المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفصل الأول / الوحدة الثانية

الدرس الأول

(المعدلات المرتبطة)

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

طبعة السنة 2025/2024

ولا تنسونا من دعائكم

الدرس الأول

المعدلات المرتبطة

مسائل المعدلات المرتبطة: هي أحد تطبيقات الاشتقاق الضمني باستخدام قاعدة السلسلة وتستخدم لإيجاد معدل التغير في المساحة أو الحجم أو الطول أو العرض أو نصف القطر أو الارتفاع أو الزاوية بمرور الزمن.

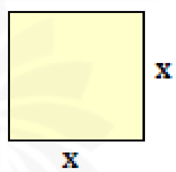
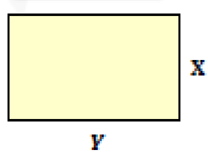
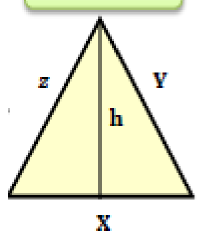
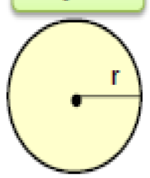
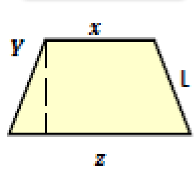
مخطط الدرس الأول

المعدلات المرتبطة

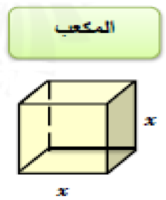
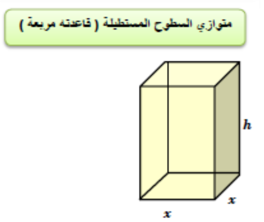
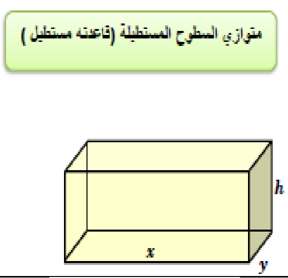
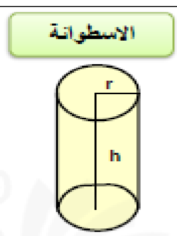
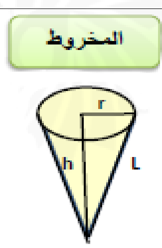
- معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن
- معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن
- معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن
- معدل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية
- معدل التغير بالنسبة إلى الزمن وميكانيكا الحركة
- معدل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن

تأسيس الدرس الأول أو المعرفة المفترضة (Assumed knowledge):

قوانين الأشكال الهندسية ثنائية الأبعاد:

ت	الشكل	المساحة	المحيط
1	المربع 	طول الضلع × طول الضلع = مساحة المربع $A = x \times x$ $A = x^2$	مجموع أطوال أضلاعه = محيط المربع $P = 4x$
2	المستطيل 	طول الضلع × طول الضلع = مساحة المستطيل $A = x \times y$	(الطول + العرض) × 2 = محيط المستطيل $P = 2(x + y)$
3	المثلث 	الارتفاع × القاعدة × $\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث $A = \frac{1}{2} x \times h$	مجموع أطوال أضلاعه = محيط المثلث $P = x + y + z$
4	الدائرة 	π × $(\text{نصف القطر})^2$ = مساحة الدائرة $A = \pi r^2$	π × القطر = محيط الدائرة $C = 2r\pi$
5	شبه المنحرف 	الارتفاع المحصور بينهما × (مجموع ضلعيه المتوازيين) $\frac{1}{2}$ = مساحة شبه المنحرف $A = \frac{1}{2}(x + z) \times h$	مجموع أطوال أضلاعه = محيط شبه المنحرف $P = x + y + z + L$

قوانين الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد (المجسمة):

ت	الشكل	الحجم V	المساحة الجانبية LA	المساحة الكلية SA
1		الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = x^2 \times x$ $V = x^3$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 4x \times x$ $LA = 4x^2$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 4x^2 + 2x^2$ $SA = 6x^2$
2		الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = x^2 \times x$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 4xh$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 4xh + 2x^2$ **ملاحظة: إذا كان متوازي المستطيلات مفتوح من إحدى الجهتين يكون القانون:** $SA = 4xh + x^2$
3		الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = xyh$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 2(x + y)h$ $LA = 2h(x + y)$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 2h(x + y) + 2(xy)$ **ملاحظة: إذا كان متوازي المستطيلات مفتوح من إحدى الجهتين يكون القانون:** $SA = 2h(x + y) + (xy)$
4		الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi r^2 h$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 2\pi rh$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 2\pi rh + 2\pi r^2$
5		الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \frac{1}{3}(\pi r^2)h$ $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$	المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي $LA = \frac{1}{2}(2\pi r)L$ $LA = \pi rL$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = \pi rL + 2\pi r^2$
6		الحجم = $\frac{4}{3}$ × (نصف القطر)^3 × π $V = \frac{4}{3}\pi r^3$	**ليس لها مساحة جانبية**	المساحة الكلية = 4 × (نصف القطر)^2 × π $SA = 4\pi r^2$

ملاحظة: يمكن إيجاد معدل التغير بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن (t) لكل من:

معدل التغير بالنسبة للزمن	الرمز	التغير	ت
$\frac{dA}{dt}$	A	المساحة	1
$\frac{dv}{dt}$	v	الحجم	2
$\frac{dr}{dt}$	r	نصف القطر	3
$\frac{dh}{dt}$	h	الارتفاع	4
$\frac{dx}{dt}$	x	الطول	5
$\frac{dy}{dt}$	y	العرض	6
$\frac{d\theta}{dt}$	θ	الزاوية	7

خطوات حل المعدلات الزمنية:

1) نستنتج (الشكل الهندسي والعلاقة المعطاة بالسؤال) ونحدد المتغيرات في المسألة. والمتغيرات يتم إعطائها رموز كما هو مبين في الجدول أعلاه.

2) إيجاد علاقة بين المتغيرات والعلاقة (إما قانون شكل هندسي أو علاقة مثلثية أو علاقة تشابه مثلثات أو علاقة مسافة بين نقطتين أو أي علاقة أخرى موجودة في السؤال) والعلاقات نوعان:

- علاقة رئيسية: وهي العلاقة التي يتم اشتقاقها بالنسبة للزمن.

- علاقة ثانوية: وهي العلاقة يتم استخدامها من أجل تقليل عدد المجاهيل في السؤال.

3) يتم تحديد الأعداد التي تكون بالسؤال وهي نوعان:

- ثابت دائم. (يتم تعويض العدد في العلاقة قبل الاشتقاق).

- متغير دائم. (وهناك كلمات في السؤال تدل على أنه متغير دائم مثل: في اللحظة، أو عندما يكون) ويتم تعويضه بعد الاشتقاق.

4) اشتقاق العلاقة الرئيسية بالنسبة للزمن.

5) التعويض بالمعلوم لإيجاد المجهول ومطلوب السؤال.

ملاحظة مهمة جداً :

1) الكلمات في السؤال (يتسرب، ينقص، ينخفض، يذوب، يتقلص، ينكمش) نعوض المقدار وتكون الإشارة (سالب).

مثال : مكعب جليدي يذوب بمعدل $0.5\ cm^3/min$ ، نعوضها بالحل $\frac{dv}{dt} = -0.5\ cm^3/min$

2) الكلمات (يصب، يزداد، يزيد، يتمدد) نعوض المقدار وتكون الإشارة (موجب).

مثال : مرشح مخروطي يصب فيه الماء بمعدل $0.1\ cm^3/sec$ ، نعوضها بالحل $\frac{dv}{dt} = +0.1\ cm^3/sec$

ملاحظة مهمة جداً :

1) إذا كانت وحدة القياس تحوي تكعيب فهذا يدل على معدل تغير في الحجم،
مثال: $\frac{dv}{dt} = 0.1\ cm^3/s$

2) إذا كانت وحدة القياس تحوي تربيع فهذا يدل على معدل تغير في المساحة،
مثال: $\frac{dA}{dt} = 2\ cm^2/s$

ملاحظة مهمة جداً :

عند اشتقاق أي متغير بالسؤال بالنسبة للزمن نشتقه اعتيادياً كما تعلمنا سابقاً عندما كنا نشتق الـ x ، ونضربه في $\frac{d(\text{اسم المتغير})}{dt}$.

$$A = x.y$$

$$\frac{dA}{dt} = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$$

ملاحظة مهمة جداً:

تتضمن أسئلة المعدلات الزمنية إحدى المعطيات التالية:

1) شكل هندسي ثلاثي الأبعاد (مجسم): (مكعب، متوازي مستطيلات قاعدته مربعة، متوازي مستطيلات قاعدته مستطيلة، أسطوانة، مخروط، كرة) ويكون المطلوب إما: (معدل التغير في الحجم، أو معدل التغير في المساحة الكلية، أو معدل التغير في المساحة الجانبية) أو معدل التغير في إحدى أبعاد الشكل (الطول، العرض، الارتفاع، نصف القطر).

2) أسئلة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية : وهي كل سؤال يكون الشكل الناتج من معطياته مثلث قائم الزاوية : ونستفيد من نظرية فيثاغورس $(z^2 = x^2 + y^2)$ كعلاقة أساسية أو كعلاقة ثانوية، ويكون المطلوب إيجاد:

- إما معدل التغير في طول أحد أضلاع المثلث وعندها نستخدم نظرية فيثاغورس كعلاقة رئيسية ويمكن استخدام إحدى القوانين المثلثية كعلاقة ثانوية:

1) $z^2 = x^2 + y^2$ **نظرية فيثاغورس**

-أو معدل التغير في الزاوية وعندها نستخدم قانون:

1) $\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

3) أسئلة النقاط على المنحنى وتكون على حالتين:

الحالة الأولى: عندما يذكر في المعطيات نقطة تنتمي أو تتحرك على منحنى ولا ترتبط هذه النقطة بنقطة خارج المنحنى، بحيث لا يذكر معدل اقتراب أو معدل ابتعاد، عندها تكون العلاقة المعطاة في السؤال هي العلاقة الأساسية التي يتم اشتقاقها.

الحالة الثانية: عندما يذكر في المعطيات نقطة تنتمي أو تتحرك على منحنى وترتبط هذه النقطة بنقطة خارج المنحنى، بحيث يطلب معدل اقتراب أو معدل ابتعاد، عندها يكون قانون المسافة بين نقطتين هي العلاقة الأساسية التي يتم اشتقاقها، وتكون معادلة المنحنى المعطاة في السؤال هي العلاقة الثانوية.

ملاحظة مهمة جداً: قانون المسافة بين نقطتين

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4) أسئلة تشابه المثلثات القائمة الزاوية: وهي نوعان:

- أسئلة ظل الجسم: بحيث يتحرك الجسم مبتعداً أو مقترباً من مصدر ضوئي، بحيث تكون العلاقة الرئيسية قانون التشابه بين مثلثين.

- اسئلة المخروط: بحيث ينتج مثلث صغير عندما يكون المخروط يحتوي على سائل ويأخذ شكل المخروط بحيث تكون العلاقة الرئيسية قانون التشابه بين مثلثين.

ملاحظة مهمة:

تشابه المثلثات: إذا كانت زوايا المثلث الأول تساوي زوايا المثلث الثاني يكون المثلثان متشابهان.

ملاحظة مهمة جداً:

إذا تشابه مثلثان تناسبت أطوال أضلاعهما. بمعنى:

1) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث صغير)}}{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}$

2) $\dfrac{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}{\text{قاعدة(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}$

3) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}{\text{قاعدة(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}$

4) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث صغير)}}{\text{قاعدة(مثلث كبير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}$

ملاحظة مهمة:

إذا كان المثلث قائم الزاوية يمكن استخدام قوانين النسب المثلثية كبديل لقوانين التشابه لأنها تعطي نفس النتيجة.

$$1)\quad \sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$2)\quad \cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$3)\quad \tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

5) أسئلة المثلثات الغير قائم الزاوية:

أما إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فلا نستطيع استخدام قوانين النسب المثلثية ويتم استخدام قوانين جيوب التمام.

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$
$$x^2 = z^2 + y^2 - 2zy\cos\theta$$
$$y^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos\theta$$

مسألة اليوم: (صفحة 74)

تستعمل المعادلة $S = \frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h ثابت طوله بالسنتيميتر ، و S كتلته بالكيلو جرام .

يتبع خالد حمية غذائية تجعله يخسر من كتلته $2kg$ شهرياً ، ما معدل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته $70kg$ ، علما بأن طوله $170cm$ ؟

$$\frac{dm}{dt} = -2kg/month$$

$$m = 70kg$$

$$h = 170cm$$

$$\frac{dS}{dt} = \text{المطلوب}$$

$$S = \frac{\sqrt{hm}}{19}$$

$$S = \frac{\sqrt{170m}}{19}$$

$$S = \frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{19} \times \frac{\frac{dm}{dt}}{2\sqrt{m}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}} \times \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}} \times -2$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}} \times -2$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}}$$

$$\frac{dS}{dt} \approx -0.082\ cm^2/month$$

معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن (فكرة الاشكال الهندسية)

مثال 1: (صفحة 75)

عند سقوط قطرة ماء على مسطح مائي تتكون موجات دائرية متحدة المركز ، إذا كان نصف قطر إحدى الدوائر يزداد بمعدل $3cm/s$ ، فأجد كلا مما يأتي :

1) معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $5cm$.

- نفرض نصف القطر r وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق $r = 5cm$

- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt} = 3cm/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض محيط الدائرة C وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير محيط الدائرة $\frac{dC}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون محيط الدائرة:

$$C = 2\pi r$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi(3)$$

$$\frac{dC}{dt} = 6\pi\ cm/s$$

إذن يزداد محيط الدائرة بمعدل $6\pi\ cm/s$ عندما يكون نصف قطرها $5\ cm$.

2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $9cm$.

- نفرض نصف القطر $r = 9cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير مساحة الدائرة $\frac{dA}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون مساحة الدائرة:

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(9)(3)$$

$$\frac{dA}{dt} = 54\pi\ cm^2/s$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 76)

تنفخ ماجدة بالوناً على شكل كرة ، فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$ ، أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $6cm$.

- الشكل: كرة
- نفرض نصف القطر $r = 6cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$ وهو المطلوب
- نفرض حجم الكرة V وهو متغير .
- نفرض معدل تغير حجم الكرة $\frac{dv}{dt} = 80\ cm^3/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون حجم الكرة =

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi\, r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$80 = 4\pi(6)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$80 = 144\pi\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{80}{144\pi} = \frac{144\pi}{144\pi}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

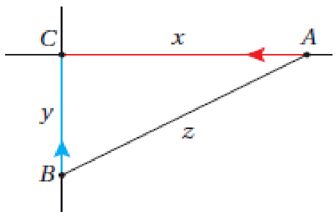
$$\frac{dr}{dt} = \frac{80}{144\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.55\pi\ cm/s$$

معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن (فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

مثال 2: (صفحة 77)

تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80Km/h وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100Km/h وهما تتجهان نحو تقاطع مروري، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3Km و 0.4Km (على الترتيب) من التقاطع.



- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 0.3\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 80\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 0.4\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 100\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب: التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-48 - 80}{2\sqrt{0.25}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-128}{1}$$

$$\frac{dz}{dt} = -128\ Km/h$$

اذن تقترب السيارتان إحداهما من الاخر بمعدل 128km/h عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3km و 0.4km (على الترتيب) من التقاطع.

أتحقق من فهمي: (صفحة 78)

تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة 45Km/h, واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة 40km/h، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما .

- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 40 \times 2 = 80\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 40\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 45 \times 2 = 90km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 45\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب : التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(80)(40) + (90)(45)}{\sqrt{(80)^2 + (90)^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3200 + 4050}{\sqrt{6400 + 8100}}$$

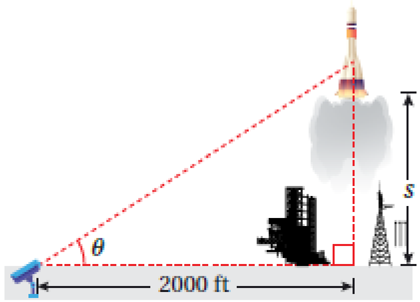
$$\frac{dz}{dt} = \frac{7250}{\sqrt{14500}}$$

$$\frac{dz}{dt} \approx 60.21\ Km/h$$

معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن: (فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

مثال 3 من الحياة: (صفحة 78)

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسياً إلى الأعلى ، وقد أعطي ارتفاعه بالاقتران : $s(t) = 50\,t^2$ ، حيث s الموقع بالأقدام ، و t الزمن بالثواني ، إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن منصة الإطلاق ، فأجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ 10 ثوان من انطلاقه .



- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- نفرض s موقع الصاروخ
- نفرض θ زاوية ارتفاع الصاروخ

المطلوب: أجد معدل تغير زاوية

العلاقة : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{s}{2000}$

نشتق اقتران الموقع لإيجاد السرعة:

$$s(t) = 50\,t^2$$

$$v(t) = \boxed{\frac{ds}{dt} = 100\,t}$$

- طول الضلع القائم الأول $x = 2000\ ft$ وهو ثابت يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني y وهو يمثل الاقتران $s(t) = 50\,t^2$
- المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\left[\frac{1}{\cos^2}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}\right]\cos^2\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

ولكن الوتر غير موجود بالمعطيات لذلك، نستعين بعلاقة ثانوية (نظرية فيثاغورس) لإيجاد طول الضلع الثالث (الوتر).

$$z = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$z = \sqrt{(50\,t^2)^2 + (2000)^2}$$

$$z = \sqrt{(50\,(10)^2)^2 + (2000)^2}$$

$$z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2}$$

$$\boxed{z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2} \quad \text{طول الوتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(5000)^2 + (2000)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{25 + 4}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}}$$

نعوض القيم في العلاقة الرئيسية لإيجاد المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100\,t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100\,(10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{4}{29}}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}\ rad/s$$

إذن معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29} rad/s$

اتحقق من فهمي: (صفحة 80)

أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع $50m$ فوق سطح الأرض ، وتتحرك أفقياً بسرعة $2m/s$. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط $100m$ ، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض $1.5m$.

$x = ?$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$y = 50 - 1.5 = 48.5$

$L = 100$

$\frac{d\theta}{dt} =$ المطلوب

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta = \frac{48.5}{x}$

$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\sec^2\theta = \frac{L^2}{x^2}$

$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt} \times \frac{x^2}{L^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{L^2} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{(100)^2} \times 2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{5000}$$

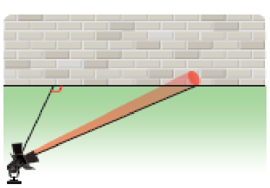
$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} \approx -0.0097\, rad/s}$$

معدل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية:

(فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

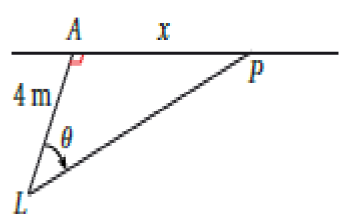
مثال 4: (صفحة 80)

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $4m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $8m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .



المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{4}$$

$$x = 4\tan\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{3}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi \ \ rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ نستخدم متطابقة فيثاغورس : $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{4}$$

$$\tan\theta = 2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + (2)^2$$

$$\boxed{\sec^2\theta = 5}$$

بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta = 5}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\,(5)(6\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\pi$$

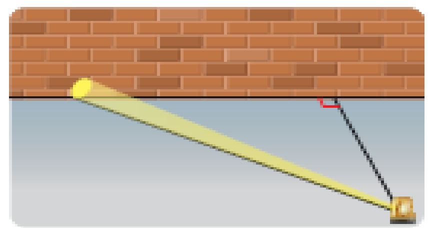
إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $120\pi m/min$ عندما تكون على بعد $8m$ عن النقطة A أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 82)

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $3m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $1m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .

المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$

$$x = 3\tan\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{4}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -8\pi \;\; rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ نستخدم متطابقة فيثاغورس : $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\sec^2\theta = \frac{10}{9}}$$

بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -8\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta = \frac{10}{9}}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{10}{9}\right)(-8\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{10}{3}\right)(-8\pi)$$

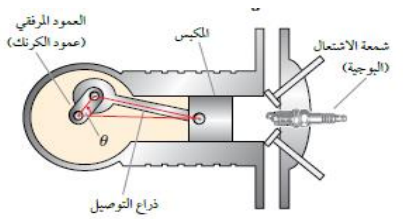
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{80\pi}{3}$$

إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $-\frac{80\pi}{3}\,m/min$ عندما تكون على بعد $1m$ عن النقطة A أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .

معدل التغير بالنسبة إلى الزمن وميكانيكا الحركة: (فكرة المثلثات الغير قائم الزاوية)

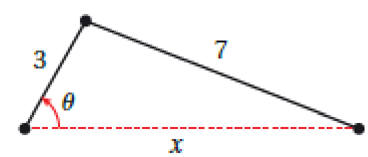
مثال 5: (صفحة 82)

يبين الشكل الآتي محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها $7\ in$ ، وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله $3\ in$. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة ، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ ؟



الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام



$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$

$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2(x)(3)\cos\theta$$

$$49 = x^2 + 9 - 6x\cos\theta$$

$$40 = x^2 - 6x\cos\theta$$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left((x)\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + (\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$6\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{(6\cos\theta - 2x)}{(6\cos\theta - 2x)}\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta - 2x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta - 2x}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{200}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 400\pi \ \ rad/min}$$

- لإيجاد x نستخدم العلاقة الرئيسية : $40 = x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$

$$40 = x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$$

$$40 = x^2 - 6x\frac{1}{2}$$

$$40 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

$$\boxed{x = 8}$$

$$x = -5$$

بما أن x يعبر عن مسافة ، نهمل القيمة السالبة ونختار $\boxed{x = 8}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta - 2x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)\sin\frac{\pi}{3}(400\pi)}{6\cos\frac{\pi}{3} - 2(8)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{48 \times \frac{\sqrt{3}}{2}(400\pi)}{6\frac{\sqrt{3}}{2} - 16}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{24 \times \sqrt{3}(400\pi)}{3\sqrt{3} - 16}$$

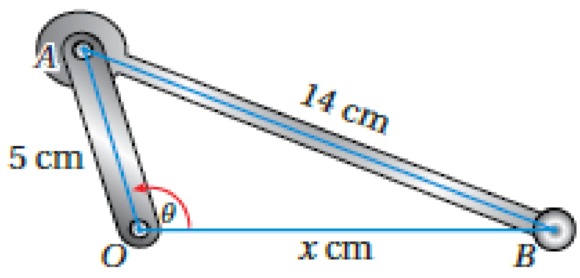
$$\frac{dx}{dt} = \frac{9600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx -4018}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 84)

في المخطط الاتي تمثل $\overline{AB}$ ذراع توصيل مكبس طولها $14\ cm$ في محرك سيارة، وتمثل $\overline{QA}$ عموداً مرفقياً طوله $5\ cm$ ،وهو مثبت بطرف ذراع التوصيل، ويدور حول النقطة O التي تبعد مسافة $x\ cm$ عن المكبس.

أجد سرعة دوران العمود المرفقي عندما يكون المكبس على بعد $11\ cm$ من النقطة O ، ويتحرك مقترباً منها بسرعة $120\ cm/s$ في تلك اللحظة .



من السؤال:

$x = 11$

$\frac{dx}{dt} = -120 cm/s$

المطلوب : $\frac{d\theta}{dt}$

الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$

$14^2 = 11^2 + 5^2 - 2(11)(5)\cos\theta$

$196 = 121 + 25 - 110\cos\theta$

$-110\cos\theta = -50$

$\frac{110\cos\theta}{110} = \frac{-50}{110}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{-5}{11}}$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = (1)^2 - \left(\frac{-5}{11}\right)^2$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{25}{121}$

$\sin^2\theta = \frac{96}{121}$

$\sqrt{\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{96}{121}}$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{96}}{11}}$$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 10\left((x)\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + (\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 10\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$10\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$10\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(10\left(\frac{-5}{11}\right) - (2)(11)\right)(-120)}{(10)(11)\left(\frac{\sqrt{96}}{11}\right)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\left(\frac{-50}{11}\right) - 22\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\left(\frac{-50}{11}\right) - \frac{242}{11}\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(-\frac{292}{11}\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{3185.45}{97.97}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \approx 32.5\ rad/s$$

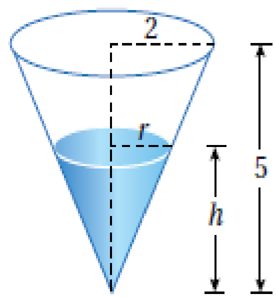
أذن يدور العمود المرفقي بسرعة $32.5\ rad/s$ تقريباً .

معدل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن: (فكرة تشابه المثلثات القائمة الزاوية)

مثال 6: (صفحة 85)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه 5m ، ونصف قطر قاعدته 2m ، ورأسه إلى الأسفل .

تسرب الماء من الخزان بمعدل $\frac{1}{12}\,m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه 4m ؟



الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 2

نصف قطر سطح الماء r

ارتفاع المخروط 5

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 4 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V

التغير في حجم الماء $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}$$

$$r = \frac{2h}{5}$$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2h}{5}\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{4h^2}{25} h$$

$$V=\frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\left(\frac{4\pi}{75}\right)3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12}=\left(\frac{4\pi}{75}\right)3(4)^2\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12}=\frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}$$

$$\left[-\frac{1}{12}=\frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}\right]\quad\times\frac{75}{192\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{75}{2304\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{25}{768\pi}$$

إذن يتناقص ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{25}{768\pi}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء $4m$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 86)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $10m$ ، ونصف قطر قاعدته $5m$ ،

صب الماء في الخزان بمعدل $\pi m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $8m$ ؟

الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 5

نصف قطر سطح الماء r

ارتفاع المخروط 10

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 8 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V

التغير في حجم الماء $\pi = \frac{dV}{dt}$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{5}{10}$$

$$r = \frac{1}{2}h$$

المعادلة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h^2\right)h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{12}\right)3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = 16\pi\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\pi}{16\pi} = \frac{16\pi}{16\pi}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء 8m .

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 86)

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمعدل $2m/s$ ، ويقل طول ضلعه الآخر بمعدل $3m/s$ ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، وفي لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول $20cm$ ، وطول الضلع الثاني $50cm$.

1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

الشكل: مستطيل

القانون : مساحة المستطيل $A = xy$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\ cm/s$$

$$x = 20\ cm/s$$

$$y = 50\ cm/s$$

$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 20(-3) + 50(2)$$

$$\frac{dA}{dt} = -60 + 100$$

$$\frac{dA}{dt} = 40\ cm^2/s$$

2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

القانون : محيط المستطيل $C = 2x + 2y$

$$C = 2x + 2y$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = 2(2) + 2(-3)$$

$$\frac{dC}{dt} = 4 + (-6)$$

$$\frac{dC}{dt} = -2\ cm/s$$

3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة؟

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{(20)^2 + (50)^2}$$

$$R = \sqrt{2900}$$

$$R = \sqrt{1000 \times 29}$$

$$R = 10\sqrt{29}$$

$$2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 2(20)(2) + 2(50)(-3)$$

$$2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 80 + (-300)$$

$$\frac{2(10\sqrt{29})}{2(10\sqrt{29})}\frac{dR}{dt} = \frac{-220}{2(10\sqrt{29})}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ cm/s$$

4) أي الكميات في المسألة متزايدة؟ أيهما متناقصة؟ أبرر إجابتي.

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب) ، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر (لأن معدل نغير كل منهما سالب) .

مكعب طول ضلعه $10cm$ ، بدأ المكعب يتمدد ، فزاد طول ضلعه بمعدل $6cm/s$ ، وظل محافظاً على شكله :

5) أجد معدل تغير حجم المكعب بعد $4\ s$ من بدء تمدده .

الشكل: مكعب

القانون حجم المكعب : $V = x^3$

$$x = 10\ cm$$

$$\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$$

$$t = 4\ s$$

$$\frac{dV}{dt} = \ ?$$

$$V = x^3$$

$$V = (10 + 6t)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2(6)$$

$$\frac{dV}{dt} = 18(10 + 6(4))^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 18(34)^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 20808\ cm^3/s$$

6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $6s$ من بدء تمدده .

القانون مساحة المكعب : $V = 6x^2$

$$V = 6(10 + 6t)^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 12(10 + 6t)6$$

$$\frac{dV}{dt} = 72(10 + 6(6))$$

$$\frac{dV}{dt} = 72(46)$$

$$\frac{dV}{dt} = 3312\ cm^2/s$$

وقود : خزان أسطواني الشكل، ارتفاعه $15m$ ، وقطر قاعدته $2m$ ملئ الخزان بالوقود بمعدل $500\ L/min$:

7) أجد معدل ارتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة.

الشكل: أسطواني

القانون : حجم الاسطوانة $V = \pi r^2 h$

ارتفاع الخزان $h = 15m$

قطر قاعدته $2r = 2m$

نصف قطر قاعدته $r = 1m$ ثابت يعوض قبل الاشتقاق

معدل التغير في الحجم $\frac{dV}{dt} = 500\ L/min$ وتساوي $\frac{dV}{dt} = 0.5\ m^3/min$

المطلوب : معدل ارتفاع الوقود في الخزان ? = $\frac{dh}{dt}$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi (1)^2 h$$

$$V = \pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} m/min$$

8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة.

القانون : المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المطلوب : **معدل تغير المساحة الجانبية للوقود** ? = $\frac{dA}{dt}$

$$A = 2\pi r h$$

$$A = 2\pi (1) h$$

$$A = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{dA}{dt} = 1\ m^2/min$$

9) علوم : يمثل الاقتران : $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بعد x متراً من النار . إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمعدل $2\ m/s$ ، فأجد سرعة تغير درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بعد $5\ m$ من االنار .

العلاقة هي : $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$

معدل التغير بالمسافة بين الشخص والنار $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$

المسافة بين الشخص والنار عندما $x = 5\ m$ متغير يعوض بعد الاشتقاق

المطلوب : سرعة تغير درجة الحرارة $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5}$

$$T(x) = \frac{200}{1 + x^2}$$

$$T(x) = 200(1 + x^2)^{-1}$$

$$\frac{dT}{dt} = -200(1 + x^2)^{-2}(2x\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1 + x^2)^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400(5)(2)}{(1 + (5)^2)^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4000}{676}$$

$$\frac{dT}{dt} = -5.9\ C^{\circ}/s$$

أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل $5.9\ C^{\circ}/s$ تقريباً عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار .

الآت : يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على قمة كومة مخروطية الشكل ، إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائماً ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها ، فأجد كلا مما يأتي :

10) سرعة تغير ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

الشكل مخروط رأسه للأعلى

معدل تغير حجم كومة الرمل $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$

ارتفاع كومة الرمل $(2r)$ $h = \frac{3}{8}$ وتساوي $h = \frac{3}{8}\ (2r)$

$$h = \frac{3}{8}\ (2r)$$

$$h = \frac{3}{4}\ r$$

$$r = \frac{4}{3}\ h$$

المطلوب : سرعة تغير ارتفاع الكومة ؟ $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} =$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{3}\ h\right)^2\ h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{3}\ h\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{16}{9}\ h^2\right) h$$

$$V = \frac{16}{27}\ \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = (3)\frac{16}{27}\ \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\ \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{16}{9}\,\pi(16)\frac{dh}{dt}$$

$$\left[10 = \frac{256}{9}\,\pi\frac{dh}{dt}\right] \quad \times \frac{9}{256\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{90}{256\pi}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = \frac{45}{128\pi}\ m/min$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = 0.112\ \ m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 متراً لكل ثانية تقريباً .

11) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

$$r = \frac{4}{3}\,h$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\,\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3}\,\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3}\times\frac{45}{128\pi}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{15}{32\pi}\ m/min$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = 0.149\ m/min$$

إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 متراً لكل ثانية تقريباً .

12) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

المطلوب : سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة ؟= $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{h=4}$

$$h = \frac{3}{8}(2r)$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{15}{32\pi}$$

عدد المجاهيل 2 نحتاج علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل:

$$h = \frac{3}{8}(2r)$$

$$4 = \frac{3}{8}(2r)$$

$$\left[4 = \frac{3}{4}r\right] \quad \times \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{16}{3}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{15}{32\pi}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 5\ m^2/min$$

إذن تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ m^2/min$ عندما يكون ارتفاعها 5 أمتار .

طيران: رصد مراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تحلقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة $450\ km/h$ ، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة $600\ km/h$:

13) أجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة $225\ km$ عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، في حين تبعد الطائرة الثانية مسافة $450\ km/h$ عن النقطة نفسها .

بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $x = 225km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير (تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dx}{dt} = -450km/h$

بعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $y = 450km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير(تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dy}{dt} = -600km/h$

البعد بين الطائرتين هو ? $s =$

المطلوب : معدل تغير المسافة بين الطائرتين ? $\frac{ds}{dt} =$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(225)(-450) + (450)(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (450)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-101250 - 270000}{\sqrt{50625 + 202500}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-371250}{\sqrt{253125}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-371250}{503.115}$$

$$\frac{ds}{dt} \approx -737.9\ Km/h$$

إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 737.9 كيلومتراً في الساعة .

14) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف؟ أبرر إجابتي.

يتم حساب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$t_1 = \frac{225}{450}$$

$$t_1 = 0.5\ h$$

$$t_2 = \frac{450}{600}$$

$$t_2 = 0.75\ h$$

لن تصل الطائرتان لنقطة التقاء المسارين في وقت واحد بعد رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما غير متوقع ولا يجب على مراقب الحركة الجوية اتخاذ أي إجراء بخصوص الطائرتين.

15) دراجات نارية : تحركت دراجتان في الوقت نفسه ، ومن النقطة نفسها ، على طريقين مستقيمين ، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3} rad$. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى $15km/h$، وسرعة الدراجة الثانية $20km/h$ ، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما .

المسافة المقطوعة للدراجة الأولى $x = 15t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

المسافة المقطوعة للدراجة الثانية $y = 20t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

سرعة الدراجة الأولى $\frac{dx}{dt} = 15km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

سرعة الدراجة الثانية $\frac{dy}{dt} = 20km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

الزاوية بينهما $\theta = \frac{\pi}{3} rad$

المطلوب : $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = ?$

الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - (30t)(40t)}$$

$$z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - (1200t^2)}$$

$$z = \sqrt{625t^2 - (1200t^2)}$$

$$z = 5\sqrt{23}t\ km/h$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{23}\ km/h$$

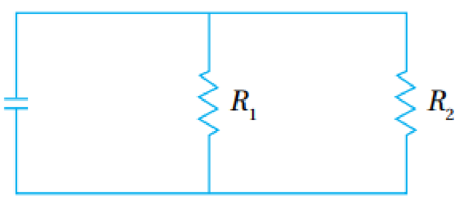
إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الأخرى بسرعة $5\sqrt{23}$ كيلومتر كل ساعة.

16) كهرباء : تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي ، كما في الشكل المجاور ، بالعلاقة الآتية : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ، إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمعدل $0.3\Omega/s$ و $0.2\Omega/s$ على الترتيب ، فأجد معدل تغير R عندما $R_1 = 80$ و $R_2 = 100$

عندما $R_1 = 80$ و $R_2 = 100$ يكون :

معدل التغير في R_1 يساوي $\frac{dR_1}{dt} = 0.3\Omega/s$

معدل التغير في R_2 يساوي $\frac{dR_2}{dt} = 0.2\Omega/s$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{180}{8000}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{90}{4000}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{9}{400}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2}=-\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}-\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$$

$$\frac{dR}{dt}=R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}+\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{400}{9}\right)^2\left(\frac{0.3}{(80)^2}+\frac{0.2}{(100)^2}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{0.3}{6400}+\frac{0.2}{10000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{3000}{64000000}+\frac{1280}{64000000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{4280}{64000000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{16}{81}\right)\left(\frac{4280}{6400}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{4280}{400}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{1}{81}\right)(10.70)$$

$$\frac{dR}{dt}\approx 0.132\ \Omega/\ s$$

17) قوارب : يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1m$ عن مقدمة القارب ، إذا طوت البكره حبل السحب بسرعة $1m/s$ ، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8m$ في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ ؟

الشكل: مثلث قائم الزاوية

العلاقة الرئيسية: نظرية فيثاغورس

المسافة بين الرصيف والبكرة $y = 1m$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين الرصيف والقارب $x = 8m$ وهي متغيرة تعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير المسافة بين القارب ورصيف الاصطفاف $\frac{dL}{dt} = -1m/s$

المطلوب : سرعة اقتراب القارب من الرصيف $\frac{dx}{dt} = ?$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$L^2 = x^2 + (1)^2$$

$$L^2 = x^2 + 1$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{2x}\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\frac{dL}{dt}$$

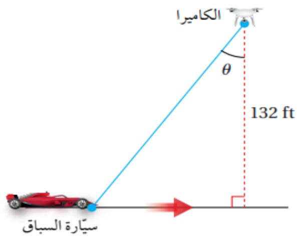
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8}\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{64+1}}{8}(-1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$

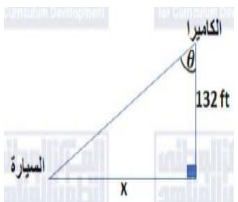
سباقات سيارات : ترتفع كاميرا عن الارض مسافة $132\ ft$ ، وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق ، وتبلغ سرعتها $264\ ft/s$ كما في الشكل المجاور :



18) أجد سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

الشكل: مثلث قائم الزاوية

العلاقة الرئيسية : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



المسافة بين الكاميرا والأرض $y = 132\ ft$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض $x = ?$ وهي متغيرة

معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تقترب) $\frac{dx}{dt} = -264\ ft/s$

الزاوية $\theta = 0$ لأنه عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

المطلوب : معدل تغير الزاوية θ ؟ $\frac{d\theta}{dt} = ?$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}\times\cos^2 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(-264)\times(1)$$

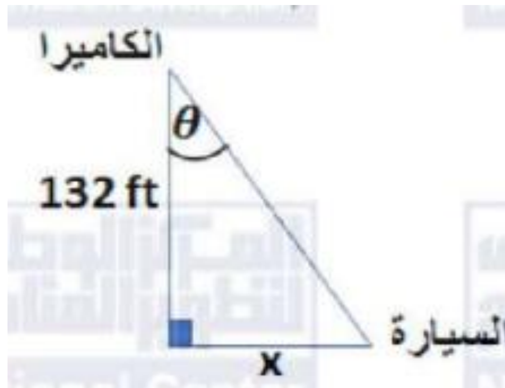
$$\frac{d\theta}{dt} = -2\ rad/s$$

19) أجد سرعة تغير الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا .

بعد نصف ثانية:

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض = السرعة × الزمن وتساوي $x = 0.5\times 264 =$ 132 وهي متغيرة .

معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تبتعد) $\frac{dx}{dt} = 264\ ft/s$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{132}{132}$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(264) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1\ rad/s$$

يزداد قياس الزاوية θ بسرعة $1\ rad/s$ في تلك اللحظة .

20) فيزياء : يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$ ، وعند مروره بالنقطة $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ ، فإن الإحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية . أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

العلاقة الرئيسية : المسافة بين نقطتين $L = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$

النقطة الأولى $\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$

النقطة الثانية (نقطة الأصل) $(0, 0)$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$$

$$L=\sqrt{(x-0)^2+\left(2\sin\frac{\pi x}{2}-0\right)^2}$$

$$L=\sqrt{x^2+\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+(2)(2)\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{10})+4\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{10})+4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(2\frac{1}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2)\left(\frac{1}{3}+1\right)}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{3}+2}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{8}{3}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{3}{8}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{4}(\sqrt{10})+3(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(2\,\frac{1}{2}\right)\left(2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+(2\,\frac{1}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{1}{3}+1}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4}$$

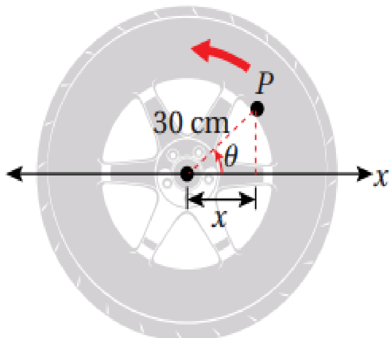
$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

سيارات : عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي $30cm$ ، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية ، رسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور :

21) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ .



الشكل: دائرة بداخلها مثلث قائم الزاوية

عدد الدورات في الثانية 10

الضلع القائم الأول $x = ?$

الضلع القائم الثاني $y = ?$

الوتر نصف قطر الدائرة $r = 30cm$

العلاقة الرئيسية التي تربط بين المتغيرات والثوابت في المعطيات $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$$\cos\theta = \frac{x}{30}$$

$$x = 30\cos\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{10}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 20\pi \ rad/s}$$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\, 20\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi\sin\theta$$

22) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45^\circ$

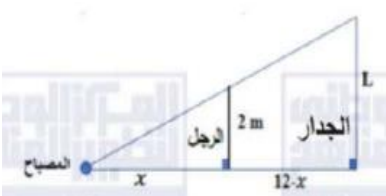
$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \sin\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}\ cm/s$$

23) ضوء : مصباح مثبت بالأرض ، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة $12m$ ، إذا سار رجل طوله $2m$ من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة $1.6m/s$ ، فأجد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار .



ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقياً x وطول ظله على الجدار L

الشكل: مثلثين قائمين الزاوية

العلاقة: تشابه مثلثين

المثلث الصغير : طول الضلع القائم الأول (طول الرجل) $2m$ ، طول الضلع القائم الثاني(بعد الرجل $x = 12 - 4 = 8$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المثلث الكبير : طول الضلع القائم الأول L ، طول الضلع القائم الثاني 12

معدل التغير في المسافة بين موقع المصباح إلى الجدار $\frac{dx}{dt} = 1.6m/s$

المطلوب : معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = ?$

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x}$$

$$xL = 24$$

$$L = \frac{24}{x}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

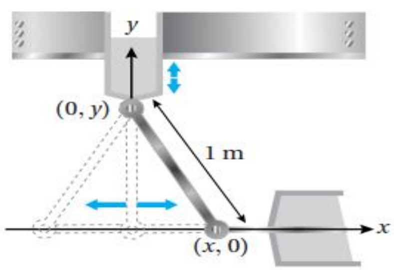
$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24(1.6)}{8^2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-38.4}{64}$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.6\ m/s$$

إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية .

هندسة ميكانيكية : يبين الشكل المجاور ذراعاً معدنية متحركة طولها $1m$ ، وإحداثيات نهايتيها $(x,0)$ و $(0,y)$ ، ويمثل الاقتران : $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ ، موقع طرف الذراع على المحور x ، حيث t الزمن بالثواني :



24) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع .

يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسياً ، وتكون النقطة المطلوبة هي $(0,1)$

25) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الأخر عند النقطة $(\frac{1}{4},0)$.

المطلوب : $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \mp\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\cos x = \mp\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$\cos x = \mp\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi t}{6}\times\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)$$

من نظرية فيثاغورس:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\dfrac{dx}{dt}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)}{\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)\times\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

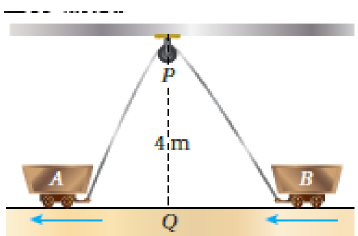
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\pi}{24}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\mp\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$$

إذن يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للأسفل أو للأعلى بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$ عندما $x=\frac{1}{4}$

مهارات التفكير العليا:

26) تبرير : ربطت العربتان A و B بحبل طوله $12m$ ، وهو يمر بالبكره P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة ، وتبعد عنها مسافة $4m$ ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة $0.5m/s$ ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $3m$ من النقطة Q ، مبرراً إجابتي .



الشكل: مثلثين قائمين الزاوية.

المثلث الأول : PQA

المثلث الثاني : PQB

المسافة بين QP تساوي 4 وهي ثابتة

المسافة بين QA تساوي $x = 3$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المسافة بين QB تساوي $y = ?$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

معدل التغير في المسافة بين QA تساوي $\frac{dx}{dt} = 0.5m/s$ وهي متغيرة .

معدل التغير في المسافة بين QB تساوي $\frac{dy}{dt} = ?$ وهو المطلوب.

طول الحبل : $12m$

$$AP + BP = 12$$

$$\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\sqrt{3^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\sqrt{9 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

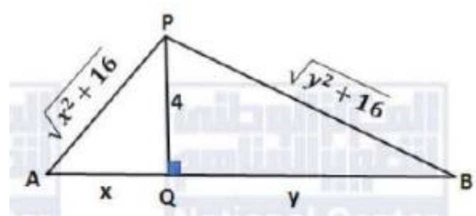
$$5 + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\sqrt{y^2 + 16} = 7$$

$$y^2 + 16 = 49$$

$$y^2 = 33$$

$$y = \sqrt{33}$$



$$\sqrt{x^2+16}+\sqrt{y^2+16}=12$$

$$\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+16}}+\frac{2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2+16}}=0$$

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}+\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=0$$

$$\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=-\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\left[\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=-\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}\right]\times\frac{\sqrt{y^2+16}}{y}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2+16}}{\sqrt{33}\sqrt{3^2+16}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{9+16}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{49}}{\sqrt{33}\sqrt{25}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\times 7}{\sqrt{33}\times 5}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$$

إذن تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$

27) تبرير : يركض عداء في مضمار دائري ، طول نصف قطره $100\ m$ ، بسرعة ثابتة مقدارها $7m/s$ ، ويقف صديقه على بعد $200\ m$ من مركز مضمار الركض . أجد معدل تغير المسافة بين العداء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما $200\ m$.

الشكل: دائرة

طول نصف قطرها : $r = 100\ m$

مركز الدائرة C

العداء : A

صديقه: B

القوس الجزء من محيط الدائرة والذي يقع بين نصفي قطرين L

معدل التغير بالمسافة على القوس $\frac{dL}{dt} = 7m/s$

المسافة بين BC تساوي $200\ m$

المسافة بين AB تساوي $x = 200$ وهي متغيرة .

الحالة الأولى:

المعطى (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7m/s$

المطلوب : التغير في المسافة بين AB ؟ $\frac{dx}{dt} =$.

العلاقة: قانون طول القوس

$$L = r\theta$$

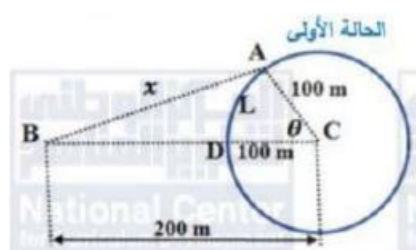
$$L = 100\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$-7 = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{7}{100}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -0.07}$$



- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 40000 + 10000 - 40000\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$40000\cos\theta = 50000 - x^2$$

$$\frac{40000}{40000}\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - (200)^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{10000}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{40000\sin\theta}{2x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

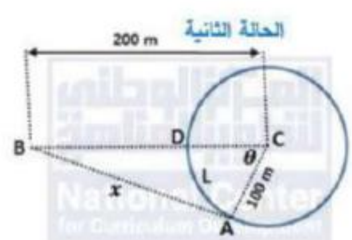
$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07$$

$$\frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4} \times -0.07$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

الحالة الثانية:

المعطى (تكون L متزايدة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = 7m/s$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07$$

$$\frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4} \times 0.07$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

إذن عندما تكون المسافة بين العداء وصديقه $200\ m$ ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s$.

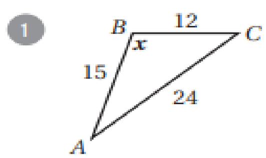
كتاب التمارين

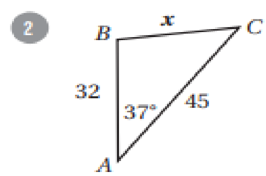
الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

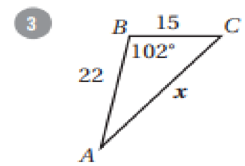
استعد لدراسة الوحدة:

حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام:

أجد قيمة x في كل من المثلثات الاتية :







1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$$24^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \times 12 \times 15 \cos x$$

$$2 \times 12 \times 15 \cos x = 12^2 + 15^2 - 24^2$$

$$\frac{2 \times 12 \times 15 \cos x}{2 \times 12 \times 15} = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{144 + 225 - 576}{360}$$

$$\cos x = \frac{-207}{360}$$

$$x \approx 2.18\, rad \approx 125.1^\circ$$

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$$x^2 = 32^2 + 45^2 - 2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ$$

$$2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ = 32^2 + 45^2 - x^2$$

$2300.07 = 1024 + 2025 - x^2$

$x^2 = 1024 + 2025 - 2300.07$

$x^2 = 748.92$

$x = 748.92$

$x \approx 27.37$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$x^2 = 15^2 + 22^2 - 2 \times 15 \times 22 \cos 102^\circ$

$2 \times 15 \times 22 \cos 102^\circ = 15^2 + 22^2 - x^2$

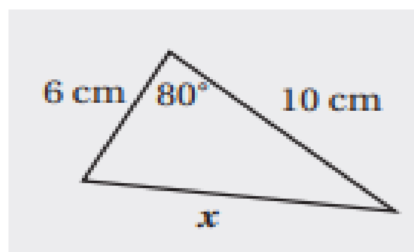
$-137.22 = 225 + 484 - x^2$

$x^2 = 709 + 137.22$

$x^2 = 846.22$

$x \approx 29.1$

مثال : أجد قيمة x في المثلث المجاور:



$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$

$x^2 = 115.16$

$x = \pm\sqrt{115.16}$

$x = \pm 10.7$

$x = 10.7$ x لا يمكن أن تكون سالبة

حل المعادلات المثلثية:

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $(0, 2\pi)$:

4) $\tan 2x + 1 = 0$

$\tan 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

5) $2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0 \rightarrow\ x = 0, \pi$

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

6) $1 - \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

مثال : أحل المعادلة $\sin 2x - \cos x = 0$ في الفترة $(0, 2\pi)$:

$\sin 2x - \cos x = 0$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}}$

$or\ \ 2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}}$

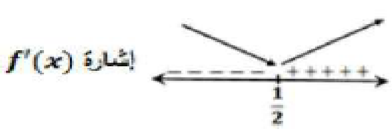
7) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

$\acute{f}(x) = 12x - 6$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow\ 12x - 6 = 0$

$\dfrac{12x}{12} = \dfrac{6}{12}$

$x = \dfrac{1}{2}$



الاقتران متناقص في $(-\infty, \frac{1}{2})$ ومتزايد في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$

$8)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 6x + 4 = 0$

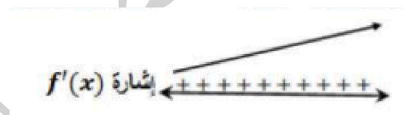
$3x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$a = 3 \ , \qquad b = 6 \ \ , c = 4$

$\Delta = (6)^2 - 4(3)(4)$

$\Delta = 36 - 48 = -12 \ < 0$



ليس للمشتقة اصفار وإشارتها مماثلة لإشارة معامل x^2 لجميع الأعداد الحقيقية ،

أي ان : $f'(x) > 0$ فالاقتران متزايد على $\mathbb{R}$

$9)\ f(x) = x^2 - 8x^4$

$f'(x) = 2x - 32x^3$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow 2x - 32x^3 = 0$

$2x(1 - 16x^2) = 0$

$2x = 0$

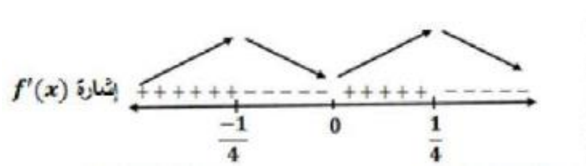
$x = 0$

$1 - 16x^2 = 0$

$16x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{16}$

$x = \pm\frac{1}{4}$



الاقتران x متزايد على $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ و $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

الاقتران x متناقص على $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ و $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

مثال : أحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

الخطوة الأولى: أجد مشتقة الاقتران، ثم أحدد أصفار المشتقة.

$$\acute{f}(x) = 2x + 2$$

$$2x + 2 = 0$$

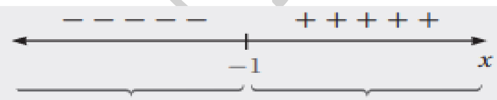
$$2x = 2$$

إذن صفر المشتقة هو : $x = -1$

الخطوة الثانية: ادرس إشارة المشتقة.

اختار قيمة أقل من صفر المشتقة ، ولتكن (-2) واختار قيمة أخرى اكبر منه ، ولتكن (0) ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منهما .

إذن ، $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$



	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

الدرس الأول

المعدلات المرتبطة

ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\ cm^3/s$ ، أجد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية :

1) عندما يكون طول نصف قطره $12\ cm$.

$$\frac{dv}{dt} = 8$$

$$r = 12$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$ قانون حجم الكرة

$$\frac{dv}{dt} = (3)\frac{4}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$ عدد المجاهيل (1) بعد الاشتقاق

$$8 = 4\pi(12)^2\frac{dr}{dt}$$

$$8 = 576\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{576\pi}{576\pi}\frac{dr}{dt} = \frac{8}{576\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{576\pi}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{72\pi}\ cm/s}$$

2- عندما يكون حجمه $1435\ cm^3$ (أقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة) .

$$\frac{dv}{dt} = 8$$

$$v = 1435\ cm^3$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول r ليتم تعويضها في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dr}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول r نستفيد من قانون حجم الكرة.

$$\left[v = \frac{4}{3}\pi r^3\right] \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$r^3 = \frac{3v}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$$

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

طريقة الحل (1):

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi\left(\frac{3(1435)}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt}$$

$$\left[\frac{2}{\pi} = \sqrt[3]{\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{2}} \frac{dr}{dt}\right] \quad \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi} \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = 0.01\ cm/s}$$

طريقة الحل (2):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \frac{3}{4\pi}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{3(1435)}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \frac{3}{4\pi} \times 8$$ عدد المجاهيل (1)بعد الاشتقاق

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi} \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}} \approx 0.01\ cm/s$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} \approx 0.01\ cm/s}$$

طريقة الحل (3):

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left[1435 = \frac{4}{3}\pi r^3\right] \times \frac{3}{4}$$

$$\pi r^3 = \frac{3(1435)}{4}$$

$$\frac{\pi r^3}{\pi} = \frac{3(1435)}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{3(1435)}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(1435)}{4\pi}}$$

$$r \approx 7\ cm$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi(7)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 196\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{8}{196\pi} = \frac{196\pi}{196\pi}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{196\pi}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} \approx 0.01\ cm/s}$$

3) إذا ملئ مدة $33.5\ s$.

$$t = 33.5$$

$$v = 8 \times 33.5 = 268\ cm^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}}$$

$$r \approx 4cm$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 64\pi \frac{dr}{dt}$$

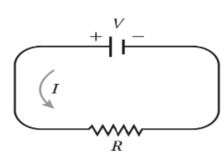
$$\frac{8}{64\pi} = \frac{64\pi}{64\pi}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{64\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} \approx 0.04cm/s$$

4) تمثل المعادلة : $V = IR$ جهد الدارة الكهربائية (بالفولت) المبينة في الشكل المجاور حيث I شدة التيار بالأمبير ، و R المقاومة بالأوم ، إذا كان جهد الدارة يزداد بمعدل $1\ volt/sec$ ، وشدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3}\ amp/sec$ ، فأجد معدل التغير R عندما $V = 12$ و $I = 2$.



$$\frac{dV}{dt} = 1$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = ?$$

$$V = 12$$

$$I = 2$$

$$V = IR$$

$$\frac{dV}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}$$

$$1 = 2\frac{dR}{dt} + R\left(-\frac{1}{3}\right)$$

عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول R ليتم تعويضها في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dR}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول R نستفيد من قانون المعطى بالسؤال $V = IR$.

$$V = IR$$

$$12 = 2R$$

$$R = 6$$

نعوض قيمة $R = 6$ في المشتقة :

$$1 = 2\frac{dR}{dt} + 6\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$1 = 2\frac{dR}{dt} - 2$$

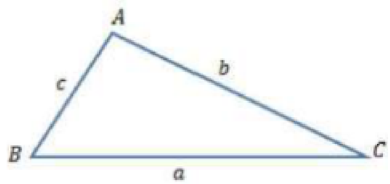
$$2\frac{dR}{dt} = 1 + 2$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = 1.5\ \Omega/s}$$

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

5) أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة : $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.



معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

فإذا كان $c = \theta$, $a = b = s$ ، فإن :

$$A = \frac{1}{2}s^2\sin\theta$$

6) إذا كانت الزاوية θ تزداد بمعدل $\frac{1}{2}rad/min$ ، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، علماً بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = \frac{1}{2}s^2\sin\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\cos\frac{\pi}{6})\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$$

7) يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ ، إذا كان معدل تغير الإحداثي x هو $3cm/s$ ، فأجد معدل تغير الإحداثي y عندما $x = 20$.

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$x = 20$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$y = \frac{10}{1 + x^2}$$

$$y = 10(1 + x^2)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -10(1 + x^2)^{-2}(2x)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1 + x^2)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

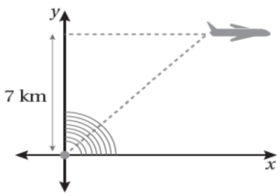
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20(20)}{(1 + 20^2)^2} \cdot 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1200}{(401)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1200}{160801}$$

$$\frac{dy}{dt} \approx -0.007\ cm/s$$

8) حلقت طائرة على ارتفاع $7km$ ، ومرت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور ، وعندما أصبح البعد بينهما وبين الرادار $10km$ ، رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة ، فكان $300km/h$ ،أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة .



$\frac{dL}{dt} = 300$

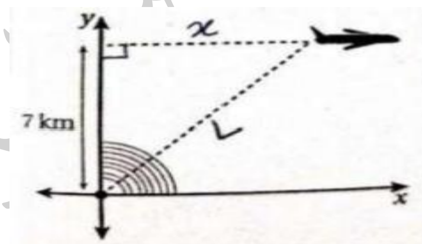
$L = 10$

$y = 7$

$\frac{dy}{dt} = 0$ لأن y ثابت

$x = ?$

$\frac{dx}{dt} = ?$



$L^2 = x^2 + y^2$

$10^2 = x^2 + 7^2$

$100 = x^2 + 49$

$x^2 = 51$

$x = \sqrt{51}$

$L^2 = x^2 + y^2$

$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$2(10)(300) = 2x\frac{dx}{dt} + 2(7)(0)$

$60000 = 2x\frac{dx}{dt}$ عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول x ليتم تعويضه في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dx}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول x نستفيد من نظرية فيثاغورس .

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$10^2 = x^2 + 7^2$$

$$100 = x^2 + 49$$

$$x^2 = 51$$

$$x = \sqrt{51}$$

$$6000 = 2(\sqrt{51})\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{6000}{2(\sqrt{51})} = \frac{2(\sqrt{51})}{2(\sqrt{51})}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3000}{(\sqrt{51})}$$

$$\frac{dx}{dt} \approx 420\ km/h$$