المرجع في الرياضيات
أ.معتصم ابراهيم 0790264376

المرجع في الرياضيات
أ.معتصم ابراهيم 0790264376

المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب+ كتاب التمارين

الفصل الأول/ الوحدة الثانية

الدرس الثاني

(القيم القصوى والتقعر)

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

طبعة السنة 2025/2024

ولا تنسونا من دعائكم

نسخة مجانية ليستفيد منها الطلبة، فلا تتردد بنشرها لتعم الفائدة وكسب الأجر

الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

مخطط الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

- القيم القصوى المحلية والمطلقة
- إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة
- ايجاد القيم القصوى المحلية
- التقعر
- اختبار المشتقة الثانية
- تطبيقات السرعة والتسارع

القيمة العظمى المحلية: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة ما من مجال الاقتران.

القيمة العظمى المطلقة: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أكبر قيمة على الاطلاق في مجال الاقتران.

القيمة الصغرى المحلية: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة ما من مجال الاقتران.

القيمة الصغرى المطلقة: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أصغر قيمة على الاطلاق في مجال الاقتران.

ملاحظات مهمة:

1) كل قيمة عظمى مطلقة هي قيمة محلية، وتكون مطلقة إذا كانت أعلى شيء في الرسم.

2) كل قيمة صغرى مطلقة هي قيمة محلية، وتكون مطلقة إذا كانت أصغر شيء في الرسم.

مسألة اليوم: (صفحة 90)

يمثل الاقتران $C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناولها، حيث C مقيسة بوحدة $\mu g/ml$ ، أحدد الزمن الذي يكون فيه تركيز الدواء أكبر ما يمكن خلال أول 12 ساعة من تناول جرعة الدواء .

$$C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$$

المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها الاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0.12]$ لذا نجد القيم الحرجة:

$$\acute{C}(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0 \implies 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$\implies -0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t} = 0 \implies 0.6e^{-0.4t-1} = 0.6e^{-0.6t}$$

$$\implies e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t} \implies -0.4t - 1 = -0.6t \implies 0.2t = 1 \implies t = 5$$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران وهي $t = 5$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة.

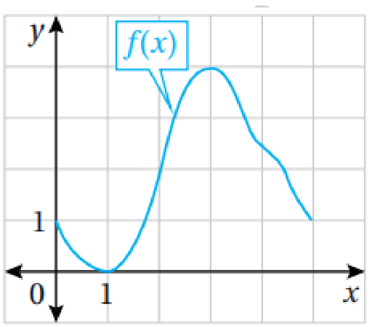
$$C(0) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}\right) \approx 0.005$$

$$C(5) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}\right) \approx 3.79$$

$$C(12) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}\right) \approx 3.62$$

وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله .

القيم القصوى المحلية والمطلقة

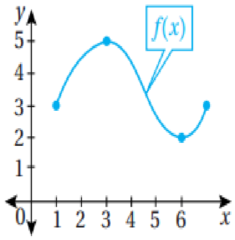


- الشكل هو تمثيل بياني لمنحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على الفترة المغلقة $[0, 5]$.
- أعلى نقطة على منحنى $f(x)$ هي $(3, 4)$ ، وهذا يعني أن أكبر قيمة للاقتران f هي $f(3) = 4$.
- أدنى نقطة على منحنى $f(x)$ هي $(1, 0)$ ، وهذا يعني أن أصغر قيمة للاقتران f هي $f(1) = 0$.
- نستنتج أن $f(3) = 4$ هي قيمة عظمى مطلقة .
- نستنتج أن $f(1) = 0$ هي قيمة صغرى مطلقة .

مثال1): (صفحة 92)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

1

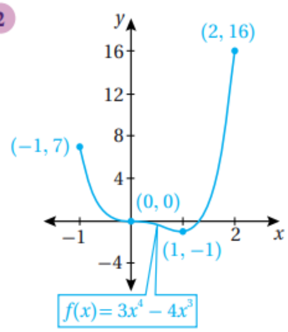


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(3) = 5$.

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(6) = 2$.

2

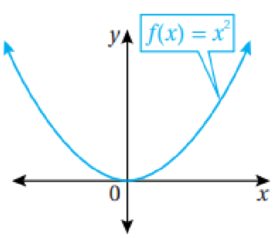


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(1) = -1$.

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 16$.
(ليست قيمة عظمى محلية، لأنها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

3



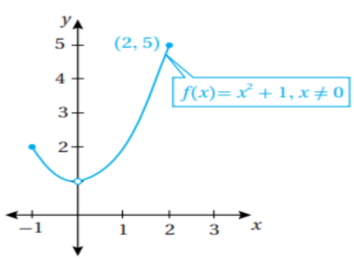
الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(0) = 0$.

* لا توجد قيمة عظمى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

وذلك لأن الأسهم للأعلى مما يعني أن الفترة مفتوحة لذلك ممكن يرتفع ويصل إلى قيمة أعلى

4



الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة عظمى مطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 5$.

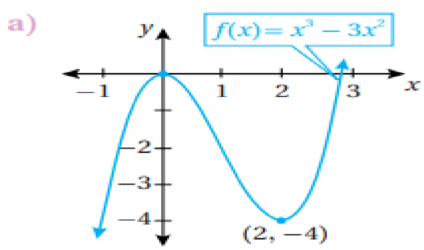
* لا توجد قيمة صغرى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

الأحظ أن (1) لا تعد قيمة صغرى مطلقة لأنه غير متصل عندها.

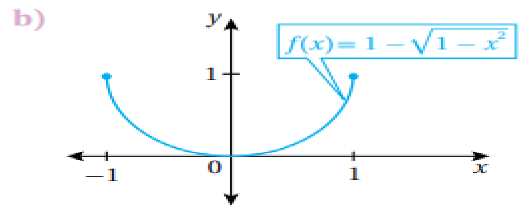
أتحقق من فهمي: (صفحة 93)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

a)



b)



a) ليس للاقتران f قيمة قصوى مطلقة ، وذلك لأن الأسهم للأعلى مما يعني أن الفترة مفتوحة لذلك ممكن يرتفع ويصل إلى قيمة أعلى .

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

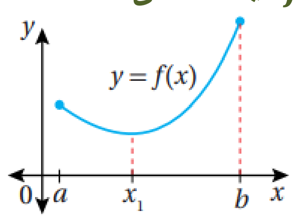
للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$

b) للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ و $x = -1$ هي $f(\pm) = 1$

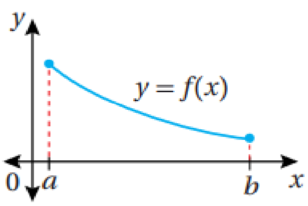
للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

ملاحظة مهمة:

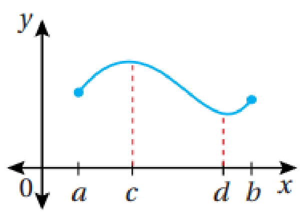
إذا كان f اقترانا متصلاً على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنه توجد للاقتران f قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في هذه الفترة. أمثلة:



- **القيمة الصغرى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها x_1.**
- **القيمة العظمى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها b.**



- **القيمة العظمى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها a**
- **القيمة الصغرى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها b.**



- **القيمة الصغرى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها c.**
- **القيمة العظمى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها d.**

ملاحظة مهمة:

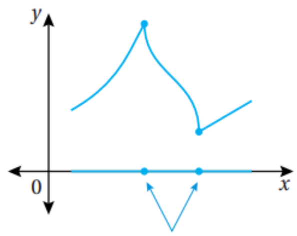
أن القيم الصغرى المطلقة لأي اقتران متصل على فترة مغلقة توجد عند النقاط الداخلية، أو عند أطراف الفترة.

إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة

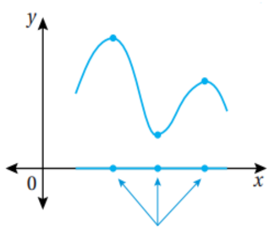
ملاحظة مهمة:

أن القيم القصوى المحلية تكون موجودة عند نقاط داخل مجال الاقتران، حيث تكون المشتقة صفراً أو غير موجودة. أمثلة:

قيم x التي عندها قيم قصوى محلية، حيث المشتقة غير موجودة.



قيم x التي عندها قيم قصوى محلية، حيث المشتقة تساوي صفر.



ملاحظة مهمة:

النقاط الحرجة: هي النقاط الداخلية التي تكون عندها $f' = 0$ أو تكون f' غير موجودة.

القيمة الحرجة: هي قيمة الإحداثي x للنقاط الحرجة .

ملاحظة مهمة:

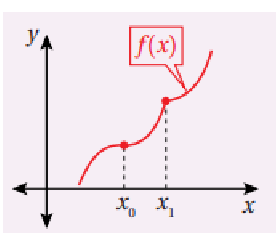
إذا كان للاقتران f قيمة قصوى محلية عند $x = c$ فإن c قيمة حرجة للاقتران f.

ملاحظة مهمة:

ليست كل قيمة حرجة تعتبر قيمة قصوى محلية، مثال:

الشكل المجاور يبين منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث x_1 و x_0

قيمتان حرجتان، ولكن لا توجد عند أي منهما قيمة قصوى محلية.



خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للاقتران f المتصل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، أتبع الخطوات المبينة في ما يأتي:

1) أجد قيم الاقتران f عند القيم الحرجة للاقتران f في الفترة المفتوحة (a, b) .

2) أجد قيمتي f عند طرفي الفترة.

3) أجد أن أكبر القيم الناتجة من الخطوتين (1) و (2) هي القيمة العظمى المطلقة، وأن أصغرها هي القيمة الصغرى المطلقة.

ملاحظة مهمة:

القيم الحرجة للاقتران هي قيم داخلية، لذا لا يعد طرفا فترة مجال الاقتران قيماً حرجة.

ملاحظة مهمة:

الاقتران كثير الحدود: هو اقتران تكون فيها جميع الأسس على المتغير x أعداد صحيحة غير سالبة، ومعاملاته أعداد حقيقية. (بالتالي الاقترانات الكسرية والاقترانات الجذرية ليست كثيرات حدود).

مثال 2: (صفحة 95)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \quad ,[-2,2]$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[-2,2]$ ، لإنه كثير حدود ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة بإتباع الخطوات الآتية :

إيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-2,2)$.

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر.

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

بما أن $x = 3$ ليست ضمن مجال f ، فإنها تهمل ، وبما أنه لا توجد قيم تكون عندها $\acute{f}$ غير موجودة ، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة للإقتران f هي : $x = -1$.

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 \Rightarrow = -1 - 3 + 9 + 2 \Rightarrow \boxed{f(-1) = 7}$$

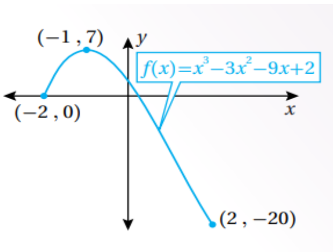
$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 2 \Rightarrow = -8 - 12 + 18 + 2 \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 9(2) + 2 \Rightarrow = 8 - 12 - 18 + 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -20}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $[-2,2]$ هي : $f(-1)=7$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(2)=-20$

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران : $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ في الفترة $[-2,2]$ أن القيمة العظمى المطلقة هي 7 ، وأن القيمة الصغرى المطلقة هي -20 .

2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $[-1,2]$

بما ان الاقتران f متصل على الفترة $[-1,2]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة بإتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-1,2)$

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة:

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

الاحظ أنه لا توجد أصفار للمشتقة ، وأن المشتقة غير موجودة عندما $x=0$ ، لأنها غير معرفة في هذه الحالة ، لذا توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران f هي : $x=0$ ، وقيمة الاقتران عندها هي :

$$\boxed{f(0)=0}$$

2) الخطوة الثانية : أجد قيمتي الاقتران f عند طرفي الفترة .

$$f(-1)=(-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(-1)^2} \Rightarrow = \sqrt[3]{1} \Rightarrow \boxed{f(-1)=1}$$

$$f(2)=(2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(2)^2} \Rightarrow = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \boxed{f(2)\approx 1.59}$$

3) الخطوة الثالثة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $[-1,2]$ هي : $f(2)=\sqrt[3]{4}$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(0)=0$.

3) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x \quad , [0, 2\pi]$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[0, 2\pi]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة باتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(0, 2\pi)$

$$f(x) = 2\sin x - \cos 2x$$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$f'(x) = 2\cos x + 2\sin 2x$$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$2\cos x + 2\sin 2x = 0$$

- ملاحظة: متطابقة ضعف الزاوية

$$2\cos x + 4\sin x \cos x = 0$$

- ملاحظة :بإخراج $2\cos x$ عامل مشترك

$$2\cos x\,(1 + 2\sin x) = 0$$

$$2\cos x = 0 \implies \boxed{\cos x = 0} \implies \boxed{x = \frac{\pi}{2}\ ,\frac{3\pi}{2}}$$

$$1 + 2\sin x = 0 \implies \boxed{\sin x = -\frac{1}{2}} \implies \boxed{x = \frac{7\pi}{6}\ ,\frac{11\pi}{6}}$$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(0) = 2\sin(0) - \cos 2(0) \implies = 2(0) - (1) \implies \boxed{f(0) = -1}$$

$$f(2\pi) = 2\sin(2\pi) - \cos 2(2\pi) \implies = 2(0) - (1) \implies \boxed{f(2\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies = 2(1) - (-1) \implies \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos 2\left(\frac{7\pi}{6}\right) \implies = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \implies = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \implies \boxed{= -\frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow=2(-1)-(-1)\Rightarrow=-2+1\Rightarrow\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)-\cos 2\left(\frac{11\pi}{6}\right)\Rightarrow=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow=2\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow=(-1)-\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\boxed{f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $(0,2\pi)$ هي : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

القيمة الصغرى المطلقة له هي : $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 99)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x)=x^3-6x^2+5\ ,\ [-3,5]$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\acute{f}(x)=3x^2-12x$$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$3x^2-12x=0\ \Rightarrow\ 3x(x-4)=0\Rightarrow\ 3x=0\Rightarrow\boxed{x=0}\Rightarrow x-4=0\Rightarrow\boxed{x=4}$$

قيم x الحرجة هي : $x=0$ و $x=4$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(-3)=(-3)^3-6(-3)^2+5\ \Rightarrow=-27-54+5\Rightarrow\boxed{f(-3)=-76}$$

$$f(4)=(4)^3-6(4)^2+5\ \Rightarrow=64-96+5\Rightarrow\boxed{f(4)=-27}$$

$$f(0)=(0)^3-6(0)^2+5\ \Rightarrow\boxed{f(0)=5}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي : $x=3$ هي $f(-3)=-76$
وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x=0$ هي $f(0)=5$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ , \ [-8,8]$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\acute{f}(x)$ لا تساوي صفرا لأي قيمة في $(-8,8)$ ، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

$$f(-8) = \sqrt[3]{-8} \Longrightarrow \boxed{f(-8) = -2}$$
$$f(8) = \sqrt[3]{8} \Longrightarrow \boxed{f(8) = 2}$$
$$f(0) = \sqrt[3]{0} \Longrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند : $x = -8$ هي $f(-8) = -2$ ، وله قيمة عظمى مطلقة له عند : $x = 2$ هي $f(8) = 2$

3) $f(x) = \sin^2 x + \cos x \ , \ [0, 2\pi]$

1) الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = 2\sin x \cos x - \sin x$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x\,(2\cos x - 1) = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \pi}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow 2\cos x = 1 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}} \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 \Longrightarrow = 0 + 1 \Longrightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Longrightarrow = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Longrightarrow = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \Longrightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(\pi) = \sin^2\pi + \cos\pi \Longrightarrow = 0 + (-1) \Longrightarrow \boxed{f(\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} \Longrightarrow = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Longrightarrow = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Longrightarrow = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \Longrightarrow \boxed{f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(2\pi) = \sin^2 2\pi + \cos 2\pi \Longrightarrow = 0 + 1 \Longrightarrow \boxed{f(2\pi) = 1}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة هي : $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x = \frac{5\pi}{3}$ و$x = \frac{\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

ايجاد القيم القصوى المحلية:

ملاحظة مهمة:

ميل المماس لمنحنى f عند نقطة هو $\acute{f}$ عند هذه النقطة.

ملاحظة مهمة:

1) إذا كان : $\acute{f}(x) > 0$ (الميل موجب) لقيم x جميعها في الفترة I ، فإن f يكون متزايداً .

2) إذا كان : $\acute{f}(x) < 0$ (الميل سالب) لقيم x جميعها في الفترة I ، فإن f يكون متناقصاً .

ملاحظة مهمة:

بما أن كل قيمة حرجة ليست بالضرورة أن تكون قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية.

ملاحظة مهمة:

اختبار المشتقة الأولى : هو اختبار لتحديد إذا كان للاقتران f قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى عند النقطة الحرجة أم لا .

ملاحظة مهمة:

القيم الحرجة: هي قيم مرشحة ليكون عندها نقاط قصوى، ويلزم التحقق من أن f يغير سلوكه حول هذه القيم (من التزايد إلى التناقص أو العكس) .

مثال 3: (صفحة 101)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

بما أن الاقتران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$f(x) = (x^2 - 3)e^x$

$\acute{f}(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x \Rightarrow = (x^2 + 2x - 3)e^x$

$(x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \neq 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0\ \boxed{x = 1} \quad \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

بما أن $\acute{f} = 0$ عندما $x = 1, -3$ ، وعدم وجود قيم تكون عندها $\acute{f}$ غير موجودة ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$x = 1\ ,\quad x = -3$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

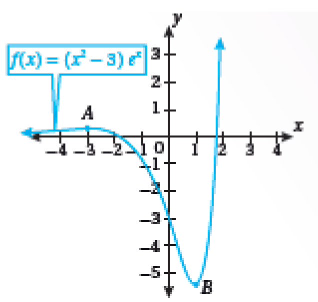
	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتزايِد ↗	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

* توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 6e^{-3}$.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = -2e$.

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = (x^2 - 3)e^x$ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x = 1$

أتحقق من فهمي: (صفحة 102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x-1)e^x$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$$f(x) = (x-1)e^x$$

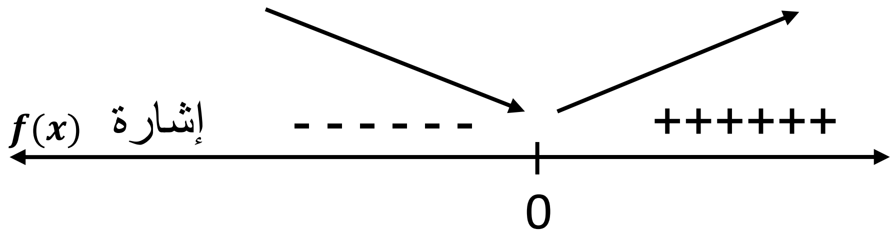
$$\acute{f}(x) = (x-1)e^x + e^x \implies = (xe^x - e^x) + e^x$$

$$\implies = xe^x - e^x + e^x \implies = xe^x \implies xe^x = 0 \implies \boxed{x = 0}$$

للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = 0$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

$$\boldsymbol{f(0) = (0-1)e^{0} \Rightarrow = -1(1) \;\; \Rightarrow = \;\; -1}$$

بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$ وهي : $f(0) = -1$

مثال 4: (صفحة102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$

***بما ان الاقتران* f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :**

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f

$$\boldsymbol{f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\boldsymbol{\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{\frac{-1}{3}}(2x) \Rightarrow = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} \;\Rightarrow\; \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}}$$

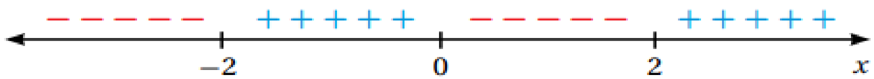
***بما أن* $\acute{f} = 0$ عندما $x = 0$ ، و $\acute{f}$ غير موجودة عندما $x = \pm 2$ ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :**

ملاحظة مهمة : عند صفري المقام $x = \pm 2$ تكون $\acute{f}$ غير موجودة .

$\boxed{x = -2}$, $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 2}$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

$$f(0) = ((0)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (-4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(-4)^2} \Rightarrow \boxed{f(0) = \sqrt[3]{16}}$$

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (4-4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

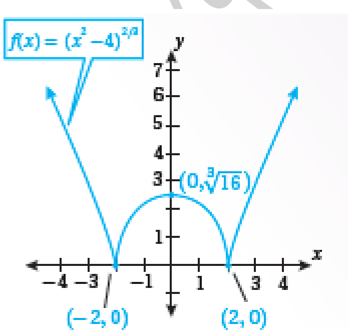
$$f(2) = ((2)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (4-4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

* توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = \sqrt[3]{16}$.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي: $f(-2) = 0$

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي: $f(2) = 0$

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x = \pm 2$، وعدم وجود قيمة عظمى مطلقة للاقتران.

أتحقق من فهمي: (صفحة 103)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3} \implies = (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} \implies = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

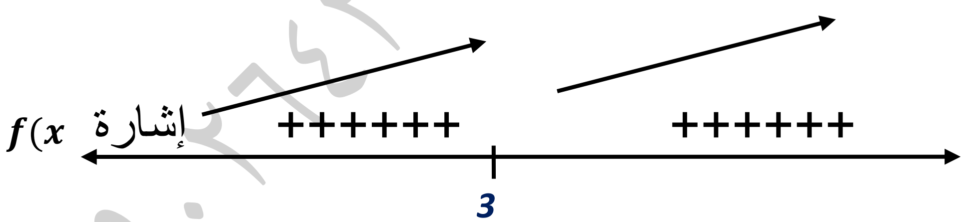
$\acute{f}(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 3$ (صفر المقام) وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

$$\acute{f}(4) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(4-3)^2}} \implies \acute{f}(4) = \text{موجبة}$$

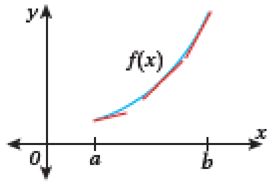
$$\acute{f}(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2-3)^2}} \implies \acute{f}(2) = \text{موجبة}$$



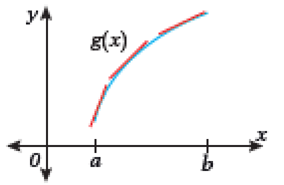
الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

الاقتران f متزايد على R ولا يوجد له قيم قصوى محلية أو مطلقة ، النقطة $(3, 0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها .

التقعر:



- يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران المتزايد $f(x)$
- لاحظ أن الاقتران $f(x)$ يقع **فوق مماساته** لذلك فهو **مقعر للأعلى** .



- يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران المتزايد $g(x)$
- لاحظ أن الاقتران $g(x)$ يقع **أسفل مماساته** لذلك فهو **مقعر للأسفل** .

ملاحظة: يمكنني تحديد تزايد ميل المماسات وتناقصها عن طريق مقارنة الزوايا التي تصنعها هذه المماسات مع محور x الموجب.

قاعدة مهمه :

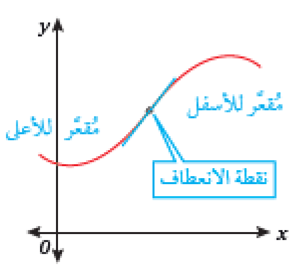
إذا كان f اقتراناً قابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة I ، فإن:

1) منحنى f يكون مقعراً للأعلى على الفترة I إذا كان f' متزايداً عليها عندها تكون إشارة المشتقة الثانية f'' موجبة $f''(x) > 0$.

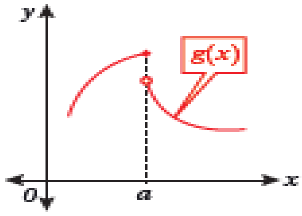
2) منحنى f يكون مقعراً للأسفل على الفترة I إذا كان f' متناقصاً عليها عندها تكون إشارة المشتقة الثانية f'' سالبة $f''(x) < 0$.

ملاحظة مهمة:

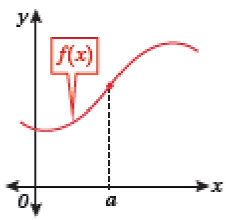
نقطة الانعطاف : هي النقطة التي يغير الاقتران المتصل اتجاه تقعره من الأعلى إلى الأسفل أو العكس ، كما هو موضح بالشكل المجاور :



ملاحظة مهمة:



1) الشكل المجاور يبين عدم وجود نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران g عندما $x = a$ لأنه غير متصل عند هذه النقطة بالرغم من تغير اتجاه تقعره عندها .



2) الشكل المجاور يبين وجود نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f عندما $x = a$ لأنه متصل عند هذه النقطة ،وتغير تقعره عندها.

قاعدة مهمة :

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف منحنى الاقتران f ، فإن $f''(c) = 0$ ، أو تكون f'' غير موجودة عندما $x = c$.

مثال 5: (صفحة 106)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = (-x)(-x)e^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}}(-1) \Rightarrow f''(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية غير موجودة ، لذا اجد قيم x التي تكون عندها المشتقة الثانية صفراً .

$$(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$$

لا يوجد حل للمعادلة الثانية ، لأن $e^{\frac{-x^2}{2}} \neq 0$ ، *إذن قيم* x المطلوبة هي : $x = \pm 1$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأعلى	مُقعَّر للأسفل	مُقعَّر للأعلى

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

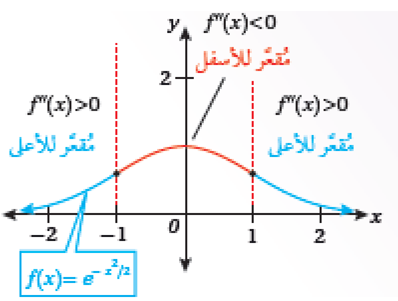
*** *منحنى الاقتران* f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, -1)$ ، والفترة $(1, \infty)$.**

*** *منحنى الاقتران* f مقعر للأسفل على الفترة $(-1, 1)$.**

الخطوة الخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

توجد نقطتا انعطاف عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -1$ ، وهما $(-1, e^{\frac{-1}{2}})$، و $(1, e^{\frac{-1}{2}})$، لأن الاقتران f متصل عند كلتا النقطين ، وغير اتجاه تقعره عندهما .

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ ، وجود فترتي تقعر للأعلى، وفترة تقعر للأسفل، ونقطتي انعطاف.

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

أجد فترات التقعر للاقتران f ، وانتبه أن f غير معرف عندما $x = 0$.

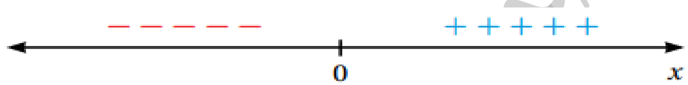
الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية صفرا ، والمشتقة غير موجودة أيضا عندما $x = 0$ ، لأن f **غير معرف عندها .**

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



	$x < 0$	$x > 0$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -1$	$x = 1$
إشارة $f''(x)$	$f''(-1) < 0$	$f''(1) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأسفل	مُقعَّر للأعلى

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

*** منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$.**

*** منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$.**

الخطوة الخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

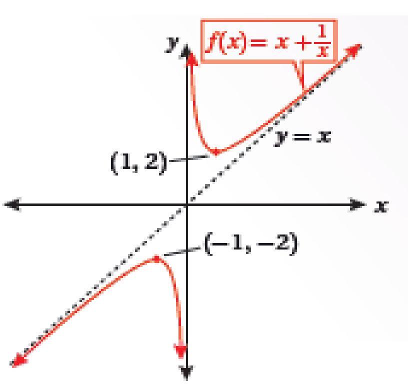
لا يوجد نقاط انعطاف لمنحنى الاقتران.

ملاحظة: لا توجد نقطة انعطاف عندما 0 بالرغم من تغير اتجاه تقعر الاقتران حولها ، لأنها لا تنتمي إلى مجال الاقتران.

الدعم البياني:

يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ،

وجود فترة تقعر للأسفل هي $(-\infty, 0)$ ، وفترة تقعر للأعلى، هي $(0, \infty)$ ، ووجود خط تقارب رأسي عندما $x = 0$.



أتحقق من فهمي: (صفحة 108)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (x-2)^3(x-1)$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f'(x) = (x-2)^3 + (x-1)3(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3(x-2)^2 + (x-1)6(x-2) + 3(x-2)^2$$

$$f''(x) = (x-2)^2 + (x-1)2(x-2) + (x-2)^2$$

$$f''(x) = (x-2)((x-2) + (x-1)2 + (x-2))$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

$$(x-2)\big((x-2) + (x-1)2 + (x-2)\big) = 0$$

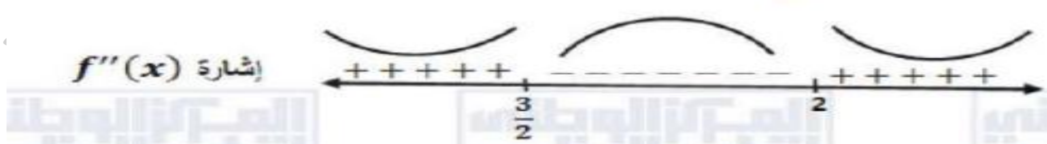
$$x - 2 = 0 \implies \boxed{x = 2}$$

$$x - 2 + 2x - 2 + x - 2 = 0 \implies 4x - 6 = 0 \implies 4x = 6 \implies x = \frac{6}{4} \implies \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$f(2) = (2-2)^3(2-1) \implies \boxed{f(2) = 0}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^3\left(\frac{3}{2} - 1\right) \implies = \left(\frac{-1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) \implies = \left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \implies \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{16}}$$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

*** منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, \frac{3}{2})$ و $(2, \infty)$**

*** منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(\frac{3}{2}, 2)$.**

*** وله نقطتا انعطاف هما $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{16})$ و $(2, 0)$**

2) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

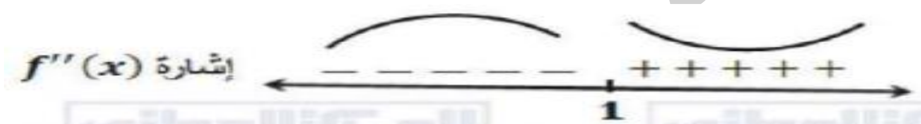
$$f'(x) = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} \Rightarrow = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^2(0) - (-1)2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow = \frac{2}{(x-1)^3}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

$f''(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 1$.

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

*** *منحنى الاقتران* $f(x)$ مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$.**

*** *منحنى الاقتران* $f(x)$ مقعر للأعلى على الفترة $(1, \infty)$**

*** ولا توجد له نقاط انعطاف مع المنحنى غير من اتجاه تقعره عند $x = 1$ *وذلك لأنها خارج مجال* $f(x)$**

اختبار المشتقة الثانية:

ملاحظة مهمة:

يتم استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد إذا كانت النقطة هي قيمة عظمى محلية أم قيمة صغرى محلية. كما يلي:

1) إذا كان : $f''(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.

2) إذا كان : $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.

3) إذا كان : $f''(c) = 0$ فإن الاختبار يفشل ، وفي هذه الحالة ، يجب استعمال اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النقطة $(c, f(c))$.

ملاحظة مهمة:

لا يمكن استعمال اختبار المشتقة الثانية لتصنيف القيم القصوى المحلية إذا كانت $f'(c)$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال 6: (صفحة 109)

إذا كان : $f(x) = (x^2 - 4)^2$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f .

الخطوة الاولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 4)(2x) \Rightarrow = 4x(x^2 - 4) \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

إذن القيم الحرجة للاقتران $f(x)$ هي : $x = -2$, $x = 2$, $x = 0$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتران الثانية.

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4) \Rightarrow = 4x^3 - 16x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16$$

الخطوة الثالثة: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية، لتصنيفها:

$$f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 \Rightarrow f''(-2) = 48 - 16 \Rightarrow \boxed{f''(-2) = 32 > 0}$$

$$f(-2) = (-2^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 16 \Rightarrow f''(0) = 0 - 16 \Rightarrow \boxed{f''(0) = -16 < 0}$$

$$f(0) = (0^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(0) = 16}$$

$$f''(2) = 12(2)^2 - 16 \Rightarrow f''(2) = 48 - 16 \Rightarrow \boxed{f''(2) = 32 > 0}$$

$$f(2) = (2^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

الاحظ أن:

* $f'(-2) = 0$ ، $f''(-2) > 0$
إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ ، وهي $f(-2) = 0$

* $f'(0) = 0$ ، $f''(0) < 0$
إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وهي $f(0) = 16$

* $f'(2) = 0$ ، $f''(2) > 0$
إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ ، وهي $f(2) = 0$

اتحقق من فهمي: (صفحة 110)

إذا كان : $f(x) = xe^{x}$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة الاولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.

$$f(x) = xe^{x}$$

$$\acute{f}(x) = xe^{x} + e^{x} \Rightarrow = e^{x}(x+1) \Rightarrow e^{x}(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

إذن القيم الحرجة للاقتران $f(x)$ هي : $x = -1$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتران الثانية.

$$\acute{f}(x) = xe^{x} + e^{x}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = xe^{x} + e^{x} + e^{x} \Rightarrow = e^{x}(x+1+1) \Rightarrow = e^{x}(x+2)$$

الخطوة الثالثة: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية، لتصنيفها:

$$\acute{\acute{f}}(-1) = e^{-1}(-1+2) \Rightarrow \acute{\acute{f}}(-1) = e^{-1}(1) \Rightarrow \acute{\acute{f}}(-1) = e^{-1} > 0$$

$$f(-1) = -1e^{-1} \Rightarrow f(-1) = -e^{-1}$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران f عندما $x = -1$ ، وهي $f(-1) = -e^{-1}$

تطبيقات السرعة والتسارع:

ملاحظة مهمة:

نستطيع من خلال اشتقاق اقتران الموقع إيجاد اقتراني السرعة والتسارع.

ملاحظة مهمة:

إذا كان التسارع موجباً ، فإن السرعة تزداد ، أما إذا كان التسارع سالباً ، فإن السرعة تتناقص.

مثال 7: (صفحة 111)

يمثل الاقتران : $s(t) = 3t^2 - 2t^3 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

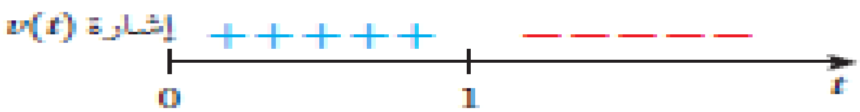
يمكن تحديد الفترات الزمنية لاتجاه حركة الجسم بدراسة إشارة السرعة المتجهة كما يأتي:

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = 3t^2 - 2t^3 \implies v(t) = \acute{s}(t) = 6t - 6t^2$$

$$6t - 6t^2 = 0 \implies 6t(1-t) = 0 \implies 6t = 0 \implies \boxed{t=0} \implies 1 - t = 0 \implies \boxed{t=1}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة.



الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

* **يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(0,1)$**
* **يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(1,\infty)$**

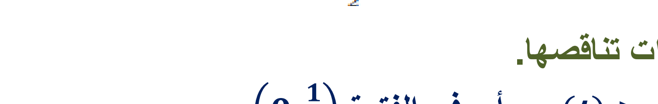
2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

يمكن وصف سرعة الجسم المتجهة بدراسة إشارة التسارع كما يأتي:

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

$$a(t) = \acute{v}(t) = \acute{\acute{s}}(t) = 6 - 12t \implies 6 - 12t = 0 \implies \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة التسارع.



الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

* **تكون سرعة الجسم المتجهة متزايدة عندما $a(t) > 0$ ، أي في الفترة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.**
* **تكون سرعة الجسم المتجهة متناقصة عندما $a(t) < 0$ ، أي في الفترة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.**

أتحقق من فهمي: (صفحة 112)

يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = t^3 - 3t + 3$$

$$v(t) = \acute{s}(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة المتجهة.

الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

*** يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(0, 1)$**

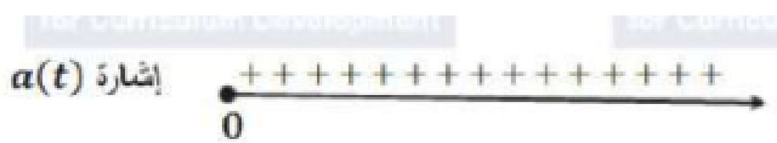
*** يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(1, \infty)$**

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

$$\acute{s}(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow a(t) = \acute{v}(t) = \acute{\acute{s}}(t) = 6t \Rightarrow \boxed{t = 0}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة التسارع.

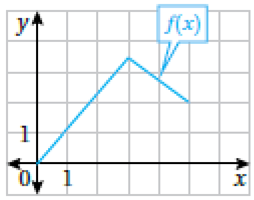


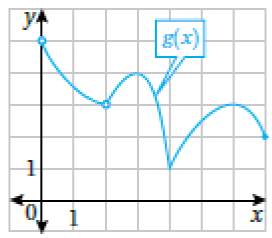
الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

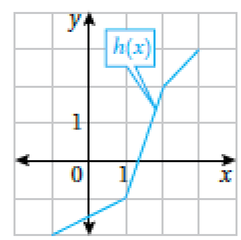
*** تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبداً .**

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 112)

أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

1


2


3


1) قيم x الحرجة هي : $x = 3$ (المشتقة عندها غير موجودة)، ولا توجد قيم تكون عندها $\acute{f}(x) = 0$.

توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$

2) ألاحظ أن المشتقة تساوي صفراً عند $x = 3$ ، و $x = 6$ ، وأنها غير موجودة عند $x = 4$

إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$ و $x = 4$ و $x = 6$

توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي $g(6) = 3$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة.

3) قيم x الحرجة هي : $x = 2$ و $x = 1$ (المشتقة عندها غير موجودة).

توجد قيمة صغرى مطلقة هي $h(-1) = -2$

توجد قيمة عظمى مطلقة هي $h(3) = 3$

لا توجد قيمة قصوى مطلقة.

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, \quad [0,4]$

$\acute{f}(x) = 6 - 6x \Rightarrow \acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

قيم x الحرجة هي $x = 1$

$f(0) = 1 + 6(0) - 3(0)^2 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$

$f(4) = 1 + 6(4) - 3(4)^2 \Rightarrow f(4) = 1 + 24 - 48 \Rightarrow \boxed{f(4) = -23}$

$f(1) = 1 + 6(1) - 3(1)^2 \Rightarrow f(1) = 1 + 6 - 3 \Rightarrow \boxed{f(1) = 4}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

5) $f(x) = (3 + x)^{\frac{2}{3}} - 5, \quad [-3,3]$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(3 + x)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{3 + x}}$

$\acute{f}(x)$ لا تساوي صفراً لأي قيمة في الفترة $(-3,3)$ وهي غير موجودة عند $x = -3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3,3)$.

$f(-3) = \sqrt[3]{(3 + (-3))^2} - 5 \Rightarrow f(-3) = 0 - 5 \Rightarrow \boxed{f(-3) = -5}$

$f(3) = \sqrt[3]{(3 + 3)^2} - 5 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{(6)^2} - 5 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{36} - 5$

$\Rightarrow f(3) = 3.3 - 5 \Rightarrow \boxed{f(3) \approx -1.7}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -5$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5 \approx -1.7$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $[-2, 2]$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{(2x^3+2x) - (2x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

قيم x الحرجة هي $x = 0$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{(-2)^2+1} \Rightarrow f(-2) = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \boxed{f(-2) = \frac{4}{5}}$$

$$f(2) = \frac{(2)^2}{(2)^2+1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \boxed{f(2) = \frac{4}{5}}$$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2+1} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي $\frac{4}{5}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[8, 64]$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

$\acute{f}(x)$ موجودة ولا تساوي صفراً لأي قيم في الفترة $(8, 64)$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} \Rightarrow f(8) = 2$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} \Rightarrow f(64) = 4$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 8$ هي $f(8) = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 64$ هي $f(64) = 4$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x\ ,\quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\acute{f}(x) = -2\sin x + 2\cos 2x \implies = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x)$$

$$-2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 0 \implies -\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$\implies \sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0 \implies 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\implies (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\implies 2\sin x - 1 = 0 \implies 2\sin x = 1 \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$\sin x + 1 = 0 \implies \sin x = -1 \implies \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$$

القيمة الحرجة للاقتران في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ هي $x = \frac{\pi}{6}$ فقط .

$$f(0) = 2\cos(0) + \sin 2(0) \implies f(0) = 2(1) + 0 \implies \boxed{f(0) = 2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\pi \implies = 2(0) + (0) \implies \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \implies = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\implies = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \implies = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}\ ,\quad [0, 3]$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} \implies \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$(1+x^2)e^x - 2xe^x = 0 \implies e^x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow e^{x}(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow (x-1) = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1}$$

القيم الحرجة هي $x = 1$

$$f(0) = \frac{e^0}{1+0^2} \Longrightarrow f(0) = \frac{1}{1} \Longrightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f(1) = \frac{e^1}{1+1^2} \Longrightarrow \boxed{f(1) = \frac{1}{2}e}$$

$$f(3) = \frac{e^3}{1+3^2} \Longrightarrow \boxed{f(3) = \frac{1}{10}e^3}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $2 \approx f(3) = \frac{1}{10}e^3$

10) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} \Longrightarrow = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} \Longrightarrow = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$\Longrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Longrightarrow 2\ln x = 1 \Longrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{e}$$

القيم الحرجة هي $x = \sqrt{e}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Longrightarrow = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Longrightarrow = 4\ln\frac{1}{2} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} \Longrightarrow = \frac{\ln\sqrt{e}}{e} \Longrightarrow = \frac{1}{2e} \Longrightarrow \boxed{f(\sqrt{e}) \approx 0.18}$$

$$f(4) = \frac{\ln 4}{(4)^2} \Longrightarrow = \frac{1.38}{16} \Longrightarrow = \frac{1.38}{16} \Longrightarrow \boxed{f(4) \approx 0.09}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e}) \approx 0.18$

11) $f(x) = \cos x\ ,\quad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$\acute{f}(x) = -\sin x \implies -\sin x = 0 \implies x = 0$

$f(0) = \cos 0 \implies f(0) = 1$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \implies f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.87$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \implies f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}\ ,\quad [-2, 2]$

$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \implies = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \implies \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \implies -x = 0 \implies \boxed{x = 0}$

$f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} \implies f(-2) = \sqrt{4 - 4} \implies \boxed{f(-2) = 0}$

$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} \implies f(2) = \sqrt{4 - 4} \implies \boxed{f(2) = 0}$

$f(0) = \sqrt{4 - (0)^2} \implies \boxed{f(0) = 2}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 2$ و$x = -2$ هي 0

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

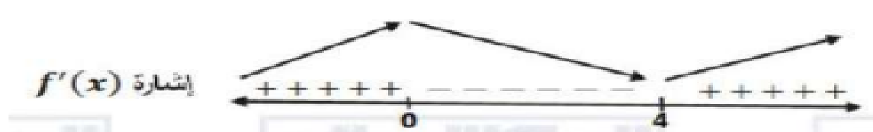
أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية:

13) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 12x \implies 3x^2 - 12x = 0$

$3x(x - 4) = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0 \implies x - 4 = 0 \implies \boxed{x = 4}$

القيم الحرجة هي $x = 4$ و $x = 0$



$$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 - 135 \implies \boxed{f(0) = -135}$$

$$f(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 135 \implies f(4) = 64 - 96 - 135 \implies \boxed{f(4) = -167}$$

الاقتران f متزايد على $(4, \infty)$ و $(-\infty, 0)$

الاقتران f متناقص على $(0, 4)$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0) = -135$

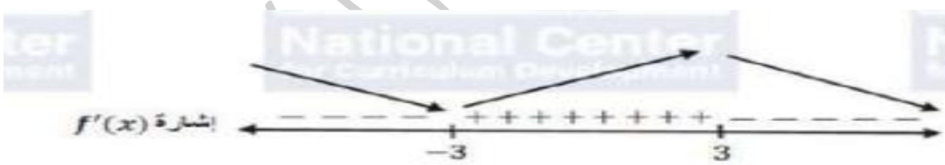
وله قيمة صغرى محلية عند $f(4) = -167$

14) $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+9)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+9)^2} \implies = \frac{2x^2 + 18 - 4x^2}{(x^2+9)^2} \implies = \frac{18 - 2x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$\frac{18 - 2x^2}{(x^2+9)^2} = 0 \implies 18 - 2x^2 = 0 \implies 2x^2 = 18 \implies x^2 = 9 \implies \boxed{x = 3} \iff \boxed{x = -3}$$

القيم الحرجة هي $x = -3$ و $x = 3$



الاقتران f متزايد على $(-3, 3)$

الاقتران f متناقص على $(3, \infty)$ و $(-\infty, -3)$

$$f(3) = \frac{2(3)}{(3)^2 + 9} \implies = \frac{6}{9+9} \implies = \frac{6}{18} \implies \boxed{f(3) = \frac{1}{3}}$$

$$f(-3) = \frac{2(-3)}{(-3)^2 + 9} \implies = \frac{-6}{9+9} \implies = \frac{-6}{18} \implies \boxed{f(-3) = -\frac{1}{3}}$$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(3) = \frac{1}{3}$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(-3) = -\frac{1}{3}$

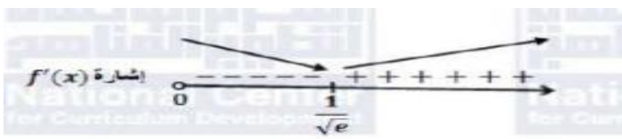
15) $f(x) = x^2 \ln x$

$$\acute{f}(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) \Rightarrow = x + 2x\ln x \Rightarrow = x(1 + 2\ln x)$$

$$x(1 + 2\ln x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0 \Rightarrow 2\ln x = -1$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

القيم الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow = -\frac{1}{2e}$$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f(1) = \sqrt{(1)^2 - 2(1) + 2} \Rightarrow = \sqrt{1 - 2 + 2} \Rightarrow = \sqrt{1} \Rightarrow f(1) = 1$$

القيم الحرجة هي $x = 1$

الاقتران f متزايد على $(1, \infty)$

الاقتران f متناقص على $(-\infty, 1)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(1) = 1$

17) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

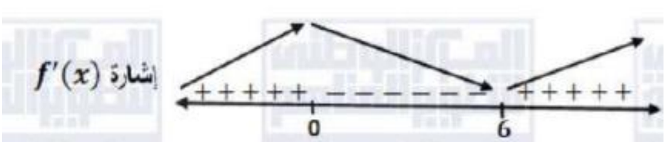
$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}} \Longrightarrow = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \Longrightarrow = \frac{5x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{3\sqrt[3]{x}} \Longrightarrow = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Longrightarrow 5x-6=0 \Longrightarrow 5x=6 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{6}{5}}$$

وكذلك $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 0$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = \frac{6}{5}$



الاقتران f متزايد على $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{6}{5}, \infty\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(0, \frac{6}{5}\right)$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{6}{5} - 3\right) \Longrightarrow f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(0) = (0)^{\frac{2}{3}}(0-3) \Longrightarrow f(0) = 0$$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0) = 0$

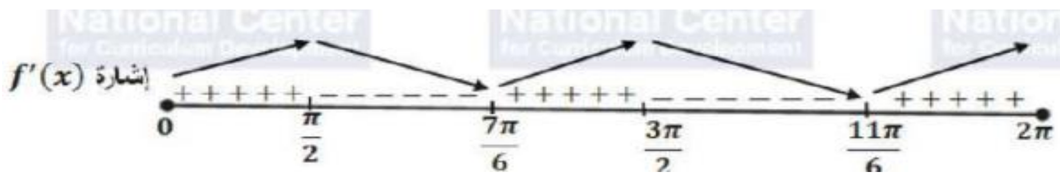
18) $f(x) = \sin^2 x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x \Longrightarrow = \cos x\,(2\sin x + 1)$$

$$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$

$$2\sin x + 1 = 0 \Longrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6} \Rightarrow = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}}$$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$ ، $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ، $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$ ، $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$

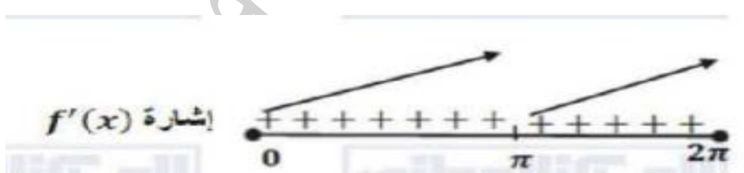
وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ ، $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

وله قيمتان عظميان محليتان عند $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ ، $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

19) $f(x) = x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$

$\acute{f}(x) = 1 + \cos x$

$1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$



القيم الحرجة هي $x = \pi$

الاقتران f متزايد على $(2\pi, 0)$

ليس له قيم قصوى محلية

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$f(0) = (0)x^3 - 12(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(0, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

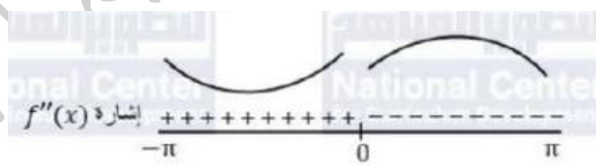
21) $f(x) = \sin x \ , \ [-\pi, \pi]$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi} \ , \ \boxed{x = 0} \ , \ \boxed{x = \pi}$

$f(0) = \sin 0$

$f(0) = 0$



الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\pi, 0)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, \pi)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 0)$

22) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

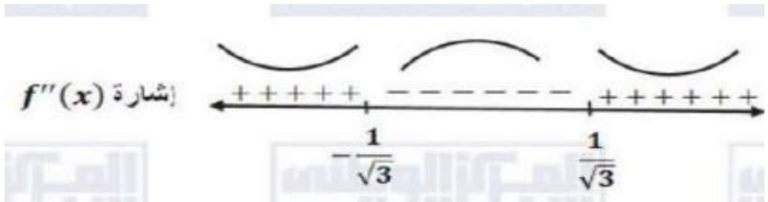
$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(0) - (3)(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left((x^2+1)^2(-6)\right) - \left((-6x)(2)(x^2+1)(2x)\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2+1)(-6) - (-6x)(2)(2x)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow = \frac{(-6x^2 - 6) - (-24x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{-6x^2 - 6 + 24x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{18x^2 - 6}{(x^2+1)^3}$$

$$18x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 18x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{18} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ ، $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

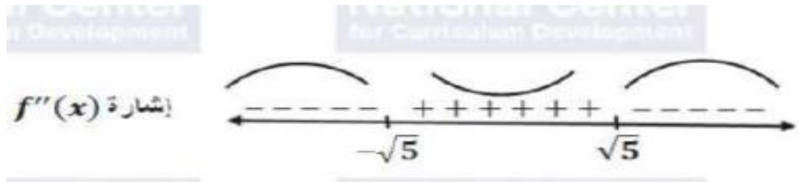
للاقتران f نقطتا انعطاف هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$ ، $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

23) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 5} \Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2+5)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{(2x^2 + 10) - (4x^2)}{(x^2+5)^2} \Rightarrow = \frac{2x^2 + 10 - 4x^2}{(x^2+5)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{10 - 2x^2}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{10 - 2x^2}{(x^2+5)^2} = 0 \Rightarrow 10 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{x = -\sqrt{5}}$$



$$f(\sqrt{5}) = \ln((\sqrt{5})^2 + 5) \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \ln(5+5) \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \ln 10$$

$$f(-\sqrt{5}) = \ln((-\sqrt{5})^2 + 5) \Rightarrow f(-\sqrt{5}) = \ln(5+5) \Rightarrow f(-\sqrt{5}) = \ln 10$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(\sqrt{5}, \infty)$ ، $(-\infty, -\sqrt{5})$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(\sqrt{5}, \ln 10)$ ، $(-\sqrt{5}, \ln 10)$

24) $f(x) = \sqrt{x}\,(x+3)$

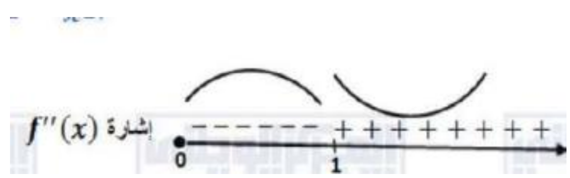
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}(x+3) \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



$$f(1) = \sqrt{1}\,(1+3) \Rightarrow f(1) = 1\,(4) \Rightarrow f(1) = 4$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(1, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, 1)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(1, 4)$

25) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + e^x \;\Rightarrow\; f''(x) = xe^x + e^x + e^x$

$\Rightarrow\; f''(x) = e^x(x+1+1) \Rightarrow f''(x) = e^x(x+2) \Rightarrow x+2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = -2}$

$f(-2) = -2e^{-2}$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-2, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, -2)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(-2, -2e^{-2})$

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية إن أمكن:

26) $f(x) = 6x - x^2$

$f'(x) = 6 - 2x \;\Rightarrow\; 6 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 6 \;\Rightarrow\; x = 3$

$f''(x) = -2 \;\Rightarrow\; f''(3) = -2 < 0$

$f(3) = 6(3) - (3)^2 \;\Rightarrow = 18 - 9 \;\Rightarrow = 18 - 9 \;\Rightarrow\; \boxed{f(3) = 9}$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$

27) $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$

$f'(x) = -\sin x - 1 \;\Rightarrow -\sin x - 1 = 0 \Rightarrow\; \sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}\,,\ \boxed{x = \frac{7\pi}{2}}$

$f''(x) = -\cos x$

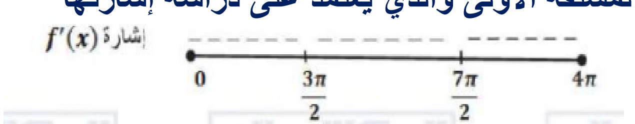
$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0}$

$f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -\cos\frac{7\pi}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0}$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد

نوع القيم $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها

:



نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبداً ، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .

28) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x) - (x^2)}{(x-1)^2} \Longrightarrow = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \Longrightarrow = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0} \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2 - 2x)2(x-1)}{(x-1)^4} \Longrightarrow = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x)2}{(x-1)^3}$$

$$\Longrightarrow = \frac{(2x^2 - 2x - 2x + 2) - (2x^2 - 4x)}{(x-1)^3} \Longrightarrow = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} \Longrightarrow \boxed{f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}}$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} \Longrightarrow f''(0) = \frac{2}{-1} \Longrightarrow \boxed{f''(0) = -2 < 0}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Longrightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} \Longrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} \Longrightarrow f''(2) = \frac{2}{1} \Longrightarrow \boxed{f''(2) = 2 > 0}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Longrightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} \Longrightarrow f(2) = \frac{4}{1} \Longrightarrow \boxed{f(2) = 4}$$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(2) = 4$

29) $f(x) = x \ln x$

$$f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) \Longrightarrow f'(x) = 1 + \ln x$$

$$1 + \ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow \boxed{x = e^{-1}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}}$$

$$f''(e^{-1}) = e > 0 \Longrightarrow = e^{-1} \ln e^{-1} \Longrightarrow = \frac{1}{e}(-1) \Longrightarrow = -\frac{1}{e} \Longrightarrow f(e^{-1}) = e^{-1}$$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1}) = e^{-1}$

30) $f(x) = \frac{x}{2^x}$

$$f'(x) = \frac{(2^x) - (x)(2^x \ln 2)}{2^{2x}} \Rightarrow = \frac{1 - (x)(\ln 2)}{2^x} \Rightarrow = 2^{-x}(1 - (x)(\ln 2))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2^{-x} - (x)(2^{-x}\ln 2) \Rightarrow = 2^{-x}(1 - x\ln 2)$$

$$2^{-x}(1 - x\ln 2) = 0 \Rightarrow 1 - x\ln 2 = 0 \Rightarrow x\ln 2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln 2}}$$

$$f'(x) = 2^{-x}(1 - x\ln 2) \Rightarrow f''(x) = 2^{-x}(-\ln 2) + (1 - x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-2^{-x}\ln 2) + (1 - x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2) \Rightarrow = -2^{-x}\ln 2\,(1 + 1 - x\ln 2)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2^{-x}\ln 2\,(2 - x\ln 2)$$

$$f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\left(2 - \frac{1}{\ln 2}\ln 2\right) \Rightarrow = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\,(1) \Rightarrow = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2 < 0$$

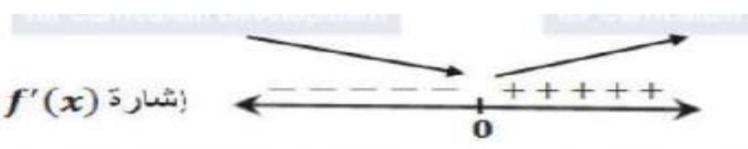
$$f(x) = \frac{x}{2^x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

31) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

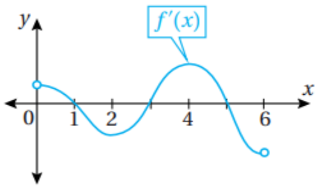
$f'(x)$ لا تساوي صفراً أبداً ، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها :



$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3 \Rightarrow f(0) = (0)^{\frac{2}{3}} - 3 \Rightarrow\Rightarrow f(0) = -3$$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(0) = -3$

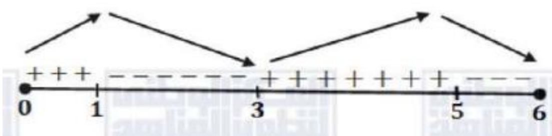
يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0,6]$. استعمل التمثيل البياني لإيجاد كل مما يأتي:



32) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها .

نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x)=0$ عند $x=5$ ، $x=3$ ، $x=1$

وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي :



للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $x=3$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $x=5$ ، $x=1$

33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(3,5)$ ، $(0,1)$ ، ومتناقص على $(5,6)$ ، $(1,3)$.

34) إذا كان للاقتران: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عندما $x=-3$ ، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1,-14)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت: a و b و c .

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما ان كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة ، فإن $f'(-3)=0$ و $f'(1)=0$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f'(-3)=3(-3)^2+2a(-3)+b=0 \implies 27-6a+b=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$
$$f'(1)=3(1)^2+2a(1)+b=0 \implies 3+2a+b=0 \quad \dots\dots..(2)$$

النقطة $(1,-14)$ تقع على منحنى الاقتران ، لذا فإن $f(1)=-14$

$$f(1)=(1)^3+a(1)^2+b(1)+c=-14 \implies f(1)=1+a+b+c=-14 \quad \dots\dots(3)$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أن :

$$27-6a+b=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$
$$\underline{(-)3+2a+b=0 \quad \dots\dots(2)}$$
$$24-8a=0 \implies 8a=24 \implies \boxed{a=3}$$

بتعويض قيمة $a=3$ في المعادلة (2) نجد أن :

$$3+2(3)+b=0 \implies 3+6+b=0 \implies \boxed{b=-9}$$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن :

$$1+3-9+c=-14 \implies -5+c=-14 \implies \boxed{c=-9}$$

35) إذا كان للاقتران : $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x=3$ ، فأجد قيمة الثابت b.

$$f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{b}{x^2} \Rightarrow =\frac{1(x+1)^{\frac{-1}{2}}}{2}-bx^{-2}$$

$$f''(x)=\frac{-1(x+1)^{\frac{-3}{2}}}{4}+2bx^{-3} \Rightarrow =\frac{-1}{4(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2b}{x^3} \Rightarrow =\frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}+\frac{2b}{x^3}$$

بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x=3$ فإما أن يكون $f''(3)=0$ أو $f''(3)$ غير موجودة .

لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران f'' فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x=-1$ و $x=0$

إذن $f''(3)=0$ ، ومنه :

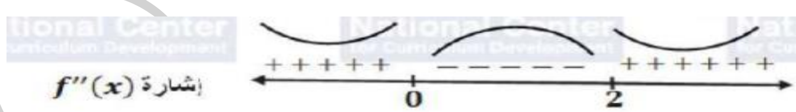
$$f''(3)=\frac{-1}{4(3+1)\sqrt{3+1}}+\frac{2b}{3^3} \Rightarrow =\frac{-1}{4(4)\sqrt{4}}+\frac{2b}{27} \Rightarrow f''(3)=\frac{-1}{32}+\frac{2b}{27}$$

$$\frac{-1}{32}+\frac{2b}{27}=0 \Rightarrow \frac{2b}{27}=\frac{1}{32} \Rightarrow 64b=27 \Rightarrow b=\frac{27}{64}$$

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :

36) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

نلاحظ من الشكل أن $f''(x)=0$ عند $x=0$ و $x=2$ وأن إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي :

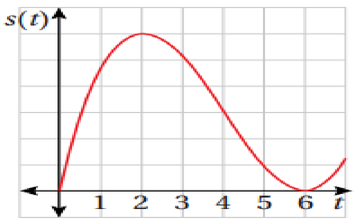


الاقتران f مقعر للأسفل في $(0,2)$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(2,\infty)$ ، $(-\infty,0)$

37) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

توجد نقطتا انعطاف عند $x=0$ ، $x=2$



يمثل الاقتران $s(t)$ المبين في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، وt الزمن بالثواني :

38) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون .

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي $\acute{s}(t) = 0$

وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي ، أي عند $t = 2$ و $t = 6$

39) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعاً لإشارة $\acute{s}(t) = v(t)$ وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايداً أو متناقصاً :

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين : $(6, 7)$ ، $(0, 2)$ لأن اقتران الموقع متزايد فيهما.

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2, 6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها .

40) إذا كان تسارع الجسم صفراً عندما $t = 4$ ، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم ؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

تتزايد $v(t)$ عندما $\acute{\acute{s}}(t) = \acute{v}(t)$ يكون موجباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأعلى ، أي في الفترة $(4, 7)$.

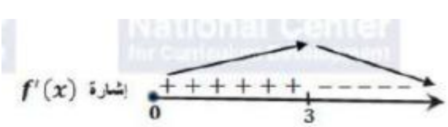
تتناقص $v(t)$ عندما $\acute{\acute{s}}(t) = \acute{v}(t)$ يكون سالباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأسفل ، أي في الفترة $(0, 4)$.

41) مكبرات صوت : يمثل الاقتران $f(x) = \frac{1500}{x^2-6x+10} - 150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه ، حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة . أجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

$$f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150 \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-1500(2x+6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} \Rightarrow \frac{-1500(2x+6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} = 0$$

$$-1500(2x - 6) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفراً .



بدراسة إشارة $\acute{f}(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ أي أن عدد مكبرات الصوت اللازم انتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3 .

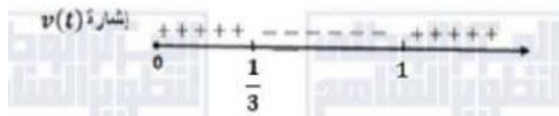
يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 2t^2 + t\,, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

42) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + t \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (3t-1)(t-1) = 0$$

$$3t - 1 = 0 \Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$



$$t - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين $(1, \infty)$ ، $(0, \frac{1}{3})$.

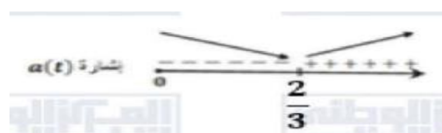
ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(\frac{1}{3}, 1)$.

43) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقاً للإشارة $a(t) = v'(t)$

$$v'(t) = a(t) = 6t - 4$$

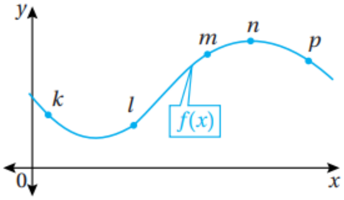
$$6t - 4 = 0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$



تتزايد سرعة الجسم في الفترة $(\frac{2}{3}, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(0, \frac{2}{3})$

مهارات التفكير العليا: صفحة 115

تبرير : يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أحدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط : $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تحقق كلا من الشروط الآتية ، مبررا ً إجابتي :



44) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة .

تكون $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متزايدا ً ومنحناه مقعرا ً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l

45) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة .

تكون $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصاً ومنحناه مقعراً للأسفل.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p

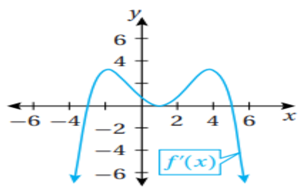
46) أن تكون إشارة $f'(x)$ سالبة ، وإشارة $f''(x)$ موجبة .

تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصاً ومنحناه مقعراً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: k

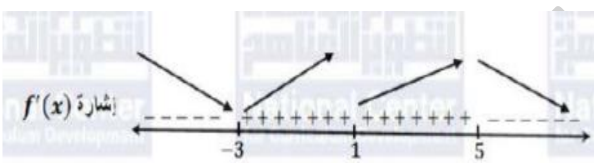
تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد

كل مما يأتي ، مبرراً إجابتي :



47) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها .

نلاحظ من الرسم $f'(x) = 0$ عند $x = 5$ ، $x = 1$ ، $x = -3$ وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:



للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = -3$

للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 5$

48) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(-3, 5)$ ومتناقص على $(-\infty, -3)$ ، $(5, \infty)$

49) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

يكون منحنى f مقعراً للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها f' متزايداً حيث تكون في هذه الفترات مشتقة f' أي f'' موجبة ، يتضح من الرسم أن f' متزايدة في الفترتين: $(1, 4)$ ، $(-\infty, -2)$ ، وعندما تكون f' متناقصة في فترة ما تكون f'' سالبة ويكون منحنى f مقعراً للأسفل ، ويتضح من الرسم أن f' متناقصة في الفترتين : $(-2, 1)$، $(4, \infty)$

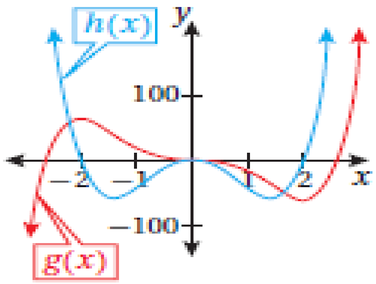
إذن منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2, 1)$، $(4, \infty)$

ومقعر للأعلى في الفترتين $(1, 4)$، $(-\infty, -2)$

50) الإحداثي x لنقاط الانعطاف .

الاقتران f له ثلاث نقاط انعطاف عند على $x = 4$ ، $x = 1$ ، $x = -2$ لأن الاقتران f' قيم قصوى عندها .

51) تحد : أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ ، $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يمثل مشتقة للآخر ، مبرراً إجابتي .



$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g'(x) = h(x)$ وليس العكس .

التبرير : بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات) ،

يكفي ملاحظة الفترة $x < -2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر ،

وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g ،

بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة ،

وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة .

كذلك للاقتران g قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ ، ونلاحظ أن $h(-2) = 0$ ، ما يؤكد أن $g'(x) = h(x)$.