلة العمودي على المماس عندما $y = -6$

20 أجـــد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتـــران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

21 أجـــد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـــران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

22 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1

يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



23 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: **إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

25 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، أبرّر إجابتي.

26 نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، أبرّر إجابتي.

تبريرٌ: **إذا كان الاقتران $y = x^2 + 4x$؛ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

27 أُثبت أنّ معادلة المماس عند النقطة $x = k$ هي $y-(2k+4)x + k^2 = 0$

28 أجد قيمة k التي تكون عندها معادلة العمودي على المماس هي: $4y + x = 0$

29 تحــدّ: إذا كان $f(x) = \frac{100}{x}$، وكانت P نقطة تقع على منحنى $f(x)$ إحداثياها $(a, \frac{100}{a})$؛ فأجد مســاحة المثلّث المكوّن من مماس منحنى $f(x)$ عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

الدرس 3

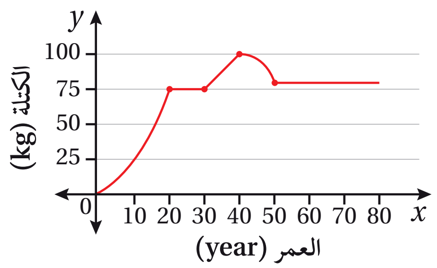
القِيَم العظمى والصغرى
Maximum and Minimum Values

فكرة الدرس

- تحديد النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص لاقترانات كثيرات الحدود.
- تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة.

المصطلحات النقطة الحرجة، القيمة الحرجة، التزايد، التناقص، نقطة عظمى محلية، نقطة صغرى محلية، نقطة انعطاف أفقي.

مسألة اليوم يُمثِّل المنحنى في الشكل المجاور التغيُّرات في كتلة جسم عمران:



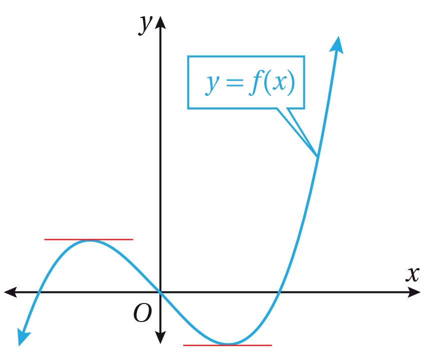
1) في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسمه؟

2) في أيِّ الفترات الزمنية لم تتغيَّر كتلة جسمه؟

3) في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة جسمه؟

النقاط الحرجة للاقتران

توجد على منحنى الاقتران $f(x)$ المُبيَّن جانبًا نقطة واحدة على الأقل يُمكِن رسم مماس أفقي عندها، في ما يُعرَف **بالنقطة الحرجة** (critical point)، وهذا يعني أنَّ مشتقّة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا، ويُسمّى الإحداثي x للنقطة الحرجة **قيمة حرجة** (critical value).



مثال 1

أجد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

مشتقّة الاقتران $\quad f'(x) = 2x - 6$

بمساواة المشتقّة بالصفر $\quad 2x - 6 = 0$

بجمع 6 لكلا الطرفين $\quad 2x = 6$

بقسمة كلا الطرفين على 2 $\quad x = 3$

إذن، توجد قيمة حرجة للاقتران f عندما $x = 3$.

أمّا النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f فهي: $(2, f(2)) = (2, 3)$.

أتحقّق من فهمي

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

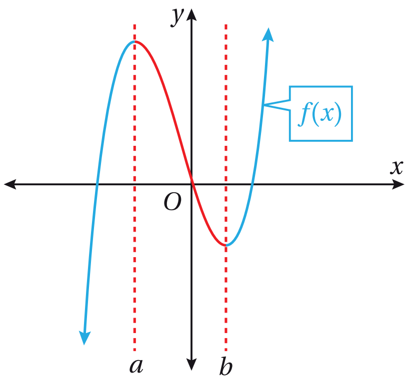
a) $f(x) = 6x^2 - 12x + 12$

b) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

أتذكَّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنَّ $a = 0$، أو $b = 0$، أو كُلًّا منهما يساوي صفرًا.

تزايد الاقترانات كثيرات الحدود وتناقصها



يُمثّل الشكل المجاور منحنى اقتران كثير الحدود $f(x)$.

أُلاحظ أنّ قِيَم y تزداد في الفترة $-\infty < x < a$، والفترة $b < x < \infty$، حيث يرتفع منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متزايدًا** (increasing) في هاتين الفترتين. أُلاحظ أيضًا أنّ قِيمَ y تقل في الفترة $a < x < b$، حيث ينخفض منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

أتعلّم

كُتبت فترة التناقص على صورة فترة مفتوحة، لأنّ التناقص يبدأ من يمين النقطة a وينتهي عند يسار النقطة b، وكذلك الأمر بالنسبة إلى فترات التزايد.

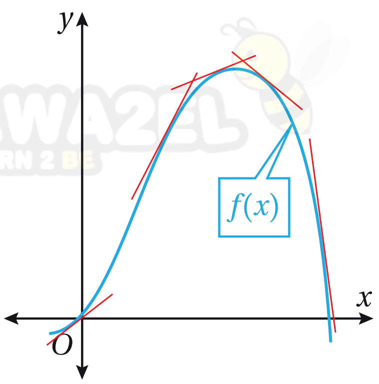
مفهوم أساسي — تزايد الاقتران وتناقصه

- يكون الاقتران f متناقصًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.
- يكون الاقتران f متزايدًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.

تعلّمتُ سابقًا أنّ مشتقّة الاقتران عند نقطة تساوي ميل المماس عند تلك النقطة. ولكن، كيف يُمكن استعمال المشتقّة في دراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $f(x)$. أُلاحظ أنّ:

- المماسات ذات الميل الموجب مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماســات ذات الميل السالب مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.



وهذا يقود إلى الاسـتفادة من إشــارة المشتقّة في تحديد فترات تزايد الاقتران وتناقصه.

نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَـم x جميعها فــي الفترة المفتوحة I؛ فـإنّ الاقتران f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لقِيَـم x جميعها فــي الفترة المفتوحة I؛ فـإنّ الاقتران f يكون متناقصًا على الفترة I.

أتذكّر

تقتصر أمثلة هذا الدرس وتدريباتــه على اقترانات كثيرات الحدود فقط.

مثال 2

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = 2x + 2$ مشتقّة الاقتران

$2x + 2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

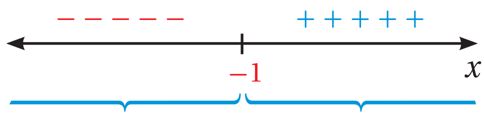
$2x = -2$ بطرح 2 من كلا الطرفين

$x = -1$ بقسمة الطرفين على 2

إذن: صفر المشتقّة $x = -1$

الخطوة 2 : أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار قيمة أقلّ من صفر المشــتقّة (ولتكن -2) وأخرى أكبر منه (ولتكن 0)، وأُحدّد إشــارة المشتقّة عند كلّ منهما.



الفترة	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص	متزايد

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$.

2 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x$

الخطوة 1 : أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$ مشتقّة الاقتران

$-6x^2 + 6x + 36 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$-6(x^2 - x - 6) = 0$ بإخراج -6 عاملًا مشتركًا

$x^2 - x - 6 = 0$ بقسمة الطرفين على -6

$(x + 2)(x - 3) = 0$ بالتحليل

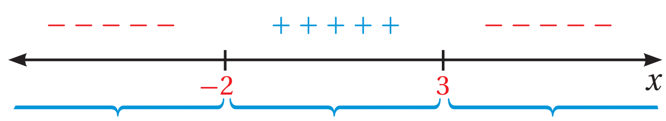
$(x + 2) = 0 \quad or \quad (x - 3) = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$x = -2 \qquad x = 3$ بحلّ المعادلتين الناتجتين

إذن: صفرا المشتقّة هما: $x = -2, x = 3$

الخطوة 2 : أبحثُ في إشارة المشتقّة.

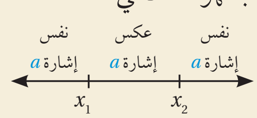
أختار بعض القِيَم الأصغر من أصفار المشتقّة والأكبر منها، ثم أُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منها.



الفترة	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(4) < 0$
سلوك الاقتران	متناقص	متزايد	متناقص

أتعلّم

إذا كان للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان هما x_1 و x_2؛ فإنّه يُمكن تحديد الإشارة على جانبَي الصفرين وبينهما بسهولة كالآتي:



إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتحقّق من فهمي

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

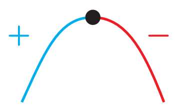
a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

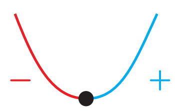
تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة

يُمكن استعمال المشتقّة؛ لتصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود:

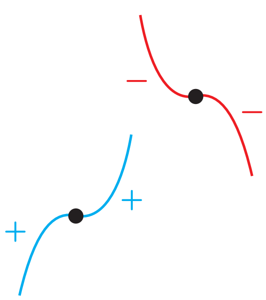
- **نقطة عظمى محلّية** (local maximum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متزايدًا وعن يمينها متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من الموجب إلى السالب.



- **نقطة صغرى محلّية** (local minimum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متناقصًا وعن يمينها متزايدًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من السالب إلى الموجب.



- **نقطة انعطاف أفقي** (horizontal point of inflection): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران حولها إمّا متزايدًا وإمّا متناقصًا، ما يعني عدم تغيّر إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، بل تبقى كما هي إمّا موجبة وإمّا سالبة.



أتعلّم

- القيمة العظمى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة العظمى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أكبر من القِيَم المجاورة لها.
- القيمة الصغرى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أصغر من القِيَم المجاورة لها.

مثال 3

إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - 6x - 2$، فأستعمل المشتقّة لأحل السؤالين الآتيين:

1 أجد النقاط الحرجة للاقتران f.

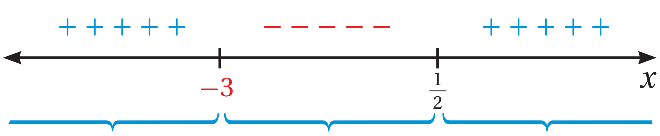
مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^2 + 10x - 6$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^2 + 10x - 6 = 0$
بإخراج 2 عاملًا مشتركًا	$2(2x^2 + 5x - 3) = 0$
بالقسمة على 2	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
بالتحليل	$(2x - 1)(x + 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$(2x-1) = 0 \quad or \quad (x + 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{1}{2} \qquad x = -3$

عندما $x = \frac{1}{2}$ فإنّ $y = -\frac{43}{12}$.

عندما $x = -3$ فإنّ $y = 25$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(\frac{1}{2}, -\frac{43}{12})$ و $(-3, 25)$.

2 أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.



الفترة	$x < -3$	$-3 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(1) > 0$
سلوك الاقتران	متزايد	متناقص	متزايد

إذن: النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-43}{12})$ صغرى محلّية، والنقطة $(-3, 25)$ عظمى محلّية.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقّة لأحل السؤالين الآتيين.

a) أجد النقاط الحرجة للاقتران $f(x)$.

b) أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.

أتعلّم

النقطة الصغرى المحلّية ليست أقل نقطة على المنحنى، وإنّما هي فقط أقل من النقاط التي حولها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة العظمى المحلّية؛ فهي ليست أعلى نقطة على المنحنى، إنّما هي فقط أعلى من النقاط التي حولها.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باقترانات كثيرات الحدود، وعندئذ يستفاد من تحديد تزايد تلك الاقترانات وتناقصها وقيمها العظمى والصغرى في تحليل تلك المواقف وتفسيرها.

مثال 4 : من الحياة

درجات حرارة: يُمثِّل الاقتران الآتي درجة الحرارة لجسم مريض بعد t يومًا من دخوله المستشفى:

$$T(t) = -0.1t^2 + 1.2t + 38, \quad t \geq 0$$

حيث T درجة الحرارة بالسيلسيوس (°C). أُحدِّد أعلى درجة حرارة للمريض، واليوم الذي سُجِّلت فيه، علمًا بأنَّه تلقّى العلاج في المستشفى مدَّة 12 يومًا.

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران المعطى.

مشتقّة الاقتران $\quad T'(t) = -0.2t + 1.2$

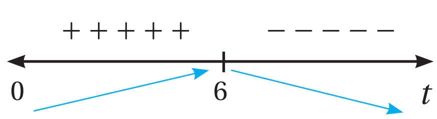
الخطوة 2: أجد أصفار المشتقّة.

بمساواة المشتقّة بالصفر $\quad -0.2t + 1.2 = 0$

بطرح 1.2 من طرفي المعادلة $\quad -0.2t = -1.2$

بالقسمة على -0.2 $\quad t = 6$

الخطوة 3: أُحدِّد إشارة المشتقّة حول أصفارها.



الخطوة 4: أُحدِّد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.

منحنى الاقتران T متزايد عن يسار $t = 6$، ومتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ للاقتران T قيمة عظمى محلية عندما $t = 6$، وهي:

بتعويض $t = 6$ $\quad T(6) = -0.1(6)^2 + 1.2(6) + 38 = 41.6$

إذن، أعلى درجة حرارة للمريض هي 41.6°C، وقد سُجِّلت في اليوم السادس من بدء علاجه.

معلومة

يختلف مدى درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية مع التقدُّم بالعُمُر على النحو الآتي:

- الرُّضَّع والأطفال: من 36.6°C إلى 37.2°C
- البالغون: من 36.1°C إلى 37.2°C
- كبار السن (أكثر من 65 عامًا): قد تنخفض إلى 36.2°C

معلومة

عالم الحيوانات (zoology) مختص في دراسة الحيوانات علميًّا من نواحٍ عـــدة، منها: توزيعها الجغرافي، وتفاعلها مع النظم البيئية والبشر.

أتحقّق من فهمي

لاحظ عالم حيوانات أنَّ عدد الضفادع في بحيرة ما يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث P عـــدد الضفـــادع، وt الزمن بالأشـــهر منذ بدء ملاحظـــة الضفادع. أجد أكبر عدد يُمكِـــن أنْ تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

2) $f(x) = 1 - 12x + 2x^2$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

5) $f(x) = 4x + 3$

6) $f(x) = 7 - 5x$

7) $f(x) = x^2 + 7$

8) $f(x) = x^2 - x$

9) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

10) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

11) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

12) $f(x) = 3x^2 (12 - 5x)$

13) $f(x) = (x-2)^2$

14) $y = x^4 - 8x^2$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة:

15 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

16 $y = -(x-2)^3 + 1$

17 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x$

18 $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

19 إذا كانت مشتقّة الاقتران $f(x)$ تُعطى بالاقتران $f'(x) = (x-1)^2 (x-3)$؛ فأجد قِيَم x التي يكون عندها نقاط حرجة للاقتران f، ثمّ أُحدّد نوعها.

20 صناعة: تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$، فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

مهارات التفكير العليا

تحدّ: إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + b$، حيث a و b ثابتان؛ فأُجيب عمّا يأتي:

21 أُثبتُ أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

22 أُثبتُ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a > 0$.

23 تحدّ: إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 - 4x + c$، حيث a و c عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي $(2, -7)$، فما قيمة كلٍّ من a و c؟

24 تحدّ: إذا كان الاقتران $y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$، حيث $p > 0$؛ فأجد مجموعة قِيَم p التي يكون عندها للاقتران نقطتان حرجتان.

المشتقّة الثانية وتطبيقاتها

The Second Derivative and its Applications

فكرة الدرس

- إيجاد المشتقّة الثانية لاقتران.
- تصنيف النقاط الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية.
- إيجاد السرعة المتجهة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

المصطلحات المشتقّة الثانية، اختبار المشتقّة الثانية، الموقع، السرعة المتجهة، التسارع.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع درّاجة نارية تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار. أجد تسارع الدراجة عندما $t = 3$.

المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران المشتقّة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنَّه يُمكِنني اشتقاقه.

يُطلَق على الاقتران الناتج من اشتقاق الاقتران مَرَّتين اسم **المشتقّة الثانية** (the second derivative)، أو اقتران المشتقّة الثانية، ويُرمَز إليه بالرمز $f''(x)$. فمثلًا: إذا كان: $f(x) = x^4$، فإنَّ مشتقّة الاقتران $f(x)$ هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$ هي: $f''(x) = 12x^2$.

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقّة الثانية.

مثال 1

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4$

$f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5x^4 - 2x^3$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$f''(x) = 20x^3 - 6x^2$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

2 $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 7$

$f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 7$ الاقتران المعطى

$f(x) = 5x^{-2} + 7$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$f'(x) = -10x^{-3}$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$f''(x) = 30x^{-4}$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

$= \dfrac{30}{x^4}$ تعريف الأسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

تصنيف القِيَم الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ النقطة التي يكون عندها ميل مماس الاقتران صفرًا هي نقطة حرجة، وهذا يعني أنَّ مشتقّة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا؛ لذا يُمكِن رسم مماس أفقي عندها.

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن تصنيف النقاط الحرجة بدراسة إشارة المشتقّة الأولى للاقتران، والآن سأتعلَّم كيف أستعمل **اختبار المشتقّة الثانية** (second derivative test) لتحديد ماهية النقطة الحرجة؛ هل هي عظمى محلية أم صغرى محلية؟

أتذكَّر

يشير مصطلح (النقطة العظمى المحلية) إلى النقطة (x, y)، ويشير مصطلح (القيمة العظمى المحلية) إلى الإحداثي y للنقطة العظمى المحلية. وكذلك الحال بالنسبة إلى مصطلح (النقطة الصغرى المحلية)، ومصطلح (القيمة الصغرى المحلية).

نظرية **اختبار المشتقّة الثانية**

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ: $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ اختبار المشتقّة الثانية يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال المشتقّة الأولى لتصنيف القِيَم القصوى المحلية.

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أتعلَّم

يُطلَق على القِيَم الصغرى المحليـة والقِيَم العظمى المحليـة اسـم القِيَـم القصوى المحلية.

الخطوة 1: أجد المشتقّة الأولى والقِيَم الحرجة للاقتران.

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$ بالصفر	$6x^2 + 6x - 12 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 6	$x^2 + x - 2 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(x + 2)(x - 1) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = -2 \qquad x = 1$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$$x = -2, x = 1$$

الخطوة 2: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$	$f''(x) = 12x + 6$

الخطوة 3: أُعوِّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$	$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$
بتعويض $x = 1$	$f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$

أُلاحِظ أنَّ:

- $f''(-2) < 0$. إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 20$.
- $f''(1) > 0$. إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -7$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

تمثيل اقترانات كثيرات الحدود بيانيًّا

يُساعد إيجاد النقاط الحرجة للاقتران وتحديد نوعها (باستعمال اختبار المشتقّة الثانية)، عند تمثيل اقترانات كثيرات الحدود بيانيًّا؛ فهو يُعطي تصوّرًا لشكل منحنى الاقتران.

مثال 3

أُمثّل الاقتران $f(x) = x^4 - 2x^3$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أجد النقاط الحرجة للاقتران.

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$4x^3 - 6x^2 = 0$ بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$ بالصفر

$2x^2(2x - 3) = 0$ بإخراج $2x^2$ عاملًا مشتركًا

$2x^2 = 0 \quad \text{or} \quad (2x - 3) = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$x = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$ بحلّ المعادلتين الناتجتين

عندما $x = \frac{3}{2}$ فإنّ $f(\frac{3}{2}) = \frac{-27}{16}$.

عندما $x = 0$ فإنّ $f(0) = 0$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(0, 0)$, $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$.

الخطوة 2: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

الخطوة 3: أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية، لتصنيف النقاط الحرجة.

القيمة الحرجة الأولى: إذا كانت $x = \frac{3}{2}$ فإنّ:

$$f''(\frac{3}{2}) = 9 > 0$$

إذن: $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$ نقطة صغرى محلّية.

القيمة الحرجة الثانية: إذا كانت $x = 0$ فإنّ:

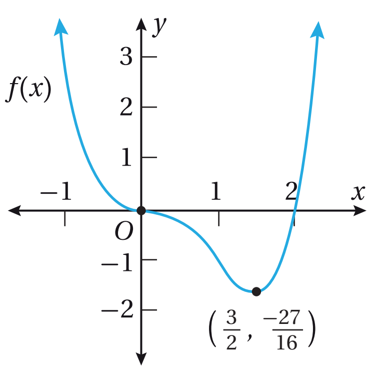
$$f''(0) = 0$$

بما أنّ $f''(0) = 0$، فإنّه لا يُمكنني تحديد نوع النقطة الحرجة باستعمال المشتقّة الثانية؛ لذا، ألجأ إلى دراسة إشارة المشتقّة الأولى حول النقطة لتحديد نوعها.

إذن: $(0, 0)$ نقطة انعطاف أُفقي.

x	0
إشارة المشتقّة	--- 0 ---

الخطوة 3: أُحدّد النقاط الحرجة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها مع مراعاة طبيعة كل نقطة وسلوك الاقتران حولها، كما يُمكن اختيار نقاط أخرى لتمثيل الاقتران إضافة إلى النقاط الحرجة؛ للحصول على تمثيل بياني أكثر دقّة للاقتران.



أتذكّر

يكون منحنى الاقتران متناقصًا على يسار القيمة الصغرى المحلية، ومتزايدًا على يمينها.

أُفكّر

لماذا رُسِم منحنى الاقتران متناقصًا حول نقطة الانعطاف الأُفقي $(0, 0)$؟

أتحقّق من فهمي

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $h(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

السرعة والتسارع عند الحركة في مسار مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

يُطلَق على المشتقّة الأولى لاقتران الموقع $s(t)$ اسم **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليها بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّيت بهذا الاسم لأنَّها تُستعمَل لتحديد سرعة الجسم واتجاه حركته، فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب، وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب، وإذا كانت $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

يُطلَق على المشتقّة الثانية لاقتران الموقع $s(t)$ اسم **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليها بالرمز $a(t)$.

إرشاد

نشير إلى أنَّ كلمة (سرعة) تعني السرعة المتجهة أينما وردت في هذا الكتاب.

مثال 4

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$ اقتران السرعة

$v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5$ بتعويض $t = 2$

$= 1$ بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: $1\ \text{m/s}$

2 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

بما أنَّ إشارة السرعة موجبة عندما $t = 2$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب عند تلك اللحظة.

3 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 8$

بتعويض $t = 2$ $a(2) = 6(2) - 8$

بالتبسيط $= 4$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: $4\ m/s^2$

4 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $3t^2 - 8t + 5 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(3t - 5)(t - 1) = 0$

خاصّية الضرب الصفري $3t - 5 = 0 \quad \text{or} \quad t - 1 = 0$

بحَلِّ كل معادلة لـ t $t = \frac{5}{3} \quad \text{or} \quad t = 1$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 1$، و $t = \frac{5}{3}$.

أتحقّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

توجد تطبيقات حياتية عديدة للسرعة والتسارع، ويُمكِن استعمال هذه التطبيقات لتحليل حركة الأجسام.

مثال 5 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1 ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد مشتقّة اقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقّة:

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 30t + 63$ اقتران السرعة

$v(4) = 3(4)^2 - 30(4) + 63$ بتعويض $t = 4$

$= -9$ بالتبسيط

إذن، سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هي: -9 m/s

2 ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد مشتقّة اقتران السرعة، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقّة:

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 30$ اقتران التسارع

$a(4) = 6(4) - 30$ بتعويض $t = 4$

$= -6$ بالتبسيط

إذن، تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هو: -6 m/s^2

3 أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.

يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

$3t^2 - 30t + 63 = 0$ بمساواة اقتران السرعة بالصفر

$t^2 - 10t + 21 = 0$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

$(t - 3)(t - 7) = 0$ بتحليل العبارة التربيعية

$t - 3 = 0 \quad \text{or} \quad t - 7 = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$t = 3 \quad \text{or} \quad t = 7$ بحَلِّ كل معادلة لـ t

إذن، يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي عندما $t = 3$، و $t = 7$.

معلومة

أسد الجبال حيوان من فصيلة السنوريات، وهو قريب جينيًّا من القطط الأهلية مقارنةً بالأسود.

أتحقّق من فهمي

فهــد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريســته على أرض مســتوية مُتحرِّكًا في خط مســتقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2) $f(x) = 2x^{-3}$

3) $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

6) $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}\,, x = -2$

7) $f(x) = \sqrt{x^3}\,, x = 4$

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

8) $y = x^4 - 2x^2$

9) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

10) $y = x^2\,(x-4)$

11) $f(x) = x^5 - 5x^3$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

12) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

13) $y = x^2 - 12x - 20$

14) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$

15) $y = 2x^4 - 15x^2 + 12$

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2\ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16 ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

17 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

18 ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

لوح تزلُّج: يتحرَّك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلُّج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

20 ما سرعة رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

21 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

22 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

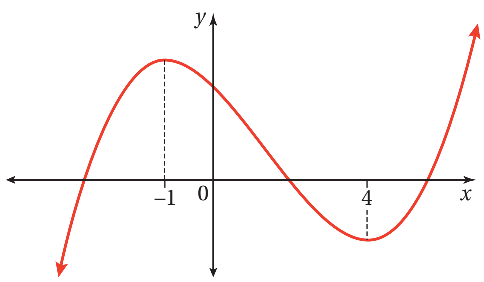
مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران $y = x(6 - x^2)$؛ فأُجيب عما يأتي، مع تبرير الإجابة:

23 أُمثِّل منحنى كلّ من الاقترانات: y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

24 أصف العلاقة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة، مع توظيف مفهوم المشتقّة.

25 تحدٍّ: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُمثّل بيانيًّا منحنى الاقتران $f'(x)$.



26 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

27 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

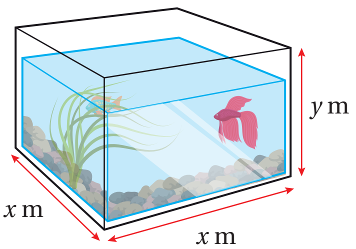
الدرس 5

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

فكرة الدرس حَلُّ مسائل حياتية باستعمال القِيَم القصوى.

المصطلحات اقتران التكلفة، التكلفة الحدِّية، اقتران الإيراد، الإيراد الحدِّي، اقتران الربح، الربح الحدِّي.

مسألة اليوم أرادت إسراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سعته $0.2\ m^3$، وأبعاده كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الحوض التي تجعل كمِّية الزجاج المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.



تطبيقات القِيَم القصوى

يُعَدُّ تحديد القيمة الصغرى المحلية والقيمة العظمى المحلية أحد أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالًا في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر مساحة مُمكِنة، وأكبر ربح مُمكِن، وأقل تكلفة مُمكِنة.

يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لحَلِّ العديد من مسائل تطبيقات القِيَم القصوى:

مفهوم أساسي **خطوات حَلِّ مسائل القِيَم القصوى**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.
2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمِّية التي أُريد أن أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.
3) **أجد القِيَم الحرجة للاقتران:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقّة الاقتران صفرًا.
4) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

إيجاد أكبر مساحة مُمكِنة

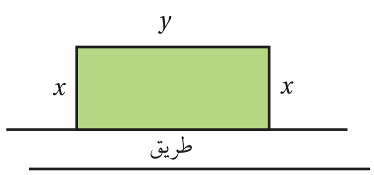
من التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر مســاحة يُمكِن إحاطتها بسياج طوله معلوم.

مثال 1 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي يوجد بمحاذاته ســياج من قبلُ. أجد أكبر مســاحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفترض أنَّ y هو طول الحقــل، وأنَّ x هو عرضه كما في المُخطَّط المجاور.



الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران مساحة الحقل:

$A = x\,y$ — مساحة المستطيل

- أكتب y بدلالة x باستعمال المحيط:

$P = 2x + y$ — محيط الحقل

$800 = 2x + y$ — بتعويض $P = 800$

$y = 800 - 2x$ — بكتابة المعادلة بدلالة y

- أُعوِّض y في اقتران مساحة الحقل:

$A = x\,y$ — اقتران مساحة الحقل

$A(x) = x\,(800 - 2x)$ — بتعويض $y = 800 - 2x$

$= 800x - 2x^2$ — بالتبسيط

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل مساحة الحقل هو: $A(x) = 800x - 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

$A'(x) = 800 - 4x$ — المشتقّة الأولى لاقتران مساحة الحقل

$800 - 4x = 0$ — بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران بالصفر

$x = 200$ — بحلّ المعادلة لـ x

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 200$.

أتعلَّم

بما أنَّ أحد أضلاع الحقل يُقابِــل الطريــق الزراعي الــذي يوجــد بمحاذاته سياج من قبل، فإنَّه يتعيَّن علــى المُزارِع أنْ يُســيِّج فقــط ثلاثة أضــلاع من الحقل.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة عندما $x = 200$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة الحقل $A''(x) = -4$

بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لِقِيَم x جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 200$، وهذا يعني أنَّ مساحة الحقل تكون أكبر ما يُمكِن إذا كان عرضه 200 m

إذن، أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج هي:

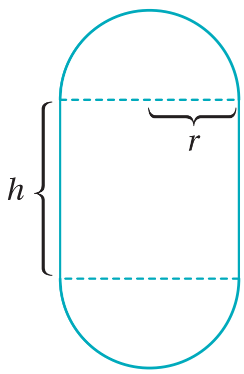
$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000 \text{ m}^2$.

أتحقّق من فهمي

يريد نجّار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

مثال 2

سلك طوله 100 cm يُراد ثنيه لإحاطة الشكل المجاور، المكوّن من مستطيل طوله h cm وعرضه $2r$ cm، ونصفَي دائرة نصف قطر كل منهما r cm في أعلى المستطيل وأسفله. أجد أكبر مِساحة يمكن إحاطتها بالسلك.



الخطوة 1: أكتب اقترانًا يُمثّل مِساحة الشكل.

بما أنّ الشكل مكوّن من نصفَي دائرة ومستطيل؛ فإنّ الاقتران الذي يُمثّل مِساحته:

$$A = \pi r^2 + 2rh$$

الخطوة 2: أكتب اقتران المساحة بدلالة متغيّر واحد باستعمال المحيط.

محيط الشكل $100 = 2\pi r + 2h$

بكتابة h موضوعًا للقانون $h = 50 - \pi r$

ولكتابة الاقتران الذي يُمثّل المِساحة بدلالة r، أُعوّض $h = 50 - \pi r$ فيه.

اقتران مِساحة الشكل $A = \pi r^2 + 2rh$

بتعويض $h = 50 - \pi r$ $\quad = \pi r^2 + 2r(50 - \pi r)$

بالتبسيط $\quad = 100r - \pi r^2$

أتذكّر

مِساحة الدائرة: $A = \pi r^2$، حيث r نصف قطر الدائرة.

مِساحة المستطيل: $A = l \times w$؛ حيث l: طول المستطيل، و w: عرض المستطيل.

الخطوة 3 : أشتقّ اقتران المِساحة، ثمّ أجد القيمة الحرجة، وأُحدّد نوع النقطة الحرجة.

مشتقّة اقتران المساحة: $\frac{dA}{dr} = 100 - 2\pi r$

بمساواة المشتقّة بالصفر: $100 - 2\pi r = 0$

بطرح 100 من الطرفين: $-2\pi r = -100$

بقسمة الطرفين على -2π: $r = \frac{50}{\pi}$

إذن: القيمة الحرجة لاقتران المِســـاحة $r = \frac{50}{\pi}$، ولتحديد نوع النقطة الحرجة أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -2\pi$$

وبما أنّ المشـــتقّة الثانية للاقتران ســـالبة لِقِيَم x جميعها، إذن: النقطـــة الحرجة هي نقطة قيمة عظمى.

ولإيجاد أكبر مِساحة يمكن إحاطتها بالسلك؛ أُعوّض $r = \frac{50}{\pi}$ في اقتران المِساحة:

اقتران المساحة بدلالة r: $A = 100r - \pi r^2$

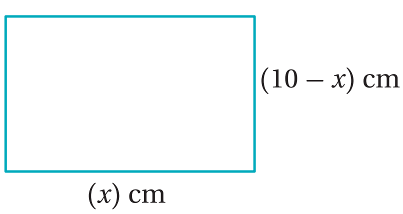
بتعويض $r = \frac{50}{\pi}$: $= 100\left(\frac{50}{\pi}\right) - \pi\left(\frac{50}{\pi}\right)^2$

بالتبسيط: $= \frac{5000}{\pi} - \frac{2500}{\pi} = \frac{2500}{\pi}$

إذن: أكبر مِساحة مغلقة يُمكِن إحاطتها بالسلك: $\frac{2500}{\pi}\ \text{cm}^2$

أتحقّق من فهمي

سلك طوله 20 cm يُراد ثنيه لإحاطة المستطيل المجاور. أجد أكبر مِســـاحة يمكـــن إحاطتها بالسلك.



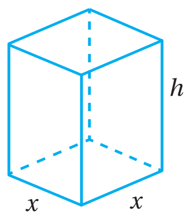
إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة

من التطبيقـات الاقتصادية المهمة على القِيَـم القصوى، إيجاد أقل كمِّيـة مُمكِنة من المواد اللازمة لصنع الأشياء.

مثال 3

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شـكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منهـا $1000\ cm^3$، وقاعدته مربعة الشـكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحـدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفتـرض أنَّ x هو طول قاعدة العلبة، وأنَّ h هـو ارتفاعها كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

$S = 4xh + 2x^2$ اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة

- أكتب h بدلالة x باستعمال حجم متوازي المستطيلات المعطى:

$V = x^2 h$ حجم العُلْبة

$1000 = x^2 h$ بتعويض $V = 1000$

$h = \frac{1000}{x^2}$ بكتابة المعادلة بدلالة h

- أُعوِّض h في اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

$S = 4xh + 2x^2$ اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة

$S(x) = 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) + 2x^2$ بتعويض $h = \frac{1000}{x^2}$

$= \frac{4000}{x} + 2x^2$ بالتبسيط

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المساحة الكلية لسطح العُلْبة هو: $S(x) = \frac{4000}{x} + 2x^2$.

أتذكَّر

المسـاحة الكلية لسطح متوازي المستطيلات هي المسـاحة الجانبية التي أُضيـف إليها مسـاحتا القاعدتيـن، علمًـا بأنَّ المسـاحة الجانبيـة هـي محيـط القاعدة في الارتفاع.

أتذكَّر

حجم متوازي المستطيلات هو مساحة القاعدة مضروبةً في الارتفاع.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

المشتقّة الأولى لاقتران مساحة السطح $S'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 4x$

بمساواة المشتقّة الأولى بالصفر $-\frac{4000}{x^2} + 4x = 0$

بضرب طرفي المعادلة في x^2 $4x^3 = 4000$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x^3 = 1000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = 10$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 10$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة عندما $x = 10$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة السطح $S''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$

بتعويض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$

أُلاحِظ وجود قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$، وهذا يعني أنَّ كمِّية الكرتون المُستعمَلة تكون أقل ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة 10 cm

إذن، أبعاد العُلْبة الواحدة هي: $l = x = 10 \text{ cm}, w = x = 10 \text{ cm}, h = \frac{1000}{x^2} = 10 \text{ cm}$.

أتعلَّم

في هذه المسألة، تكون كمِّية الكرتون المُستعمَلة أقل ما يُمكِن إذا كانت العُلْبة على شكل مُكعَّب.

أتحقّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 2 m^3، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

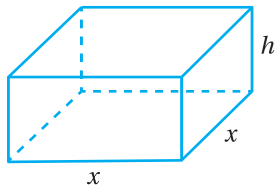
إيجاد أكبر حجم مُمكِن

يُعَدُّ إيجاد أكبر حجم مُمكِن للخزّانات أحد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى؛ فهو يساعد على تحديد الأبعاد والتصاميم التي تنتج أكبر حجم ممكن باستعمال الكمية نفسها من مواد التصنيع.

مثال 4

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مســاحتها $36\ m^2$. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مســتطيلات مغلق، على أن تكون قاعدة الخزّان مربعة الشــكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ x هو طول قاعدة الخزّان، وأنَّ h هو ارتفاعه كما في المُخطَّط المجاور.

الخطـوة 2: أكتــب الاقتران الذي أُريد إيجــاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران حجم الخزّان:

صيغة حجم متوازي المستطيلات	$V = l \times w \times h$
بتعويض $l = x,\ w = x$	$= x \times x \times h$
بالتبسيط	$= x^2 h$

- أكتب h بدلالة x باستعمال المساحة الكلية لسطح الخزّان المعطاة في السؤال:

المساحة الكلية لسطح الخزّان	$S = 4xh + 2x^2$
بتعويض $S = 36$	$36 = 4xh + 2x^2$
بكتابة المعادلة بدلالة h	$h = \dfrac{36 - 2x^2}{4x}$
بالتبسيط	$h = \dfrac{18 - x^2}{2x}$

- أُعوِّض h في اقتران حجم الخزّان:

اقتران حجم الخزّان	$V = x^2 h$
بتعويض $h = \dfrac{18 - x^2}{2x}$	$V(x) = x^2 \left(\dfrac{18 - x^2}{2x}\right)$
بالتبسيط	$= 9x - \dfrac{1}{2} x^3$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل حجم الخزّان هو: $V(x) = 9x - \frac{1}{2} x^3$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقّة اقتران الحجم $V'(x) = 9 - \frac{3}{2}x^2$

بمساواة المشتقّة بالصفر $9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x^2 $x^2 = 6$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm\sqrt{6}$

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّه توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = \sqrt{6}$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة عندما $x = \sqrt{6}$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الحجم $V''(x) = -3x$

بتعويض $x = \sqrt{6}$ $V''(\sqrt{6}) = -3(\sqrt{6}) < 0$

أُلاحِظ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{6}$، وهذا يعني أنَّ حجم الخزّان يكون أكبر ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة $\sqrt{6}$ m.

إذن، أبعاد الخزّان هي:

$l = x = \sqrt{6}$ m, $w = x = \sqrt{6}$ m, $h = \frac{18 - x^2}{2x} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ m.

أتحقّق من فهمي

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها 54 m^2. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، على أن يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

تطبيقات اقتصادية

من التطبيقات الاقتصادية المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر ربح لمُنتَج مُعيَّن، أو إيجاد أعلى إيراد من بيعه، أو إيجاد أقل تكلفة لصنعه.

يُطلَق على الاقتران الذي يُمثِّل تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن اسم **اقتران التكلفة** (cost function)، ويُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنسبة إلى x اسم **التكلفة الحدِّية** (marginal cost)؛ ما يعني أنَّ اقتران التكلفة الحدِّية هو مشتقّة اقتران التكلفة أيْ $C'(x)$.

أمّا الاقتران الذي يُمثِّل إيراد بيع x وحدة من مُنتَج مُعيَّن فيُسمّى **اقتران الإيراد** (revenue function)، ويُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. وأمّا مشتقّة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى **الإيراد الحدِّي** (marginal revenue)، وهو يُمثِّل مُعدَّل تغيُّر الإيراد بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

بناءً على ما سبق، فإنَّ ربح بيع x قطعة من مُنتَج مُعيَّن يعطى بالاقتران الآتي:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

حيث $P(x)$ هو **اقتران الربح** (profit function)، و**الربح الحدِّي** (marginal profit) هو مشتقّة اقتران الربح أيْ $P'(x)$.

مثال 5 : من الحياة

وجد خبير تسويق أنَّه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإنَّ سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

$R(x) =$ (سعر الحاسوب الواحد)(عدد الأجهزة المَبيعة)	اقتران الإيراد
$= x(1000 - x)$	بالتعويض
$= 1000x - x^2$	باستعمال خاصية التوزيع

إذن، اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1000x - x^2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الربح.

$P(x) = R(x) - C(x)$	اقتران الربح
$= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$	بالتعويض
$= -x^2 + 980x - 3000$	بالتبسيط

إذن، اقتران الربح هو: $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$.

الخطوة 3: أجد الربح الحدِّي، ثم أجد القيمة الحرجة، وأحدّد نوع النقطة الحرجة.

الربح الحدِّي $P'(x) = -2x + 980$

بمساواة المشتقّة بالصفر $-2x + 980 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x : $x = 490$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 490$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة عندما $x = 490$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الربح $P''(x) = -2$

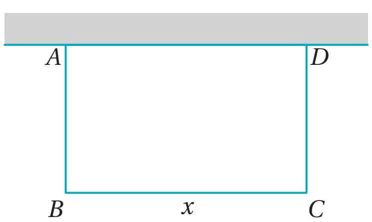
بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لِقِيَم x الموجبة جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 490$.

إذن، تُحقِّق الشركة أكبر ربح مُمكِن عند إنتاجها 490 جهاز حاسوب وبيعها.

أتحقّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنَّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الثلّاجات المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الثلّاجات تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الثلّاجات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

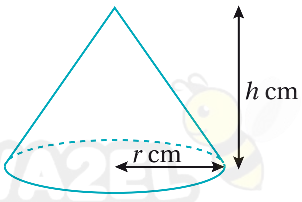
أتدرّب وأحلّ المسائل



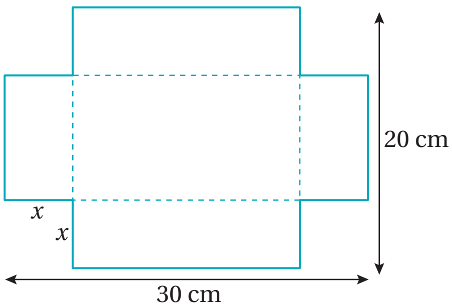
يُمثّل الشكل المجاور مخطّطًا لحديقة منزلية يراد بناؤها مقابل جدار حجري، إذا كان محيط الحديقة دون الجدار يساوي 300 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:

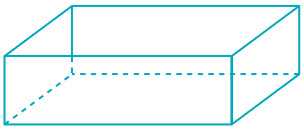
1. أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.
2. أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
3. أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.
4. أراد مزارع أن يحيط منطقة مستطيلة الشكل مساحتها $216\ m^2$ من حقله بسياج، وأن يقسمها إلى نصفين بسياج موازٍ لأحد جانبيها. أجد أبعاد المنطقة التي تجعل طول السياج اللازم أقلّ ما يمكن، ثم أجد طوله.

5 يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته r cm، وارتفاعه h cm، حيث: $r + h = 60$، أجد قيمتَي r و h اللتين يكون عندهما حجم المخروط أكبر ما يُمكن.



قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 30 cm، وعرضها 20 cm. قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثمّ ثُنيت الورقة لتشكيل علبة.





6 أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.

7 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.

يُمثّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثّل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار، أجد كلًّا ممّا يأتي:

8 اقتران الإيراد.

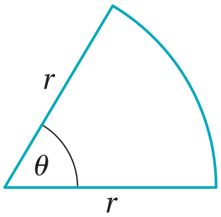
9 عدد القطع x الذي يتساوى عنده الإيراد الحدّي مع التكلفة الحدّية.

10 اقتران الربح.

11 عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

12 سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقّق أكبر ربح مُمكِن.

يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm، أجد كلًّا ممّا يأتي:



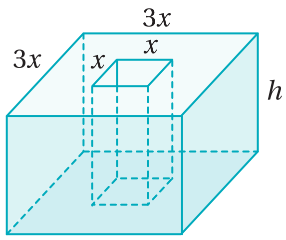
13 الاقتران الذي يُمثّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

14 أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

15 وجدت باحثة زراعية أنّ عدد حبّات البرتقال التي تنتجها كلّ شجرة في أحد بساتين غور الأردن، يعتمد على كثافة الأشجار المزروعة. إذا علمتُ أنّ عدد الأشجار في البستان n، وأنّ كلّ شجرة تنتج $900-9n$ برتقالة؛ فأجد أكبر عدد من أشجار البرتقال التي يُمكن زراعتها في البستان للحصول على أكبر عائد.

مهارات التفكير العليا

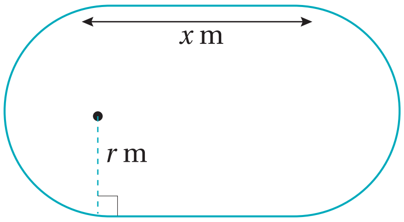
تحدّ: تُريد إحدى شركات الشوكولاته إطلاق منتج جديد في علب من الورق المقوى. إذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات وفي داخلها فراغ على شكل متوازي مستطيلات أيضًا كما في الشكل المجاور، إذا كان حجم العلبة $2000\ \text{cm}^3$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:



16 الاقتران الممثّل للمِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة.

17 قيمة x التي تجعل المِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة أقلّ ما يُمكن.

تبرير: مضمار سباق مكوّن من جزأين مستقيمين طول كل منهما x مترًا، وجزأين على شكل نصف دائرة طول نصف قطر كل منهما r مترًا كما في الشكل المجاور. وكان محيط المضمار $400\ \text{m}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:



18 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار بدلالة r.

19 أُثبتُ أنّه عندما يكون لِمساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار نقطة حرجة؛ فإنّ المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، ثم أُبيّن نوع النقطة الحرجة. أُبرّر إجابتي.

الدرس 6

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

فكرة الدرس إيجاد مشتقّات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوَّة، المُتغيِّر الوسيط.

مسألة اليوم يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مِساحة سطح الفقاعة؛ عندما يكون نصف قطرها 2.8 cm

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران القوَّة هو اقتران في صورة: $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^8} \quad , \quad f(x) = x^4$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقّة اقتران القوَّة هي: $f'(x) = nx^{n-1}$، وكيف أجد مشتقّة اقترانات تتضمَّن حدودها اقترانات قوَّة، مثل: $f(x) = x^3 + 2x$.

ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقّة اقترانات أكثر تعقيدًا، مثل: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$؟

أُلاحِظ أنَّ الاقتـران: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ هـو اقتران مُركَّب، حيـث: $h(x) = x^3 + 2x$، و $g(x) = x^7$ مُركَّبتا $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{(\overbrace{x^3 + 2x}^{\text{الداخلي}})^7}_{\text{الخارجي}}$$

لغة الرياضيات

يُسمّى $h(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركَّب، ويُسمّى $g(x)$ اقترانًا خارجيًّا له، حيث: $f(x) = (g \circ h)(x)$.

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ بإيجاد مشتقّة الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمتها عند الاقتران الداخلي، ثم ضربها في مشتقّة الاقتران الداخلي، في ما يُسمّى **قاعدة السلسلة** (the chain rule).

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين كما يأتي:

نظرية **قاعدة السلسلة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب: $(f \circ g)\,(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 1

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $y = (x^2 + 1)^3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = x^2 + 1$، والاقتران الخارجي له: $y = u^3$.

$$\frac{du}{dx} = 2x$$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= 3u^2 \times 2x$$ بتعويض $\frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 2x$

$$= 6x(x^2 + 1)^2$$ بتعويض $u = x^2 + 1$

2 $y = \sqrt{4 - 3x}$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بالصورة الأُسِّية.

الاقتران المعطى	$y = \sqrt{4 - 3x}$
الصورة الأُسِّية	$= (4 - 3x)^{\frac{1}{2}}$

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = 4 - 3x$، والاقتران الخارجي له: $y = u^{\frac{1}{2}}$.

مشتقّة الاقتران الداخلي	$\frac{du}{dx} = -3$
مشتقّة الاقتران الخارجي	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$

الخطوة 3: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
بتعويض $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{du}{dx} = -3$	$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \times -3$
بتعويض $u = 4 - 3x$	$= -\frac{3}{2} (4 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$
الصورة الجذرية	$= -\frac{3}{2\sqrt{4 - 3x}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (x^2 - 2)^4$

b) $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

أتذكَّر

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

قاعدة سلسلة القوَّة

تعرَّفْتُ في المثال السابق كيف أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$، وهو أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا. والآن سأتعرَّف قاعدة عامة لإيجاد مشتقّة هذا الاقتران تُسمّى **قاعدة سلسلة القوَّة** (power chain rule)، وهي حالة خاصة من قاعدة السلسلة، حيث الاقتران الخارجي f هو اقتران قوَّة.

مفهوم أساسي

قاعدة سلسلة القوَّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$ عند نقطة ما كما في المثال الآتي:

مثال 2

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = (2x^4 - x)^3, x = 1$

$f(x) = (2x^4 - x)^3$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3(2x^4 - x)^2 \times \frac{d}{dx}(2x^4 - x)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= 3(2x^4 - x)^2 \times (8x^3 - 1)$ باشتقاق $2x^4 - x$

$f'(1) = 21$ بتعويض $x = 1$

2 $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, x = 2$

$f(x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$ الصورة الأُسّية

$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(1 + x^3)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2)$ باشتقاق $1 + x^3$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$ الصورة الجذرية

$f'(2) = 2$ بتعويض $x = 2$

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

3 $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,,\; x = -2$

الصورة الأُسِّية
$$y = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدة سلسلة القوّة
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

باشتقاق $x^2 - 1$
$$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times 2x$$

الصورة الجذرية
$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

بتعويض $x = -2$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}$$

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = (x^4+1)^5\,,\; x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}\,,\; x = 2$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5}\,,\; x = 4$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشتقّة اقتران في بعض الحالات، يتعيَّن تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مراجعة المفهوم — **مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات القوّة**

إذا كان f و g اقترانين، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإنَّ مشتقّة كلٍّ من $f+g$، و $f-g$، و af هي:

- مشتقّة المجموع، أو مشتقّة الفرق: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- مشتقّة مضاعفات الاقتران: $(af)'(x) = af'(x)$

مثال 3

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

$f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 15(1-x^2)^2 \times \frac{d}{dx}(1-x^2) + 4$ قواعد سلسلة القوّة، ومضاعفات الاقتران، والمجموع، والثابت

$= 15(1-x^2)^2 \times -2x + 4$ باشتقاق $1-x^2$

$= -30x(1-x^2)^2 + 4$ بالتبسيط

2 $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

$f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3(2x+1)^2 \times \frac{d}{dx}(2x+1) - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$ قاعدتا سلسلة القوّة، ومشتقّة الفرق

$= 3(2x+1)^2 \times 2 - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$ باشتقاق $2x+1$

$= 6(2x+1)^2 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$ بالتبسيط

أتحقّق من فهمي

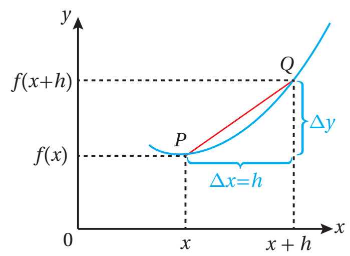
أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

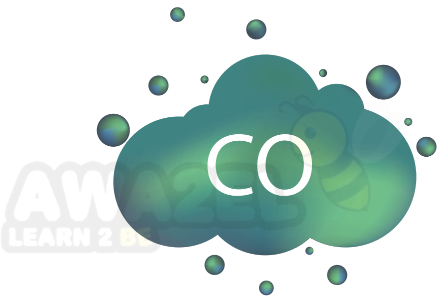
مُعدَّل التغيُّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقّة هي نهاية ميل قاطع المنحنى بين النقطتين: $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ عندما $h \to 0$. وبما أنَّ ميل القاطع هو مُعدَّل تغيُّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x، فإنَّ المشتقّة هي مُعدَّل تغيُّر أيضًا، ولكنْ عند لحظة (نقطة) مُعيَّنة. فمثلًا: إذا كان المطلوب هو إيجاد $\frac{dy}{dx}$، فهذا يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.



تتطلَّب كثير من المواقف الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة، مثل إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية أوَّل أكسيد الكربون في الجو بالنسبة إلى عدد السكّان.

مثال 4 : من الحياة



تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكّان بالألف نسمة، علمًا بأنَّ C يقاس بأجزاء من المليون (مثلًا: $C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون):

1 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان.

أجد $C'(p)$:

$$C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$$ الاقتران المعطى

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ قاعدة السلسلة

إذن، مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان هو: $C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان عندما يكون عدد السكّان 4 آلاف نسمة، وأفسّر معنى الناتج.

أجد $C'(4)$:

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ مشتقّة $C(t)$

$$C'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$ بتعويض $p = 4$

$$= 0.24$$ بالتبسيط

إذن، إذا كان عدد السكّان 4 آلاف نسمة، فإنَّ مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

معلومة

أوَّل أكسيد الكربون هو غاز عديم اللون والرائحة، وضارٌّ بالإنسان؛ إذ يؤدي استنشاقه إلى منع الدم من حمل الأكسجين، وعدم استعمال الأنسجة للأكسجين بصورة فاعلة.

أتعلَّم

تشير الإشارة الموجبة إلى ازدياد مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون.

أتحقّق من فهمي

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، وأفسّر معنى الناتج.

قاعدة السلسلة، والمُتغيِّر الوسيط

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقّة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى. وتأسيسًا على ذلك، فإنَّ قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ تعني أنَّ y هو اقتران بالنسبة إلى x عن طريق المُتغيِّر u الذي يُسمّى **المُتغيِّر الوسيط** (parameter).

ومن ثَمَّ، فإنَّ مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x يساوي مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى u مضروبًا في مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x.

مثال 5

إذا كان: $y = u^3 - 2u + 1$، حيث: $u = 2\sqrt{x}$، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$$ بإيجاد مشتقّة y بالنسبة إلى المُتغيِّر u

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$ بإيجاد مشتقّة u بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ باستعمال قاعدة السلسلة

$$= (3u^2 - 2) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$ بتعويض $\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2, \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= (3\,(2\sqrt{x})^2 - 2) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$ بتعويض $u = 2\sqrt{x}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = (3\,(2\sqrt{4})^2 - 2) \times \frac{1}{\sqrt{4}}$$ بتعويض $x = 4$

$$= 23$$ بالتبسيط

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $y = u^5 + u^3$، حيث: $u = 3 - 4x$، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (1 + 2x)^4$

2) $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$

3) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$

4) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

5) $f(x) = 4(2 + 8x)^4$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x - 8}}$

7) $f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$

8) $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$

9) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$

10) $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

11) $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{1}{(4x + 1)^2}, x = \frac{1}{4}$

14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

15) $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

16) $y = \sqrt[3]{2u + 5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

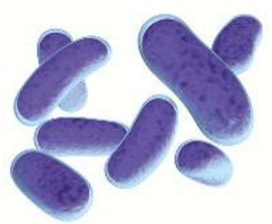
17) $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

18) $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 1$

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن (بآلاف الدنانير):

19 أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة.

20 أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة عندما يكون عدد القطع المُنتَجة 20 قطعة.



علوم: يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

21 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

22 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$ ، فأجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 3$:

24 $f(x) = (h(x))^3$

23 $f(x) = g(h(x))$

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، وأبرّر إجابتي.

26 تبرير: أجد مشتقّة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، وأبرّر إجابتي.

27 أكتشف المُختلِف: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف؟ أبرّر إجابتي.

$p(x) = x^2 + 1$ | $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ | $h(x) = (x^2+1)^3$ | $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

28 تحدٍّ: أجد مشتقّة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة، لكل ممّا يأتي:

1 إذا كان $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $y' = 8x^3 - 5x^2 + 2$

b) $y' = 4x^4 - 15x^2 + 2$

c) $y' = 8x^3 - 15x + 2$

d) $y' = 8x^3 - 15x^2$

2 إذا كان $f(x) = (x-3)^2$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x - 3$ b) $x - 6$

c) $2x - 6$ d) $2x + 9$

3 إذا كان $y = \frac{2x^4 + 9x^2}{3x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{2x^4}{3} + 6x$ b) $2x^2 + 3$

c) $2x + 3$ d) $8x^3 + 18x$

4 إذا كان $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ b) $8x^{\frac{-1}{3}}$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ d) $4x^{\frac{-1}{3}}$

5 إذا كان $f(x) = (1-x)^3$، فإنّ $f''(x)$ تساوي:

a) $-3(1-x)^2$ b) $3(1-x)^2$

c) $6(1-x)$ d) $-3(1-x)$

6 إذا كان $f(x) = x^{\pi}$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{22}{7}$ b) $\frac{7}{22}$

c) $\frac{22}{7}x^{\frac{15}{7}}$ d) $\frac{7}{22}x^{\frac{15}{7}}$

7 يوجد للاقتران $y = 4x^2 + 6x + 3$ قيمة حرجة عندما x تساوي:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

8 يوجد للاقتران $y = -5x^2 + 7x + 4$ قيمة عظمى محلّية عندما x تساوي:

a) 0.7 b) 1

c) 0 d) −0.7

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9 $\lim\limits_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$

10 $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

11 $\lim\limits_{x \to -4} \frac{|x - 4|}{x - 4}$

12 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

13 $f(x) = 3x - 2\ ,\ x = 5$

14 $g(x) = \frac{1}{x}\ ,\ x = 0$

15 $h(x) = \begin{cases} 3x + 4 & , x < 3 \\ 2x - 1 & , x \geq 3 \end{cases}\ ,\ x = 3$

إذا كان الاقتران $y = 2x + \frac{8}{x}$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

16 $\frac{dy}{dx}$.

17 ميل مماس المنحنى عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = 10$.

18 إذا كان الاقتران $y = (3x + a)(x - 1)$، حيث a ثابت؛ فأجد بدلالة a إحداثيّات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي a.

إذا كان الاقتران $y = x^2 (x^2 - p)$، حيث $p > 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

19 مشتقّة الاقتران بدلالة p.

20 النقاط الحرجة للاقتران؛ إذا كانت $p = 8$، ثمّ أُحدّد نوعها.

21 أُمثّل الاقتران بيانيًّا عندما $p = 8$.

22 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12

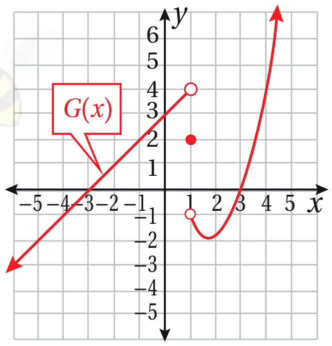
أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

23 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

24 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

25 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

أستعملُ التمثيل البياني لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



26 $\lim_{x \to 1} G(x)$

27 $\lim_{x \to -2} G(x)$

28 $\lim_{x \to -3} G(x)$

29 إذا كان الضغط والحجم لغاز مُعيّن يرتبطان بالعلاقة: $pV = 1200$، حيث p الضغط وV الحجم، ويزداد الضغط مع الزمن (t) بالثواني وفقًا للعلاقة $p = 10 + 0.4\sqrt{t}$. فأجد معدّل تغيّر حجم الغاز بالنسبة إلى t عندما $t = 100$

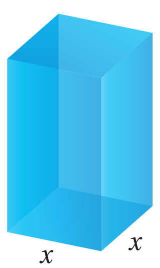
أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

30 $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$

31 $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

32 يُمثّل الاقتران: $s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2$ موقع سيّارة تتحرك في مسار مستقيم، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار. أجد سرعة السيّارة بعد 10 ثوان من بدء حركتها.

33 صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها x cm كما في الشكل المجاور. إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي 144 cm؛ فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.



الوحدة 3

الاحتمالات
Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

يستفاد من علم الاحتمالات في مجالات عدّة مهمة، مثل: الطب، والزراعة، والاقتصاد، والأرصاد الجوية. فالطبيب الذي يبحث في انتشار مرض مُعْدٍ يعكف على دراسة احتمال انتقال المرض من شخص إلى آخر، وموظفو قطاع التأمين يَلزمهم حساب نسبة المخاطر، وإمكانية تعرُّض شركات التأمين للخسائر، أو تحقيقها الربح.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مُخطَّط الشجرة وجداول الاحتمال لتحديد نواتج تجارب عشوائية.
- ✓ حساب احتمالات حوادث بسيطة.
- ✓ حساب احتمالات حوادث مُركَّبة مستقلة، وغير مستقلة.
- ✓ حساب احتمالات حوادث متنافية، وغير متنافية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◂ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد طرائق إجراء عملية، أو تجربة عشوائية.
- ◂ ماهية المُتغيِّرات العشوائية، وإيجاد قِيَمها.
- ◂ إنشاء التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّرات عشوائية.
- ◂ حساب توقُّع المُتغيِّر العشوائي، وتباينه.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (41 – 38) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التباديل والتوافيق
Permutations and Combinations

فكرة الدرس
- تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حلِّ المسائل.
- تعرُّف التباديل، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.
- تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات مبدأ العَدِّ الأساسي، التباديل، المضروب، التوافيق.

مسألة اليوم يتألَّف فريق للسباحة من 8 سبّاحينَ. إذا أراد مُدرِّب الفريق اختيار سبّاحينِ اثنين للسباحة في الجولة الأولى في إحدى المنافسات، فبكم طريقةً يُمكِنه الاختيار من بين هؤلاء السبّاحينَ؟

مبدأ العَدِّ الأساسي

من السهل إيجاد عدد الطرائق اللازمة لترتيب مجموعة صغيرة. فمثلًا: توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$، هما: (a, b)، و (b, a)؛ إذ يُختار الحرف الأول بطريقتين، ثم يُختار الحرف الثاني بعد اختيار الحرف الأول بطريقة واحدة. وقد تعلَّمْتُ سابقًا طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مُخطَّط الشجرة، ومُخطَّط الاحتمال.

ولكنْ، إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق المُمكِنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا. وفي كثير من الحالات، يقتصر الاهتمام على معرفة عدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العَدِّ الأساسي** (fundamental counting principle) لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من المراحل بعضها في بعض.

أتذكَّر

يُطلَق على الخيارات المُحتمَلة لتجربة عشوائية ما اسم **النواتج**، ويُطلَق على جميع النواتج المُمكِنة لها اسم **الفضاء العيني**، الذي يُرمَز إليه بالرمز (Ω).

مفهوم أساسي مبدأ العَدِّ الأساسي

للتجربة العشوائية التي يُمكِن إجراؤها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الأولى هو K_1، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الثانية هو K_2، ...، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة n هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة هو:

$$K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$$

مثال 1

بكم طريقةً يُمكِن تكوين عدد زوجي يتألَّف من 3 أرقام مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 4, 6, 7, 9؟

للرقم الأول في منزلة الآحاد (المرحلة الأولى) 3 خيارات مُمكِنة، هي الأرقام: 6 ,4 ,2، وللرقم الثاني في منزلة العشرات (المرحلة الثانية) 5 خيارات مُمكِنة (5 أرقام)؛ لأنَّ أرقام العدد مختلفة، ولا يُمكِن تكرارها. أمّا الرقم في منزلة المئات (المرحلة الثالثة) فله 4 خيارات مُمكِنة (4 أرقام).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة الآحاد		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة العشرات		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة المئات		
3	×	5	×	4	=	60

إذن، يُمكِن تكوين هذا العدد بـ 60 طريقة.

أتحقَّق من فهمي

بكم طريقةً يُمكِن تكوين عدد فردي يتألَّف من 4 أرقام مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟

التباديل

التباديل (permutations) هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء، بما في ذلك ترتيب اختيار هذه الأشياء. فمثلًا: توجد 6 تباديل مُمكِنة لترتيب الأحرف: A، وB، وC:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

أتعلّم

ترتيب العناصر مهمٌّ في التباديل.

مثال 2

1 **كم كلمةً (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الرابع		عدد طرائق اختيار الحرف الخامس		عدد طرائق اختيار الحرف السادس	
6	×	5	×	4	×	3	×	2	×	1	= 720

إذن، يُمكِن تكوين 720 كلمةً من أحرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرار أيِّ حرف فيها.

2 **كم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
6	×	5	×	4	=	120

إذن، يُمكِـن تكوين 120 كلمةً تتألف من 3 أحرف من أحـرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرار أيِّ حرف فيها.

أتحقَّق من فهمي

a) كم كلمـةً (ليس شـرطًا أنْ يكون لهـا معنى) يُمكِـن تكوينها من جميـع أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

b) كـم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شـرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

في الفرع الأول من المثال السـابق، استُعمِل التعبير: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ لحساب عدد تباديـل 6 أحرف مختلفة، أُخِذ منها 6 أحرف كل مرَّة، وهو تعبير يُكتَب في صورة ($6!$)، ويُقرَأ: **مضروب** (factorial) العدد 6

بوجـه عام، يُكتَب مضروب العـدد الصحيح الموجب n في صورة ($n!$)، ويسـاوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n كالآتي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1$$

أمّا الفرع الثاني من المثال نفسه فقد تضمَّن إيجاد عدد تباديل 6 أحرف، أُخِذ منها 3 أحرف كل مرَّة؛ لذا لا يُمكِن استعمال المضروب لإيجاد التباديل في هذه الحالة لأن التعبير المستعمل هو:

$$4 \times 5 \times 6 \neq 6!$$

أتعلَّم

أسـتعمل الآلة الحاسبة لإيجاد مضـروب العدد. فمثـلًا: أجـد مضروب العـدد 6 بالضغـط على الأزرار الآتية:

6 ! =

أتعلَّم

$0! = 1$

بوجه عام، يُمكِن استعمال إحدى الصيغتين الآتيتين لإيجاد عدد التباديل:

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرمزين الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

nPr, $P(n, r)$

مفهوم أساسي — التباديل

عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة:

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة، هو:

$$_nP_n = n!$$

حيث n عدد صحيح موجب.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 5 كل مرَّة، هو:

$$_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة:

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 3 كل مرَّة، هو:

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

مثال 3 : من الحياة

1 وظائف: **أعلن مطعم عن حاجته إلى عامل في صالته الرئيسة، وإلى عامل آخر في المطبخ. إذا تقدَّم للوظيفتين 4 أشخاص (أحمد، رامي، جمانة، عبير)، فبكم طريقةً يُمكِن اختيار اثنين منهم لهاتين الوظيفتين؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فاختيار أحمد للعمل في الصالة، وجمانة للعمل في المطبخ، يختلف عن اختيار جمانة للعمل في الصالة، وأحمد للعمل في المطبخ. وكذلك لا يُمكِن اختيار الشخص نفسه لكلتا الوظيفتين؛ لذا أستعمل التباديل لإيجاد عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مع مراعاة الترتيب:

عدد تباديل n من العناصر المختلفة أُخِذَ منها r كلّ مرّة	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
بتعويض $n = 4$، و $r = 2$	${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$
باستعمال تعريف المضروب، والاختصار	$= \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$
بالتبسيط	$= 12$

إذن، يُمكِن اختيار شخصين لهاتين الوظيفتين بـ 12 طريقة.

أتعلَّم

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل.

فمثلًا: أجد ناتج ${}_4P_2$ بالضغط على الأزرار الآتية:

4 ${}_nP_r$ 2 =

2 صلة رحم: **يرغب حسن في زيارة بيت جدَّته، وبيت عمَّته، وبيت خالته أول أيام عيد الفطر المبارك. بكم طريقةً يُمكِنه ترتيب مواعيد الزيارة؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة من دون تكرار البدائل؛ لذا أستعمل عدد طرائق اختيار 3 عناصر من بين 3 عناصر، مع مراعاة الترتيب:

عدد تباديل n من العناصر المختلفة أُخِذَ منها n كلّ مرّة	${}_nP_n = n!$
بتعويض $n = 3$	${}_3P_3 = 3!$
باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج	$= 3 \times 2 \times 1 = 6$

إذن، يُمكِن لحسن ترتيب مواعيد الزيارة بـ 6 طرائق.

أتحقَّق من فهمي

a) اشتركت 10 خيول في منافسة لسباق للخيل. بكم طريقةً يُمكِن للخيول إنهاء السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

b) تمكَّن 4 طلبة من بلوغ المرحلة قبل النهائية لمسابقة الرياضيات الذهنية. بكم طريقةً يُمكِن لهؤلاء الطلبة الوقوف متجاورين لالتقاط صورة معًا؟

التوافيق

التوافيق (combinations) هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء من دون اهتمام بالترتيب. فمثلًا: عند اختيار حرفين عشوائيًّا من الأحرف: A, B, C, D، يُمكِن كتابة جميع التباديل المُمكِنة لاختيار حرفين من هذه الأحرف، ثم حذف الأزواج التي تكرَّرت (لأنَّ الترتيب في التوافيق غير مهم) كالآتي:

(A, B) (A, C) (A, D) ~~(B, A)~~ (B, C) (B, D)

~~(C, A)~~ ~~(C, B)~~ (C, D) ~~(D, A)~~ ~~(D, B)~~ ~~(D, C)~~

(B, D) و (D, B) هما الزوج نفسه؛ لأنَّ الترتيب غير مهم.

إذن، توجد 6 توافيق مُمكِنة لاختيار حرفين من الأحرف: A, B, C, D.

مفهوم أساسي — التوافيق

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_{n}C_{r} = \frac{_{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: n و r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

مثال: عدد توافيق 10 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 7 كل مرَّة، هو:

$$_{10}C_{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$$

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

$nCr, C(n, r), \binom{n}{r}$

مثال 4 : من الحياة

برلمان طلابي: أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 طالبات من بين 6 طالبات مُترشِّحات (سهى، مرام، أسماء، سُمَيَّة، لانا، نداء) لتمثيل المدرسة في مؤتمر البرلمان الطلابي الذي تُنظِّمه مديرية التربية التي تَتْبَع لها المدرسة.

معلومة

للبرلمان الطلابي دور رئيس في صقل شخصية الطالب القيادية، وتَمثُّل معاني الديمقراطية، والمشاركة السياسية؛ ما يُمكِّنه من الإسهام بفاعلية في رفعة الوطن وازدهاره.

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين الطالبات المُترشِّحات؛ فإنَّني أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار 3 طالبات من بين الطالبات الست المُترشِّحات على النحو الآتي:

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ عدد توافيق n من العناصر المختلفة أُخِذ منها r كلّ مرَّة

بتعويض $n = 6$، و $r = 3$ $\quad {}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$

باستعمال تعريف المضروب، والاختصار $\quad = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 3 \times 2}$

بالتبسيط $\quad = 20$

أتحقَّق من فهمي

ألعاب: بكم طريقةً يُمكِن اختيار فريق كرة سلَّة يضمُّ 5 لاعبين من بين 8 لاعبين؟

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا: أجد ناتج ${}_6C_3$ بالضغط على الأزرار الآتية:

$\boxed{6}\ \boxed{{}_nC_r}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

تعلَّمْتُ سابقًا كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتوافيق، والتباديل. والآن سأُوظِّف ذلك كله في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن التجربة العشوائية.

مثال 5

1 **رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يكون حرف النون وحرف العين في الترتيب المختار متجاورين؟**

ن	و	ا	ع	ي	ر

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني أنَّ حرف النون وحرف العين في الترتيب المختار متجاوران.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر الفضاء العيني (Ω).

عدد عناصر الفضاء العيني هو عدد طرائق ترتيب 6 عناصر (بطاقات) في صف واحد مع مراعاة الترتيب:

عدد تباديل 6 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 6 كلَّ مرَّة $\quad n(\Omega) = {}_6P_6 = 6!$

باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج $\quad = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

أتذكَّر

يُستعمل الرمز $n(\Omega)$ للتعبير عن عدد عناصر الفضاء العيني.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (A).

عدد عناصر الحادث A هو عدد طرائق ترتيب البطاقات التي يكون فيها حرف النون وحرف العين متجاورين. ويتجــاور هذان الحرفان بطريقتين فقط، وفي كل من هاتيــن الطريقتين يمكن عدّهما عنصرًا واحدًا، وعندها يصبح عدد عناصر المجموعة 5، وعدد طرائق ترتيبها هو $_5P_5$ ؛ لذا، فإنَّ:

$n(A) = 2 \times {}_5P_5$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$= 2 \times 5! = 2\times5\times4\times3\times2\times1$ باستعمال تعريف المضروب

$= 240$ بإيجاد الناتج

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{240}{720}$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$= 0.33$ بإيجاد الناتج

إذن، احتمال أنْ يكون حرف النون وحرف العين متجاورين هو 0.33

2 **كُتِبت الأعداد من 1 إلى 20 على 20 بطاقة صغيرة مُتماثِلة، وُضِعت جميعها في صندوق، ثم اختيرت اثنتان منها معًا بصورة عشوائية. ما احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديين؟**

الخطوة 1 : أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار بطاقتين معًا عشوائيًّا، وأنَّهما تحملان عددين فرديين (الترتيب غير مهم).

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

عــدد عناصر الفضاء العيني يســاوي عدد طرائــق اختيار بطاقتين معًا مــن الصندوق بصورة عشوائية.

بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

$n(\Omega) = {}_{20}C_2$ عدد توافيق 20 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 2 كلّ مرَّة

$= \frac{20!}{2!(20-2)!}$ بالتعويض في صيغة التوافيق

$= \frac{20 \times 19 \times \cancel{18!}}{2 \times \cancel{18!}}$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$= 190$ بالتبسيط

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (A).

عدد البطاقات التي تحمل أعدادًا فردية هو 10 بطاقات؛ لذا فإنَّ $n(A)$ يُمثِّل عدد طرائق اختيار بطاقتين معًا بصورة عشوائية من بين 10 بطاقات بحيث تحملان عددين فرديّين.

بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

$n(A) = {}_{10}C_2$ عدد توافيق 10 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 2 كلّ مرَّة

$= \frac{10!}{2!(10-2)!}$ بالتعويض في صيغة التوافيق

$= \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}}$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$= 45$ بالتبسيط

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{45}{190}$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$= \frac{9}{38}$ بالتبسيط

إذن، احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديّين هو $\frac{9}{38}$

أتحقَّق من فهمي

a) رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أن يكون حرف السين وحرف الميم في الترتيب المختار متجاورين؟

م س ا ف ر و ن

b) صندوق فيه 16 كرة مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل عددًا من بين الأعداد 1 إلى 16، إذا سُحِبت كرتان معًا بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ تحمل الكرتان المسحوبتان عددين زوجيين؟

في بعض المواقف، يُختار r عنصرًا بصورة عشوائية من بين n_1 من العناصر، ويُختار m عنصرًا من بين n_2 من العناصر، فيكون عدد العناصر الكلي $n_1 + n_2$، وقد يُختار r و m مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة لذلك (توافيق)، تبعًا لِما يقتضي الموقف.

مثال 6 : من الحياة

لجنة اجتماعية: **يعمل في أحد المصانع 35 عاملًا، و20 عاملةً. أراد صاحب المصنع تشكيل لجنة اجتماعية للعاملين والعاملات تضمُّ 5 أعضاء يُختارون بصورة عشوائية:**

1 ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال؟

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار عاملتين وثلاثة عمّال لهذه اللجنة.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو عدد طرائق اختيار 5 أعضاء عشوائيًّا من بين جميع العاملين والعاملات وعددهم $20 + 35$؛ أي 55 عاملًا وعاملةً. الترتيب هنا غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_{55}C_5$$ عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 55 عنصرًا

$$= 3478761$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث (A).

أجد $n(A)$، وهو عدد طرائق اختيار عاملتين من بين 20 عاملةً، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عمّال من بين 35 عاملًا، علمًا بأنَّ الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين.

بحسب مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

$$n(A) = {}_{20}C_2 \times {}_{35}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1243550$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1243550}{3478761}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.357$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال هو 0.357 تقريبًا.

2 ما احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات؟

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (B) يعني أنَّ رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، وأنَّ الأعضاء الآخرين من العاملات.

أتذكّر

أستعمل مبدأ العدِّ لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية ذات مراحل عدة، وذلك بضرب عدد الطرائق الممكنة في كل مرحلة من المراحل ببعضها البعض.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو 3478761 كما في الفرع الأول من السؤال.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (B).

أجد $n(B)$، وهو عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة وأمين الصندوق من بين 35 عاملًا (الترتيب مهم)، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عاملات من بين 20 عاملةً (الترتيب غير مهم):

$$n(B) = {}_{35}P_2 \times {}_{20}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1356600$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1356600}{3478761}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.39$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأميــن الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات هو 0.39 تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

أعمال: يراد تشــكيل فريق عمل مُكوَّن من 7 موظفين في إحدى الشركات يُختارون عشوائيًّا من بين 9 مبرمجين و5 محاسبين:

a) ما احتمال أنْ يتألَّف الفريق من 4 مبرمجين و3 محاسبين؟

b) ما احتمال أنْ يضم الفريق 4 مبرمجين، و3 محاسبين من بينهم رئيس الفريق ونائبه.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $8!$

2) $9! - 2 \times 7!$

3) $\frac{6!}{2! \times 3!}$

4) $\frac{{}_6P_3 + {}_7P_4}{{}_5P_3}$

5) ${}_8C_3 \times {}_{11}C_6$

6) $\frac{{}_{12}C_4 + {}_{10}C_6}{{}_6C_2}$

7 طعام: بكم طريقةً مختلفةً يُمكِن لشخص اختيار وجبة غداء تحوي طبقًا رئيسًا واحدًا، وطبق حساء، وطبق سَلطة، من قائمة الطعام المجاورة؟

قائمة الطعام

أنواع السَّلطة	أنواع الحساء
سَلطة عادية.	عدس.
سَلطة ذُرَة.	خضراوات مُتنوِّعة.
سَلطة حارَّة.	فُطْر.
سَلطة شمندر.	

الطبق الرئيس

منسف. مقلوبة. كبسة.

كم عددًا مُؤلَّفًا من 4 أرقام يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: $1, 2, 3, 5$:

8 إذا سُمِح بالتكرار؟

9 إذا لم يُسمَح بالتكرار؟

10 كم عددًا يحوي 6 أرقام مختلفة، ويقبل القسمة على 5، يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: $0, 1, 2, 3, 4, 5$؟

إرشاد: يقبل العدد القسمة على 5 إذا كانت آحاده 0 أو 5.

11 كم عددًا زوجيًّا أقل من 900 يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: $5, 6, 7, 8, 9$؛ شرط عدم استعمال الرقم أكثر من مرَّة واحدة في أيِّ عدد؟

معلومة

اخترع الفيزيائي والمهندس الكهربائي جيمس راسيل الأقراص المُدمَجة عام 1970م؛ بُغيَةَ إيجاد نظام تسجيل صوتي أكثر دقَّة من أشرطة التسجيل (الكاسيت).

هدايا: لدى هالة 6 أقراص مُدمَجة تحوي موضوعات تعليمية مُتنوِّعة، و4 أقراص أُخرى تحوي مقاطع رياضية مُتعدِّدة. ترغب هالة في إهداء 4 من هذه الأقراص إلى صديقتها ردينة:

12 ما عدد طرائق اختيار الهدية؟

13 ما عدد طرائق اختيار الهدية إذا ضمّنتها هالة قرصًا واحدًا على الأقل من كل نوع؟

أجد قيمة n في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $n! = 720$

15 ${}_nP_2 = 42$

16 ${}_nP_3 = 10\times {}_nP_2$

17 ${}_nC_3 = 26n$

18 ${}_nC_5 = {}_nC_7$

19 ${}_nC_3 - {}_{(n-2)}C_3 = 64$

20 **رياضة**: يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلسًا مُكوَّنًا من 14 سيدة و10 رجال. قرَّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغَّرة من المجلس تضمُّ 4 أعضاء بصورة عشـوائية، ويُنتخَب منها رئيس للجنة، وأمين للسر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من 3 سيدات تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟

معلومة

تُنتَـج بعض الأغذيــة المُعدَّلة وراثيًّا عن طريق إجراء تغييرات في تسلســلها الجيني الطبيعي (DNA)، ويُعتقَـد أنَّ هــذه الأغذية ضارَّة بصحة الإنسان.

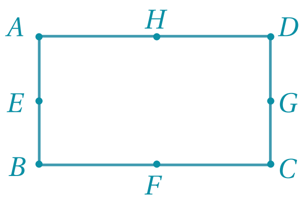
21 **زراعة**: يضمُّ قسم التطوير في إحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم رنا وأحمد. ما احتمال اختيار رنا وأحمد لحضور ندوة عن المُنتَجات المُعالَجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

عائلة تضمُّ 6 أولاد و3 بنات. أرادت الأم اختيار 4 منهم لإعداد وجبة العشاء:

22 ما احتمال اختيار اثنين من الأولاد، واثنتين من البنات لإعداد وجبة العشاء؟

23 ما احتمال اختيار ولد لإعداد الشـــاي، وولد لطهـــي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة؟

24 **هندسة**: إذا اختيرت 3 نقاط عشوائيًّا من بين النقاط: A, B, C, D, E, F, G, H في الشكل المجاور، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟



مهارات التفكير العليا

25 **تبرير**: متى يكون $_{n}C_{r} = {}_{n}P_{r}$؟ أُبرِّر إجابتي.

26 **مسألة مفتوحة**: أكتب مسألة تتضمَّن حادثًا احتماله $\frac{1}{_{10}C_3}$.

27 **تبرير**: بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الحادي عشر الذي يضم 14 لاعبًا. أراد معلِّم التربية الرياضية أنْ يُوزِّع عشوائيًّا على كل لاعب قميصًا رياضيًّا من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14. ما احتمال حصول صالح على القميص رقم 9، وحصول بلال على القميص رقم 10؟ أبرر إجابتي.

الدرس 2

المُتغيِّرات العشوائية
Random Variables

فكرة الدرس
- تعرُّف المُتغيِّر العشوائي، وإنشاء توزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقُّع والتباين لمُتغيِّر عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات المُتغيِّر العشوائي، التوزيع الاحتمالي، التوقُّع، التباين.

مسألة اليوم أُلقِي حجرا نرد منتظمان ومتمايزان معًا مرَّة واحدة، ثم دُوِّن الفرق المُطلَق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما الفرق الذي احتماله أكبر؟

المتغيِّر العشوائي

المُتغيِّر العشوائي (random variable) هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ H تعني صورة، وأنَّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر الفضاء العيني للتجربة

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

عدد الصور المُرتبِط بكل عنصر

$$X = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

إذن، مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

رموز رياضية

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X.

التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) للتجربة العشوائية هو اقتران يربط قِيَم المُتغيِّر العشوائي باحتمالات وقوعها في التجربة، ويُرمَز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه عند إلقاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قِيَم المُتغيِّر العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

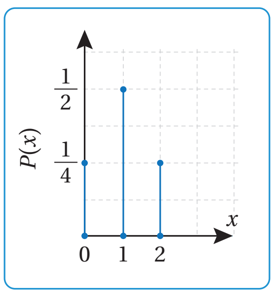
وبذلك تكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني:

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي



أتعلَّم

مجال التوزيع الاحتمالي هو مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي، ومداه مجموعة قِيَم الاحتمالات المقابلة.

مثال 2

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين، فأجد التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قِيَم المُتغيِّر X.

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قِيَم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

قِيَم x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد النواتج	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
الاحتمال $P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

أتذكَّر

عدد النواتج المُمكِنة في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين معًا مرَّة واحدة هو 36 ناتجًا، ويُمكِن إيجاد قيم x وعدد النواتج باستعمال مُخطَّط الاحتمال الآتي:

أتحقَّق من فهمي

سُحِبت بطاقتان عشوائيًّا دون إرجاع من وعاء يحوي البطاقات الآتية:

1	3	0	3

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على هاتين البطاقتين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X.

أُلاحِظ في المثال السابق أنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي يساوي 1:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=1$$

وهذه الخاصية عامة لأيِّ مُتغيِّر عشوائي.

مفهوم أساسي — اقتران التوزيع الاحتمالي

بالكلمات: إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا، فإنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X=x)$ يساوي 1

بالرموز: إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا، فإنَّ $\sum P(X=x)=1$.

تساعد خاصية مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي على إيجاد احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي، ثم حساب احتمالات ضمن شروط مُحدَّدة على قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.2	a	$2a$	0.25

1 أجد قيمة a.

$0.1+0.2+a+2a+0.25=1$ لأنَّ $\sum P(X=x)=1$

$0.55+3a=1$ بجمع الحدود المتشابهة

$3a=0.45$ بطرح 0.55 من طرفي المعادلة

$a=0.15$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

2 أجد ناتج: $P(X \le 0)$.

بتحديد قِيَم X ضمن الشرط المُحدَّد $\quad P(X \le 0) = P(X = 0) + P(X = -1)$

بتعويض قِيَم الاحتمالات $\quad = 0.1 + 0.2$

بالجمع $\quad = 0.3$

3 أجد ناتج: $P(X \ge 0)$.

الحادث $X \ge 0$ هو مُتمِّم للحادث $X = -1$ $\quad P(X \ge 0) = 1 - P(X = -1)$

بتعويض قيمة الاحتمال $\quad = 1 - 0.1$

بالطرح $\quad = 0.9$

4 أجد منوال التوزيع.

المنوال هو قيمة X الأعلى تكرارًا. وفي هذه المســألة، فإنَّ المنوال هو القيمة المقابلة لأعلى احتمال؛ أيْ 0.3 المقابل للقيمة 2

إذن، منوال التوزيع هو 2

أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشــوائية، فإنَّ: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$، حيــث $\overline{A}$ هــو الحادث المُتمِّم للحادث A.

أُفكِّر

هــل يُمكِن إيجــاد ناتج $P(X \ge 0)$ بطريقــة أخرى؟

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.25	g	0.35	3g

a) أجد قيمة g.

b) أجد ناتج: $P(1 \le X < 3)$.

c) أجد ناتج: $P(X < 4)$.

d) أجد منوال التوزيع.

توقع المتغيِّر العشوائي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي $(\overline{x})$ لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها $(\sum x \cdot f)$ على مجموع التكرارات $(\sum f)$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation) للمُتغيِّر العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز $E(X)$.

أتعلَّم

التوقُّع هو القيمة المُتوقَّعة للمُتغيِّر العشوائي عند تكرار التجربة العشوائية عددًا كبيرًا جدًّا من المرّات.

مفهوم أساسي — التوقُّع

بالكلمات: التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز: $E(X) = \sum x.P(x)$

مثال 4 : من الحياة

دراسة: **في دراسة إحصائية شملت 100 أُسْرة اختيرت عشوائيًّا، أُريد تعرُّف عدد أجهزة الحاسوب التي تملكها هذه الأُسَر. والجدول الآتي يُبيِّن نتائج هذه الدراسة:**

عدد أجهزة الحاسوب (x)	0	1	2	3
عدد الأُسَر (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب لدى كل أُسْرة:

أتذكَّر

عند استقصاء أمر ما عن مجتمع كبير جدًّا، فإنَّه يصعب الوصول إلى أفراده جميعًا؛ لذا يصار إلى استعمال العيِّنة، وهي مجموعة صغيرة تُختار عشوائيًّا من المجتمع لتمثيله.

1 **أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.**

أجد احتمال كل قيمة من قِيَم X؛ بحساب تكرارها النسبي عن طريق قسمة التكرار المقابل لكل قيمة على مجموع التكرارات، وهو 100، فيكون جدول التوزيع الاحتمالي كما يأتي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.17	0.42	0.31	0.10

2 **أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.**

$E(X) = \sum x.P(x)$ صيغة التوقُّع

$= (0\times0.17) + (1\times0.42) + (2\times0.31) + (3\times0.10)$ مجموع نواتج الضرب

$= 1.34$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

تجد حنين عددًا من الرسائل في بريدها الإلكتروني كل يوم، فقرّرت رصد عدد الرسائل التي وصلتها يوميًّا من 50 يومًا اختيرت عشوائيًّا، وكانت النتائج التي توصَّلت إليها كما في الجدول الآتي:

عدد الرسائل (x)	1	2	3	4	5
عدد الأيام (التكرار f)	7	22	18	1	2

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الرسائل اليومية التي تصل البريد الإلكتروني لحنين:

a) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

b) أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

معلومة

ازداد الاعتماد على البريد الإلكتروني في السنوات الأخيرة، بحيث أصبح بديلًا عن البريد الورقي، حتى في بعض المعاملات الرسمية.

يَلزم أحيانًا إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم تطبيق الصيغة الخاصة بإيجاد التوقُّع.

مثال 5

أُلقِيت قطعة نقود غير منتظمة 3 مرّات متتالية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد $E(X)$، علمًا بأنَّ احتمال ظهور الصورة في الرمية الواحدة هو 0.3

بما أنَّ $P(H) = 0.3$، فإنَّ احتمال ظهور الكتابة (T) هو: $P(T) = 1-0.3 = 0.7$

الخطوة 1: أُحدِّد قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

قِيَم X في هذه التجربة هي: $0, 1, 2, 3$

الخطوة 2: أجد الاحتمالات.

$P(x=0) = P(T, T, T)$ يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 0$

$= 0.7 \times 0.7 \times 0.7$ قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= 0.343$ بالضرب

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 1$

$P(X=1) = P(H, T, T) + P(T, H, T) + P(T, T, H)$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= (0.3\times0.7\times0.7) + (0.7\times0.3\times 0.7) + (0.7\times0.7\times0.3)$

بالتبسيط

$= 0.441$

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 2$

$P(X=2) = P(H, H, T) + P(H, T, H) + P(T, H, H)$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= (0.3\times0.3\times0.7) + (0.3\times0.7\times0.3) + (0.7\times0.3\times0.3)$

بالتبسيط

$= 0.189$

يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 3$

$P(X=3) = P(H, H, H)$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= 0.3 \times 0.3 \times 0.3$

بالضرب

$= 0.027$

الخطوة 3: أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.343	0.441	0.189	0.027

الخطوة 4: أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع

$E(X) = \sum x \,.\, P(x)$

مجموع نواتج الضرب

$= (0\times0.343) + (1\times0.441) + (2\times0.189) + (3\times0.027)$

بالتبسيط

$= 0.9$

أتحقَّق من فهمي

يحتوي وعاء على 6 بطاقات حمراء، و4 بطاقات زرقاء، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِبت منها بطاقتان على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البطاقات الزرقاء المسحوبة، فأجد $E(X)$.

تباين المتغيِّر العشوائي

التباين (Variance) للمُتغيِّر العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم المُتغيِّر عن وسطها الحسابي $E(X)$، ويُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز σ^2، ويُمكِن حسابه بالعلاقة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

مفهوم أساسي **التباين**

بالكلمات: التباين للمُتغيِّر العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع نواتج ضرب مربعات قِيَم المُتغيِّر X في احتمال كل قيمة، مطروحًا منه مربع توقُّع المُتغيِّر X.

بالرموز: $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum (x^2 \,.\, P(x)) - (E(X))^2$

مثال 6

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.3	0.12	0.15	0.12	0.31

1 أجد التوقُّع $E(X)$.

$E(X) = \sum x \,.\, P(x)$ صيغة التوقُّع

$= (0\times0.3) + (1\times0.12) + (2\times0.15) + (3\times0.12) + (4\times0.31)$ مجموع نواتج الضرب

$= 2.02$ بالتبسيط

2 أجد التباين $\text{Var}(X)$.

$\text{Var}(X) = \sum (x^2 \,.\, P(x)) - (E(X))^2$ صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي X

$= ((0\times0.3)+(1\times0.12)+(4\times0.15)+(9\times0.12)+(16\times0.31)) - (2.02)^2$ بالتعويض

≈ 2.68 بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	1	3	5
$P(X=x)$	0.3	0.4	0.1	0.2

a) أجد التوقُّع $E(X)$.

b) أجد التباين $\text{Var}(X)$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة سحب 4 كرات على التوالي من كيس يحوي 3 كرات حمراء، وكرتين سوداوين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في الكرات المسحوبة، فأجد قِيَم X في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

1) السحب مع الإرجاع.

2) السحب من دون إرجاع.

3) في تجربة إلقاء قطعة نقود 6 مرّات متتالية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد قِيَم X.

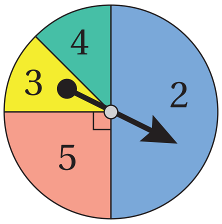
4) في تجربة إلقاء حجري نرد معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

يحتوي وعاء على 3 أقراص زرقاء، و6 أقراص خضراء. إذا سُحِبت من الوعاء 3 أقراص على التوالي مع الإرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأقراص الزرقاء المسحوبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

5) التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X في صورة جدول.

6) احتمال سحب قرص أزرق واحد على الأقل.

في تجربة تدوير مُؤشِّر القرص المجاور عشوائيًّا مرّتين متتاليتين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين اللذيْن توقَّف عندهما المُؤشِّر، وكان القطاعان الأخضر والأصفر متطابقان، فأجد:



7) التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.

8) منوال التوزيع.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	4	5	8
$P(X=x)$	0.2	b	0.15	0.29	$2b$

9 أجد قيمة b.

10 أجد ناتج: $P(2 < X \leq 8)$.

11 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

12 يتألَّــف مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 10 طلاب و15 طالبة، وقد شـــكَّل هؤلاء الأعضاء لجنة تضمُّ ثلاثة منهم بصورة عشـــوائية للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

أجد القيمة المُتوقَّعة لكلٍّ من التوزيعات الاحتمالية الآتية:

13

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.13	0.27	0.1	0.18	0.22	0.1

14

y	2	4	6	8
$P(Y=y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

15 دَوَّن أحد العلماء أعمار عدد من الغزلان في الجدول الآتي:

العمر (بالسنة x)	1	2	3	4	5	6	7	8
التكرار (f)	7	30	58	135	150	70	40	10

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عمر الغزال، أجد التوقُّع $E(X)$.

16 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	0	1	2
$P(X=x)$	a	$4b$	$2b$	a

إذا كان توقُّع X هو $\frac{5}{12}$ ، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

17 يعمل في إحدى المؤسسات 9 موظفين و15 موظفة، وقد شكَّل هؤلاء معًا لجنة مشتريات تضمُّ أربعة منهم بصورة عشوائية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي X على عدد الموظفات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X، ثم أجد التوقُّع $E(X)$.

18 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	-2	3
$P(Y=y)$	a	$1-a$

إذا كان $E(Y) = 2$، فأجد $\text{Var}(Y)$.

19 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** في تجربة ســحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقــام: 2، 3، 4، 5، إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين المســحوبتين، وكانت قِيَمه: 5، 6، 7، 8، 9، فأُحدِّد ما إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، وأبرِّر إجابتي.

21 **تحــدٍّ:** رُقِّمــت أوجه حجر نرد أحمــر بالأرقــام: $1, 1, 1, 2, 2, 3$، ثــم رُقِّمت أوجه حجر نــرد أزرق بالأرقام: $1, 2, 2, 3, 3, 3$، ثم أُلقِي الحجران معًا مرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي لكلا الحجرين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي.

22 **تحدٍّ:** في تجربة عشــوائية، اختيرت بطاقة من بين 3 بطاقــات تحمل الأرقام: 1، 3، 5، ثم أُلقِيت قطعة نقود منتظمة عــددًا من المرّات يُطابِق الرقم المكتوب على البطاقة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي H على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد عناصر الحادث المُرتبِط بالقيمة: $H = 3$، ثم أجد ناتج: $P(H = 3)$.

23 **مسألة مفتوحة:** أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي X، قِيَمه: $1, 3, 5$، وقيمة $E(X) = 4$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 عـــدد طرائق اختيار 3 طلبة عشـــوائيًّا من بين 10 طلبة، وترتيبهم على 3 مقاعد في صف واحد، هو:

a) ${}_{10}C_3$ b) ${}_{10}P_3$

c) ${}_{3}P_3$ d) 7!

2 أحد الآتية يُمثِّل الأعــداد الفردية التي يحوي كلٌّ منها 5 منازل مختلفة، ويُمكِن تكوينــه بإعادة ترتيب أرقام العدد 45092:

a) 120 b) 96

c) 60 d) 36

3 عدد طرائق اختيار 5 طلاب و3 طالبات عشوائيًّا من بين 9 طلاب و7 طالبات هو:

a) ${}_{16}C_8$ b) ${}_{16}P_8$

c) ${}_{9}C_5 \times {}_{7}C_3$ d) ${}_{9}P_5 \times {}_{7}P_3$

4 وعاء فيــه 6 بطاقات مُتماثِلــة، كُتِب عليهـــا الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6، إذا سُحِبت منه 3 بطاقات معًا بصورة عشوائية، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أصغر الأرقام الظاهرة على هذه البطاقات، فإنَّ مجموعة قِيَم X هي:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{1, 2, 3, 4\}$

d) $\{1, 2, 3\}$

5 وعاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثِلة. إذا سُـــحِبت منه 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مـــع الإرجاع، فإنَّ احتمال ســـحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء، هو:

a) $\frac{2}{27}$ b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

يوجد على أحد رفوف المكتبة 5 كتب علوم مختلفة، و4 كتب رياضيـــات مختلفـــة. أجد عدد طرائق ترتيـــب الكتب بعضها بجانب بعـــض على الرف في الحالات الآتية:

6 أنْ تكون كتب كل مبحث مُجمَّعة معًا.

7 أنْ تكون كتب الرياضيات فقط مُجمَّعة معًا.

8 ألّا يكون أيُّ كتابي رياضيات متجاورين.

يشـــترط أحد المواقع التعليمية في شـــبكة الإنترنت إنشـــاء المُســـتخدِم حســـابًا محميًّا بكلمة مـــرور مُكوَّنة من 8 رموز مختلفـــة تُختار مـــن بيـــن الأحـــرف: A, B, C, D, E, F، والأرقـــام: 1, 2, 3, 4, 5, 6، أجد عدد كلمات المرور التي يُمكِن إنشاؤها في الحالات الآتية:

9 اشتمال كلمة المرور على 3 أحرف متبوعة بـ5 أرقام.

10 بدء كلمة المرور برقم، وانتهاؤها برقم.

11 اشتمال كلمة المرور على 4 أحرف بعضها بجانب بعض.

12 اختير فريق كرة قدم خماسي من بين حارس مرمى، و5 مدافعين، و5 مهاجمين. ما احتمال أن يضمّ الفريق حارس المرمى، ومدافِعَيْن، ومهاجِمَيْن؟

13 كتب سعيد 4 رسائل، وكتب عناوين أصحابها على 4 مغلفات؛ ثمّ وضع في كل مغلف واحدة من الرسائل بصورة عشوائية. ما احتمال أن يكون سعيد قد وضع كل رسالة في المغلف الذي يحمل عنوان صاحبها؟

14 رتَّبت هالا أحرف كلمة(كاظمين) بعضها بجانب بعض في خط مستقيم. ما احتمال أنْ تكون الأحرف الصحيحة متجاورة؟

سأل مراد عددًا من طلبة الصف الثالث عن عدد أقلام التلوين في حقائبهم، ثم دوَّن النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأقلام في الحقيبة	3	8	10	14	15
التكرار	1	3	2	5	3

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الأقلام في الحقيبة:

15 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

16 أجد التوقُّع $E(X)$.

17 في تجربة إلقاء حجري نرد معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على القيمة المُطلَقة للفرق بين العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

18 في تجربة سحب بطاقتين مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مُرقَّمة بالأرقام: 1، 2، 3، 4، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب الرقمين الظاهرين على البطاقتين، فأجد قِيَم X.

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.25	k	0.33	$2k$

19 أجد قيمة k.

20 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

21 أجد التباين $\text{Var}(X)$.

22 إذا كان: ${}_nC_4 = {}_nP_3$، فما قيمة n؟

23 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي، فأجد قيمتين مُمكِنتين لكلٍّ من a، وb.

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	a	$3b$	$2a$	b

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي G على أكبر العددين في حال اختلافهما، أو دلَّ على أحدهما في حال تساويهما، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

24 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر G.

25 أجد ناتج: $P(2 < G \leq 5)$.

26 أجد التوقُّع $E(G)$.