كتاب الطالب

الدرس الأول – الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

مثال 1:

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = 4^x , x = 3$

الاقتران المعطى	$f(x) = 4^x$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 4^3$
$4^3 = 64$	$= 64$

2) $f(x) = (\frac{1}{5})^x, \ x = -2$

الاقتران المعطى	$f(x) = (\frac{1}{5})^x$
بتعويض $x = -2$	$f(-2) = (\frac{1}{5})^{-2}$
$(\frac{1}{5})^{-2} = 25$	$= 25$

أتحقق من فهمي:

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = 3^x, x = 4$

$f(4) = 3^4 = 81$

b) $f(x) = (\frac{1}{3})^x, x = -1$

$f(-1) = (\frac{1}{3})^{-1} = 3$

مثال 2:

أذا كان: $f(x) = 2^x$، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

1) أمثل الاقتران بيانيا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$(-2,\frac{1}{4})$	$(-1,\frac{1}{2})$	(0,1)	(1,2)	(2,4)

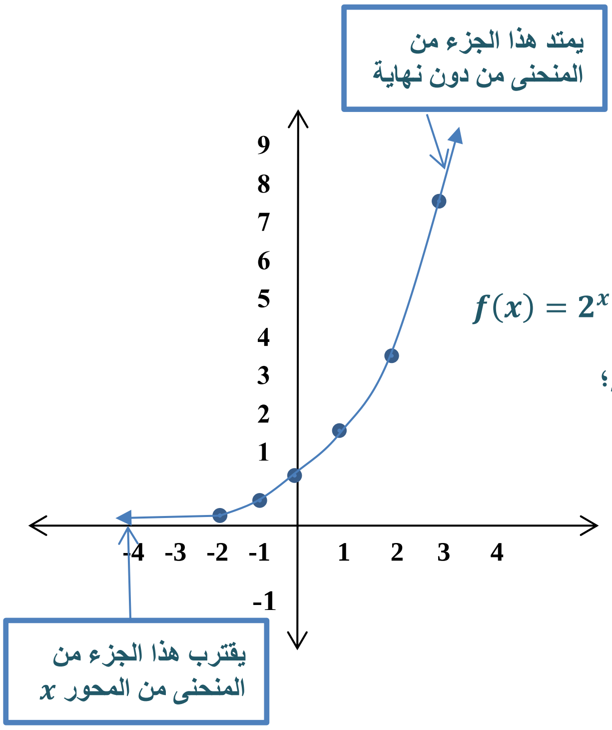
الخطوة 2: أمثل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أعين الأزواج المرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي،

ثم أصل بينهما بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

إذن، مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية،

ومداه هو الفترة $(0, \infty)$، وله خط تقارب أفقي هو المحور x



2) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

بما أن 2^x موجبة دائما، فإنه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x؛

لأن $y > 0$ دائما.

المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$.

3) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متزايد؛ لأنه كلما زادت قيم x زادت قيم y.

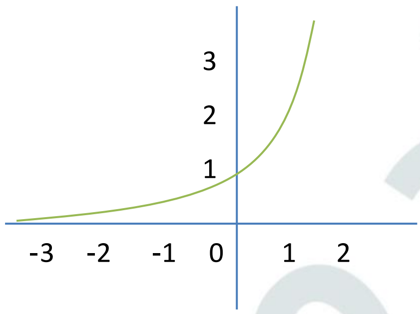
4) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

نعم، الاقتران $f(x)$ واحد لواحد، ويمكن التحقق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتحقق من فهمي:

إذا كان: $f(x) = 3^x$، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

a) أمثل الاقتران بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.



$$f(x) = 3^x$$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

c) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متزايد

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد.

مثال 3:

أذا كان: $f(x) = (\frac{1}{2})^x$، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

1) أمثل الاقتران بيانيا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x, y)	(-2,4)	(-1,2)	(0,1)	$(1,\frac{1}{2})$	$(2,\frac{1}{4})$

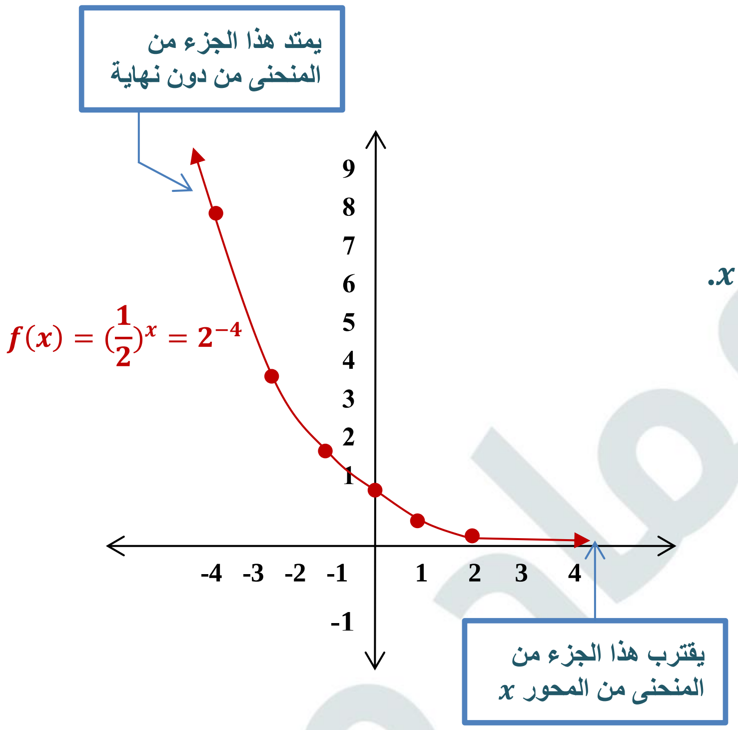
الخطوة 2: أمثل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أعين الأزواج المرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي،

ثم أصل بينهما بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

إذن، مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية،

ومداه هو الفترة $(0, \infty)$، وله خط تقارب أفقي هو المحور x.



2) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

بما أن $(\frac{1}{2})^x$ موجبة دائما، فإنه لا يوجد

للاقتران مقطع مع المحور x؛

لأن $y > 0$ دائما.

المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$.

3) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متناقص؛ لأنه كلما زادت قيم x تناقصت قيم y

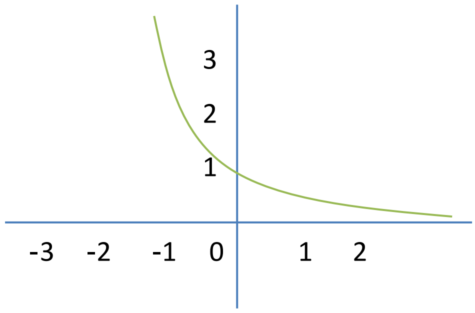
4) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

نعم، الاقتران $f(x)$ واحد لواحد، ويمكن التحقق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتحقق من فهمي:

إذا كان: $f(x) = (\frac{1}{3})^x$، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

e) أمثل الاقتران بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.



$$f(x) = (\frac{1}{3})^x$$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

f) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

g) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متناقص

h) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد.

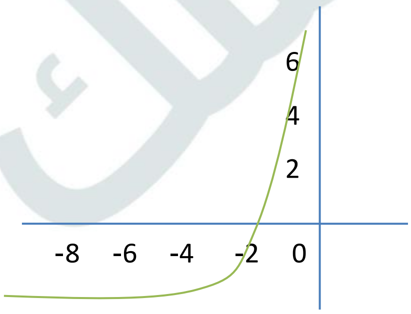
مثال 4:

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

1) $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

بالنظر إلى الاقتران $f(x)$، ألاحظ أن: $a = 5, b = 3, h = -1, k = -2$، إذن:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = -2$
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(-2, \infty)$
- بما أن $b = 3 > 1$، فإن الاقتران $f(x)$ متزايد.



الدعم البياني:

يمكن استعمال برمجية جيوجيرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيا،

وذلك بإدخال الاقتران في شريط المعادلة، ثم الضغط على زر الإدخال enter

يبين التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ أنه متزايد،

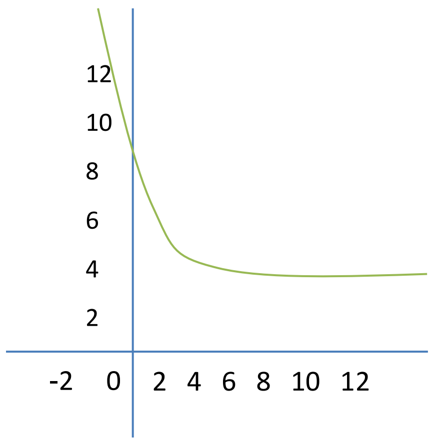
وأن خط تقاربه الأفقي هو $y = -2$.

2) $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$

يمكن إعادة كتابة الاقتران $f(x)$ في صورة: $f(x) = 7(\frac{1}{2})^x + 3$. ومن ثم، فإن:

$a = 7, b = \frac{1}{2}, h = 0, k = 3$:إذن

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = 3$
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(3, \infty)$
- بما أن $b = \frac{1}{2}$، فإن الاقتران $f(x)$ متناقص.



الدعم البياني:

يمكن استعمال برمجية جيوجيرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيا،

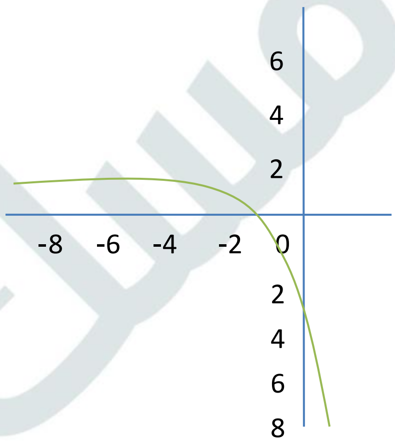
ويظهر في التمثيل البياني أن الاقتران متناقص،

وأن خط تقاربه الأفقي هو $y = 3$.

3) $f(x) = -3(4)^x + 1$

بالنظر إلى الاقتران $f(x)$، ألاحظ أن: $a = -3 , b = 4, h = 0, k = 1$، إذن:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = 1$
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(-\infty, 1)$
- بما أن $b = 4$، فإن الاقتران $f(x)$ متناقص.



الدعم البياني:

يمكن استعمال برمجية جيوجيرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيا،

ويظهر في التمثيل البياني أن الاقتران متناقص،

وأن خط تقاربه الأفقي هو $y = 1$،

وأن مداه هو الفترة $(-\infty, 1)$

أتحقق من فهمي:

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مبينا إذا كان كمتناقصا أم متزايدا:

a) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متزايد.

b) $f(x) = 4(5)^{-x}$

$f(x) = 4(5)^{-x} = 4(\frac{1}{5})^{x}$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متناقص.

c) $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$

الاقتران $f(x)$ متناقص.

مثال 5: من الحياة

حشرات: يمثل الاقتران: $f(x) = 30(2)^{x}$ عدد حشرات خنفساء الدقيقي في كيس دقيق، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

1) أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع.

الاقتران المعطى $f(x) = 30(2)^{x}$

بتعويض $x = 6$ $f(6) = 30(2)^{6}$

بالتبسيط $= 1920$

إذن، عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع هو 1920 حشرة.

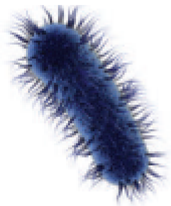
2) بعد كم أسبوعا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

الاقتران المعطى	$f(x) = 30(2)^x$
بتعويض $f(x) = 7680$	$7680 = 30(2)^x$
بالتبسيط	$256 = (2)^x$
$256 = (2)^8$	$(2)^8 = (2)^x$
بمساواة الأسس	$x = 8$

إذن، يصبح عدد الحشرات 7680 حشرة بعد 8 أسابيع

أتحقق من فهمي:

بكتيريا: يمثل الاقتران: $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:



a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات.

$$f(5) = 500(2)^5 = 500(32) = 16000$$

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية.

b) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية؟

$$4000 = 500(2)^x$$

$$8 = (2)^x$$

$$(2)^3 = (2)^x$$

$$x = 3$$

بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية.

أتدرب وأحل المسائل:

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (11)^x, x = 3$

$f(3) = (11)^3 = 1331$

2) $f(x) = -5(2)^x, x = 1$

$f(1) = -5(2)^1 = -5(2) = -10$

3) $f(x) = 3(\frac{1}{7})^x, x = 2$

$f(2) = 3(\frac{1}{7})^2 = 3\left(\frac{1}{49}\right) = \frac{3}{49}$

4) $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$

$f(4) = -(5)^4 + 4 = -(625) + 4 = -621$

5) $f(x) = 3^x + 1 , x = 5$

$f(5) = (3)^5 + 1 = 243 + 1 = 244$

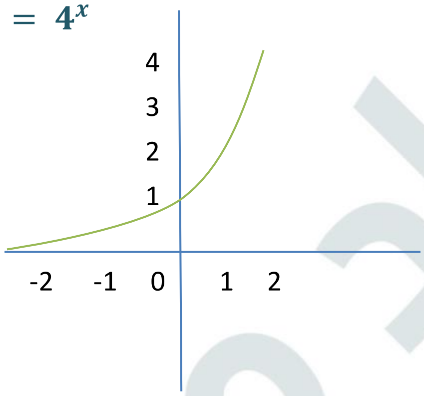
6) $f(x) = (\frac{1}{9})^x - 3 , x = 2$

$f(2) = (\frac{1}{9})^2 - 3 = \frac{1}{81} - 3 = \frac{1}{81} - \frac{243}{81} = -\frac{242}{81}$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أجد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 4^x$

$f(x) = 4^x$

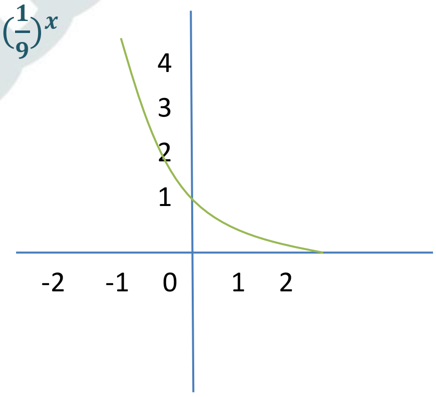


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

8) $f(x) = 9^{-x}$

$f(x) = 9^{-x} = (\frac{1}{9})^x$

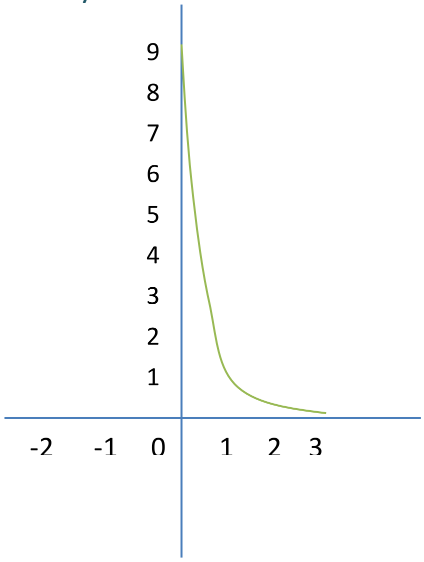


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

9) $f(x) = 7(\frac{1}{7})^x$

$f(x) = 7(\frac{1}{7})^x$

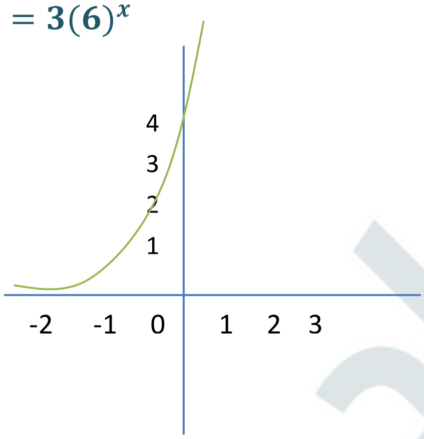


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

10) $f(x) = 3(6)^x$

$f(x) = 3(6)^x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

11) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

$f(x) = 5^{x-1} + 2$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ - الاقتران $f(x)$ متزايد

12) $f(x) = (\frac{1}{4})^{x+2} - 5$

$f(x) = (\frac{1}{4})^{x+2} - 5$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ - الاقتران $f(x)$ متناقص

13) $f(x) = 3(\frac{1}{7})^{x+5} - 6$

$f(x) = 3(\frac{1}{7})^{x+5} - 6$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ - الاقتران $f(x)$ متناقص

14) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ - الاقتران $f(x)$ متزايد

بكتيريا: يُمثل الاقتران: $f(x) = 7000(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

15) أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

$f(0) = 7000(1.2)^0 = 7000(1) = 7000$

عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية.

16)أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

$$f(12) = 7000(1.2)^{12} \approx 62413$$

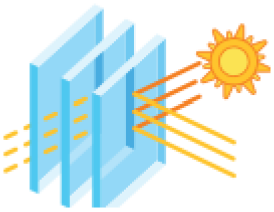
عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبا.

17)بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

$$10080 = 7000(1.2)^x$$
$$1.44 = (1.2)^x$$
$$(1.2)^2 = (1.2)^x$$
$$x = 2$$

بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية.

ضوء: يمثل الاقتران: $f(x) = 100(0.97)^x$
النسبة المئوية للضوء المار خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:



18)أجد النسبة المئوية للضوء المار خلال لوح زجاجي واحد.

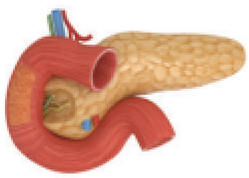
$$f(1) = 100(0.97)^1 = 100(0.97) = 97$$

نسبة الضوء المار خلال لوح زجاجي واحد هي 97%

19)أجد النسبة المئوية للضوء المار خلال 3 ألواح زجاجية.

$$f(3) = 100(0.97)^3 \approx 91$$

نسبة الضوء المار خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%



سرطان البنكرياس: يمثل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$
النسبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس،
ممن هم في المرحلة المتقدمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأولي للمرض:
20)أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض.

$$P(1) = 100(0.3)^t$$
$$= 100(0.3) = 30$$

نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض هي 30%

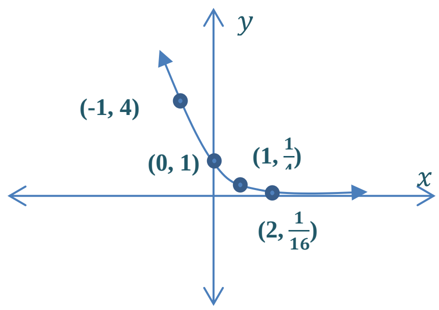
21)بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟

$$9 = 100(0.3)^t$$
$$= 0.09 = (0.3)^t$$
$$(0.3)^2 = (0.3)^t$$
$$t = 2$$

بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%

مهارات التفكير العليا:

22) تبرير: يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران:
$f(x) = ab^x$. أجد $f(3)$ مبررا إجابتي.



$$f(x) = ab^x$$

من التمثيل البياني نلاحظ أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,1)،
إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$
نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:

$$1 = ab^0$$
$$1 = a \times 1$$
$$a = 1$$

نلاحظ أيضا أن النقطة $(1, \frac{1}{4})$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:

$$\frac{1}{4} = ab^1$$
$$\frac{1}{4} = (1)b^1$$
$$b = \frac{1}{4}$$

ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = (\frac{1}{4})^x$

$$f(x) = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$$

23) أكتشف المختلف: أي الاقترانات الآتية مختلف، مبررا إجابتي؟

$y = 3^x$ $\quad f(x) = 2(4)^x$ $\quad f(x) = (\frac{1}{3})^x$ $\quad y = 5(3)^x$

الاقتران المختلف هو $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة

24) تحد: إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسيا، فأثبت أن $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$$

$$= \frac{b^{x+1}}{b^x}$$

$$= b$$

كتاب التمارين

الدرس الأول – الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (13)^x, x = 2$

$f(2) = (13)^2 = 169$

2) $f(x) = 4(5)^x, x = 3$

$f(3) = 4(5)^3 = 4 \times 125 = 500$

3) $f(x) = 7(\frac{1}{2})^x, x = 3$

$f(3) = 7(\frac{1}{2})^3 = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

4) $f(x) = -(3)^x + 7, x = 4$

$f(4) = = (3)^4 + 7 = -81 + 7 = -74$

5) $f(x) = -(2)^x + 1, x = 6$

$f(6) = -(2)^6 + 1 = -64 + 1 = -63$

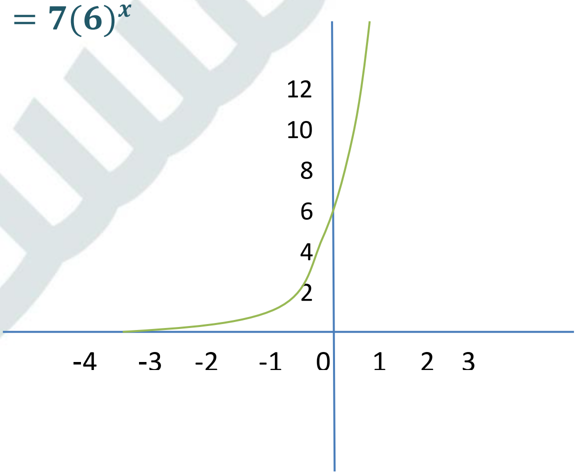
6) $f(x) = (\frac{1}{4})^x - 12, x = 3$

$f(3) = (\frac{1}{4})^3 - 12 = \frac{1}{64} - 12 = -\frac{767}{64}$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 7(6)^x$

$f(x) = 7(6)^x$

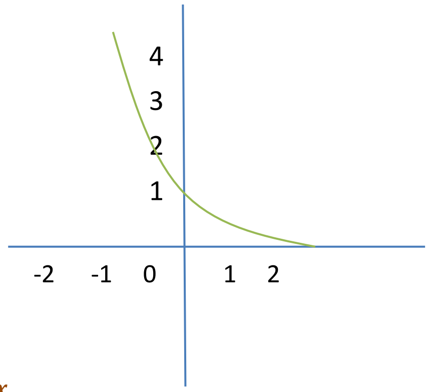


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

8) $f(x) = 7^{-x}$

$f(x) = (7)^{-x} = (\frac{1}{7})^{x}$

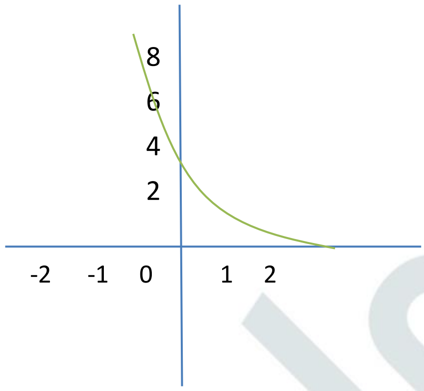


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

9) $f(x) = 5(\frac{1}{8})^{x}$

$f(x) = 5(\frac{1}{8})^{x}$

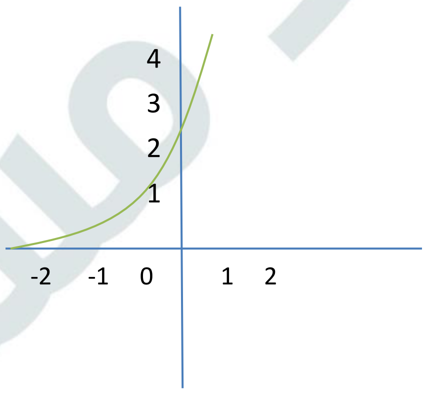


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

10) $f(x) = 2(9)^{x}$

$f(x) = 2(9)^{x}$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

11) $f(x) = 7^{x-2} + 1$

$f(x) = 7^{x-2} + 1$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$
الاقتران $f(x)$ متزايد

12) $f(x) = (\frac{1}{7})^{x+1} - 3$

$f(x) = (\frac{1}{7})^{x+1} - 3$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -3$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(-3, \infty)$
الاقتران $f(x)$ متناقص

13) $f(x) = 5(\frac{1}{4})^{x+3} - 7$

$f(x) = 5(\frac{1}{4})^{x+3} - 7$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -7$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(-7\ \infty)$
الاقتران $f(x)$ متناقص

14) $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

$f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 3$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(3, \infty)$
الاقتران $f(x)$ متزايد

بكتيريا: يمثل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكترية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

15) أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة.

$f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$

$f(0) = 400(2)^0 = 400$

16) أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

$$f(12) = 400(2)^{\frac{12}{3}} = 400(2)^4 = 400 \times 16 = 6400$$

17) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

$$102400 = 400(2)^{\frac{x}{3}}$$

$$256 = (2)^{\frac{x}{3}}$$

$$(2)^8 = (2)^{\frac{x}{3}}$$

$$\frac{x}{3} = 8$$

$$x = 24$$

إذن، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 بعد 24 ساعة.

خزان: يمثل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء المتبقية في خزان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

18) أجد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة.

$$f(1) = 2(0.75)^1 = 1.5\, m^3$$

19) ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{8}\, m^3$ تقريبا؟

$$\frac{9}{8} = 2(0.75)^x$$

$$\frac{9}{16} = (0.75)^x$$

$$(\frac{3}{4})^2 = (\frac{3}{4})^x$$

$$x = 2$$

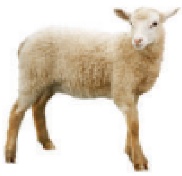
كتاب الطالب

الدرس الثاني – النمو والاضمحلال الأُسي

مثال 1: من الحياة

خِراف: في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام، تبين أن عدد الخِراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويا:

1) اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة،
علما بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفاً.



اقتران النمو الأسي $A(t) = a(1+r)^t$

بتعويض $a = 1524, r = 0.31$ $= 1524(1+0.31)^t$

بالتبسيط $= 1524(1.31)^t$

إذن، اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة هو: $A(t) = 1524(1.31)^t$

2) أجد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة.

لإيجاد عدد الخراف بعد 5 سنوات، أعوض $t = 5$:

اقتران النمو الأسي للخراف $A(t) = 1524(1.31)^t$

بتعويض $t = 5$ $A(5) = 1524(1.31)^5$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 5880

إذن، عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة هو 5880 خروفا تقريبا.

أتحقق من فهمي:

في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقار، تبين أن عدد الأبقار في الزرعة يزداد بنسبة 18% سنويا:

a) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة، علما بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة.

$A(t) = 327(1+0.18)^t$

$A(t) = 327(1.18)^t$

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة.

$A(3) = 327(1.18)^3$

≈ 537

عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريباً.

مثال 2: من الحياة

مواد مشعة: تتناقص 20g من أحد النظائر المشعة لعنصر الثوريوم (Th225) بنسبة 8% كل دقيقة نتيجة الإشعاع:

1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل كمية الثوريوم (بالغرام) المتبقية بعد t دقيقة.

اقتران الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1-r)^t$

بتعويض $a = 20, r = 0.08$ $= 20(1-0.08)^t$

بالتبسيط $= 20(0.92)^t$

إذن، اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل كمية الثوريوم (بالغرام) المتبقية بعد t دقيقة هو: $A(t) = 20(0.92)^t$

2) أجد كمية الثوريوم (بالغرام) المتبقية بعد 5 دقائق:

اقتران الاضمحلال الأسي للثوريوم $A(t) = 20(0.92)^t$

بتعويض $t = 5$ $= 20(0.92)^5$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 13.18

إذن، كمية الثوريوم (بالغرام) المتبقية بعد 5 دقائق هي 13.18g تقريبا.

أتحقق من فهمي:

سيارة: اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ 28500 JD.

إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 5% سنويا، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة.

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 28500(1-0.05)^t$

$A(t) = 28500(0.95)^t$

b) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات

$A(4) = 28500(0.95)^4$

≈ 23213.43

ثمن السيارة بعد 4 سنوات هو 23213.43 ديناراً تقريباً.

مثال 3:

استثمر سليمان مبلغ 9000 JD في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ %1.46، وتضاف كل 3 أشهر. أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات.

صيغة الربح المركب $A = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$

بتعويض $P = 9000, r = 0.0146, n = 4, t = 3$ $= 9000(1+\frac{0.0146}{4})^{4(3)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 9402.21

إذن، جملة المبلغ بعد 3 سنوات: 9402.21 JD تقريبا.

أتحقق من فهمي:

استثمرت تهاني مبلغ 5000 JD في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ %2.25، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

$$A = \mathrm{P}(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

$$= 5000(1+\frac{0.0225}{2})^{2\times5}$$

$$\approx 5591.85$$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 5591.85 دينارا تقريباً.

مثال 4:

أودع علي مبلغ 4500 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها %4. أجد جملة المبلغ بعد 10 سنوات.

صيغة الربح المركب المستمر $A = Pe^{rt}$

بتعويض $P = 4500, r = 0.04, t = 10$ $= 4500e^{0.04(10)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 6713.21

إذن، جملة المبلغ بعد 10 سنوات: 6713.21 JD تقريبا.

أتحقق من فهمي:

أودعت سارة مبلغ 6300 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها %3.2. أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات.

$A = Pe^{rt}$

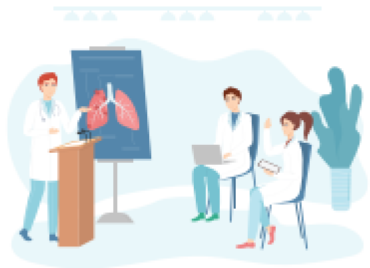
$= 6300e^{0.032\times 9}$

≈ 8402.67

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 8402.67 دينارا تقريباً.

أتدرب وأحل المسائل:

يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 طبيبا هذه السنة، ويتوقع زيادة هذا العدد بنسبة %8 كل سنة:



1) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد المشاركين بعد t سنة.

$A(t) = a(1 + r)^t$

$A(t) = 150(1 + 0.08)^t$

$A(t) = 150(1.08)^t$

2) أجد عدد المشاركين المتوقع بعد 5 سنوات.

$A(5) = 150(1.08)^5$

≈ 220

عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريباً.

استخدم 50 ألف شخص موقعا إلكترونيا تعليميا سنة 2019 م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة %15 كل سنة:

3) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

$A(t) = a(1 + r)^t$

$A(t) = 50(1 + 0.15)^t$

$A(t) = 50(1.15)^t$

4) أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025 م.

$t = 2025 - 2019 = 6$

$A(6) = 50(1.15)^6$

≈ 115.653

عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115.653 ألف شخص تقريباً.

سيارة: يتناقص ثمن سيارة سعرها 17350 JD بنسبة 3.5% سنويا:

5) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$
$$A(t) = 17350(1 - 0.035)^t$$
$$A(t) = 17350(0.965)^t$$

6) أجد ثمن السيارة بعد 3 سنوات.

$$A(3) = 17350(0.965)^3$$
$$\approx 15591.27$$

ثمن السيارة بعد 3 سنوات: 15591.27 دينارا تقريباً.

بكتريا: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العينة:

7) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علما بأن عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$
$$A(t) = 15275(1 - 0.27)^t$$
$$A(t) = 15275(0.73)^t$$

8) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات.

$$A(7) = 15275(0.73)^7$$
$$\approx 1687$$

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريباً.

9) دجاج: ينفق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يوميا نتيجة إصابته بمرض ما. أجد العدد المتبقي منه بعد 5 أيام من بدء المرض، علما بأن عدده الأولي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$
$$A(5) = 1550(1 - 0.25)^5$$
$$= 1550(0.75)^5$$
$$\approx 368$$

العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريباً.

استثمر ربيع مبلغ 1200 JD في شركة، بنسبة ربح مركب نبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10)أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة.

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

$$= 1200(1 + \frac{0.10}{12})^{12t}$$

11)أجد جملة المبلغ بع 5 سنوات.

$$A = 1200(1 + \frac{0.10}{12})^{12\times 5}$$

$$\approx 1974.37$$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 1974.37 دينارا تقريباً.

استثمرت هند مبلغ 6200 JD في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12)أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة.

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

$$= 6200(1 + \frac{0.084}{365})^{365t}$$

13)أجد جملة المبلغ بعد 6 سنوات.

$$A = 6200(1 + \frac{0.084}{365})^{365\times 6}$$

$$\approx 10262.45$$

جملة المبلغ بعد 6 سنوات: 10262.45 دينارا تقريباً.

14)أودع حسام مبلغ 9000 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 3.6%. أجد جملة المبلغ بعد 7 سنوات.

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 9000e^{0.036\times 7}$$

$$\approx 11579.36$$

جملة المبلغ بعد 7 سنوات: 11579.36 JD تقريباً.

15)أودعت ليلى مبلغ 8200 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.9%. أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات.

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 8200e^{0.049\times 9}$$

$$\approx 12744.94$$

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 12744.94 دينارا تقريباً.

16)<u>ذباب الفاكهة</u>: أعد باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصل إلى أنه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة، مقربا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$P(t) = 20e^{0.03t}$$

$$P(72) = 20e^{0.03\times 72}$$

$$\approx 173$$

عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريباً.

<u>مهارات التفكير العليا:</u>

17)<u>أكتشف الخطأ</u>: أوجد رامي جملة مبلغ مقداره 250JD بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مركب تبلغ 1.25%. وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$

أكتشف الخطأ في حل رامي، ثم أصححه.

الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125

$$A = 250\,(1 + \frac{0.0125}{4})^{4(3)} \approx 259.54$$

18)<u>تحد</u>: اكتشفت 12 إصابة بالإنفلونزا الموسمية في إحدى البلدات، ولوحظ أن عدد الإصابات بهذا المرض في كل أسبوع يساوي ثلاثة أمثال عددها في الأسبوع السابق. أكتب اقترانا يمثل عدد الإصابات بهذا المرض بعد t أسبوعا من اكتشاف حالات الإصابة الأولى.

النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $3 = 1 + \frac{200}{100}$

عدد الإصابات بعد t أسبوعاً هو

$$A(t) = 12(1+r)^t = 12(3)^t$$

0795153669

كتاب التمارين

الدرس الثاني – النمو والاضمحلال الأُسي

استخدم 35 ألف شخص موقعا إلكترونيا تعليميا هذه السنة، ومن المتوقع أن يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

1) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 35000(1+0.02)^t$$
$$A(t) = 35000(1.02)^t$$

2) أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

$$A(7) = 35000(1.02)^7 \approx 40204$$

تلوث: في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوث في عدد الأسماء التي تعيش في إحدى البحيرات، توصل الباحثون إلى أن عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة:

3) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علما بأن عددها عند بدء الدراسة هو 12000 سمكة.

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 12000(1-0.2)^t$$
$$A(t) = 12000(0.8)^t$$

4) أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

$$A(3) = 12000(0.8)^3 = 6144$$

بلغ عدد سكان لواء الموقر (شرق العاصمة عمان) 84370 نسمة تقريبا سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكاني في اللواء 2.4% سنويا، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

5) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد سكان اللواء بعد t سنة.

$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 84370(1+0.024)^t$$
$$A(t) = 84370(1.024)^t$$

6) أجد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة 2030م.

$$2030 - 2015 = 15$$
$$A(t) = 84370(1.024)^{15} \approx 120417$$

سيارة: يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 19725 بنسبة %3 سنويا:

7) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة.

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 19725(1-0.03)^t$$
$$A(t) = 19725(0.97)^t$$

8) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

$$A(4) = 19725(0.97)^4 \approx JD\ 17462$$

استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ %5.5، وتضاف كل شهر:

9) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة.

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$$
$$A = 8000(1+0.\frac{055}{12})^{12t}$$

10)أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات

$$A = 8000(1+0.\frac{055}{12})^{12\times 3} \approx JD\ 9431.59$$

11) أودعت ليلى مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها %6. أجد جملة المبلغ بعد 17 سنة.

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 60000e^{0.06\times 17} \approx JD\ 166391.69$$

كتاب الطالب

الدرس الثالث – الاقترانات اللوغاريتمية

مثال 1:

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

1) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 2^3 = 8$

2) $\log_{23} 23 = 1$

$\log_{23} 23 = 1 \rightarrow 23^1 = 23$

3) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$

$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \rightarrow (10)^{-2} = \frac{1}{100}$

4) $\log_7 1 = 0$

$\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = 1$

أتحقق من فهمي:

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

a) $\log_2 16 = 4$

$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

b) $\log_7 7 = 1$

$\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$

c) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

$\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

d) $\log_9 1 = 0$

$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$

مثال 2:

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

1) $8^3 = 512$

$8^3 = 512 \to \log_8 512 = 3$

2) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

$25^{\frac{1}{2}} = 5 \to \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

3) $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

$(5)^{-3} = \frac{1}{125} \to \log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

4) $27^0 = 1$

$27^0 = 1 \to \log_{27} 1 = 0$

أتحقق من فهمي:

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

$7^3 = 343 \to \log_7 343 = 3$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

$49^{\frac{1}{2}} = 7 \to \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \to \log_2 \frac{1}{32} = -5$

d) $17^0 = 1$

$17^0 = 1 \to \log_{17} 1 = 0$

مثال 3:

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

(1) $\log_2 64$

بافتراض أن المقدار يساوي y $\log_2 64 = y$

الصيغة الأسية $2^y = 64$

$64 = 2^6$ $2^y = 2^6$

بمساواة الأسس $y = 6$

إذن: $\log_2 64 = 6$

(2) $\log_{13} \sqrt{13}$

بافتراض أن المقدار يساوي y $\log_{13} \sqrt{13} = y$

الصيغة الأسية $13^y = \sqrt{13}$

$\sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$ $13^y = 13^{\frac{1}{2}}$

بمساواة الأسس $y = \frac{1}{2}$

إذن: $\log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$

(3) $\log_{36} 6$

بافتراض أن المقدار يساوي y $\log_{36} 6 = y$

الصيغة الأسية $36^y = 6$

$36 = 6^2$ $(6^2)^y = 6$

قانون قوة القوة $6^{2y} = 6$

بمساواة الأسس $2y = 1$

بحل المعادلة $y = \frac{1}{2}$

إذن: $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

(4) $\log_{10} 0.1$

باقتراض أن المقدار يساوي y

$\log_{10} 0.1 = y$

الصيغة الأسية

$10^y = 0.1$

$0.1 = \frac{1}{10}$

$10^y = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} = 10^{-1}$

$10^y = 10^{-1}$

بمساواة الأسس

$y = -1$

إذن: $\log_{10} 0.1 = -1$

أتحقق من فهمي:

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_5 25$

$\log_5 25 = y$

$5^y = 25$

$5^y = 5^2$

$y = 2$

إذن $\log_5 25 = 2$

b) $\log_8 \sqrt{8}$

$\log_8 \sqrt{8} = y$

$8^y = \sqrt{8} \rightarrow \quad 8^y = 8^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

إذن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$

c) $\log_{81} 9$

$\log_{81} 9 = y$

$81^y = 9$

$9^{2y} = 9^1$

$2y = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

إذن $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

$\log_3 \frac{1}{27} = y$

$3^y = \frac{1}{27}$

$3^y = \frac{1}{3^3}$

$3y = 3^{-3}$

$y = -3$

إذن $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

مثال 4:

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $\log_3 1$

$\log_3 1 = 0 \qquad \log_b 1 = 0$

2) $\log_{17} \sqrt{17}$

$\log_{17} \sqrt{17} = \log_{17} 17^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{17} = 17^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \qquad \log_b b^x = x$

3) $\log_5 5$

$\log_5 5 = 1 \qquad \log_b b = 1$

4) $7^{\log_7 5}$

$7^{\log_7 5} = 5 \qquad b^{\log_b x} = x$

أتحقق من فهمي:

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$

$\log_2 1 = 0$

b) $\log_{32}\sqrt{32}$

$\log_{32}\sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$

c) $\log_9 9$

$\log_9 9 = 1$

d) $8^{\log_8 13}$

$8^{\log_8 13} = 13$

مثال 5:

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

(1) $f(x) = \log_2 x$

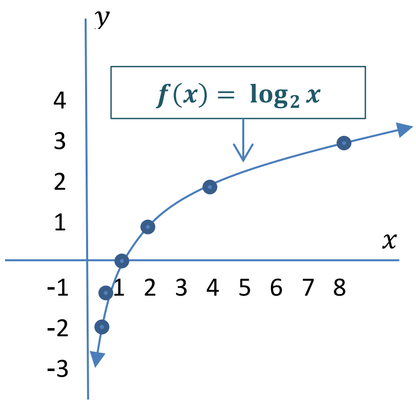
الخطوة 1: أنشئ جدول قيم.

بما أن المعادلة: $y = \log_2 x$ تكافئ المعادلة: $x = 2^y$، فإنه يمكنني إيجاد الأزواج المرتبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قيم للمتغير y، ثم إيجاد قيم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة $x = 2^y$.

$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	(1,0)	(2,1)	(4,2)

1. أختار بعض قيم y

2. أختار قيم x المناظرة



الخطوة 2: أمثل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أعين الأزواج المرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي،

ثم أصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_2 x$ أن:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأن $x > 0$ دائما.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران متزايد.

(2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم.

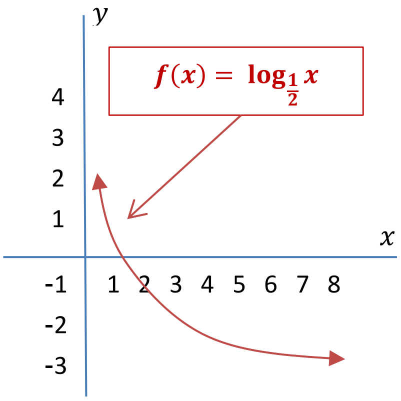
بما أن المعادلة $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تكافئ المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$، فإنه يمكنني إيجاد الأزواج المرتبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قيم للمتغير y، ثم إيجاد قيم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$.

$x = (\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(4, -2)$	$(2, -1)$	$(1,0)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, 2)$

1. أختار قيم y

2. أختار قيم x

الخطوة 2: أمثل الاقتران في المستوى الإحداثي.



أمثل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أعين الأزواج المرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي،

ثم أصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ أن:

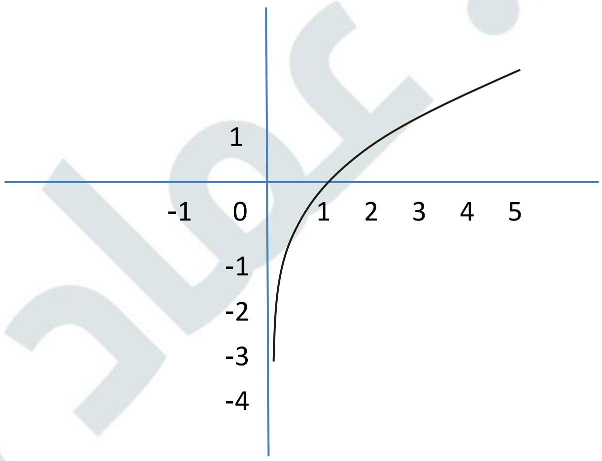
- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأن $x > 0$ دائما.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران متناقص.

أتحقق من فهمي:

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

a) $f(x) = \log_3 x$

$f(x) = \log_3 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\ , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

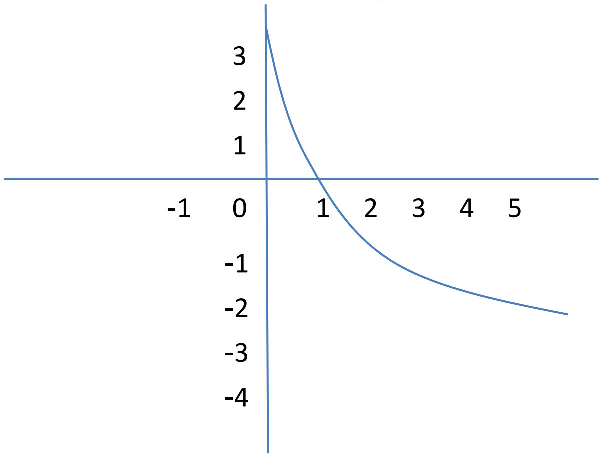
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\ ,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

مثال 6:

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

(1) $f(x) = \log_4(x+3)$

$g(x) > 0$ $\qquad x+3 > 0$

بحل المتباينة لـ x $\qquad x > -3$

إذن، مجال الاقتران هو: $(-3, \infty)$

(2) $f(x) = \log_5(8-2x)$

$g(x) > 0$ $\qquad 8-2x > 0$

بطرح 8 من طرفي المتباينة $\qquad -2x > -8$

بقسمة طرفي المتباينة على 2-، وتغيير اتجاه رمز المتباينة $\qquad x < 4$

إذن، مجال الاقتران هو: $(-\infty, 4)$

أتحقق من فهمي:

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

a) $f(x) = \log_7(5 - x)$

$f(x) = \log_7(5 - x)$

$5 - x > 0$

$-x > -5$

$x < 5$

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$

b) $f(x) = \log_5(9 + 3x)$

$f(x) = \log_5(9 + 3x)$

$9 + 3x > 0$

$3x > -9$

$x > -3$

مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$

أتدرب وأحل المسائل:

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

1) $\log_7 343 = 3$

$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$

2) $\log_4 256 = 4$

$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$

3) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$

4) $\log_{36} 6 = 0.5$

$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$

5) $\log_9 1 = 0$

$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$

6) $\log_{57} 57 = 1$

$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

7) $2^6 = 64$

$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$

8) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$

9) $6^3 = 216$

$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$

10) $5^{-3} = 0.008$

$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$

11) $(51)^1 = 51$

$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$

12) $9^0 = 1$

$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13) $\log_3 81$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

14) $\log_{25} 5$

$\log_{25} 5 = y$

$25^y = 5 \quad \rightarrow 5^{2y} = 5^1$

$2y = 1$

$y = \frac{1}{2}$

إذن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

15) $\log_2 32$

$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

إذن $\log_2 32 = 5$

16) $\log_{49} 343$

$\log_{49} 343 = y$

$49^y = 343$

$7^{2y} = 7^3$

$2y = 3$

$y = \frac{3}{2}$

إذن $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$

17) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

18) $\log_{\frac{3}{2}} 1$

$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

19) $\log_{\frac{1}{4}} 4$

$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$

$(\frac{1}{4})^y = 4$

$4^{-y} = 4^1$

$-y = 1$

$y = -1$

إذن $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$

20) $(10)^{\log_{10}\frac{1}{8}}$

$(10)^{\log_{10}\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$

21) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^2}}$

$$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$= \log_2 (2)^{\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{7}{2}$$

22) $\log_a \sqrt[5]{a}$

$$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

23) $\log_{10}(1 \times 10^{-9})$

$$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9} = -9$$

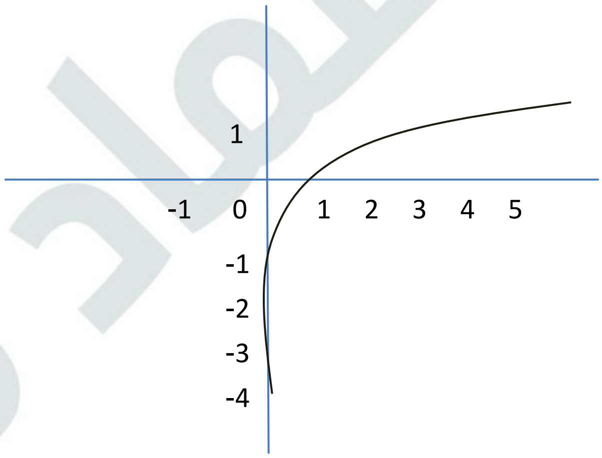
24) $8^{\log_8 5}$

$$8^{\log_8 5} = 5$$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

25) $f(x) = \log_5 x$

$f(x) = \log_5 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

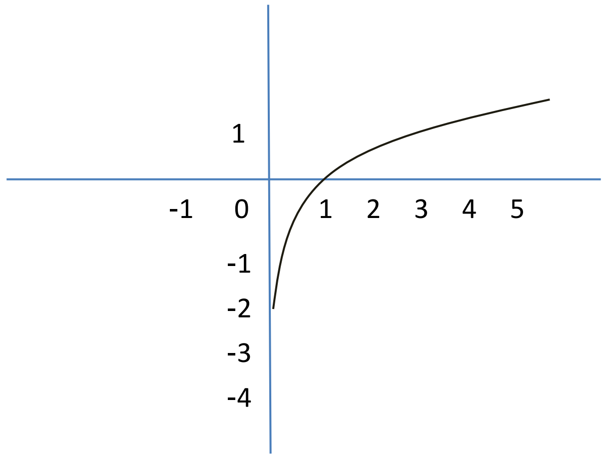
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

26)

27) $f(x) = \log_4 x$

$f(x) = \log_4 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\,,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

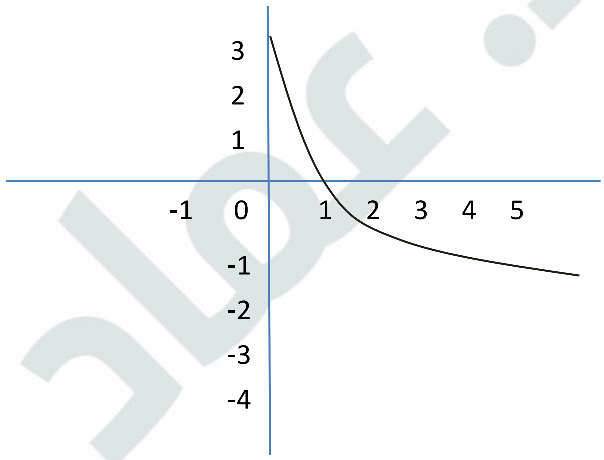
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

28) $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\,,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

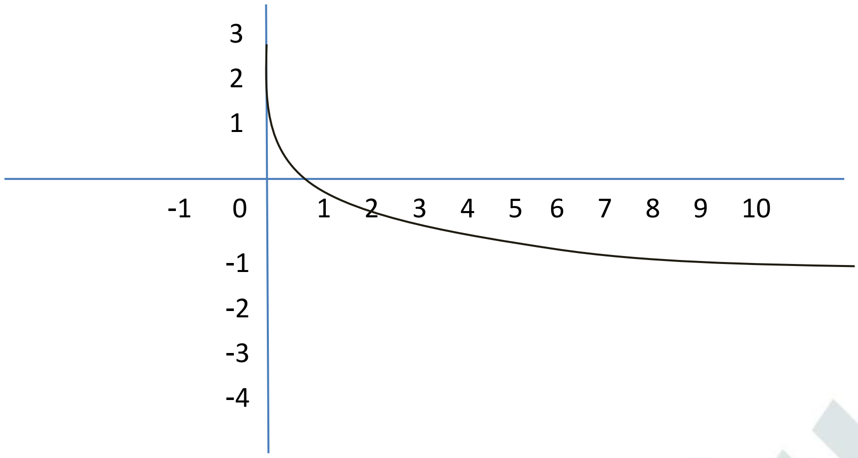
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

29) $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0 , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

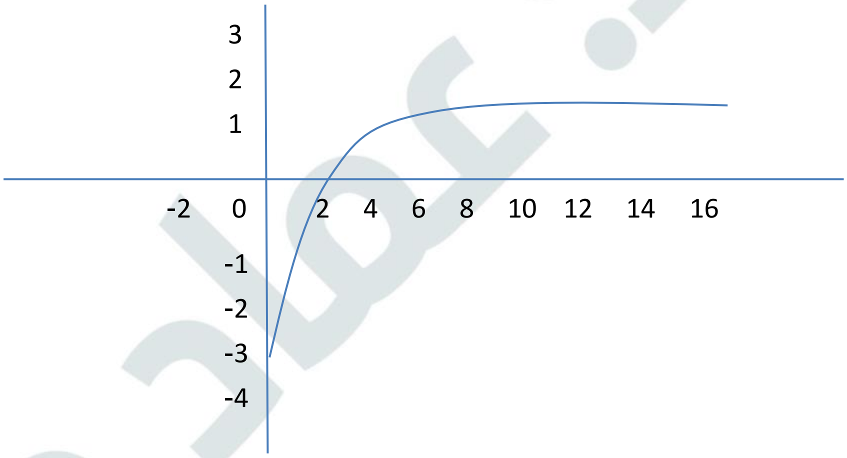
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

30) $f(x) = \log_{10} x$

$f(x) = \log_{10} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0 , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

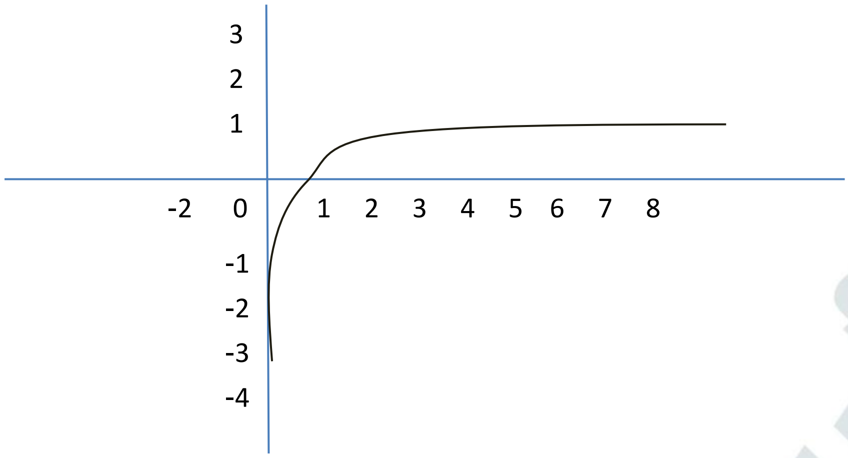
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

31) $g(x) = \log_6 x$

$f(x) = \log_6 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0 , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

32) $f(x) = \log_3(x-2)$

$f(x) = \log_3(x-2)$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

مجال هذا الاقتران هو $(2 , \infty)$

33) $f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$

$f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$

$x + 1 > 0 \;\rightarrow\; x > -1$

مجال هذا الاقتران هو $(-1 , \infty)$

34) $f(x) = -3\log_4(-x)$

$f(x) = -3\log_4(-x)$

$-x > 0$

$x < 0$

مجال هذا الاقتران هو $(-\infty , 0)$

35)أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة $(32, 5)$

$f(x) = \log_a x$

$f(32) = \log_a 32$

$5 = \log_a 32$

$a^5 = 32$

$a^5 = (2)^5$

$a = 2$

36)أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقترا: $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة $(\frac{1}{81}, -4)$

$f(x) = \log_c x$

$f\left(\frac{1}{81}\right) = \log_c \frac{1}{81}$

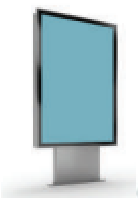
$-4 = \log_c \frac{1}{81}$

$c^{-4} = \frac{1}{81}$

$\frac{1}{c^4} = \frac{1}{81}$

$c^4 = 81 \rightarrow c = \pm\sqrt[4]{81} \rightarrow c = \pm 3$

ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا فإن: $c = 3$



إعلانات: يمثل الاقتران: $P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج.
وتعني القيمة: $P(1) \approx 1$ أن إنفاق 100JD على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها 19000 JD من بيع المنتج:

37) أجد $P(124), P(24), P(4)$

$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$

$P(4) = 10 + 20\log_5(4+1)$

$= 10 + 20\log_5 5$

$= 10 + 20(1)$

$= 30$

$P(24) = 10 + 20\log_5(24+1)$

$= 10 + 20\log_5 25$

$= 10 + 20\log_5 5^2$

$= 10 + 20(2) = 50$

$P(124) = 10 + 20\log_5(124+1)$

$= 10 + 20\log_5 125$

$= 10 + 20\log_5 5^3$

$= 10 + 20(3) = 70$

38)أفسر معنى القيم التي أوجدتها في الفرع السابق.

القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيراداً قيمته JD30000 من بيع المنتج

القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD2400 على الإعلانات يحقق إيراداً قيمته JD50000 من بيع المنتج

القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD12400 على الإعلانات يحقق إيراداً قيمته JD70000 من بيع المنتج

مهارات التفكير العليا:

تبرير: أكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مبررا إجابتي:

39) $f(x) = \log_3(x)$

$f(x) = \log_3 x$ c

لأن مجال الاقتران هو $(0\,,\infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة $(3\,,1)$ حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$

40) $f(x) = \log_3(-x)$

$f(x) = \log_3(-x)$ b

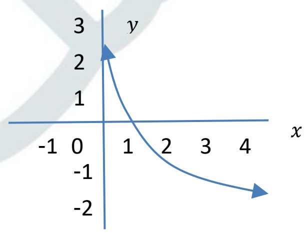
لأن مجال الاقتران هو $(-\infty\,,0)$ ويمر منحناه بالنقطة $(-3\,,1)$ حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$

41) $g(x) = -\log_3 x$

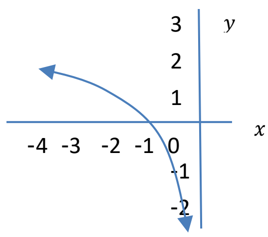
$g(x) = -\log_3 x$ a

لأن مجال الاقتران هو $(0\,,\infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة $(3\,,-1)$ حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$

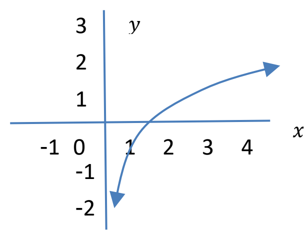
a)



b)



c)



<u>تحدٍ</u>: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي، محددا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

42) $f(x) = \log_3(x^2)$

$f(x) = \log_3(x^2)$

بما أن $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0

فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$

خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)

43) $f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

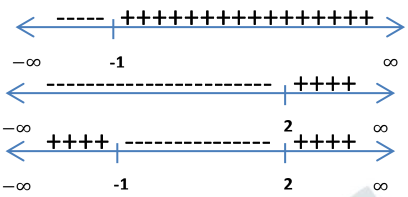
$x^2 - x - 2 > 0$

$(x-2)(x+1) > 0$

إشارة $(x+1)$

إشارة $(x-2)$

إشارة $(x+1)(x-2)$



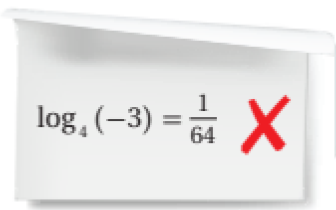
نلاحظ أن $(x+1)(x-2)$ في الفترتين $(-\infty , -1)$، و $(2 , \infty)$

إذن، مجال الاقتران هو $(2 , \infty)$ ، $(-\infty , -1)$

خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1 , x = 2$ وهما جذرا المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$

44) أكتشف الخطأ: كتبت منى المعادلى الأسية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أصححه.



الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

كتاب التمارين

الدرس الثالث – الاقترانات اللوغاريتمية

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

1) $\log_3 729 = 6$

$\log_3 729 = 6 \rightarrow 3^6 = 729$

2) $\log_5 625 = 4$

$\log_5 6295 = 4 \rightarrow 5^4 = 625$

3) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

$\log_{64} 4 = \frac{1}{3} \rightarrow 64^{\frac{1}{3}} = 4$

4) $\log_{64} 8 = 0.5$

$\log_{64} 8 = 0.5 \rightarrow 64^{0.5} = 8$

5) $\log_7 1 = 0$

$\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = 1$

6) $\log_{43} 43 = 1$

$\log_{43} 43 = 1 \rightarrow 43^1 = 43$

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

7) $4^5 = 1024$

$4^5 = 1024 \rightarrow \log_4 1024 = 5$

8) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

$3^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$

9) $7^3 = 343$

$7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$

10) $5^{-2} = 0.04$

$5^{-2} = 0.04 \rightarrow \log_5 0.04 = -2$

11) $(32)^1 = 32$

$32^1 = 32 \rightarrow \log_{32} 32 = 1$

12) $8^0 = 1$

$8^0 = 1 \rightarrow \log_8 1 = 0$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13) $\log_2 64$

$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

14) $\log_{81} 9$

$\log_{81} 9 = y \rightarrow 81^y = 9$

$(9^2)^y = 9$

$9^{2y} = 9$

$2y = 1$

$y = \frac{1}{2}$

إذن، $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$

15) $\log_2 32$

$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

16) $\log_{25} 125$

$\log_{25} 125 = y \rightarrow 25^y = 125$

$(5^2)^y = 5^3$

$5^{2y} = 5^3$

$2y = 3$

$y = \frac{3}{2}$

إذن، $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

17)$\log_{10} 0.0001$

$\log_{10} 0.0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$

18)$\log_{\frac{5}{3}} 1$

$\log_{\frac{5}{3}} 1 = 0$

19)$\log_{\frac{1}{6}} 6$

$\log_{\frac{1}{6}} 6 = y \rightarrow (\frac{1}{6})^{y} = 6$

$(6^{-1})^{y} = 6^{1}$

$6^{-y} = 6^{1}$

$-y = 1$

$y = -1$

إذن، $\log_{\frac{1}{6}} 6 = -1$

20)$(10)^{\log_{10}\frac{1}{9}}$

$(10)^{\log_{10}\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}$

21) $\log_{3} \frac{1}{\sqrt{(3)^{6}}}$

$\log_{3} \frac{1}{\sqrt{(3)^{6}}} = \log_{3} \frac{1}{3^{-3}} = -3$

22)$\log_{b} \sqrt[7]{b}$

$\log_{b} \sqrt[7]{b} = \log_{b} b^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$

23) $\log_{10}(1 \times 10^{-5})$

$\log_{10}(1 \times 10^{-5}) = \log_{10} 10^{-5} = -5$

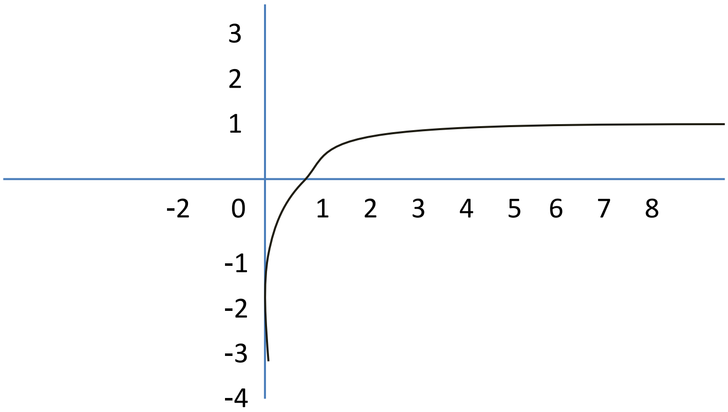
24) $4^{\log_{4} 3}$

$4^{\log_{4} 3} = 3$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مبينا إذا كان متناقصا أم متزايدا:

25) $f(x) = \log_8 x$

$f(x) = \log_8 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\,,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

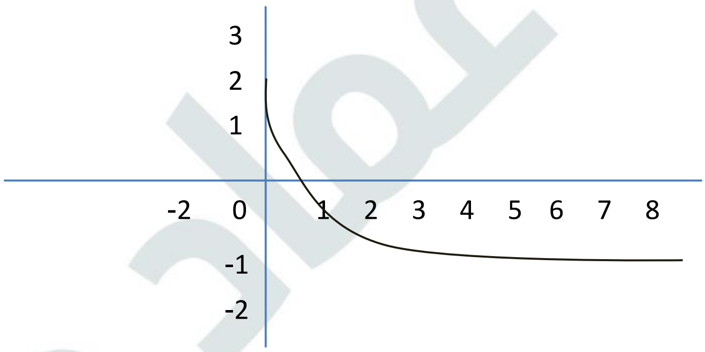
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

26) $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0\,,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

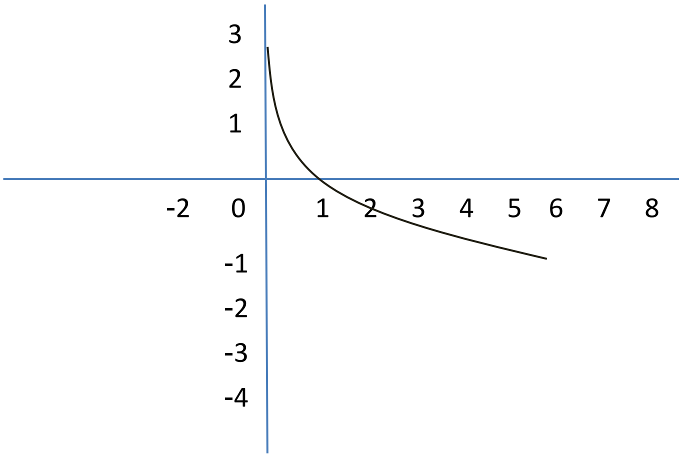
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

27) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0 , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

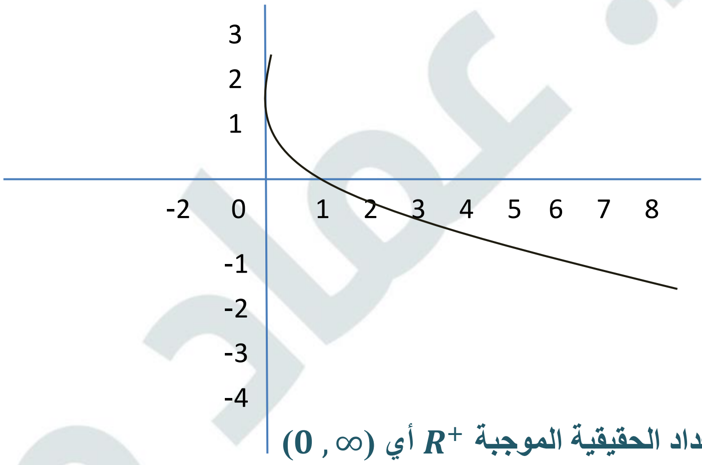
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

28) $r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

$r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0 , \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

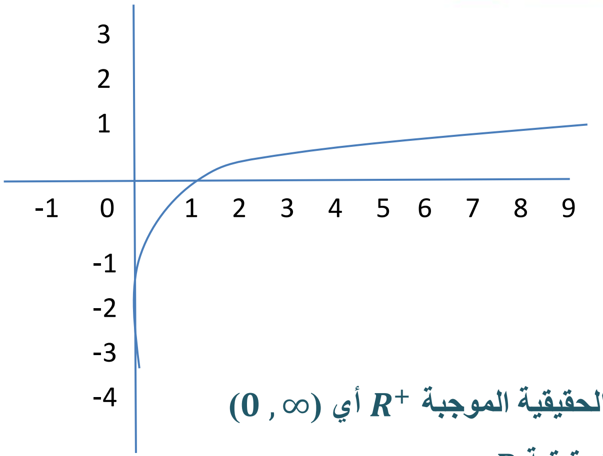
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

29) $f(x) = \log_9 x$

$f(x) = \log_9 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

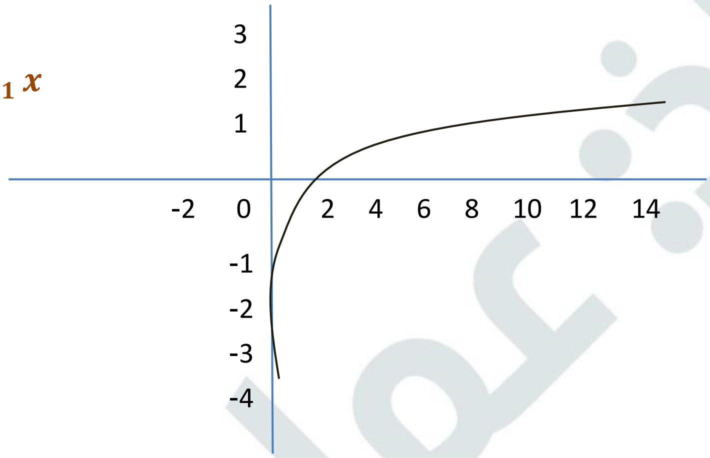
المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

30) $f(x) = \log_{11} x$

$f(x) = \log_{11} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

31) $f(x) = \log_2(x+3)$

$f(x) = \log_2(x+3)$

$x+3>0$

$x>-3$

مجال هذا الاقتران هو $(-3,\infty)$

32) $f(x) = 7+2\log_5(x-2)$

$f(x) = 7+2\log_5(x-2)$

$x-2>0$

$x>2$

مجال هذا الاقتران هو $(2,\infty)$

33) $f(x) = -5\log_7(-x)$

$f(x) = -5\log_7(-x)$

$-x>0$

$x<0$

مجال هذا الاقتران هو $(-\infty,0)$

34) ضوء: تمثل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شدة الضوء عند عمق 10m؟

$\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125(10)$

$\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.125$

$10^{-0.125} = \frac{I}{12}$

$I = 12\times 10^{-0.125} \approx 118.5\ lumen$

كتاب الطالب

الدرس الرابع – قوانين اللوغاريتمات

مثال 1:

إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$ وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$ فأجد كلا مما يأتي:

1) $\log_a 15$

$5 \times 3 = 15$ — $\log_a 15 = \log_a(3 \times 5)$

قانون الضرب في اللوغاريتمات — $= \log_a 3 + \log_a 5$

بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$ — $\approx 1.59 + 2.32$

بالجمع — ≈ 3.91

2) $\log_a \frac{3}{5}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات — $\log_a \frac{3}{5} = \log_a 3 - \log_a 5$

بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$ — $\approx 1.59 - 2.32$

بالطرح — ≈ -0.73

3) $\log_a 125$

$125 = 5^3$ — $\log_a 125 = \log_a(5^3)$

قانون القوة في اللوغاريتمات — $= 3 \log_a 5$

بتعويض $\log_a 5 \approx 2.32$ — $\approx 3(2.32)$

بالضرب — ≈ 6.96

4) $\log_a \frac{1}{9}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات — $\log_a \frac{1}{9} = \log_a 1 - \log_a 9$

بتعويض $\log_a 1 = 0, 9 = 3^2$ — $= 0 - \log_a 3^2$

بالطرح — $= -2 \log_a 3$

بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59$ — $\approx -2(1.59)$

≈ -3.18

أتحقق من فهمي:

إذا كان: $log_b 7$، وكان: $0.43 \approx log_b 2$، فأجد كلا مما يأتي:

a) $\log_b 14$

$\log_b 14 = \log_b(2 \times 7)$

$= \log_b 2 + \log_b 7$

$\approx 0.43 + 1.21$

≈ 1.64

b) $\log_b \frac{2}{7}$

$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7$

$\approx 0.43 - 1.21$

≈ -0.78

c) $\log_b 32$

$\log_b 32 = \log_b 2^5$

$= 5 \log_b 2$

$\approx 5 \times 0.43$

≈ 2.15

d) $\log_b \frac{1}{49}$

$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49$

$= 0 - \log_b 7^2$

$= 0 - 2 \log_b 7$

$\approx 0 - 2 \times 1.21$

≈ -2.42

مثال 2:

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة:

1) $\log_5 x^7 y^2$

$\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2$ — قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 7\log_5 x + 2\ \log_5 y$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

2) $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}$

$\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= 2\log_7(5x+3) - \log_7 4$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

3) $\log_4 \frac{xy^3}{z^2}$

$\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_4 x + \log_4 y^3 - \log_4 z^2$ — قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_4 x + 3\ \log_4 y - 2\log_4 z$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

4) $\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}}$

$\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}} = \log_a (\frac{x^2y^3}{a^5})^{\frac{1}{2}}$ — صورة الأس النسبي

$= \frac{1}{2}\log_a (\frac{x^2y^3}{a^5})$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2}(\log_a x^2y^3 - \log_a a^5)$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2}(\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a a^5)$ — قانون الضرب في اللوغاريتمات

$)= \frac{1}{2}(2\log_a x + 3\ \log_a y - 5\ \log_a a$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2}(2\log_a x + 3\log_a y - 5)$ — $\log_a a = 1$

$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}$ — خاصية التوزيع

أتحقق من فهمي:

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة:

a) $\log_2 a^2 b^9$

$\log_2 a^2 b^9 = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$

$= 2\log_2 a + 9\log_2 b$

b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$

$= 3\log_5 (x+1) - \log_5 8$

c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$

$= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$

$= 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$

d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b (\frac{x^7 b^2}{y^5})^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}\log_b \frac{x^7 b^2}{y^5}$

$= \frac{1}{3}(\log_b x^7 b^2 - \log_b y^5)$

$= \frac{1}{3}(\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$

$= \frac{1}{3}(7\log_b x + 2\log_b b - 5\log_b y)$

$= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3}\log_b b - \frac{5}{3}\log_b y$

$= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$

مثال 3:

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة النختصرة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة:

1) $3\log_2 x + 4\log_2 y$

قانون القوة في اللوغاريتمات: $3\log_2 x + 4\log_2 y = \log_2 x^3 + \log_2 y^4$

قانون الضرب في اللوغاريتمات: $= \log_2 x^3 y^4$

2) $5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$$5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z = \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$$

قانون الضرب في اللوغاريتمات: $= \log_a x^5 y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

قانون القسمة في اللوغاريتمات: $= \log_a\left(\frac{x^5 y^{\frac{1}{3}}}{z^7}\right)$

الصورة الجذرية: $\log_a\left(\frac{x^5\sqrt[3]{y}}{z^7}\right) =$

أتحقق من فهمي:

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداد حقيقية موجبة:

a) $\log_5 a + 3\log_5 b$

$\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$

$= \log_5 ab^3$

b) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

$$5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$$

$= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

$= \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$

$= \log_b \frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

مثال 4: من الحياة

نسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات، تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة معينة، ثم لاختبارات مكافئة لهذا الاختبار على مدار مدد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أن النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t شهرا من إنهائه دراسة المادة تعطى بالاقتران:

$$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$$

أجد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهرا من إنهائه دراستها، علما بأن $\log_{10} 2 \approx 0.3010$، مقربا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

المعادلة المعطاة	$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$
بتعويض $t = 19$	$M(19) = 85 - 25\log_{10}(19+1)$
بالتبسيط	$= 85 - 25\log_{10}(20)$
$10 \times 2 = 20$	$= 85 - 25\log_{10}(10 \times 2)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= 85 - 25(\log_{10} 10 + \log_{10} 2)$
بتعويض $\log_{10}2 \approx 0.3010, \log_b b = 1$	$\approx 85 - 25((1) + 0.3010)$
بالتبسيط	$\approx 85 - 25(1.3010)$
بالتبسيط	≈ 52

إذن، النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها الطالب بعد 19 شهرا من إنهائه دراستها هي 52%

أتحقق من فهمي:

يمثل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها طالب من مادة معينة بعد t شهرا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرا من إنهائه دراسة المادة، علما بأن $\log_{10} 3 \approx 0.4771$، مقربا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$

$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1)$

$= 92 - 28\log_{10} 30 = 92 - 28\log_{10}(10 \times 3)$

$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$

$\approx 92 - 28(1 + 0.4771) \approx 92 - 28(1.4771)$

$\approx 92 - 41.3588 \approx 51$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهراً هي 51% تقريباً.

أتدرب وأحل المسائل:

إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$ وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$، فأجد كلا مما يأتي:

1) $\log_a \frac{5}{6}$

$$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$$
$$\approx 0.699 - 0.778$$
$$\approx -0.079$$

2) $\log_a 30$

$$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$$
$$= \log_a 5 + \log_a 6$$
$$\approx 0.699 + 0.778$$
$$\approx 1.477$$

3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

4) $\log_a \frac{1}{6}$

$$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$$
$$\approx 0 - 0.778$$
$$\approx -0.778$$

5) $\log_a 900$

$$\log_a 900 = \log_a 30^2$$
$$= 2\log_a 30$$
$$= 2\log_a(5 \times 6)$$
$$= 2(\log_a 5 + \log_a 6)$$
$$\approx 2(0.699 + 0.778)$$
$$\approx 2 \times 1.477$$
$$\approx 2.954$$

6) $\log_a \frac{18}{15}$

$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5}$

$= \log_a 6 - \log_a 5$

$\approx 0.778 - 0.699$

≈ 0.079

7) $\log_a (6a^2)$

$\log_a (6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2$

$= \log_a 6 + 2\log_a a$

$\approx 0.778 + 2$

≈ 2.778

8) $\log_a \sqrt[4]{25}$

$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2}$

$= \log_a 5^{\frac{2}{4}}$

$= \log_a 5^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a 5$

$\approx \frac{1}{2} \times 0.699$

≈ 0.350

9) $(\log_a 5)(\log_a 6)$

$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699 \times 0.778$

≈ 0.544

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة:

10) $\log_a x^2$

$\log_a x^2 = 2\log_a x$

11) $\log_a\left(\frac{a}{bc}\right)$

$\log_a\left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc$

$= \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$

$= \log_a a - \log_a b - \log_a c$

$= 1 - \log_a b - \log_a c$

12) $\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y})$

$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y}$

$= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$

13) $\log_a\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$

$\log_a\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y$

$= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y$

$= \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$

14) $\log_a \frac{1}{x^2y^2}$

$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2$

$= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$

$= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y)$

$= -2\log_a x - 2\log_a y$

15) $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a(\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5})$

$= \log_a 2x$

$= \log_a 2 + \log_a x$

16) $\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3}$

$$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3}$$

$$= \log_a 1 - \log_a x^2y^3$$

$$= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3)$$

$$= 0 - (2\log_a x + 3\log_a y)$$

$$= -2\log_a x - 3\log_a y$$

17) $\log_a (x+y-z)^7, x+y<z$

$$\log_a(x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$$

18) $\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}}$

$$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}}$$

$$= \log_a \frac{x^{12}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}}$$

$$= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}}$$

$$= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$$

$$= \log_a x^6 - \log_a yz^2$$

$$= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$$

$$= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z)$$

$$= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة:

19) $\log_a x^2$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

20) $\log_b(x+y) - \log_b(x-y), x>y$

$$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$$

21) $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

$$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$= \log_a \frac{1}{x}$$

22) $\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x+2), x > 2$

$$\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)}$$

$$= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$$

$$= \log_a (x-2)$$

23) $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

$$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$$

$$= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}$$

24) $\log_b 1 + 2\log_b b$

$$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$$

25)**نمو**: يمثل الاقتران: $f(x) = 29 + 48.8 \log_6(x+2)$ النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علما بأن $\log_6 2 \approx 0.3869$

$$f(x) = 29 + 48.8 \log_6(x+2)$$
$$f(10) = 29 + 48.8 \log_6(10+2)$$
$$= 29 + 48.8 \log_6 12$$
$$= 29 + 48.8 \log_6(6 \times 2)$$
$$= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$$
$$\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869)$$
$$\approx 29 + 48.8(1.3869)$$
$$\approx 29 + 67.68072$$
$$\approx 97$$

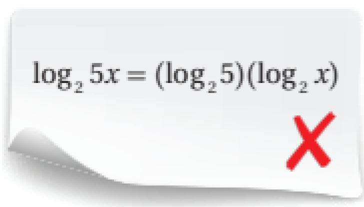
النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريباً

مهارات التفكير العليا:

26)**تحد**: أثبت أن $\frac{3}{2} = \frac{\log_a 216}{\log_a 36}$

$$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$$
$$= \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6} = \frac{3}{2}$$

27)**أكتشف الخطأ**: أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه:



$$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$$

28)تبرير: أثبت أن $\log_b(b-3)+\log_b(b^2+3b)-\log_b(b^2-9)$ حيث $b>3$، مبررا إجابتي.

$\log_b(b-3)+\log_b(b^2+3b)-\log_b(b^2-9)$

$=\log_b(b-3)(b^2+3b)-\log_b(b^2-9)$

$=\log_b\dfrac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)}$

$=\log_b\dfrac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)}$

$=\log_b b$

$=1$

كتاب التمارين

الدرس الرابع – قوانين اللوغاريتمات

إذا كان: $\log_a 7$، وكان $\log_a 3 \approx 0.528$، فأجد كلا مما يأتي:

1) $\log_a \frac{3}{7}$

$$\log_a \frac{3}{7} = \log_a 3 - \log_a 7$$
$$\approx 0.528 - 0.936$$
$$\approx -0.408$$

2) $\log_a 21$

$$\log_a 21 = \log_a 3 \times 7$$
$$= \log_a 3 + \log_a 7$$
$$\approx 0.528 + 0.936 \approx 1.464$$

3) $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$

$$\frac{\log_a 3}{\log_a 7} \approx \frac{0.528}{0.936} \approx 0.56$$

4) $\log_a \frac{1}{7}$

$$\log_a \frac{1}{7} = \log_a 1 - \log_a 7$$
$$\approx 0 - 0.936 \approx -0.936$$

5) $\log_a 441$

$$\log_a 441 = \log_a 21^2$$
$$= 2\log_a 21$$
$$= 2\log_a (3 \times 7)$$
$$= 2(\log_a 3 + \log_a 7)$$
$$\approx 2(0.528 + 0.936)$$
$$\approx 2 \times 1.464$$
$$\approx 2.928$$

6) $\log_a \frac{49}{27}$

$$\log_a \frac{49}{27} = \log_a 49 - \log_a 27$$
$$= \log_a 7^2 - \log_a 3^3$$
$$= 2\log_a 7 - 3\log_a 3$$
$$\approx 2(0.936) - 3(0.528)$$
$$\approx 1.872 - 1.584$$
$$\approx 0.288$$

7) $\log_a(7a^2)$

$$\log_a(7a^2) = \log_a 7 + \log_a a^2$$
$$= \log_a 7 + 2\log_a a$$
$$\approx 0.936 + 2 \approx 2.936$$

8) $\log_a \sqrt[4]{81}$

$$\log_a \sqrt[4]{81} = \log_a \sqrt[4]{3^4}$$
$$= \log_a 3$$
$$\approx 0.528$$

9) $(\log_a 3)(\log_a 7)$

$$(\log_a 3)(\log_a 7) \approx 0.528 \times 0.936 \approx 0.494$$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة:

10) $\log_a x^7$

$$\log_a x^7 = 7\log_a x$$

11) $\log_a(\frac{ac}{b})$

$$\log_a\left(\frac{ac}{b}\right) = \log_a ac - \log_a b$$
$$= \log_a a + \log_a c - \log_a b$$
$$= 1 + \log_a c - \log_a b$$

12) $\log_a(\sqrt{x})$

$$\log_a(\sqrt{x}) = \log_a x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x$$

13) $\log_a(\frac{\sqrt{xy}}{z})$

$$\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right) = \log_a\sqrt{xy} - \log_a z$$

$$= \log_a(xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z$$

$$= \log_a x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \log_a z$$

$$= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z$$

$$= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z$$

14) $\log_a \frac{1}{x^3y^4}$

$$\log_a \frac{1}{x^3y^4} = \log_a 1 - \log_a x^3y^4$$

$$= \log_a 1 - (\log_a x^3 + \log_a y^4)$$

$$= 0 - (3\log_a x + 4\log_a y)$$

$$= -3\log_a x - 4\log_a y$$

15) $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$

$$\log_a \sqrt[7]{128x^7} = \log_a \sqrt[7]{128} \times \sqrt[7]{x^7}$$

$$= \log_a 2x$$

$$= \log_a 2 + \log_a x$$

16) $\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3}$

$$\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3} = \log_a \frac{x^{-4}y^8}{x^{15}y^{-6}}$$

$$= \log_a x^{-19}y^{14} = \log_a x^{-19} + \log_a y^{14}$$

$$= -19\log_a x + 14\log_a y$$

17)$\log_a\sqrt{\frac{x^2y^3}{z^3}}$

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2y^3}{z^3}} = \log_a\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^3}}{\sqrt{z^3}}$$

$$= \log_a\frac{xy^{\frac{3}{2}}}{z^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \log_a xy^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_a x + \log_a y^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{3}{2}\log_a z$$

18) $\log_a(x-y+z)^9 , y-x<z$

$$\log_a(x-y+z)^9 = 9\log_a (x-y+z)$$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة:

19)$\log_a x - \log_a y$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a\frac{x}{y}$$

20)$\log_b(b-1) + 2\log_b b, b>1$

$$\log_b(b-1) + 2\log_b = \log_b(b-1) + \log_b b^2 = \log_b b^2\,(b-1)$$

21) $\log_a\sqrt{x} - \log_a\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\log_a\sqrt{x} - \log_a\frac{1}{\sqrt{x}} = \log_a\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \log_a x$$

22) $\log_a(x^2-25) - \log_a(x+5), x>5$

$$\log_a(x^2-25) - \log_a(x+5) = \log_a\frac{(x^2-25)}{(x+5)}$$

$$\log_a\frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)} = \log_a(x+5)$$

23) $3\log_b 1 - \log_b b$

$$3\log_b 1 - \log_b b = 3(0) - 1 = -1$$

24) $8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z$

$$8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z = \log_b x^8 + \log_b y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_b x^8y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_b \frac{x^8y^4}{z^{\frac{1}{2}}} = \log_b \frac{x^8y^4}{\sqrt{z}}$$

25) إيرادات: يمثل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج، و $a \geq 0$ وتعني القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أن إنفاق JD1000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD17700 من بيع المنتج. أجد قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علما بأن $\log_6 2 \approx 0.3869$.

$$T(a) = 10 + 20\log_6(a+1)$$

$$f(11) = 10 + 20\log_6(11+1)$$

$$= 10 + 20\log_6(12)$$

$$= 10 + 20\log_6(6\times 2)$$

$$= 10 + 20(\log_6 6 + \log_6 2)$$

$$\approx 10 + 20(1 + 0.3869)$$

$$\approx 10 + 20(1.3869)$$

$$\approx 10 + 27.738 \approx 37.738$$

قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ JD 11000 على الإعلانات هو JD 37738

كتاب الطالب

الدرس الخامس – المعادلات الأسية

مثال 1:

أستعمل الآلة الحسابة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\log 2.7$

استعمل الآلة الحاسبة $\log 2.7 = 0.4313637642$

إذن: $\log 2.7 \approx 0.4$

2) $\log(1.3 \times 10^5)$

استعمل الآلة الحاسبة $\log(1.3 \times 10x\, 5) = 5.113943352$

إذن: $\log(1.3 \times 10^5) \approx 5.1$

3) $\ln 17$

استعمل الآلة الحاسبة: $\ln 17 = 2.833213344$

إذن: $\ln 17 \approx 2.8$

أتحقق من فهمي:

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 13$

$\log 13 \approx 1.1$

b) $\log(3.1 \times 10^4)$

$$\log(3.1 \times 10^4) = \log 3.1 + \log 10^4$$
$$= \log 3.1 + 4\log 10 \approx 0.491 + 4 \approx 4.5$$

c) $\ln 0.25$

$\ln 0.25 \approx -1.4$

مثال 2:

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

1) $\log_3 16$

صيغة تغيير الأساس
$$\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$$
باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx 2.52$$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 10$

صيغة تغيير الأساس
$$\log_{\frac{1}{2}} 10 = \frac{\log 10}{\log \frac{1}{2}}$$
قانون القسمة في اللوغاريتمات
$$= \frac{\log 10}{\log 1 - \log 2}$$
$\log 1 = 0 , \log 10 = 1$
$$= \frac{1}{-\log 2}$$
باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx -3.32$$

أتحقق من فهمي:

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

a) $\log_3 51$

$$\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

$$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$$

مثال 3:

أحل المعادلات الأسية الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $2^x = 13$

المعادلة الأصلية	$2^x = 13$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 2^x = \log 13$
قانون القوة في اللوغاريتمات	$x \log 2 = \log 13$
بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2$	$x = \frac{\log 13}{\log 2}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x = 3.7$

إذن، حل المعادلة هو: $x = 3.7$

2) $5\, e^{3x} = 125$

المعادلة الأصلية	$5\, e^{3x} = 125$
بالقسمة على 5	$e^{3x} = 25$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln\, e^{3x} = \ln 25$
$\log_b b^x = x$	$3x = \ln 25$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$x = \frac{\ln 25}{3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 1.07$

إذن، حل المعادلة هو: $x \approx 1.07$

3) $2^{x+4} = 5^{3x}$

المعادلة الأصلية	$2^{x+4} = 5^{3x}$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 2^{x+4} = \log 5^{3x}$
قانون القوة في اللوغاريتمات	$(x+4)\log 2 = 3x \log 5$
خاصية التوزيع	$x \log 2 + 4 \log 2 = 3x \log 5$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x \log 2 - 3x \log 5 = -4 \log 2$
بإخراج x عاملا مشتركا	$x(\log 2 - 3 \log 5) = -4 \log 2$
بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2 - 3 \log 5$	$x = \frac{-4 \log 2}{\log 2 - 3 \log 5}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 0.67$

إذن حل المعادلة هو: $x \approx 0.67$

4) $9^x + 3^x - 30 = 0$

المعادلة الأصلية	$9^x + 3^x - 30 = 0$
$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$	$(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$
بافتراض أن $3^x = u$	$u^2 + u - 30 = 0$
بالتحليل	$(u+6)(u-5) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$u = -6 \quad or \quad u = 5$
باستبدال 3^x بـ u	$3^x = -6 \qquad 3^x = 5$

بما أن 3^x موجبة لأي قيمة x، فإنه لا يوجد حل للمعادلة: $3^x = -6$، ويكتفي بحل المعادلة: $3^x = 5$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 3^x = \log 5$
قانون القوة في اللوغاريتمات	$x \log 3 = \log 5$
بقسمة طرفي المعادلة على $\log 3$	$x = \frac{\log 5}{\log 3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 1.46$

إذن، حل المعادلة هو: $x \approx 1.46$

الدعم البياني

يمكن حل المعادلة: $9^x + 3^x - 30 = 0$ باستعمال برمجية جيوجبرا،

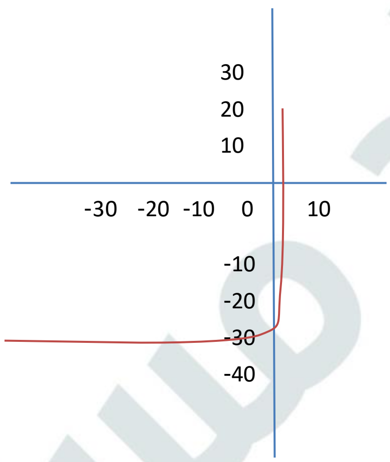
وذلك بتمثيل الاقتران: $f(x) = 9^x + 3^x - 30$،

وتحديد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

يبين التمثيل البياني المجاور أن منحنى الاقتران $f(x)$

يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط؛

ما يعني وجود حل واحد فقط للمعادلة: $9^x + 3^x - 30 = 0$



أتحقق من فهمي:

أحل المعادلات الأسية الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

$7^x = 9$

$\log 7^x = \log 9$

$x \log 7 = \log 9$

$x = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$

b) $2e^{5x} = 64$

$2e^{5x} = 64$

$e^{5x} = 32$

$\ln e^{5x} = \ln 32$

$5x = \ln 32$

$x = \frac{1}{5} \ln 32 \approx 0.6931$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

$7^{2x+1} = 2^{x-4}$

$\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$

$(2x + 1) \log 7 = (x - 4) \log 2$

$2x \log 7 + \log 7 = x \log 2 - 4 \log 2$

$2x \log 7 + x \log 2 = -\log 7 - 4 \log 2$

$x(2 \log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4 \log 2$

$x = \frac{-\log 7 - 4 \log 2}{2 \log 7 - \log 2} \approx -1.4751$

d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

$4^x + 2^x - 12 = 0$

$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$

$u^2 + u - 12 = 0$

$(u+4)(u-3) = 0$

$u = -4 \quad or \quad u = 3$

$2^x = -4 \quad or \quad 2^x = 3$

المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$$2^x = 3 \quad \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$$

مثال 4: من الحياة

نمو سكاني: قدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م.

ويمثل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكان العالم (بالميار نسمة)

بعد t عاما منذ عام 2006م.

بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة؟

الاقتران الأصلي	$P(t) = 6.5(1.014)^t$
بتعويض $P(t) = 13$	$13 = 6.5(1.014)^t$
بقسمة طرفي المعادلة على 6.5	$2 = (1.014)^t$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln 2 = \ln(1.014)^t$
قانون القوة في اللوغاريتمات	$\ln 2 = t \ln 1.014$
بحل المعادلة لـ t	$t = \frac{\ln 2}{\ln 1.014}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$t \approx 50$

إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليا نسمة بعد 50 سنة تقريبا من عام 2006م

أتحقق من فهمي:

اعتمادا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة؟

$$9 = 6.5(1.014)^t$$

$$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = \ln (1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = t \ln 1.014$$

$$t = \frac{\ln \frac{9}{6.5}}{\ln 1.014} \approx 23$$

إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريباً من عام 2006.

أتدرب وأحل المسائل:

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\log 19$

$$\log 19 \approx 1.3$$

2) $\log(2.5 \times 10^{-3})$

$$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$$

3) $\ln 3.1$

$$\ln 3.1 \approx 1.1$$

4) $\log_2 10$

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$$

5) $\log_3 e^2$

$$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$$

6) $\ln 5$

$$\ln 5 \approx 1.6$$

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

7) $\log_3 33$

$$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$$

8) $\log_{\frac{1}{3}} 17$

$$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$$

9) $\log_6 5$

$$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$$

10) $\log_7 \frac{1}{7}$

$$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$$

11) $\log 1000$

$$\log 1000 = 3$$

12) $\log_3 15$

$$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$$

أحل المعادلات الأسية الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13) $6^x = 121$

$$6^x = 121$$

$$\log 6^x = \log 121$$

$$x \log 6 = \log 121$$

$$\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$$

14) $-3e^{4x} = -27$

$-3e^{4x} = -27$

$e^{4x} = 9$

$\ln e^{4x} = \ln 9$

$4x = \ln 9$

$x = \frac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$

15) $5^{7x-2} = 3^{2x}$

$5^{7x-2} = 3^{2x}$

$\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$

$(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$

$7x\log 5 - 2\log 5 = 2x\log 3$

$7x\log 5 - 2x\log 3 = 2\log 5$

$x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$

$x = \frac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$

16) $25^x + 5^x - 42 = 0$

$25^x + 5^x - 42 = 0$

$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$

$u^2 + u - 42 = 0$

$(u+7)(u-6) = 0$

$u = -7 \quad or \quad u = 6$

$5^x = -7 \quad or \quad 5^{x=6}$

المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$5^x = 6 \rightarrow x\log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$

17) $2(9)^x = 32$

$2(9)^x = 32$

$9^x = 16$

$x\log 9 = \log 16$

$x\log 9 = \log 16$

$\rightarrow x = \dfrac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$

18) $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

$27^{2x+3} = 2^{x-5}$

$\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$

$(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$

$2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2$

$2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$

$x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2$

$x = \dfrac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5%:

19)بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

$2P = Pe^{0.05t}$

$2 = e^{0.05t}$

$\ln 2 = \ln e^{0.05t}$

$\ln 2 = 0.05\,t$

$t = \dfrac{\ln 2}{0.05} \approx 14$

بعد 14 سنة تقريباً تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي

20)بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

$$3P = Pe^{0.05t}$$

$$3 = e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = \ln e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = 0.05\,t$$

$$t = \frac{\ln 3}{0.05} \approx 22$$

بعد 22 سنة تقريباً تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي

21)كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$، حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيوانا من الكوالا؟

$$97 = 873e^{-0.078t}$$

$$\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$$

$$ln\frac{97}{873} = ln\, e^{-0.078t}$$

$$ln\frac{97}{873} = -0.078t$$

$$t = \frac{ln\frac{97}{873}}{-0.078} \approx 28$$

بعد 28 سنة تقريباً تصبح في الغابة 97 حيواناً من الكوالا

مهارات التفكير العليا:

22)تبرير: أجد قيمة كل من h, k إذا وقعت النقطة $(-2, k)$ والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$، مبررا إجابتي.

$f(x) = e^{0.5x+3}$

بما أن النقطة $(-2 , k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى

$f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$

$k = e^2 \approx 7.39$

بما أن النقطة $(h , 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى

$f(h) = e^{0.5h+3}$

$100 = e^{0.5h+3}$

$\ln 100 = \ln e^{0.5h+3}$

$\ln 100 = 0.5h + 3$

$0.5\, h = -3 + \ln 100$

$h = \dfrac{-3 + \ln 100}{0.5} \approx 3.2$

23)تحد: أحل المعادلة: $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

$3^x + \dfrac{4}{3^x} = 5$

$3^x\left(3^x + \dfrac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5$

$3^{2x} + 4 = 5(3^x)$

$3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$

$(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$(u - 4)(u - 1) = 0$

$u = 4 \text{ or } u = 1$

$3^x = 4 \text{ or } 3^x = 1$

$3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$

$3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

كتاب التمارين

الدرس الخامس – المعادلات الأسية

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\log 17$

$\log 17 \approx 1.2$

2) $\log(1.5 \times 10^{-4})$

$\log(1.5 \times 10^{-4}) \approx -3.8$

3) $\ln 2.3$

$\ln 2.3 \approx 0.8$

4) $\log_2 15$

$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} \approx 3.9$

5) $\log_5 e^7$

$\log_5 e^7 = 7 \times \frac{\ln e}{\ln 5} \approx 4.3$

6) $\ln 7$

$\ln 7 \approx 1.95$

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

7) $\log_5 27$

$\log_5 27 = \frac{\log 27}{\log 5} \approx 2.05$

8) $\log_{\frac{1}{4}} 19$

$\log_{\frac{1}{4}} 19 = \frac{\log 19}{\log \frac{1}{4}} \approx -2.12$

9) $\log_7 8$

$$\log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.07$$

10) $\log_8 \frac{1}{8}$

$$\log_8 \frac{1}{8} = -1$$

11) $\log 10000$

$$\log 10000 = 4$$

12) $\log_3 18$

$$\log_3 18 = \frac{\log 18}{\log 3} \approx 2.63$$

أحل المعادلات الأسية الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13) $5^x = 120$

$$5^x = 120$$

$$\log 5^x = \log 120$$

$$x \log 5 = \log 120$$

$$x = \frac{\log 120}{\log 5} \approx 2.9746$$

14) $-4e^{4x} = -64$

$$-4e^{4x} = -64$$

$$e^{4x} = 16$$

$$\ln e^{4x} = \ln 16$$

$$4x = \ln 16$$

$$x = \frac{\ln 16}{4} \approx 0.9631$$

15) $3^{2x+1} = 7^{5x}$

$3^{2x+1} = 7^{5x}$

$\log 3^{2x+1} = \log 7^{5x}$

$(2x+1)\log 3 = (5x)\log 7$

$2x \log 3 + \log 3 = 5x \log 7$

$2x \log 3 - 5x \log 7 = \log 3$

$x(2\log 3 - 5\log 7) = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{2\log 3 - 5\log 7} \approx -0.1459$

16) $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$

$64^x + 2(8^x) - 3 = 0$

$(8^x)^2 + 2(8)^x - 3 = 0$

$u^2 + u - 3 = 0$

$(u+3)(u-1) = 0$

$u = -3 \quad or \quad u = 1$

$8^x = -3 \quad or \quad 8^x = 1$

المعادلة $-3 = 8^x$ ليس لها حل لأن $8^x > 0$ لجميع قيم x.

$8^x = 1 \ \rightarrow x = \log_8 1 = 0$

17) $7(4)^x = 49$

$7(4)^x = 49$

$(4)^x = 7$

$log\,(4)^x = log\,7$

$x\,log\,4 = log\,7$

$x = \dfrac{log\,7}{log\,4} \approx 1.4037$

18) $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

$$21^{x-1} = 3^{7x+1}$$

$$\log 21^{x-1} = \log 3^{7x+1}$$

$$(x-1)\log 21 = (zx+1)\log 3$$

$$x\log 21 - \log 21 = 7x\log 3 + \log 3$$

$$x\log 21 - 7x\log 3 = \log 21 + \log 3$$

$$x(\log 21 - 7\log 3) = \log 21 + \log 3$$

$$x = \frac{\log 21 + \log 3}{\log 21 - 7\log 3} \approx -0.8918$$

19) حرارة: تمثل المعادلة: $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس $°C$) بعد t دقيقة من بدء تبريده.
متى تصبح درجة حرارة المعن $100°C$؟

$$T = 27 + 219e^{-0.032t}$$

$$100 = 27 + 219e^{-0.032t}$$

$$73 = 219e^{-0.032t}$$

$$73 = 219e^{-0.032t}$$

$$\frac{73}{219} = e^{-0.032t}$$

$$\ln\frac{73}{219} = \ln e^{-0.032t}$$

$$\ln\frac{73}{219} = -0.032t$$

$$t = -\frac{\ln\frac{73}{219}}{0.032} \approx 34.3$$

إذن، تصبح درجة حرارة المعدن $100°C$ بعد حوالي 34.3 min من بدء تبريده.

أرانب: توصلت دراسة إلى أن عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران: $N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

20) أجد عدد الأرانب في المحمية عند بدء الدراسة.

$$N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$$

$$N(0) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05(0)}} = \frac{2000}{4} = 500$$

21) بعد كم سنة يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

$$700 = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$$

$$1 + 3e^{-0.05t} = \frac{2000}{700}$$

$$3e^{-0.05t} = \frac{20}{7} = -1$$

$$3e^{-0.05t} = \frac{13}{7}$$

$$e^{-0.05t} = \frac{13}{21}$$

$$\ln e^{-0.05t} = \ln\frac{13}{21}$$

$$-0.05t = \ln\frac{13}{21}$$

$$t = -\frac{\ln\frac{13}{21}}{0.05} \approx 9.6$$

بعد 9.6 سنة تقريبا يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب.

أسماك: يمثل الاقتران: $P(t) = 200e^{t}$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بدء دراسة معينة عليها:

22)أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بدء الدراسة.

$$P(t) = 200e^{t}$$

$$P(0) = 200e^{0} = 200$$

23) بعد كم سنة يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

$$4000 = 200e^{t}$$

$$20 = e^{t}$$

$$\ln 20 = \ln e^{t}$$

$$t = \ln 20 \approx 3$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$ b) $y = 3$ c) $y = 1$ $\boxed{\text{d) } y = 0}$

2) حل المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ $\boxed{\text{c) } 1}$ d) e

3) قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

$\boxed{\text{a) } -2}$ b) -1 c) 1 d) 2

4) أحد الآتية يكافئ المقدار: $\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 6$ $\boxed{\text{c) } \log_a 9}$ d) $\log_a 27$

5) أحد الآتية يكافئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

$\boxed{\text{a) } 5\log_a x - 4\log_a y + 1}$ b) $a\log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a\log_a x - 3\log_a y$ d) $1 - 5\log_a x - 3\log_a y$

6) حل المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$

a) 2 $\boxed{\text{b) } 3}$ c) 4 d) 8

7) قيمة $\log 10$ هي:

a) $2\log 5$ $\boxed{\text{b) } 1}$ c) $\log 5 \times \log 2$ d) 0

8) إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإن قيمة x هي:

$\boxed{\text{a) } 0}$ b) 1 c) 2 d) 4

9) الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة : $f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي، و $b > 0$ ، $b \neq 1$، امر جميع منحنياتها بالنقطة:

a) (1,1) $\boxed{\text{b) } (1,0)}$ c) (0,1) d) (0,0)

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كل مما يأتي بدلالة k:

10) $\log_5 16$

$\log_5 16 = \log_5 4^2$

$= 2\log_5 4 = 2k$

11) $\log_5 256$

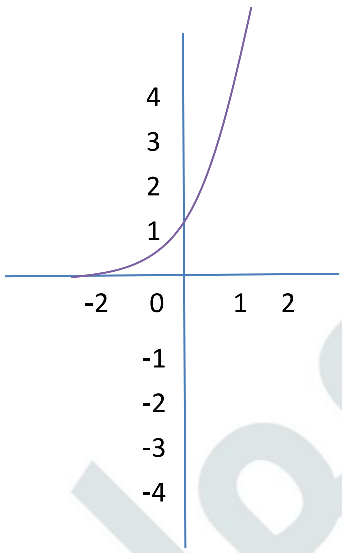
$\log_5 256 = \log_5 4^4$

$= 4\log_5 4 = 4k$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيا، ثم أحدد مجاله ومداه:

12) $f(x) = 6^x$

$f(x) = 6^x$

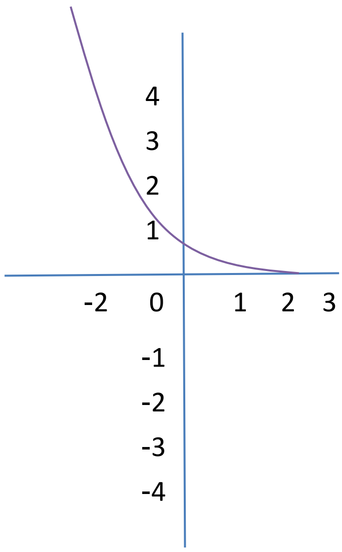


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0 , \infty)$

13) $g(x) = (0.4)^x$

$g(x) = (0.4)^x$

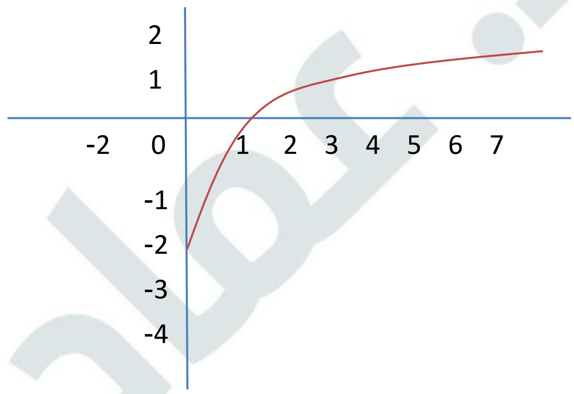


مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0\ ,\infty)$

14) $h(x) = \log_7 x$

$h(x) = \log_7 x$



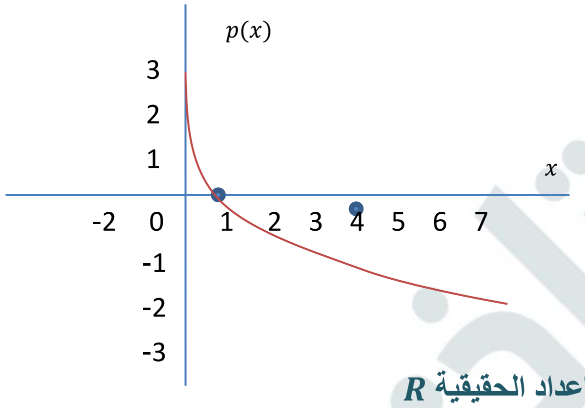
مجال هذا الاقتران هو $(0\ ,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

15) $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$x = (\frac{1}{4})^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4 , -1)	(1 , 0)	(0.25 , 1)



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

أحل المعادلات الأسية الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16) $8^x = 2$

$8^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

17) $-3e^{4x+1} = -96$

$-3e^{4x+1} = -96$

$e^{4x+1} = 32$

$\ln e^{4x+1} = \ln 32$

$4x + 1 = \ln 32$

$4x = -1 + \ln 32$

$x = \frac{-1 + \ln 32}{4} \approx 0.6164$

18) $11^{2x+3} = 5^x$

$11^{2x+3} = 5^x$

$\log 11^{2x+3} = \log 5^x$

$(2x+3)\log 11 = (x)\log 5$

$2x\log 11 + 3\log 11 = x\log 5$

$2x\log 11 - x\log 5 = -3\log 11$

$x(2\log 11 - \log 5) = -3\log 11$

$x = \frac{-3\log 11}{2\log 11 - \log 5} \approx -2.2577$

19) $49^x + 7^x - 72 = 0$

$49^x + 7^x - 72 = 0$

$(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$

$u^2 + u - 72 = 0$

$(u+9)(u-8) = 0$

$u = -9 \text{ or } u = 8$

$7^x = -9 \text{ or } 7^x = 8$

المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$7^x = 8 \quad \rightarrow \log 7^x = \log 8 \rightarrow x\log 7 = \log 8 \rightarrow \ x = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$

20) استثمر سليمان مبلغ 2500 JD في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريا أجد جملة المبلغ بعد 15 سنة.

$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

$A = 2500(1 + \frac{0.042}{12})^{12\times15} \approx 4688.87$

جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريباً.

21)أودع سعيد مبلغ 800 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.5% . أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

$A = Pe^{rt}$

$A = 800e^{0.045\times5} \approx 1001.86$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD 1001.86 تقريباً.

فيروس: انتشر فيروس في شبكة حواسيب وفق الاقتران:

$v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة،

و t الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

$$v(t) = 30e^{0.1t}$$

$$10000 = 30e^{0.1t}$$

$$\frac{10000}{30} = e^{0.1t}$$

$$\ln\frac{1000}{3} = \ln e^{0.1t}$$

$$\ln\frac{1000}{3} = 0.1\,t$$

$$t = \frac{\ln\frac{10000}{30}}{0.1} \approx 58.1$$

الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريبا

يمثل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بعد t يوما:

22)أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة.

$$N(t) = 100e^{0.045t}$$

$$N(0) = 100e^{0.045\times 0} = 100$$

العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية

23) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام.

$$N(5) = 100e^{0.045\times 5} \approx 125$$

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 يام هو 125 خلية تقريبا

24)بعد كم يوما يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 1400 خلية؟

$$1400 = 100e^{0.045t}$$
$$14 = e^{0.045t}$$
$$\ln 14 = \ln e^{0.045t}$$
$$\ln 14 = 0.045t$$
$$t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$$

بعد 59 يوما تقريبا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية

25)بعد كم يوما يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة ضعف العدد الأصلي؟

$$200 = 100e^{0.045t}$$
$$2 = e^{0.045t}$$
$$\ln 2 = \ln e^{0.045t}$$
$$\ln 2 = 0.045t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$$

بعد 15 يوما تقريبا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي

يقاس الضغط الجوي بوحدة تسمى هيكتوباسكال (hPa)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر $1000\ hPa$ ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

26)أكتب اقتران الاضمحلال الأسي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترا عن سطح البحر.

$$A(h) = a(1-r)^h$$
$$A(h) = 1000(1-0.12)^h$$
$$= 1000(0.88)^h$$

27)عند أي ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

$$500 = 1000(0.88)^h$$
$$0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = h \log 0.88$$
$$\rightarrow h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$$

عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريباً فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر

28)إعلانات: يمثل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تنفقة الشركة على إعلانات المنتج، $x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أن إنفاق 1000JD على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها 400000JD من بيع المنتج. أجد $S(10)$ مفسرا معنى الناتج.

$$S(x) = 400 + 250 \log x$$

$$S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$$

أي أن إنفاق 10000 JD على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها 650000 JD