المرجع في
الرياضيات المتقدم

للصف الثاني عشر / المسار الأكاديمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الوحدة الأولى
(الاقترانات والمقادير الجبرية)

الأستاذ: معتصم ابراهيم
0786667808

الدرس الأول: نظرية الباقي والعوامل

مخطط الدرس الأول

- نظرية الباقي والعوامل
  - القسمة باستعمال الجدول
  - نظرية الباقي
  - نظرية العوامل
  - الأصفار النسبية
  - حل معادلات كثيرات الحدود

القسمة باستعمال الجدول:

ملاحظات مهمة:

1) يسمى اقتران كثير الحدود أحياناً كثير الحدود فقط اختصاراً.

2) قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، اكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية.

3) تتوقف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

4) درجة كثير الحدود هي أكبر أسّ للمتغير في حدوده جميعها، وعند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، فإن درجة ناتج القسمة تكون مساوية للفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.

مسألة اليوم: (صفحة 8)

صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده بالأمتار: $2, x, x^2+6x-19$

ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ ؟

$$(2)\ (x)\ (x^2+6x-19)=48 \Rightarrow [\ (2)\ (x)\ (x^2+6x-19)=48] \div 2$$

$$\Rightarrow\ (x)\ (x^2+6x-19)=24 \ \Rightarrow x^3+6x^2-19x=24 \Rightarrow \boxed{x^3+6x^2-19x-24=0}$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بما أن معامل الحد الرئيس هو (1) فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (24) .

الأصفار النسبية المحتملة: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1)=(1)^3+6(1)^2-19(1)-24=-36$	✗
2	$P(2)=(2)^3+6(2)^2-19(2)-24=-30$	✗
3	$P(3)=(3)^3+6(3)^2-19(3)-24=0$	✓

بما أن: $P(3)=0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x=3$ إذن $(x-3)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-3)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$x^3+6x^2-19x-24$$

$\times$	x^2	$9x$	8	
x	x^3	$9x^2$	$8x$	0
-3	$-3x^2$	$-27x$	-24	

ناتج القسمة يساوي (x^2+9x+8) ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $P(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 24$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow\ P(x) = (x-3)(x^2 + 9x + 8)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Longrightarrow\ P(x) = (x-3)(x+8)\ (x+1)$

بحل كل معادلة $\Longrightarrow x = 3 \quad , \quad x = -8 \quad , \ x = -1$

الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالباً .

إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ هي $3\ m$

مثال 1: (صفحة 9)

استعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$ ، ثم أتحقق من صحة الحل.

$\times$	$3x^2$	$2x$	1
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2

إذن ناتج القسمة هو: $3x^3 + 2x + 1$ والباقي 5 ، ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2} = 3x^3 + 2x + 1 + \frac{5}{3x - 2}$$

يمكنني التحقق من صحة الحل بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل، والتحقق من مساواتها للمقسوم:

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 10)

استعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

1) $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

$\times$	x^2	$5x$	-14	
x	x^3	$5x^2$	$-14x$	0
1	x^2	$5x$	-14	

إذن ناتج القسمة هو: $x^2 + 5x - 14$ والباقي 0

2) $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

$\times$	$2x^2$	$5x$	15	
x	$2x^3$	$5x^2$	$15x$	48
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

نظرية الباقي:

مثال 2: (صفحة 12)

استعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي:

1) $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2 \quad , \; h(x) = x - 3$

باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = (x - 3)$ هو $P(3)$:

$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$

$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2 \;\Rightarrow\; = 27 + 63 - 18 + 2 \;\Rightarrow\; = 74$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9 \quad , \; h(x) = x + 2$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 2$ ، اكتب $h(x)$ على الصورة $h(x) = x - (-2)$

ليكون الباقي $P(-2)$.

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$

$P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$

$P(-2) = 16 - 20 + 8 + 9 \;\Rightarrow\; P(-2) = -19$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1 \quad , \; h(x) = 2x - 1$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$ ، اكتب $h(x)$ على الصورة $h(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ليكون الباقي $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$P(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$P(x) = \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1 \;\Rightarrow\; P(x) = -\frac{3}{4}$$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

اتحقق من فهمي: (صفحة 13)

استعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي:

1) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2 \quad , \; h(x) = x - 1$

باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = (x - 1)$ هو $P(1)$:

$$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$$

$$P(1) = 4(1)^4 - 7(1)^3 + 5(1)^2 + 2 \;\Rightarrow\; = 4 - 7 + 5 + 2 \Rightarrow \; = 4$$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 4

2) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6 \quad , \; h(x) = x + 3$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 3$ ، اكتب $h(x)$ على الصورة $h(x) = x - (-3)$ ليكون الباقي $P(-3)$.

$$P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6$$

$$P(-3) = 3(-3)^3 + 8(-3)^2 - 3(-3) - 6$$

$$P(-3) = -81 + 72 + 9 - 6 \;\Rightarrow\; P(-2) = --6$$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -6

3) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9 \quad , \; h(x) = 2x + 8$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x + 8$، اكتب $h(x)$ على الصورة $h(x) = 2\left(x - \left(-\frac{8}{2}\right)\right)$

ليكون الباقي $P(-4) = \Longrightarrow P\left(-\frac{8}{2}\right)$.

$P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9$

$P(-4) = -2(-4)^3 - 5(-4)^2 + 10(-4) + 9$

$P(-4) = -128 - 80 - 40 + 9 \Longrightarrow \quad P(-4) = 17$

إذن قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 17

نظرية العوامل:

مثال 3: (صفحة 13)

إذا كان: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

1) أبين أن $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $x + 4$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(-4) = 0$ ، لذا أجد $P(-4)$

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

$P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$

$P(-4) = -64 + 96 - 20 - 12 \Longrightarrow \quad P(-4) = 0$

إذن: $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$

2) أحلل $P(x)$ تحليلاً كاملاً .

بما أن $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x + 4$ ، ثم تحليل كثير الحدود الناتج إم أمكن.

$\times$	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
4	$4x^2$	$8x$	-12	

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$
التحليل باستعمال القسمة	$\Longrightarrow\ P(x) = (x + 4)(x^2 + 2x - 3)$
بتحليل ثلاثي الحدود	$\Longrightarrow\ P(x) = (x + 4)(x + 3)\ (x - 1)$

اتحقق من فهمي: (صفحة 14)

إذا كان: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

1) أبين أن $(x - 5)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $x - 5$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$ ، لذا أجد $P(5)$

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$

$P(5) = 125 - 50 - 65 - 10 \Longrightarrow P(5) = 0$

إذن: $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$

2) أحلل $P(x)$ تحليلاً كاملاً .

بما أن $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x - 5$ ، ثم تحليل كثير الحدود الناتج إم أمكن.

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

$\times$	x^2	$3x$	2	
x	x^3	$3x^2$	$2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$
التحليل باستعمال القسمة	$\Longrightarrow\ P(x) = (x - 5)(x^2 + 3x + 2)$
بتحليل ثلاثي الحدود	$\Longrightarrow\ P(x) = (x - 5)(x + 2)\ (x + 1)$

الأصفار النسبية:

مثال 4: (صفحة 15)

1) أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (6)، وهي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm1, \pm2$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	-1
✗	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	1
✓	$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	2

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = 2$ إذن $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

$\times$	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $(2x^3+5x-3)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)$

تحليل ثلاثي الحدود

$$2x^2+5x-3 \Rightarrow x^2+5x-6 \ \Rightarrow\ (x+6)(x-1) \Rightarrow \left(x+\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x+3)(2x-1)$$

التحليل التام $\Rightarrow\ P(x)=(x-2)(2x-1)\ (x+3)$

إذن، $P(x)=(x-2)(2x-1)\ (x+3)$

ومنه فإن اصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي:

$$x-2 \Rightarrow \boxed{x=2}\quad ,\ 2x-1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}\quad ,x+3 \Rightarrow \boxed{x=-3}$$

2) أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x)=x^3-3x+2$.

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (2) .

الأصفار النسبية المحتملة : $\pm1,\pm2$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
-1	$P(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$	✗
1	$P(1)=(1)^3-3(1)+2=0$	✓

بما أن: $P(1)=0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x=1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) = x^3 - 3x + 2$

$\times$	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي $(2x^3 + 5x - 3)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $P(x) = x^3 - 3x + 2$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Longrightarrow P(x) = (x-1)(x+2)\ (x-1)$

إذن، $P(x) = (x-1)(x+2)\ (x-1)$ ،

ومنه فإن اصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $-2\ ,1$

اتحقق من فهمي: (صفحة 17)

أجد جميع أصفار كثير الحدود فيما يأتي:

1) $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (1)، وهي ± 1

أجد عوامل المعامل الرئيس (5)، وهي $\pm 1, \pm 5$

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q} : \pm 1, \pm \frac{1}{5}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✓	$P(1) = 5(1)^3 - (1)^2 - 5(1) + 1 = 0$	1

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$\times$	$5x^2$	$4x$	-1
x	$5x^3$	$4x^2$	$-x$
-1	$-5x^2$	$-4x$	1

الباقي: 0

ناتج القسمة يساوي $(5x^2 + 4x - 1)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ P(x) = (x-1)(5x^2 + 4x - 1)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow\ P(x) = (x-1)(5x-1)\,(x+1)$

إذن، $P(x) = (x-1)(5x-1)\,(x+1)$ ،

ومنه فإن اصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $\frac{1}{5}, -1, 1$

$x - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$, $5x - 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}}$, $x + 1 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$2)\quad Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (8) .

الأصفار النسبية المحتملة : $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8,$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✓	$Q(1) = (1)^4 + 6(1)^3 + 7(1)^2 - 6(1) - 8 = 0$	1

بما أن: $Q(1) = 0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = 1$ إذن $(x - 1)$ عامل من عوامل $Q(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x - 1)$ عامل من عوامل $Q(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $Q(x)$ على $(x - 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

$\times$	x^3	$7x^2$	$14x$	8
x	x^4	$7x^3$	$14x^2$	$8x$
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ Q(x) = (x - 1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$

الخطوة الرابعة: أحلل المعادلة التكعيبية الناتجة.

بتعويض $x = -1$ نجد أن الناتج يساوي 0 .

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✓	$Q(-1) = (-1)^3 + 7(-1)^2 + 14(-1) + 8 = 0$	-1

بما أن $(x+1)$ عامل من عوامل $Q(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $Q(x)$ على $(x+1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

$\times$	x^2	$6x$	8	
x	x^3	$6x^2$	$8x$	0
1	x^2	$6x$	8	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 6x + 8)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ Q(x) = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ Q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 8)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow\ Q(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

إذن، $Q(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

ومنه فإن اصفار $Q(x)$ الناتجة من تحليله هي: $1 , -1 , -2 , -4$

حل معادلات كثيرات الحدود:

مثال 5: (صفحة 18)

أحلل المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (24) .

الأصفار النسبية المحتملة : $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	1
✓	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	2

بما أن: $P(2) = 0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = 2$ إذن $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

$\times$	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 12)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x - 2)(x^2 + x - 12) = 0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x - 2)(x + 4)(x - 3) = 0$

بحل كل معادلة $\Rightarrow x = 2 \quad , \quad x = -4 \quad , \quad x = 3$

إذن حلول المعادلة هي، $x = 3 \quad , \quad x = -4 \quad , \quad x = 2$

اتحقق من فهمي: (صفحة 19)

أحلل كل معادلة مما يأتي:

1) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (9) .

الأصفار النسبية المحتملة : $\pm1, \pm3, \pm9$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 9(1) + 9 = 0$	✓

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$\times$	x^2	0	-9	
x	x^3	0	$-9x$	0
-1	$-x^2$	0	9	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 - 9)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Rightarrow (x-1)(x^2-9) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$\Rightarrow (x-1)(x-3)(x+3) = 0$ بتحليل الفرق بين مربعين

$\Rightarrow x = 1 \quad , \quad x = 3 \quad , \quad x = -3$ بحل كل معادلة

إذن حلول المعادلة هي، $x = 1 \quad , \quad x = 3 \quad , \quad x = -3$

2) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (4) .

الأصفار النسبية المحتملة : $\pm1, \pm2, \pm4$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$\times$	x^2	$4x$	4	
x	x^3	$4x^2$	$4x$	0
-1	$-x^2$	$-4x$	-4	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 4x + 4)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
التحليل باستعمال القسمة	$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$
بتحليل ثلاثي الحدود	$\Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x + 2) = 0$
بتحليل ثلاثي الحدود	$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad , x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

إذن حلول المعادلة هي، $x = 1 \quad , \quad x = -2$

مثال 6: من الحياة (صفحة 19)

هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجاً لبناية على هيئة هرم قاعدته مربعة الشكل باستعمال طابعة ثلاثية الأبعاد، إذا كان ارتفاع النموذج يقل $2\ dm$ عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ dm^3$ ، فما أبعاد النموذج؟

الخطوة الأولى: استعمل قانون حجم الهرم لكتابة معادلة.

بما أن قاعدة الهرم مربعة، فإنني افترض أن طول ضلعها $x\ dm$ ، ومنه فإن مساحتها x^2 ، وبما أن ارتفاع الهرم يقل $2\ dm$ عن طول ضلع القاعدة، فإن ارتفاع الهرم هو $(x-2)\ dm$.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \mathrm{B} \times \mathrm{h} \Rightarrow 25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2)$$

$$\Rightarrow \left[25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2) \right] \times 3 \Rightarrow 75 = x^2 \times (x-2)$$

$$\Rightarrow 75 = x^3 - x^2 \Rightarrow \boxed{x^3 - x^2 - 75 = 0}$$

الخطوة الثانية: أجد الأصفار النسبية لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة وهو : $P(x) = x^3 - x^2 - 75$.

بما أن معامل الحد الرئيس هو 1 ، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (75) .

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm25, \pm75$

الخطوة الثالثة: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً، فإنني أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود ؟
3	$P(3) = (3)^3 - (3)^2 - 75 = -66$	✗
5	$P(5) = (5)^3 - (5)^2 - 75 = 0$	✓

الخطوة الرابعة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-5)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

×	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 3x + 15)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $x^3 - x^2 - 75 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow (x-5)(x^2+3x+15) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\Longrightarrow x - 5 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 5}$ $, x^2 + 3x + 15 = 0$

تحليل المعادلة التربيعية: $x^2 + 3x + 15 = 0$

$a = 1$ $, b = 3$ $, c = 15$

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow (3)^2 - 4(1)(15) \Longrightarrow 9 - 60 = -51$

بما أن العامل التربيعي $x^2 + 3x + 15$ مميزه سالب، فإنه لا توجد له أصفار. ومن ثم فإن $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة .

إذن طول قاعدة النموذج $5\ dm$ ، وارتفاعه $3\ dm$.

اتحقق من فهمي: (صفحة 20)

يزيد ارتفاع أسطوانة $5\ cm$ على طول نصف قطر قاعدتها، إذا كان حجم الأسطوانة $72\pi\ cm^3$، فما طول نصف قطر قاعدتها وارتفاعها ؟

الخطوة الأولى: استعمل قانون حجم الاسطوانة لكتابة معادلة.

ليكن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة هو r وارتفاعها h وحجمها V

$h = r + 5$

$V = \pi r^2 h \Longrightarrow V = \pi r^2 (r+5) \Longrightarrow 72\pi = \pi r^2 (r+5)$

$\Longrightarrow 72 = r^2(r+5) \Longrightarrow 72 = r^3 + 5r^2 \Longrightarrow \boxed{r^3 + 5r^2 - 72 = 0}$

الخطوة الثانية: أجد الأصفار النسبية لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أن معامل الحد الرئيس هو 1 ، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (75) .

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

الخطوة الثالثة: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً ، فإنني أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

هل p صفر لكثير الحدود ؟	$P(p)$	p
✓	$P(3) = (3)^3 + 5(3)^2 - 72 = 0$	3

الخطوة الرابعة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(r-3)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(r)$ على $(r-3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$r^3 + 5r^2 - 72 = 0$

$\times$	r^2	$8r$	24	
r	r^3	$8r^2$	$24r$	0
-3	$-3r^2$	$-24r$	-72	

ناتج القسمة يساوي $(r^2 + 8r + 24)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $\quad r^3 + 5r^2 - 72 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\quad \Rightarrow (r-3)(r^2 + 8r + 24) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\quad \Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 3} \quad , r^2 + 8r + 24 = 0$

تحليل المعادلة التربيعية: $r^2 + 8r + 24 = 0$

$a = 1 \quad , b = 8 \quad , c = 24$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (8)^2 - 4(1)(24) \Rightarrow 64 - 96 = -32$

بما أن العامل التربيعي $r^2 + 8r + 24$ مميزه سالب، فإنه لا توجد له أصفار. ومن ثم فإن $r = 3$ هو الحل الوحيد للمعادلة .

إذن نصف قطر الاسطوانة ، $3\ cm$ وارتفاعها $8\ cm$.

أتدرب وأحل المسألة: (صفحة 21)

استعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1) $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12)(3x - 4)$

$\times$	$2x^3$	x^2	$4x$	3
$3x$	$6x^4$	$3x^3$	$12x^2$	$9x$
-4	$-8x^3$	$-4x^2$	$-16x$	-12

$\boxed{0}$

الناتج : $2x^3 + x^2 + 4x + 3$ والباقي : 0

2) $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15)(1 - 2x)$

$\times$	$-x^4$	$2x^3$	x^2	$-4x$	3
$-2x$	$2x^5$	$-4x^4$	$-2x^3$	$8x^2$	$-6x$
1	$-x^4$	$2x^3$	x^2	$-4x$	3

$\boxed{12}$

الناتج : $-x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3$ و الباقي : 12

استعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي:

3) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6 , \qquad h(x) = x + 1$

باقي قسمة $f(x)$ على $h(x) = (x + 1)$ هو $f(-1)$:

$$f(-1) = 8(-1)^4 + 2(-1)^3 - 53(-1)^2 + 37(-1) - 6$$

$$f(-1) = 8 - 2 - 53 - 37 - 6 \implies f(-1) = 8 - 98 \implies \boxed{f(-1) = -90}$$

إذن قسمة $f(x)$ على $h(x)$ يساوي -90

$4)\ f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8\ ,\qquad h(x) = 3x + 4$

باقي قسمة $f(x)$ على $h(x) = 3x + 4$ هو: $h(x) = (3x+4) \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{4}{3}}$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 8 \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{256}{27} + \frac{32}{9} + 8 - 8$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{256}{27} + \frac{32\times 3}{9\times 3} + \frac{8\times 27}{27} - \frac{8\times 27}{27}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{256}{27} + \frac{96}{27} + \frac{216}{27} - \frac{216}{27} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{160}{27}}$$

إذن قسمة $f(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{160}{27}$

أبين أن $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي:

$5)\ f(x) = x^3 - 37x + 84\ ,\qquad h(x) = x + 7$

يكون $x + 7$ عاملاً من عوامل $f(x)$ إذا كان $f(-7) = 0$ ، لذا أجد $f(-7)$

$$f(-7) = (-7)^3 - 37(-7) + 84 \Rightarrow f(-7) = -343 + 259 + 84 \Rightarrow \boxed{f(-7) = 0}$$

إذن: $x + 7$ عامل من عوامل $f(x)$

$6)\ f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6\ ,\qquad h(x) = 2x - 3$

يكون: $\boxed{x = \frac{3}{2}} \Leftarrow 2x = 3 \Leftarrow h(x) = (2x-3)$ عاملاً من عوامل $f(x)$ إذا كان $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right) + 6 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} - \frac{3}{2} + \frac{6}{1}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} - \frac{6}{4} + \frac{24}{4} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = 0}$$

إذن: $2x - 3$ عامل من عوامل $f(x)$

أحلل كل اقتران مما يأتي تحليلاً كاملاً:

$7)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (-5) .

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1, \pm 5, \pm 3, \pm 15$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 13(1) - 15 = -24$	1
✓	$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 13(-1) - 15 = 0$	-1

بما أن: $f(-1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -1$ إذن $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $f(x)$ على $(x+1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

$\times$	x^2	$2x$	-15	
x	x^3	$2x^2$	$-15x$	0
1	x^2	$2x$	-15	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 2x - 15)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 15)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow\ f(x) = (x+1)(x+5)\ (x-3)$

$8)\ g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (-18).

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1 \pm 2, 3\pm, \pm 6, \pm 9, 18$, .

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$g(1) = (1)^4 - 7(1)^3 + 13(1)^2 + 3(1) - 18 = -8$	1
✓	$g(-1) = (-1)^4 - 7(-1)^3 + 13(-1)^2 + 3(-1) - 18 = 0$	-1

بما أن: $g(-1) = 0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = -1$ إذن $(x + 1)$ عامل من عوامل $g(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x + 1)$ عامل من عوامل $g(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $g(x)$ على $(x + 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

$\times$	x^3	$-8x^2$	$21x$	-18	
x	x^4	$-8x^3$	$21x^2$	$-18x$	0
1	x^3	$-8x^2$	$21x$	-18	

ناتج القسمة يساوي $(x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $g(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ g(x) = (x - 1)(x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$

الخطوة الرابعة: أحلل المعادلة التكعيبية الناتجة.

بتعويض $x = -1$ نجد أن الناتج يساوي 0 .

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$g(-1) = (-1)^3 - 8(-1)^2 + 21(-1) - 18 = -48$	-1
✗	$g(1) = (1)^3 - 8(1)^2 + 21(1) - 18 = -4$	1
✓	$g(2) = (2)^3 - 8(2)^2 + 21(2) - 18 = 0$	2

بما أن $(x+2)$ عامل من عوامل $g(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $g(x)$ على $(x+2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

$\times$	x^2	$-6x$	9
x	x^3	$-6x^2$	$9x$
-2	$-2x^2$	$12x$	-18

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(x^2 - 6x + 9)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى　$g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

التحليل باستعمال القسمة　$\Rightarrow\ g(x) = (x-1)(x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$

التحليل باستعمال القسمة　$\Rightarrow\ g(x) = (x-1)(x+2)(x^2 - 6x + 9)$

بتحليل ثلاثي الحدود　$\Rightarrow\ g(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x-3)$

$\Rightarrow\ g(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2$

9) $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (12)، وهي $\pm1, \pm12, \pm2, \pm6, \pm3, \pm4$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm1, \pm2$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm12, \pm6, \pm2, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm4$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$h(1) = 2(1)^3 - 13(1)^2 + 17(1) + 12 = 18$	1
✗	$h(-1) = 2(-1)^3 - 13(-1)^2 + 17(-1) + 12 = -20$	-1
✓	$h(3) = 2(3)^3 - 13(3)^2 + 17(3) + 12 = 0$	3

بما أن: $h(3) = 0$ فإنه كثير الحدود صفر عندما $x = 3$ إذن $(x - 3)$ عامل من عوامل $h(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 3)$ عامل من عوامل $h(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $h(x)$ على $(x - 3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

$\times$	$2x^2$	$-7x$	-4
x	$2x^3$	$-7x^2$	$-4x$
-3	$-6x^2$	$21x$	12

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 - 7x^2 - 4)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow\ h(x) = (x-3)(2x^2-7x-4)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow\ (2x^2-7x-4) \Rightarrow\ (2x^2+x-8x-4)$

$\Rightarrow\ 2(2x+1)-4(2x+1)\ \Rightarrow\ (2x+1)(x-4)$

$\Rightarrow\ h(x) = (x-3)(2x+1)(x-4)$

إذن، $h(x) = (x-3)(2x+1)(x-4)$ ،

10) $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (-12)، وهي $\pm1, \pm12, \pm2, \pm6, \pm3, \pm4$

أجد عوامل المعامل الرئيس (3)، وهي $\pm1, \pm3$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q} : \pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm12, \pm4, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm6, \pm2, \pm3, \pm4, \pm\frac{4}{3}$

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$q(1) = 3(1)^3 - 18(1)^2 + 2(1) - 12 = -25$	✗
-1	$q(-1) = 3(1)^3 - 18(1)^2 + 2(1) - 12 = -35$	✗
6	$q(6) = 2(6)^3 - 13(6)^2 + 17(6) + 12 = 0$	✓

بما أن: $q(6) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 6$ إذن $(x-6)$ عامل من عوامل $q(x)$

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-6)$ عامل من عوامل $q(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $q(x)$ على $(x-6)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

$\times$	$3x^2$	0	2
x	$3x^3$	0	$2x$
-6	$-18x^2$	0	-12

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(3 + 4)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

كثير الحدود المعطى $h(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow\ h(x) = (x - 6)(3x^2 + 2)$

أحلل كلاً من المعادلات الآتية:

11) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (10)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 - 7(1) + 10 = 10$	✓

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = 1$ إذن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

$\times$	x^2	$-3x$	-10
x	x^3	$-3x^2$	$-10x$
-1	$-x^2$	$3x$	10

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(x^2 - 3x - 10)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 10) = 0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x-1)(x-5)(x+2) = 0$

بحل كل معادلة $\Rightarrow x = 1 \quad , \quad x = 5 \quad , \quad x = -2$

12) $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

$5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 - 2x^3 + 10x^2 = 0$

$3x^3 - 5x^2 - 47x - 15 = 0$

أجد عوامل الحد الثابت (15)، وهي $\pm 1, \pm 15, \pm 3, \pm 5$

أجد عوامل المعامل الرئيس (1)، وهي $\pm 1, \pm 3$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q} :$ $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 15, \pm 5, \pm \frac{5}{3}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 3(1)^3 - 5(1)^2 - 47(1) - 15 = -64$	✗
3	$P(-3) = 3(-3)^3 - 5(-3)^2 - 47(-3) - 15 = 0$	✓

بما أن: $P(-3) = 0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = -3$ إذن $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$3x^3-5x^2-47x-15=0$

$\times$	$3x^2$	$-14x$	-5	
x	$3x^3$	$-14x^2$	$-5x$	0
3	$9x^2$	$-42x$	-15	

ناتج القسمة يساوي (x^2+x-12) ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$3x^3-5x^2-47x-15=0$ المعادلة الأصلية

$\Longrightarrow (x+3)(3x^2-14x-5)=0$ التحليل باستعمال القسمة

$\Longrightarrow (x-2)(3x+1)(x-5)=0$ بتحليل ثلاثي الحدود

$\Longrightarrow x=2 \quad , \quad 3x=-1 \Longrightarrow x=-\frac{1}{3} \quad , \quad x=5$ بحل كل معادلة

13) $3x^3+3x^2-14x-8=0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (8)، وهي $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$

أجد عوامل المعامل الرئيس (3)، وهي $\pm1,\pm3$

الأصفار النسبية المحتملة $=\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}=\frac{P}{q}: \pm1,\pm\frac{1}{3},\pm2,,\pm\frac{2}{3}\pm4,\pm\frac{4}{3},\pm8,\pm\frac{8}{3},$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1)=\ 3(1)^3+3(1)^2-14(1)-8\ =-16$	✗
2	$P(2)=\ 3(2)^3+3(2)^2-14(2)-8\ =0$	✓

بما أن: $P(2)=0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x=2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$3x^3+3x^2-14x-8=0$$

$\times$	$3x^2$	$9x$	4
x	$3x^3$	$9x^2$	$4x$
-2	$-6x^2$	$-18x$	-8

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي (x^2+x-12) ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $\quad 3x^3+3x^2-14x-8=0$

التحليل باستعمال القسمة $\quad \Rightarrow (x-2)(3x^2+9x+4)=0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$$a=3 \qquad b=9 \qquad c=4$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(9)\pm\sqrt{(9)^2-4(3)(4)}}{2(3)} \Rightarrow =\frac{-9\pm\sqrt{81-48}}{6}$$

$$\Rightarrow =\frac{-9\pm\sqrt{33}}{6} \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{-9+\sqrt{33}}{6}} \Leftrightarrow \boxed{x_3=\frac{-9-\sqrt{33}}{6}}$$

إذن حلول المعادلة هي، $x=\frac{-9-\sqrt{33}}{6}\quad , \quad x=\frac{-9+\sqrt{33}}{6}\quad , \quad x=2$

14) $6x^3-13x^2+x+2=0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (6)، وهي $\pm1,\pm2$

أجد عوامل المعامل الرئيس (6)، وهي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

الأصفار النسبية المحتملة $=\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}=\frac{P}{q}$: $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{6},\pm8,\pm\frac{2}{3}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = 6(1)^3 - 13(1)^2 + (1) + 2 = -4$	1
✓	$P(2) = 6(2)^3 - 13(2)^2 + (2) + 2 = 0$	2

بما أن: $P(2) = 0$ فإن كثير الحدود يساوي صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$$

$\times$	$6x^2$	$-x$	-1
x	$6x^3$	$-x^2$	$-x$
-2	$-12x^2$	$2x$	2

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 12)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

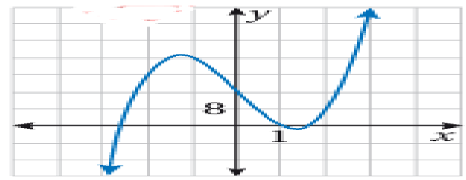
المعادلة الأصلية $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-2)(6x^2 - x - 1) = 0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x-2)(3x+1)(2x-1) = 0$

بحل كل معادلة $\Rightarrow \boxed{x = 2}$, $3x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$, $2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

استعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران مما يأتي لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثم إيجاد جميع أصفار الاقتران:



$15)\ f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

أحد أصفار المقام هو $x = 1$ إذن $x - 1$ عامل من عوامل $f(x)$

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

$\times$	$4x^2$	$4x$	-16
x	$4x^3$	$4x^2$	$-16x$
-1	$-4x^2$	$-4x$	16

0

المعادلة الأصلية $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow f(x) = (x-1)(4x^2 + 4x - 16)$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

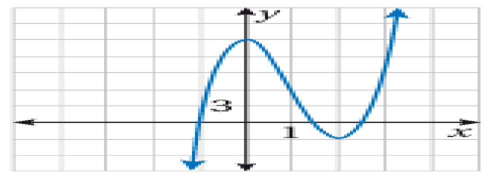
$a = 4 \qquad b = 4 \qquad c = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(-16)}}{2(4)} \Rightarrow = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 256}}{8}$$

$$\Rightarrow = \frac{-4 \pm \sqrt{272}}{8} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 \times 17}}{8} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}}$$

إذن حلول المعادلة هي، $x = 1 \quad , \quad x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \approx 1.56 \quad , \quad x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \approx -2.56$

$$16)\ f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$$



أحد أصفار المقام هو $x = -1$ إذن $x + 1$ عامل من عوامل $f(x)$

بما أن $(x + 1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x + 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$4x^3 - 12x^2 - x + 15$$

$\times$	$4x^2$	$-16x$	15
x	$4x^3$	$-16x^2$	$15x$
1	$4x^2$	$-16x$	15

0

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$ المعادلة الأصلية

$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(4x^2 - 16x + 15)$ التحليل باستعمال القسمة

بتحليل ثلاثي الحدود:

$$4x^2 - 16x + 15 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 \Rightarrow (x - 10)(x - 6)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{6}{4}\right) \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow (2x - 5)(2x - 3)$$

$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(2x - 5)(2x - 3)$ التحليل التام

17) إذا كان $x = 4$ ، $x = 1$ هما حلين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ ، فأجد الحل الثالث لهما.

أفرض أن الحل الثالث هو $x = -2$ ، فيكون $(x - 1)$ ، $(x - 4)$ ، $(x - 5)$ عوامل للمقدار $x^3 - 3x^2 + ax + b$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x - 1)(x - 4)(x - c)$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 4)(x - c)$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - cx^2 - 5x^2 + 5cx + 4x - 4c$$

$$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - (c+5)x^2 + (4+5c)x - 4c$$

بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن:

معامل x^2 : $-3 = -(c+5)$

$$-3 = -(c+5) \quad \Rightarrow \quad -3 = -c - 5 \quad \Rightarrow \boxed{c = -2}$$

إذن الحل الثالث هو $x = -2$

18) إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$ ، فما قيمة a ؟

هذا يعني $f(1) = 2f(-1)$

$$(1)^3 + a(1)^2 + (1) + 5 = 2((-1)^3 + a(-1)^2 + (-1) + 5)$$

$$1 + a + 1 + 5 = 2(-1 + a - 1 + 5) \Rightarrow a + 7 = 2(a+3)$$

$$\Rightarrow a + 7 = 2a + 6 \quad \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

19) منحوتات جليدية: تصنع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق ملء قالب بالماء ثم تجميده، إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مربعة الشكل، وارتفاعها يزيد $1\ m$ على طول قاعدتها، فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها $4\ m^3$.

الحجم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$4 = \frac{1}{3}x^2(x+1) \Rightarrow \left[4 = \frac{1}{3}x^2(x+1)\right] \times 3 \Rightarrow 12 = x^2(x+1)$$

$$\Rightarrow 12 = x^3 + x^2 \quad \Rightarrow x^3 + x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x^3 + x^2 - 12 = 0}$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (12)

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1 \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$, .

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 + (1)^2 - 12 = -10$	✗
2	$P(2) = (2)^3 + (2)^2 - 12 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

$x^3 + x^2 - 12 = 0$

×	x^2	$3x$	6
x	x^3	$3x^2$	$6x$
-2	$-2x^2$	$-6x$	-12

$\boxed{0}$

المعادلة الأصلية $f(x) = x^3 + x^2 - 12$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$

المعادلةليس لها حل لأن مميزها سالب $b^2 - 4ac \Longrightarrow 3^2 - 4(1)(6) = -15$

الحل الوحيد للمعادلة هو $x^3 + x^2 - 12 = 0$ هو $\boxed{x = 2}$

إذن طول ضلع قاعدته المنحوتة هو $2m$ ، وارتفاعها $3m$

إذا كان: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ ، حيث: a ، b ثابتان و $a, b \neq 0$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

20) إذا كان $(x - 3)$ عاملاً من عوامل الاقتران $f(x)$ ، فأبين أن: $3a + b = 4$.

بما أن $(x - 3)$ عاملاً من عوامل الاقتران $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ ، إذن $f(3) = 0$

$f(3) = a(3)^3 + b(3)^2 - 9(3) - 9 = 0 \Longrightarrow 27a + 9b - 27 - 9 = 0$

$\Longrightarrow 27a + 9b - 36 = 0 \Longrightarrow [\ 27a + 9b = 36] \div 9 \Longrightarrow \boxed{3a + b = 4}$

21) إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x-2$ يساوي -15 ، فأبين أن: $2a+b=3$.

بما أن باقي قسمة $f(x)$ على $x-2$ يساوي -15 ، يعني أن $f(2)=-15$

$$f(2)=a(2)^3+b(2)^2-9(2)-9=-15 \Rightarrow 8a+4b-18-9=-15$$

$$\Rightarrow 8a+4b-27=-15 \Rightarrow 8a+4b=12 \Rightarrow [8a+4b=12] \div 4$$

$$\Rightarrow \boxed{2a+b=3}$$

22) أجد قيمة كل من: a ، و b .

بطرح المعادلة الناتجة في السؤال رقم 21 من المعادلة الناتجة في السؤال 20 .

$$3a+b=4$$

$$\underline{-\quad 2a+b=3}$$

$$a=1$$

بتعويض $a=1$ في إحدى المعادلتين:

$$3(1)+b=4 \Rightarrow 3+b=4 \Rightarrow b=4-3 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

23) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حلها بداية الدرس

مهارات التفكير العليا:

24) مسألة مفتوحة: اكتب اقترانا ً من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x+1)$ يساوي -8 .

بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل التي يكون تربيعيا ً أفرضه: ax^2+bx+c

$$f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$$

باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ هو -8 ، فإن $f(-1)=-8$

$$f(-1)=(-1-3)(a(-1)^2+b(-1)+c)=-8$$

$$f(-1)=(-4)(a-b+c)=-8 \Rightarrow a-b+c=2$$

لذلك اختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=2$

فيكون الاقتران المطلوب هو: $f(x)=(x-3)(x^2+x+2)$

$$f(x)=x^3+x^2+2x-3x^2-3x-6 \Rightarrow \boxed{f(x)=x^3-2x^2-x-6}$$

25) اكتشف الخطأ: أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المحتملة للاقتران :
$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$ فكان حلها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

$$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{8} \quad ✗$$

أبين الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثم أصححه.

الخطأ هو أن سهام قسمت عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x .

الحل الصحيح هو:

$$f(x) = x(-x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 45x^2 - 1500x + 16)$$

أجد عوامل الحد الثابت (16)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$

أجد عوامل المعامل الرئيس (8)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $Q(x)$ هي:

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8},$.

26) تحد: أحلل المقدار: $x^{13} - 15x^9 - 16x^5$

$$x^{13} - 15x^9 - 16x^5 \Rightarrow x^5(x^8 - 15x^4 - 16) \Rightarrow x^5(x^4 - 16)(x^4 + 1)$$

$$\Rightarrow x^5(x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^4 + 1) \Rightarrow x^5(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 1)$$

$$\Rightarrow x^5(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 1)$$

الدرس الثاني

الكسور الجزئية

مخطط الدرس الأول

الكسور الجزئية

- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة
- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية أحدها مكرر
- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية أحدها تربيعي غير مكرر ولايمكن تحليله
- تجزئة مقدار نسبي درجة كثير الحدود في بسطه مساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

مسألة اليوم: (صفحة 23)

يمثل الاقتران $v=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين سرعة سيارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يمكن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحداهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1) ؟

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيما ً مجهولة.

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(t+2)(t+1)(t-1)\left(\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}\right)=(t+2)(t+1)(t-1)\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$t^2-5t+6=A(t+1)(t-1)+B(t+2)(t-1)+C(t+2)(t+1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B. C$ باستعمال التعويض.

بتعويض $t=-2$ في المعادلة الناتجة:

$$(-2)^2-5(-2)+6=A(-2+1)(-2-1)+B(-2+2)(-2-1)+C(-2+2)(-2+1)$$

$$4+10+6=A(-2+1)(-2-1)+0+0 \Rightarrow 20=A(-2+1)(-2-1)$$

$$\Rightarrow 20=A(-1)(-3) \quad \Rightarrow \ 20=3A \quad \Rightarrow \boxed{A=\frac{20}{3}}$$

بتعويض $t=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2-5(-1)+6=A(-1+1)(-1-1)+B(-1+2)(-1-1)+C(-1+2)(-1+1)$$

$$1+5+6=0+B(1)(-2)+0 \Rightarrow 12=-2B \ \Rightarrow \boxed{B=-6}$$

بتعويض $t=1$ في المعادلة الناتجة:

$$(1)^2-5(1)+6=A(1+1)(1-1)+B(1+2)(1-1)+C(1+2)(1+1)$$

$$1-5+6=0+0+6C \Rightarrow 2=6C \ \Rightarrow C=\frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{3}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{-6}{t+1}+\frac{\frac{1}{3}}{t-1}$$

$$\Rightarrow=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{-6(t-1)}{(t+1)(t-1)}+\frac{\frac{1}{3}(t+1)}{(t+1)(t-1)} \Rightarrow=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{-6(t-1)+\frac{1}{3}(t+1)}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{-6t+6+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2+1} \Rightarrow \ =\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{-18t}{3}+\frac{19}{3}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow \ =\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{-17t}{3}+\frac{19}{3}}{t^2+1}$$

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة:

مثال (1): صفحة 25:

أجزئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

تحليل ثلاثي الحدود

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2}=\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين وهو $(x-2)(x+1)$ فإن:

$$(x-2)(x+1)\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=(x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x-13=A(x+1)+B(x-2)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2)-13=A(2+1)+B(2-2)\Rightarrow\ -9=3A\ \Rightarrow\ A=-3$$

بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-1)-13=A(-1+1)+B(-1-2)\Rightarrow\ -15=-3B\ \Rightarrow\ A=5$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{5}{(x+1)}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 26):

أجزئ كل مقدار نسبي مما يأتي إلى كسور جزئية:

1) $\frac{x}{x^2-5x+6}$

$$\Longrightarrow = \frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Longrightarrow = (x-3)(x-2)\frac{x}{(x-3)(x-2)} = (x-3)(x-2)\frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Longrightarrow x = A(x-2) + B(x-3)$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$2 = A(2-2) + B(2-3) \Longrightarrow 2 = -B \Longrightarrow \boxed{B = -2}$$

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$3 = A(3-2) + B(3-3) \Longrightarrow 3 = A \Longrightarrow \boxed{A = 3}$$

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{3}{(x-3)} - \frac{2}{(x-2)}$$

2) $\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (8)

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1 \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 + 5(1)^2 + 2(1) - 8 = 0$	✓

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$$

$\times$	x^2	$6x$	8	
x	x^3	$6x^2$	$8x$	0
-1	$-x^2$	$-6x$	-8	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 - 3x - 10)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Rightarrow (x-1)(x^2 + 6x + 8) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$\Rightarrow (x-1)(x+2)(x+4) = 0$ بتحليل ثلاثي الحدود

$\Rightarrow x = 1 \quad , \quad x = -2 \quad , \quad x = -4$ بحل كل معادلة

$$= \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8} \Rightarrow = \frac{x^2 + x - 6}{(x-1)(x+2)(x+4)}$$

$$= (x-1)(x+2)(x+4)\frac{x^2 + x - 6}{(x-1)(x+2)(x+4)} \Rightarrow = (x-1)(x+2)(x+4)\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+4)}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+4)\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+4)}$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x+2)$$

بتعويض $x = -2$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow -2^2 - 2 - 6 = A(-2+2)(-2+4) + B(-2-1)(-2+4) + C(-2-1)(-2+2)$$

$$\Rightarrow -4 = 0 + B(-3)(2) + 0 \Rightarrow -4 = -6B \Rightarrow B = \frac{-4}{-6} \Rightarrow \boxed{B = \frac{2}{3}}$$

بتعويض $x = -4$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow -4^2 - 4 - 6 = A(-4+2)(-4+4) + B(-4-1)(-4+4) + C(-4-1)(-4+2)$$

$$\Rightarrow 6 = 0 + 0 + C(-5)(2) \Rightarrow 6 = 10C \Rightarrow C = \frac{6}{10} \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{5}}$$

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow 1^2 + 1 - 6 = A(1+2)(1+4) + B(1-1)(1+4) + C(1-1)(1+2)$$

$$\Rightarrow -4 = A(3)(5) + 0 + 0 \Rightarrow -4 = 15A \Rightarrow A = -\frac{4}{15} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{5}}$$

$$\frac{-\frac{4}{15}}{(x-1)} + \frac{\frac{2}{3}}{(x+2)} + \frac{\frac{3}{5}}{(x+4)} \Rightarrow = \frac{-4}{15(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} + \frac{3}{5(x+4)}$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8} \Rightarrow = \frac{-4}{15(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} + \frac{3}{5(x+4)}$$

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية، أحدهما مكرر:

مثال (2): صفحة 27:

أجزئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x^2 - 4x + 4)}$$ اخراج x عامل مشترك

$$= \frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x-2)(x-2)}$$ تحليل ثلاثي الحدود

$$\Rightarrow = \frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x-2)^2}$$ بالتبسيط

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر، ألاحظ أن تحليل المقام هو $x(x-2)^2$ ، وأن العامل $(x-2)$ مكرر مرتين في هذا التحليل، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $x\,,(x-2)\,,\ (x-2)^2$.

$$=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} \Longrightarrow = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-2)^2$ فإن:

$$x(x-2)^2\,\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = x(x-2)^2\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$-(0)+2(0)+4 = A(0-2)^2+B(0)(0-2)+C(0)$$

$$\Longrightarrow\ 4=4(A)\ \Longrightarrow A=1$$

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$-(2)+2(2)+4 = A(2-2)^2+B(2)(2-2)+C(2)$$

$$\Longrightarrow\ 4=2C\ \Longrightarrow C=2$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$-(1)^2+2(1)+4 = (1)(1-2)^2+B(1)(1-2)+(2)(1)$$

$$\Longrightarrow\ 5=3-B\ \Longrightarrow 2=-B\ \Longrightarrow B=-2$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{1}{x}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

أتحقق من فهمي (صفحة 28):

أجزئ $\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2} = \frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x^2(x-2)\left(\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}\right) = x^2(x-2)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2+8x+4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة:

$$(0)^2 + 8(0) + 4 = A(0)\big((0)-2\big) + B\big((0)-2\big) + C(0)^2$$

$$\Rightarrow\ 4 = 0 - 2B + 0 \Rightarrow -2B = 4 \ \Rightarrow\ \boxed{B=-2}$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$(2)^2 + 8(2) + 4 = A(2)\big((2)-2\big) + B\big((2)-2\big) + C(2)^2$$

$$\Rightarrow\ 24 = 0 + 0 + 4C \ \Rightarrow 4C = 24 \ \Rightarrow\ \boxed{C=6}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$(1)^2 + 8(1) + 4 = A(1)\big((1)-2\big) - 2\big((1)-2\big) + 6(1)^2$$

$$\Rightarrow\ 13 = -A + 2 + 6 \ \Rightarrow -A + 8 = 13 \Rightarrow -A = 5 \ \Rightarrow\ \boxed{A=-5}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2} = \frac{-5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{(x-2)}$$

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدهما تربيعي غير مكرر، ولا يمكن تحليله:

مثال (3): صفحة 29:

أجزئ $\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$ إلى كسور جزئية.

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً ، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً .

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)} \Rightarrow = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$(x+1)(x^2+9)\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)} \Rightarrow = (x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2-3x+16 \ = A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2-3(-1)+16 \ = A((-1)^2+9)+(B(-1)+C)\big((-1)+1\big)$$

$$20 \ = 10A \Rightarrow A=2$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$(0)^2-3(0)+16 \ = A((0)^2+9)+(B(0)+C)\big((0)+1\big)$$

$$16 \ = 18+C \ \Rightarrow \ C=-2$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$(1)^2-3(1)+16 \ = 2((1)^2+9)+\big(B(1)+(-2)\big)\big((1)+1\big)$$

$$14 \ = 2B+16 \quad \Rightarrow -2=2B \quad \Rightarrow B=-1$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{2}{x+1}+\frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

أتحقق من فهمي (صفحة 30):

أجزئ $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً ، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً .

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} \Rightarrow = \frac{A}{(x+5)} + \frac{(Bx+C)}{(x^2+3)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$(x+5)(x^2+3)\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} \Rightarrow = (x+5)(x^2+3)\left(\frac{A}{(x+5)} + \frac{Bx+C}{(x^2+3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$21-7x = A(x^2+3) + (Bx+C)(x+5)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-5$ في المعادلة الناتجة:

$$21-7(-5) = A((-5)^2+3) + (B(-5)+C)\big((-5)+5\big)$$

$$21+35 = 28A \Rightarrow 56 = 28A \Rightarrow \boxed{A=2}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$21-7(0) = A((0)^2+3) + (B(0)+C)\big((0)+5\big)$$

$$21 = 3A+5C \Rightarrow 21 = 3(2)+5C \Rightarrow 21 = 6+5C \Rightarrow 5C = 15 \Rightarrow \boxed{C=3}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$21-7(1) = 2(1^2+3) + (B(1)+3)(1+5)$$

$$14 = 8 + (B+3)(6) \Rightarrow 14 = 8 + (6B+18) \Rightarrow 14 = 8+6B+18$$

$$\Rightarrow 14 = 8+6B+18 \Rightarrow 6B = -12 \Rightarrow \boxed{B=-2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{2}{(x+5)} + \frac{-2x+3}{(x^2+3)}$$

تجزئة مقدار نسبي، درجة كثير الحدود في بسطه مساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها:

مثال (4): صفحة 31:

أجزئ $\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ إلى كسور جزئية.

بما أن درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline z^2+6x-16 & \quad 2\,x^2+13x+6 \\ & (-)\ \ 2x^2+12x-32 \\ \hline & \qquad\quad x+38 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 2 ، والباقي $x+38$ ومنه، فإن:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} \quad \Rightarrow \ = 2+\frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة الثانية: أحلل مقام باقي القسمة تحليلاً كاملاً، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم اكتب رمزاً في بسط كل منهما:

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16}=\frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)}=\frac{A}{x+8}+\frac{B}{x-2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x+8)(x-2)$ فإن:

$$(x+8)(x-2)\frac{x+38}{(x+8)(x-2)}=(x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8}+\frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x+38 \ = A(x-2)+(x+8)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -8$ في المعادلة الناتجة:

$$-8+38 = A(-8-2)+B(-8+8) \Rightarrow 30 = -10A \Rightarrow A = -3$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$2+38 = A(2-2)+B(2+8) \Rightarrow 40 = 10B \Rightarrow B = 4$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في =الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2+\frac{-3}{x+8}+\frac{4}{x-2}$$

أتحقق من فهمي (صفحة 32):

أجزئ $\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$ إلى كسور جزئية.

بما أن درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ z^2+x & 3x^2+12x+4 \\ & (-)\ 3x^2+3x \\ \hline & \quad 9x+4 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 3 ، والباقي $9x+4$ ومنه، فإن:

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} \Rightarrow= 3+\frac{9x+4}{x^2+x}$$

الخطوة الثانية: أحلل مقام باقي القسمة تحليلاً كاملاً، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم اكتب رمزاً في بسط كل منهما:

$$\frac{9x+4}{x^2+x}=\frac{9x+4}{x(x+1)}$$

$$\frac{9x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x)(x+1)$ فإن:

$$x(x+1)\frac{9x+4}{x(x+1)}=x(x+1)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$9x+4 \ = A(x+1)+Bx$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$9(0)+4 \ = A(0+1)+B(0) \ \Rightarrow 4=A \ \Rightarrow \boxed{A=4}$$

بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$9(-1)+4 \ = A(-1+1)+B(-1) \ \Rightarrow -5=-B \ \Rightarrow \boxed{B=5}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في =الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}=3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x+1}$$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 32)

أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية.

1) $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين وهو $(x+2)(x+3)$ فإن:

$$(x+2)(x+3)\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=(x+2)(x+3)\left(\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x-5=A(x+3)+B(x+2)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-2)-5=A(-2+3)+B(-2+2)\Rightarrow\ -9=A\ \Rightarrow\ A=-9$$

بتعويض -3 في المعادلة الناتجة:

$$2(-3)-5=A(-3+3)+B(-3+2)\Rightarrow\ -11=-A\ \Rightarrow\ A=11$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{(x+2)}+\frac{11}{(x+3)}$$

2) $\dfrac{2x+22}{x^2+2x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{2x+22}{x^2+2x}=\frac{2x+22}{x(x+2)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيما ً مجهولة.

$$\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x+2)\left(\frac{2x+22}{x(x+2)}\right)=x(x+2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x+22=A(x+2)+Bx$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$2(0)+22=A(0+2)+B(0)\Rightarrow\ 22=2A\Rightarrow A=11$$

بتعويض $x=-2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-2)+22=A(-2+2)+B(-2)\Rightarrow\ 18=-2B\Rightarrow B=-9$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{11}{x}+\frac{-9}{(x+2)}$$

3) $\dfrac{4x-30}{x^2-8x+15}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{4x-30}{x^2-8x+15}=\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}$$ تحليل ثلاثي الحدود

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-3)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين وهو $(x-2)(x+1)$ فإن:

$$(x-5)(x-3)\,\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=(x-5)(x-3)\left(\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$4x-30=A(x-3)+B(x-5)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=5$ في المعادلة الناتجة:

$$4(5)-30=A(5-3)+B(5-5)\Rightarrow\ -10=2A\ \Rightarrow\ A=-5$$

بتعويض $x=3$ في المعادلة الناتجة:

$$4(3)-30=A(3-3)+B(3-5)\Rightarrow\ -18=-2B\ \Rightarrow\ B=9$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{-5}{(x-5)}+\frac{9}{(x-3)}$$

4) $\dfrac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)} \Rightarrow = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$(x-2)(x^2+1)\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)} \Rightarrow = (x-2)(x^2+1)\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$6x^2-7x+10 \;=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$6(2)^2-7(2)+10 \;=A((2)^2+1)+(B(2)+C)(2-2)$$

$$24-14+10 \;=10A \Rightarrow 20 \;=5A \Rightarrow \boxed{A=4}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$6(0)^2-7(0)+10 \;=4((0)^2+1)+(B(0)+C)(0-2)$$

$$10 \;=-2C \Rightarrow 10 \;=4-2C \Rightarrow 2C=4-10 \Rightarrow 2C=-6 \Rightarrow \boxed{C=-3}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$6(1)^2-7(1)+10 \;=4((1)^2+1)+(B(1)-3)(1-2)$$

$$9 \;=8+(B-3)(-1) \Rightarrow \;9 \;=8-B+3 \;\Rightarrow B=11-9 \Rightarrow \boxed{B=2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)} \Rightarrow = \frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{(x^2+1)}$$

5) $\dfrac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(1-2x)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$x(x-1)(1-2x)\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} \Rightarrow = x(x-1)(1-2x)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(1-2x)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2-3x-4x^2 = A(x-1)(1-2x) + Bx(1-2x) + Cx(x-1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$2-3(1)-4(1)^2 = A(1-1)(1-2(1)) + B(1)(1-2(1)) + C(1)(1-1)$$

$$2-7 = 0 + (-B) + 0 \Rightarrow -5 = -B \Rightarrow \boxed{B = 5}$$

بتعويض $x = 0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$2-3(0)-4(0)^2 = A(0-1)(1-2(0)) + 5(0)(1-2(0)) + C(0)(0-1)$$

$$2 = -A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 2$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$2-3(2)-4(2)^2 = -2(2-1)(1-2(2)) + 5(2)(1-2(2)) + C(2)(2-1)$$

$$2-6-16 = 6-30+2C \Rightarrow -20 = -24+2C \Rightarrow 2C = 4 \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{(x-1)} + \frac{2}{(1-2x)}$$

6) $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x}{8x^2-10x+3}=\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}$$ تحليل ثلاثي الحدود

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{A}{(4x-3)}+\frac{B}{(2x-1)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين وهو $(x-2)(x+1)$ فإن:

$$(4x-3)(2x-1)\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=(4x-3)(2x-1)\left(\frac{A}{(4x-3)}+\frac{B}{(2x-1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x=A(2x-1)+B(4x-3)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$\frac{1}{2}=A\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)+B\left(4\left(\frac{1}{2}\right)-3\right)\Rightarrow\frac{1}{2}=A(1-1)+B(2-3)\Rightarrow\frac{1}{2}=-B\Rightarrow\boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

بتعويض $4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$ في المعادلة الناتجة:

$$\frac{1}{2}=A\left(2\left(\frac{3}{4}\right)-1\right)+B\left(4\left(\frac{3}{4}\right)-3\right)\Rightarrow\frac{3}{4}=A\left(\frac{3}{2}-1\right)-\frac{1}{2}(3-3)$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}=A\left(\frac{3}{2}-1\right)-\frac{1}{2}(3-3)\Rightarrow\frac{3}{4}=A\left(\frac{3}{2}-1\right)\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{2}A\Rightarrow\boxed{A=\frac{3}{2}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{\frac{3}{2}}{(4x-3)}+\frac{-\frac{1}{2}}{(2x-1)}\Rightarrow\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{3}{2(4x-3)}-\frac{1}{2(2x-1)}$$

7) $\frac{1}{2x^2-3x^2-32x-15}$

أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (15)، وهي $\pm 1 \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (6)، وهي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 32(1) - 15 = -48$	✗
-3	$P(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 32(-3) - 15 = 0$	✓

بما أن: $P(-3) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -3$ إذن $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$2x^3 - 3x^2 - 32x - 15$

$\times$	$2x^2$	$-9x$	-5
x	$2x^3$	$-9x^2$	$-5x$
3	$6x^2$	$-27x$	-15

0

ناتج القسمة يساوي $(2x^2-9x-5)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $2x^3-3x^2-32x-15=0$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow (x+3)(2x^2-9x-5)=0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Longrightarrow (x+3)(x-5)(2x+1)=0$

بحل كل معادلة $\Longrightarrow x=1 \quad , \quad x=-2 \quad , \quad x=-4$

$$=\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}\Longrightarrow=\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}\Longrightarrow=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(2x+1)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$=(x+3)(x-5)(2x+1)\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}\Longrightarrow=(x+3)(x-5)(2x+1)\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(2x+1)}$$

$$\Longrightarrow\ 1=(x+3)(x-5)(2x+1)\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(2x+1)}$$

$$\Longrightarrow\ 1=\ A(x-5)(2x+1)+B(x+3)(2x+1)+C(x+3)(x-5)$$

بتعويض $x=-3$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow\ 1=\ A(-3-5)(2(-3)+1)+B(-3+3)(2(-3)+1)+C(-3+3)(-3-5)$$

$$\Rightarrow\ 1=\ A(-8)(5)+0+0\ \Rightarrow\ 1=\ -40A\ \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{40}}$$

بتعويض $x=5$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow\ 1=\ A(5-5)(2(5)+1)+B(5+3)(2(5)+1)+C(5+3)(5-5)$$

$$\Rightarrow\ 1=\ 0+B(8)(11)+0\ \Rightarrow\ 1=\ 88B\ \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{88}}$$

بتعويض $x=\frac{1}{2}$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و Bالناتجتين: :

$$\Rightarrow\ 1 = \frac{1}{40}\left(\frac{1}{2}-5\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)+\frac{1}{88}\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)+C\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{2}-5\right)$$

$$\Rightarrow\ 1 = -\frac{9}{40}+\frac{7}{88}-\frac{63}{4}C \Rightarrow\ 1 = -\frac{99}{440}+\frac{35}{440}-\frac{63}{4}C \Rightarrow\ 1 = -\frac{64}{440}-\frac{63}{4}C$$

$$\Rightarrow\ 1 = -\frac{8}{55}-\frac{63}{4}C \Rightarrow -\frac{63}{4}C = \frac{63}{55} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{4}{55}}$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{40}}{(x+3)}+\frac{\frac{1}{88}}{(x-5)}+\frac{-\frac{4}{55}}{(2x+1)}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{40(x+3)}+\frac{1}{88(x-5)}-\frac{4}{55(2x+1)}$$

8) $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (2)، وهي $\pm1 \pm 2, \pm4$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm1, \pm2$

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $Q(x)$ هي:

الأصفار النسبية المحتملة $= \dfrac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \dfrac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{2}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 2(1)^3-(1)^2-8(1)+4 = -3$	✗
2	$P(2) = 2(1)^3-(1)^2-8(1)+4 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$2x^3 - x^2 - 8x + 4$

$\times$	$2x^2$	$3x$	-2
x	$2x^3$	$3x^2$	$-2x$
-2	$-4x^2$	$-6x$	4

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 - 9x - 5)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Longrightarrow (x-2)(2x^2+3x-2) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$\Longrightarrow (x-2)(x+2)(2x-1) = 0$ بتحليل ثلاثي الحدود

$\Longrightarrow x = 2 \quad , \quad x = -2 \quad , \quad x = \frac{1}{2}$ بحل كل معادلة

$$= \frac{9x^2 - 9x + 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4} \Longrightarrow = \frac{9x^2 - 9x + 6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$= (x-2)(x+2)(2x-1)\frac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)} \Longrightarrow = (x-2)(x+2)(2x-1)\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(2x-1)}$$

$$\Longrightarrow 9x^2 - 9x + 6 = (x-2)(x+2)(2x-1)\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(2x-1)}$$

$$\Longrightarrow 9x^2 - 9x + 6 = A(x+2)(2x-1) + B(x-2)(2x-1) + C(x-2)(x+2)$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$\Longrightarrow 9(2)^2 - 9(2) + 6 = A(2+2)(2(2)-1) + B(2-2)(2(2)-1) + C(2-2)(2+2)$$

$$\Longrightarrow 24 = 12A + 0 + 0 \Longrightarrow 12A = 24 \Longrightarrow \boxed{A = 2}$$

بتعويض $x = -2$ في المعادلة الناتجة:

$$\Rightarrow 9(-2)^2 - 9(-2) + 6 = A(-2+2)(2(-2)-1) + B(-2-2)(2(-2)-1) + C(-2-2)(-2+2)$$

$$\Rightarrow 60 = 0 + 20B + 0 \Rightarrow 20B = 60 \Rightarrow \boxed{B = 3}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و Bالناتجتين:

$$\Rightarrow 9(1)^2 - 9(1) + 6 = 2(1+2)(2(1)-1) + 3(1-2)(2(1)-1) + C(1-2)(1+2)$$

$$\Rightarrow 6 = 6 - 3 - 3C \Rightarrow 6 = 3 - 3C \Rightarrow 3 = -3C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

$$\frac{9x^2 - 9x + 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4} = \frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{1}{(2x-1)}$$

9) $\dfrac{5 + 3x - x^2}{-x^3 + 3x^2 + 4x - 12}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$= \frac{5 + 3x - x^2}{(-x^3 + 3x^2) + (4x - 12)} \Rightarrow = \frac{5 + 3x - x^2}{x^2(-x+3) - 4(-x+3)}$$

$$\Rightarrow = \frac{5 + 3x - x^2}{(x^2-4)(-x+3)} \Rightarrow = \frac{5 + 3x - x^2}{(x-2)(x+2)(3-x)} \Rightarrow = \frac{5 + 3x - x^2}{(x-2)(x+2)(3-x)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{5 + 3x - x^2}{(x-2)(x+2)(3-x)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(3-x)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-2)(x+2)(3-x)\frac{5 + 3x - x^2}{(x-2)(x+2)(3-x)} = (x-2)(x+2)(3-x)\ \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(3-x)}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$5 + 3x - x^2 = A(x+2)(3-x) + B(x-2)(3-x) + C(x-2)(x+2)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$5 + 3(2) - 2^2 = A(2+2)(3-2) + B(2-2)(3-2) + C(2-2)(2+2)$$

$$7 = 4A + 0 + 0 \Rightarrow 7 = 4A \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{7}}$$

بتعويض $x = -2$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$5 + 3(-2) - (-2)^2 = A(-2+2)(3-(-2)) + B(-2-2)(3-(-2)) + C(-2-2)(-2+2)$$

$$-5 = 0 - 20B + 0 \Rightarrow -5 = -20B \Rightarrow \frac{-20B}{-20} = \frac{-5}{-20} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$$

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$5 + 3(3) - (3)^2 = \frac{4}{7}(3+2)(3-3) + \frac{1}{4}(3-2)(3-3) + C(3-2)(3+2)$$

$$5 = 0 + 0 + 5C \Rightarrow 5 = 5C \Rightarrow \frac{5C}{5} = \frac{5}{5} \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{5 + 3x - x^2}{(x-2)(x+2)(3-x)} = \frac{\frac{4}{7}}{(x-2)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+2)} + \frac{1}{(3-x)}$$

$$= \frac{4}{7(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{(3-x)}$$

10) $\frac{(x-3)^2}{x^3 - 16x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$= \frac{(x-3)^2}{x(x^2-16)} \Rightarrow = \frac{(x-3)^2}{x(x-4)(x+4)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-4)(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x+4)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x-4)(x+4)\frac{(x-3)^2}{x(x-4)(x+4)}=x(x-4)(x+4)\ \frac{A}{x}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x-4)}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$(x-3)^2=A(x-4)(x+4)+Bx(x-4)+Cx(x+4)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$(0-3)^2=A(0-4)(0+4)+B(0)(0-4)+C(0)(0+4)$$

$$9=-16A+0+0 \Rightarrow \frac{-16A}{-16}=\frac{9}{-16} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{9}{16}}$$

بتعويض $x=4$ في المعادلة الناتجة:

$$(4-3)^2=A(4-4)(4+4)+B(4)(4-4)+C(4)(4+4)$$

$$1=0+0+32C \Rightarrow \frac{32C}{32}=\frac{1}{32} \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{32}}$$

بتعويض $x=-4$ في المعادلة الناتجة:

$$(-4-3)^2=A(-4-4)(-4+4)+B(-4)(-4-4)+C(-4)(-4+4)$$

$$49=0+32B+0 \Rightarrow 49=32B \Rightarrow \boxed{B=\frac{49}{32}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-4)(x+4)}=\frac{-\frac{9}{16}}{x}+\frac{\frac{49}{32}}{(x+4)}+\frac{\frac{1}{32}}{(x-4)}$$

$$=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$$

$$11)\quad \frac{7x-3}{x^2-8x+16}$$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{7x-3}{x^2-8x+16} \Rightarrow = \frac{7x-3}{(x-4)^2}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{7x-3}{(x-4)^2} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-4)^2\frac{7x-3}{(x-4)^2} = (x-4)^2\frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$7x-3 = A(x-4) + B$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 4$ في المعادلة الناتجة:

$$7(4)-3 = A(4-4) + B$$

$$25 = 0 + B \Rightarrow \boxed{B = 25}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمة B الناتجة:

$$7(1)-3 = A(1-4) + 25$$

$$4 = -3A + 25 \Rightarrow 3A = 21 \Rightarrow \boxed{A = 7}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{7x-3}{(x-4)^2} = \frac{7}{(x-4)} + \frac{25}{(x-4)^2}$$

$12)\quad \dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x+1)(x-2)^2 \frac{1}{(x+1)(x-2)^2} = (x+1)(x-2)^2 \; \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$1 = A(-1-2)^2 + B(-1+1)(-1-2) + C(-1+1)$$

$$1 = 9A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{9}}$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$1 = A(2-2)^2 + B(2+1)(2-2) + C(2+1)$$

$$1 = 0 + 0 + 3C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة التاتجة:

$$1 = \frac{1}{9}(1-2)^2 + B(1+1)(1-2) + \frac{1}{3}(1+1)$$

$$1 = \frac{1}{9} - 2B + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow 1 = \frac{1}{9} - 2B + \frac{6}{9} \quad \Rightarrow 1 = \frac{7}{9} - 2B$$

$$\Rightarrow 2B = \frac{7}{9} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2B = -\frac{2}{9} \quad \Rightarrow \; B = -\frac{1}{9}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{(x+1)} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x-2)} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2}$$

13) $\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x} \Rightarrow = \frac{2x^2-x-6}{x(x^2+4x+4)} \Rightarrow = \frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقامهما العوامل الخطية في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x+2)^2\,\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2} = x(x+2)^2\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x^2-x-6 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$2(0)^2-0-6 = A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0)$$

$$-6 = 4A+0+0 \Rightarrow A = -\frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{3}{2}}$$

بتعويض $x = -2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-2)^2 + 2 - 6 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$

$$4 = 0 + 0 - 2C \Rightarrow -2C = 4 \Rightarrow \boxed{C = -2}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة الناتجة:

$$2(1)^2 - 1 - 6 = -\frac{3}{2}(1+2)^2 + B(1)(1+2) + (-2)(1)$$

$$-5 = -\frac{27}{2} + 3B - 2 \Rightarrow 3B = \frac{27}{2} - 3 \Rightarrow 3B = \frac{27}{2} - \frac{6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3B = \frac{21}{2} \Rightarrow \Rightarrow \boxed{B = \frac{7}{2}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 - x - 6}{x(x+2)^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{7}{2}}{(x+2)} + \frac{-2}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-3}{2x} + \frac{7}{2(x+2)} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

14) $\frac{x-3}{x^3+3x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x-3}{x^3+3x} \Rightarrow = \frac{x-3}{x(x^2+3)}$$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x-3}{x(x^2+3)} \Rightarrow = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+3)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$x(x^2+3)\frac{x-3}{x(x^2+3)} \Rightarrow = x(x^2+3)\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x-3 \;= A(x^2+3)+(Bx+C)x$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$0-3 \;= A(0^2+3)+(B(0)+C)(0)$$

$$-3 \;= 3A+0 \Rightarrow 3A \;= -3 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

بتعويض $x=1$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$1-3 \;= (-1)(1^2+3)+(B(1)+C)(1)$$

$$-2 \;= -4+B+C \Rightarrow B+C \;= 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1) معادلة}$$

بتعويض $x=-1$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$-1-3 \;= (-1)((-1)^2+3)+(B(-1)+C)(-1)$$

$$-4 \;= -4+B-C \Rightarrow B-C \;= 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2) معادلة}$$

بجمع المعادلة رقم (1) مع المعادلة رقم (2):

$$B+C \;= 2$$

$$\underline{B-C \;= 0}$$

$$2B \;= 2 \quad \Rightarrow \boxed{B=1}$$

بتعويض قيمة $B=1$ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة C :

$$B+C \;= 2 \Rightarrow 1+C \;= 2 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x-3}{x(x^2+3)} \Rightarrow = \frac{-1}{x}+\frac{x+1}{(x^2+3)}$$

15) $\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125} \Longrightarrow = \frac{x^2+2x+40}{(x^3-5^3)} \Longrightarrow = \frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}$$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{Bx+C}{(x^2+5x+25)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$ فإن:

$$(x-5)(x^2+5x+25)\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)} = (x-5)(x^2+5x+25)\left(\frac{A}{(x-5)} + \frac{Bx+C}{(x^2+5x+25)}\right)$$

$$x^2+2x+40 = A(x^2+5x+25) + (Bx+C)(x-5)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=5$ في المعادلة الناتجة:

$$5^2+2(5)+40 = A(5^2+5(5)+25) + (B(5)+C)(5-5)$$

$$75 = 75A + 0 \Longrightarrow 75A = 75 \Longrightarrow \boxed{A=1}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$0^2+2(0)+40 = (1)(0^2+5(0)+25) + (B(0)+C)(0-5)$$

$$40 = 25-5C \Longrightarrow -5C = 15 \Longrightarrow \boxed{C=-3}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة الناتجة:

$$1^2+2(1)+40 = (1)(1^2+5(1)+25) + (B(1)-3)(1-5)$$

$$43 = 31 + (B-3)(-4) \Longrightarrow 43 = 31-4B+12 \Longrightarrow 4B = 43-43 \Longrightarrow 4B=0 \Longrightarrow \boxed{B=0}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)} = \frac{1}{(x-5)} - \frac{3}{(x^2+5x+25)}$$

16) $\dfrac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}$

بما أن درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & \quad -2 \\ \hline x^3+216 & -2x^3-30x^2+36x+216 \\ & (-)\ -2x^3 \qquad\qquad\qquad -432 \\ \hline & -30x^2+36x+648 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 3 ، والباقي $9x+4$ ومنه، فإن:

$$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216} \Rightarrow= -2+\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$$

الخطوة الثانية: أحلل مقام باقي القسمة تحليلاً كاملاً ، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم اكتب رمزاً في بسط كل منهما:

$$\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}=\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+6^3}=\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}$$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً ، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}=\frac{A}{(x+6)}+\frac{Bx+C}{(x^2-6x+36)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x)(x+1)$ فإن:

$$(x+6)(x^2-6x+36)\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)} = (x+6)(x^2-6x+36)\left(\frac{A}{(x+6)}+\frac{Bx+C}{(x^2-6x+36)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-30x^2+36x+648 = A(x^2-6x+36)+(Bx+C)(x+6)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-6$ في المعادلة الناتجة:

$$-30(-6)^2+36(-6)+648 = A((-6)^2-6(-6)+36)+(B(-6)+C)(-6+6)$$

$$-1080-216+648 = 108A+0 \Rightarrow -648 = 108A+0 \Rightarrow \boxed{A=-6}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$-30(0)^2+36(0)+648 = -6((0)^2-6(0)+36)+(B(0)+C)(0+6)$$

$$0+0+648 = -216+6C \Rightarrow 6C = 648+216 \Rightarrow 6C = 864 \Rightarrow \boxed{C=144}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة الناتجة:

$$-30(1)^2+36(1)+648 = -6((1)^2-6(1)+36)+(B(1)+144)(1+6)$$

$$-30+36+648 = -186+7B+1008 \Rightarrow 654 = 822+7B$$

$$\Rightarrow 7B = -168 \Rightarrow \boxed{B=-24}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في =الصورة الآتية:

$$\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)} = -2+\frac{-6}{(x+6)}+\frac{-24x+144}{(x^2-6x+36)}$$

$$17)\quad \frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$$

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ x^2+8x+15 & x^3+12x^2+33x+2 \\ & \underline{(-)\ x^3+8x^2+15x} \\ & 4x^2+18x+2 \\ & \underline{(-)\ 4x^2+32x+60} \\ & -14x-58 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة $x+4$ ، والباقي $-14x-58$ ومنه، فإن:

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15} \Rightarrow= x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}$$

الخطوة الثانية: أحلل مقام باقي القسمة تحليلاً كاملاً ، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

$$\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}=\frac{-14x-58}{(x+5)(x+3)}$$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{-14x-58}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{(x+5)}+\frac{B}{(x+3)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x)(x+1)$ فإن:

$$(x+5)(x+3)\frac{-14x-58}{(x+5)(x+3)} = (x+5)(x+3)\left(\frac{A}{(x+5)}+\frac{B}{(x+3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-14x-58 = A(x+3)+B(x+5)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-5$ في المعادلة الناتجة:

$$-14(-5)-58 = A(-5+3)+B(-5+5)$$

$$12 = -2A+0 \Rightarrow \Rightarrow \boxed{A=-6}$$

بتعويض $x=-3$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$-14(-3)-58 = -6(-3+3)+B(-3+5)$$

$$-16 = 0+2B \Rightarrow \Rightarrow \boxed{B=-8}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في =الصورة الآتية:

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15} = x+4+\frac{-6}{(x+5)}+\frac{-8}{(x+3)} \Rightarrow = x+4-\frac{6}{(x+5)}-\frac{8}{(x+3)}$$

18) $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x^3-2x^2+x-2 & x^5-2x^4+x^3+x+5 \\ & (-)\ x^5-2x^4+x^3-2x^2 \\ \hline & 2x^2+x+5 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة x^2 ، والباقي $2x^2+x+5$ ومنه، فإن:

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2} \Rightarrow = x^2 + \frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$$

الخطوة الثانية: أحلل مقام باقي القسمة تحليلاً كاملاً، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

$$\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{2x^2+x+5}{(x^3-2x^2)+(x-2)}$$

$$\Rightarrow = \frac{2x^2+x+5}{x^2(x-2)+(x-2)} \Rightarrow = \frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}$$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x)(x+1)$ فإن:

$$(x-2)(x^2+1)\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)} = (x-2)(x^2+1)\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x^2+x+5 \ = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2)^2+2+5 \ = A((2)^2+1)+(B(2)+C)(2-2)$$

$$8+2+5 \ = 5A+0 \ \Rightarrow 5A=15 \ \Rightarrow \boxed{A=3}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$2(0)^2+0+5 \ = 3((0)^2+1)+(B(0)+C)(0-2)$$

$$5 \ = 3-2C \ \Rightarrow -2C=2 \ \Rightarrow \boxed{C=-1}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة الناتجة:

$$2(1)^2+1+5 \ = 3((1)^2+1)+(B(1)-1)(1-2)$$

$$8 \ = 6+(B-1)(-1) \ \Rightarrow 8 \ = 6-B+1$$

$$\Rightarrow 8 \ = 6-B+1 \ \Rightarrow B \ = 7-8 \Rightarrow \boxed{B \ = -1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في =الصورة الآتية:

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2} \Rightarrow = x^2 \ + \frac{3}{(x-2)}+\frac{-x-1}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow = x^2 \ + \frac{3}{(x-2)}-\frac{x+1}{(x^2+1)}$$

19) أبين أنه يمكن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\frac{1}{2a(x+a)} - \frac{1}{2a(x-a)}$ ، حيث a عدد حقيقي.

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{1}{x^2-a^2} \Rightarrow = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} \Rightarrow = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-a)(x+a)\frac{1}{(x-a)(x+a)} = (x-a)(x+a)\ \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$1 = A(x+a) + B(x-a)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = a$ في المعادلة الناتجة:

$$1 = A(a+a) + B(a-a)$$

$$1 = A(2a) + 0 \Rightarrow 2aA = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2a}}$$

بتعويض $x = -a$ في المعادلة الناتجة:

$$1 = A(-a+a) + B(-a-a)$$

$$1 = 0 - 2aB \Rightarrow 2aB = -1 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2a}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{2a}}{(x-a)} + \frac{-\frac{1}{2a}}{(x+a)} \Rightarrow \boxed{= \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}}$$

20) إذا كان: $\frac{5x}{(x+3)^2} = \frac{p}{x+3} - \frac{3p}{(x+3)^2}$ ، فأجد قيمة p .

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{5x}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x+3)^2 \frac{5x}{(x+3)^2} = (x+3)^2 \left(\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$5x = A(x+3) + B$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 1$ $A = p$ $B = -3p$ في المعادلة الناتجة:

$$5(1) = p(1+3) + (-3p) \Rightarrow 5 = 4p - 3p \Rightarrow \boxed{5 = p}$$

21) إذا كان: $\frac{x^2+5x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{px-37}{9(x^2+2)} - \frac{p}{9(x-1)} + \frac{8p}{3(x-1)^2}$ ، فأجد قيمة p .

الخطوة الأولى: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$9(x-1)^2(x^2+2)\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = 9(x-1)^2(x^2+2)\left(\frac{px-37}{9(x^2+2)} - \frac{p}{9(x-1)} + \frac{8p}{3(x-1)^2}\right)$$

$$9(x^2+8x+7) = (px-37)(x-1)^2 - p(x-1)(x^2+2) + 24p(x^2+2)$$

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$9(1^2+8(1)+7) = (p(1)-37)(1-1)^2 - p(1-1)(1^2+2) + 24p(1^2+2)$$

$$9(16) = 0 - 0 + 24p(3) \Rightarrow 144 = 72p \Rightarrow \boxed{p = 2}$$

هندسة ميكانيكية: يستعمل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم محرك ديزل:

$$R(x)=\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}\quad ,0\le x\le 1$$

حيث x مقدار جهد المحرك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

22) أجزئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{A}{(11-7x)}+\frac{B}{(7-4x)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(11-7x)(7-4x)\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=(11-7x)(7-4x)\left(\frac{A}{(11-7x)}+\frac{B}{(7-4x)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2000(4-3x)=A(7-4x)+B(11-7x)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A,B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=\frac{11}{7}$ في المعادلة الناتجة:

$$2000\left(4-3\left(\frac{11}{7}\right)\right)=A\left(7-4\left(\frac{11}{7}\right)\right)+B\left(11-7\left(\frac{11}{7}\right)\right)$$

$$2000\left(4-\frac{33}{7}\right)=A\left(7-\frac{44}{7}\right)+B(11-11)$$

$$2000\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}A+0\ \Rightarrow\ -\frac{70000}{35}=A\ \Rightarrow \boxed{A=-2000}$$

بتعويض $x=\frac{7}{4}$ في المعادلة الناتجة وقيمة $A=-2000$:

$$2000\left(4-3\left(\frac{7}{4}\right)\right)=-2000\left(7-4\left(\frac{7}{4}\right)\right)+B\left(11-7\left(\frac{7}{4}\right)\right)$$

$$2000\left(4-\frac{21}{4}\right)=-2000(7-7)+B\left(11-\frac{49}{4}\right)$$

$$2000\left(4-\frac{21}{4}\right)=16B\ \Rightarrow 2000\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}B\ \Rightarrow \boxed{B=2000}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{(11-7x)}+\frac{2000}{(7-4x)}=\frac{2000}{(7-4x)}-\frac{2000}{(11-7x)}$$

23) إذا كان $R(x)$ يمثل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كلاً من الاقترانين، مستعيناً بالسؤال السابق.

اقتران أعلى درجة حرارة $\frac{2000}{7-4x}$ ، اقتران أدنى درجة حرارة هو $\frac{2000}{11-7x}$

24) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

يمثل الاقتران $v=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين سرعة سيارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يمكن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحداهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1) ؟

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(t+2)(t+1)(t-1)\left(\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t+1)(t-1)}\right)=(t+2)(t+1)(t-1)\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$t^2-5t+6=A(t+1)(t-1)+B(t+2)(t-1)+C(t+2)(t+1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B. C$ باستعمال التعويض.

بتعويض $t=-2$ في المعادلة الناتجة:

$$(-2)^2-5(-2)+6=A(-2+1)(-2-1)+B(-2+2)(-2-1)+C(-2+2)(-2+1)$$

$$4+10+6=A(-2+1)(-2-1)+0+0 \Longrightarrow 20=A(-2+1)(-2-1)$$

$$\Longrightarrow 20=A(-1)(-3) \quad \Longrightarrow 20=3A \quad \Longrightarrow \boxed{A=\frac{20}{3}}$$

بتعويض $t = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2 - 5(-1) + 6 = A(-1+1)(-1-1) + B(-1+2)(-1-1) + C(-1+2)(-1+1)$$

$$1 + 5 + 6 = 0 + B(1)(-2) + 0 \Rightarrow 12 = -2B \Rightarrow \boxed{B = -6}$$

بتعويض $t = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$(1)^2 - 5(1) + 6 = A(1+1)(1-1) + B(1+2)(1-1) + C(1+2)(1+1)$$

$$1 - 5 + 6 = 0 + 0 + 6C \Rightarrow 2 = 6C \Rightarrow C = \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t+1)(t-1)} = \frac{\frac{20}{3}}{t+2} + \frac{-6}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}}{t-1}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{-6(t-1)}{(t+1)(t-1)} + \frac{\frac{1}{3}(t+1)}{(t+1)(t-1)} \Rightarrow = \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{-6(t-1) + \frac{1}{3}(t+1)}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{-6t + 6 + \frac{t}{3} + \frac{1}{3}}{t^2+1} \Rightarrow = \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{\frac{-18t}{3} + \frac{19}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{3}}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{\frac{-17t}{3} + \frac{19}{3}}{t^2+1}$$

مهارات التفكير العليا:

تحد: أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئي:

25) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^4}$

$$= \frac{x^3}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} - \frac{4x}{x^4} + \frac{3}{x^4} \Rightarrow = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

26) $\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-2)^3\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=(x-2)^3\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}++\frac{C}{(x-2)^3}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x^2+6x-5=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B. C$ باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2)^2+6(2)-5=A(2-2)^2+B(2-2)+C$$

$$\Rightarrow\ 8+12-5=0+0+C\ \Rightarrow \boxed{C=15}$$

بتعويض $x=1$ وقيمة $C=15$ في المعادلة الناتجة:

$$2(1)^2+6(1)-5=A(1-2)^2+B(1-2)+15$$

$$2+6-5=A-B+15\ \Rightarrow\ 3=A-B+15$$

$\Rightarrow A-B=-12$ .... (1) معادلة رقم

بتعويض $x=-1$ وقيمة $C=15$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-1)^2+6(-1)-5=A(-1-2)^2+B(-1-2)+15$$

$$2-6-5=9A-3B+15\ \Rightarrow\ -9=9A-3B+15$$

$\Rightarrow 9A-3B=-24$ .... (2) معادلة رقم

اضرب المعادلة رقم (1) بـ 3 وأطرحها من المعادلة رقم (2)

$$(A - B = -12) \times 3 \implies 3A - 3B = -36$$

$9A - 3B = -24$ ………… (2) معادلة رقم

$(-)$ $3A - 3B = -36$ ………… (1) معادلة رقم

$$6A = 12 \implies \boxed{A = 2}$$

أعوض قيمة $A = 2$ في المعادلة رقم (1)

$$2 - B = -12 \implies \boxed{B = 14}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 + 6x - 5}{(x-2)^3} = \frac{2}{x-2} + \frac{14}{(x-2)^2} + \frac{15}{(x-2)^3}$$

27) $\dfrac{3x^3 + 12x - 20}{x^4 - 8x^2 + 16}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{3x^3 + 12x - 20}{x^4 - 8x^2 + 16} \implies = \frac{3x^3 + 12x - 20}{(x^2-4)^2} \implies = \frac{3x^3 + 12x - 20}{(x^2-4)(x^2-4)}$$

$$\implies = \frac{3x^3 + 12x - 20}{(x-2)(x+2)(x-2)(x+2)} \implies = \frac{3x^3 + 12x - 20}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{3x^3 + 12x - 20}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-2)^2(x+2)^2 \frac{3x^3 + 12x - 20}{(x-2)^2(x+2)^2} = (x-2)^2(x+2)^2 \left(\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$3x^3 + 12x - 20 = A(x-2)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x-2)^2(x+2) + D(x-2)^2$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B. C. D$ باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -2$ في المعادلة الناتجة:

$$3(-2)^3 + 12(-2) - 20 = A(-2-2)(-2+2)^2 + B(-2+2)^2 + C(-2-2)^2(-2+2) + D(-2-2)^2$$

$$-24 - 24 - 20 = 0 + 0 + 0 + D(-2-2)^2 \Rightarrow -68 = 16D \Rightarrow D = -\frac{68}{16} \Rightarrow \boxed{D = -\frac{17}{4}}$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$3(2)^3 + 12(2) - 20 = A(2-2)(2+2)^2 + B(2+2)^2 + C(2-2)^2(2+2) + D(2-2)^2$$

$$24 + 24 - 20 = 0 + B(2+2)^2 + 0 + 0 \Rightarrow 28 = 16B \Rightarrow B = \frac{28}{16} \Rightarrow \boxed{B = \frac{7}{4}}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي D و B في المعادلة الناتجة:

$$3(1)^3 + 12(1) - 20 = A(1-2)(1+2)^2 + \frac{7}{4}(1+2)^2 + C(1-2)^2(1+2) - \frac{17}{4}(1-2)^2$$

$$3 + 12 - 20 = -9A + \frac{63}{4} + 3C - \frac{17}{4} \Rightarrow -5 = -9A + 3C + \frac{46}{4}$$

$$\Rightarrow -5 - \frac{46}{4} = -9A + 3C \Rightarrow \boxed{-\frac{66}{4} = -9A + 3C \dots\dots\dots (1) \text{ معادلة رقم}}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = -1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي D و B في المعادلة الناتجة:

$$3(-1)^3 + 12(-1) - 20 = A(-1-2)(-1+2)^2 + \frac{7}{4}(-1+2)^2 + C(-1-2)^2(-1+2) - \frac{17}{4}(-1-2)^2$$

$$-3 - 12 - 20 = -3A + \frac{7}{4} + 9C - \frac{153}{4} \Rightarrow -35 = -3A + 9C - \frac{146}{4}$$

$$\Rightarrow -35 + \frac{146}{4} = -3A + 9C \Rightarrow \boxed{\frac{6}{4} = -3A + 9C \dots\dots\dots (2) \text{ معادلة رقم}}$$

اضرب المعادلة رقم (1) بـ 3 وأطرحها من المعادلة رقم (2)

$$\left(-\frac{66}{4}=-9A+3C\right)\times 3 \Rightarrow -\frac{198}{4}=-27A+9C$$

$$\frac{6}{4}=-3A+9C \quad \dots\dots\dots\dots (2) \text{ معادلة رقم}$$

$$(-)\quad -\frac{198}{4}=-27A+9C \quad \dots\dots\dots\dots (1) \text{ معادلة رقم}$$

$$\frac{204}{4}=24A \Rightarrow 51=24A \Rightarrow A=\frac{51}{24} \Rightarrow \boxed{A=\frac{17}{8}}$$

أعوض قيمة $A=\frac{17}{8}$ في المعادلة رقم (2)

$$\frac{6}{4}=-3\left(\frac{17}{8}\right)+9C \Rightarrow \frac{6}{4}=-\frac{51}{8}+9C \Rightarrow \frac{6}{4}+\frac{51}{8}=9C \Rightarrow \frac{12}{8}+\frac{51}{8}=9C$$

$$\Rightarrow \left[\frac{63}{8}=9C\right]\times\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{\frac{7}{8}=C}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{\frac{17}{8}}{(x-2)}+\frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{7}{8}}{(x+2)}+\frac{-\frac{17}{4}}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$$

28) اكتشف الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{5x+2}{(x+3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+3}$$

أحدد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم، ثم أصححه.

الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حين أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$ ، تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو التي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$

29) تبرير: إذا كان: $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ ، فأجد قيمة كل من A و B بدلالة المتغيرين a و b ، مبررا ً إجابتي.

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيما ً مجهولة.

$$\frac{ax+b}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-1)(x+1)\frac{ax+b}{(x-1)(x+1)}=(x-1)(x+1)\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$ax+b=A(x+1)+B(x-1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة:

$$a(1)+b=A(1+1)+B(1-1)\implies a+b=2A\implies \boxed{A=\frac{a+b}{2}}$$

بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$a(-1)+b=A(-1+1)+B(-1-1)\implies -a+b=-2B\implies B=\frac{-a+b}{-2}\implies \boxed{B=\frac{a-b}{2}}$$

30) مسألة مفتوحة: اكتب اقتراناً نسبياً في صورة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطية غير مكررة.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x + 7}{2x^3 - 7x^2 + 9}$$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (9)، وهي $\pm 1 \pm 3$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm 1, \pm 2$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = 2(1)^3 - 7(1)^2 + 9 = 4$	1
✓	$P(-1) = 2(-1)^3 - 7(-1)^2 + 9 = 4 = 0$	-1

بما أن: $P(-1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -1$ إذن $(x + 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x + 1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x + 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$2x^3 - 7x^2 + 9$$

$\times$	$2x^2$	$-9x$	9	
x	$2x^3$	$-9x^2$	$9x$	0
1	$2x^2$	$-9x$	9	

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 - 9x + 9)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow = (x+1)(2x^2 - 9x + 9)$

تحليل العبارة التربيعية $2x^2 - 9x + 9$:

$$2x^2 - 9x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 \Rightarrow (x-6)(x-3) \Rightarrow \left(x - \frac{6}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{= (x-3)(2x-3)}$$

التحليل التام $\Rightarrow = (x+1)(x-3)(2x-3)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x + 7}{2x^3 - 7x^2 + 9} \Rightarrow = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x+1)(x-3)(2x-3)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{x^2 - 2x + 7}{(x+1)(x-3)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{2x-3}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x+1)(x-3)(2x-3)\frac{x^2 - 2x + 7}{(x+1)(x-3)(2x-3)} = (x+1)(x-3)(2x-3)\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{2x-3}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2 - 2x + 7 = A(x-3)(2x-3) + B(x+1)(2x-3) + C(x+1)(x-3)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B. C$ باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2 - 2(-1) + 7 = A(-1-3)(2(-1)-3) + B(-1+1)(2(-1)-3) + C(-1+1)(-1-3)$$

$$\Rightarrow 10 = A(-4)(-5) + 0 + 0 \Rightarrow 10 = 20A \Rightarrow A = \frac{10}{20} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$(3)^2 - 2(3) + 7 = A(3-3)(2(3)-3) + B(3+1)(2(3)-3) + C(3+1)(3-3)$$

$$\Longrightarrow\ 9-6+7=0+B(4)(3)+0\ \Longrightarrow 10=12B \Longrightarrow B=\frac{10}{12}\Longrightarrow \boxed{B=\frac{5}{6}}$$

بتعويض $x=1$ وقيمتي $A=\frac{1}{2}$ و $B=\frac{5}{6}$ في المعادلة الناتجة:

$$(1)^2-2(1)+7=\frac{1}{2}(1-3)(2(1)-3)+\frac{5}{6}(1+1)(2(1)-3)+C(1+1)(1-3)$$

$$\Longrightarrow\ 9+6+7=1+15+12C\ \Longrightarrow 6=1-\frac{5}{3}-4C$$

$$4C=1-\frac{5}{3}-6\Longrightarrow 4C=-\frac{5}{3}-5\Longrightarrow 4C=-\frac{20}{3}\Longrightarrow \boxed{C=-\frac{5}{3}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}=\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)}+\frac{\frac{5}{6}}{(x-3)}+\frac{-\frac{5}{3}}{(2x-3)}\Longrightarrow=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{5}{6(x-3)}-\frac{5}{3(2x-3)}$$

اختبار نهاية الوحدة:

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) باقي قسمة: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9$ على $(x + 2)$ يساوي:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 9$

$\times$	x^2	$-4x$	3
x	x^3	$-4x^2$	$3x$
2	$2x^2$	$-8x$	6

$\boxed{3}$

$\boxed{a)\ 3}$　　$b) - 1$　　$c)\ 9$　　$c)\ 27$

2) إذا كان $(x - 3)$ عاملاً من عوامل: $g(x) = 2x^3 + x^2 + px - 6$ ، فأن قيمة p هي:

بما أن $(x - 3)$ عاملاً من عوامل $g(x)$ ، فإن تعويض $g(3) = 0$

$g(3) = 2(3)^3 + 3^2 + p(3) - 6 \implies g(3) = 54 + 9 + 3p - 6 \implies g(3) = 57 + 3p$

$\implies 57 + 3p = 0 \quad \implies 3p = -57 \quad \implies p = \frac{-57}{3} \quad \implies \boxed{p = -19}$

$a) - 17$　　$b) - 3$　　$c) 10$　　$\boxed{d) - 19}$

3) إذا كان : $\frac{x-4}{x^2-5x-2k} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+k}$ ، فأن k تساوي:

الخطوة الأولى: نبدأ بتجميع الحدود في الطرف الأيمن

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+k} = \frac{2(x+k)-(x-2)}{(x-2)(x+k)} \Rightarrow \frac{2x+2k-x+2}{(x-2)(x+k)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2k+2}{(x-2)(x+k)} \Rightarrow \frac{x+2k+2}{x^2+kx-2x-2k}$$

الخطوة الثانية: إعادة كتابة المعادلة

$$\frac{x-4}{x^2-5x-2k} = \frac{x+2k+2}{x^2+kx-2x-2k}$$

الخطوة الثالثة: المقامات متساوية لذلك نقارن بين مقامي طرفي المعادلة

$$x^2-5x-2k = x^2+kx-2x-2k$$

ومنها:

$$-5x = kx-2x \Rightarrow kx = -5x+2x \Rightarrow kx = -3x \Rightarrow \boxed{k=-3}$$

$\boxed{a)-3}$ $\quad b)-2 \quad c)\ 2 \quad c)\ 3$

4) إذا كان: $\frac{5x-12}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$ ، فإن قيمة $A+B$ هي:

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{5x-12}{x^2-3x-4} = \frac{5x-12}{(x+1)(x-4)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{5x-12}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x+1)(x-4)\frac{5x-12}{(x+1)(x-4)} = (x+1)(x-4)\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$5x-12 = A(x-4) + B(x+1)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 4$ في المعادلة الناتجة:

$$5(4) - 12 = A(4-4) + B(4+1) \Rightarrow 8 = 0 + 5B$$

$$\Rightarrow 8 = 5B \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$

بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$5(-1) - 12 = A(-1-4) + B(-1+1) \Rightarrow -17 = -5A + 0$$

$$\Rightarrow -17 = -5A \Rightarrow A = \frac{-17}{-5} \Rightarrow A = \frac{17}{5}$$

$$A + B = \frac{17}{5} + \frac{8}{5} \Rightarrow = \frac{25}{5} \Rightarrow \boxed{A + B = 5}$$

$a) -12$ $b) -7$ $c)\ 3$ $\boxed{d)\ 5}$

5) إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ هو 2 ، وباقي قسمته على $(x-2)$ هو 5 ، فإن باقي قسمة $f(x)$ على $(x-1)(x-2)$ هو:

نفترض أن باقي قسمة $f(x)$ على $(x-1)(x-2)$ هو $h(x) = ax + b$

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة والباقي 2 :

$$h(x) = ax + b \Rightarrow h(1) = a(1) + b = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)\text{معادلة}$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة والباقي 5 :

$$h(x) = ax + b \Rightarrow h(2) = a(2) + b = 5 \Rightarrow \boxed{2a + b = 5} \quad \ldots\ldots\ldots (2)\text{معادلة}$$

$2a + b = 5$ .... (2) معادلة رقم

$(-)$ $a + b = 2$ .... (1) معادلة رقم

$\boxed{a = 3}$

بتعويض $a = 3$ في المعادلة رقم (1) :

$$a + b = 2 \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 3 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

بتعويض $a = 3$ و $b = -1$ في المعادلة $h(x) = ax + b$:

$$h(x) = ax + b \Rightarrow h(x) = 3x - 1$$

$a)10$ $b)\ 1 - x$ $c)\ 2x - 1$ $\boxed{d)\ 3x - 1}$

أحلل كلاً مما يأتي تحليلاً كاملاً:

6) $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (4)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (3)، وهي $\pm1, \pm3$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 3(1)^3 - 10(1)^2 - 9(1) + 4 = -12$	✗
-1	$P(-1) = 3(-1)^3 - 10(-1)^2 - 9(-1) + 4 = 0$	✓

بما أن: $P(-1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -1$ إذن $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

$\times$	$3x^2$	$-13x$	4
x	$3x^3$	$-13x^2$	$4x$
1	$3x^2$	$-13x$	4

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 - 9x + 9)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x+1)(3x^2 - 13x + 4) = 0$

$3x^2 - 13x + 4 \Rightarrow= x^2 - 13x + 12 \Rightarrow \left(x - \frac{12}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x-4)(3x-1)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x+1)(x-4)(3x-1) = 0$

$7)\ 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (6)، وهي $\pm1, \pm2, \pm3,$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (8)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8,$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8},$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 8(1)^4 + 2(1)^3 - 53(1)^2 + 37(1) - 6 = -12$	✗
-1	$P(-1) = 8(-1)^4 + 2(-1)^3 - 53(-1)^2 + 37(-1) - 6 = -90$	✗
2	$P(2) = 8(2)^4 + 2(2)^3 - 53(2)^2 + 37(2) - 6 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$

$\times$	$8x^3$	$18x^2$	$-17x$	3
x	$8x^4$	$18x^3$	$-17x^2$	$3x$
-2	$-16x^3$	$-36x^2$	$34x$	-6

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(8x^3 + 18x^2 - 17x + 3)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-2)(8x^3 + 18x^2 - 17x + 3) = 0$

الخطوة الرابعة: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود الناتج من التحليل.

أجد عوامل الحد الثابت (3)، وهي $\pm1, \pm3$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (8)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{3}{2}$.

الخطوة الخامسة: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = 8(1)^2 + 18(1)^2 - 17(1) + 3 = 12$	1
✗	$P(-1) = 8(-1)^2 + 18(-1)^2 - 17(-1) + 3 = 30$	-1
✓	$P(-3) = 8(-3)^2 + 18(-3)^2 - 17(-3) + 3 = 0$	-3

بما أن: $P(-3) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -3$ إذن $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة السادسة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$8x^3 + 18x^2 - 17x + 3$$

$\times$	$8x^2$	$-6x$	1
x	$8x^3$	$-6x^2$	x
3	$24x^2$	$-18x$	3

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(8x^2 - 6x + 1)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow (x-2)(x+3)(8x^2 - 6x + 1) = 0$

$$8x^2 - 6x + 1 = 0 \Longrightarrow= x^2 - 6x + 8 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{8}\right)\left(x - \frac{4}{8}\right) \Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (4x-1)(2x-1)$$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Longrightarrow (x-2)(x+3)(4x-1)(2x-1) = 0$

8) $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (18)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm1 \pm 2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^4 - 7(1)^3 + 13(1)^2 + 3(1) - 18 = -8$	✗
-1	$P(-1) = (-1)^4 - 7(-1)^3 + 13(-1)^2 + 3(-1) - 18 = 0$	✓

بما أن: $P(-1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -1$ إذن $(x + 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$$

$\times$	x^3	$-8x^2$	$21x$	-18
x	x^4	$-8x^3$	$21x^2$	-18
1	x^3	$-8x^2$	$21x$	-18

$\boxed{0}$

ناتج القسمة يساوي $(x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow (x + 1)(x^3 - 8x^2 + 21x - 18) = 0$

الخطوة الرابعة: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود الناتج من التحليل.

بما أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (18)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1 \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

الخطوة الخامسة: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = (1)^3 - 8(1)^2 + 21(1) - 18 = -4$	1
✗	$P(-1) = (-1)^3 - 8(-1)^2 + 21(-1) - 18 = -48$	-1
✓	$P(2) = (2)^3 - 8(2)^2 + 21(2) - 18 = 0$	2

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة السادسة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

$\times$	x^2	$-6x$	9	
x	x^3	$-6x^2$	$9x$	0
-2	$-2x^2$	$12x$	-18	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 - 6x + 9)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $\quad x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\quad \Rightarrow (x+1)(x-2)(x^2 - 6x + 9) = 0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\quad \Rightarrow (x+1)(x-2)(x-3)(x-3) = 0$

بحل كل معادلة $\quad \Rightarrow \boxed{x = -1}\ , \quad \Rightarrow \boxed{x = 2}\ , \quad \Rightarrow \boxed{x = 3}$

9) $x^3+16x^2-3x=5x^2-18x+27$

$x^3+16x^2-3x-5x^2+18x-27=0 \Rightarrow \boxed{x^3+11x^2+15x-27=0}$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بما أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (27)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm1 \pm 3, \pm9, \pm27$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1)=(1)^3+11(1)^2+15(1)-27=0$	✓

بما أن: $P(1)=0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x=1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3+11x^2+15x-27$

$\times$	x^2	$12x$	27	
x	x^3	$12x^2$	27	0
-1	$-x^2$	$-12x$	-27	

ناتج القسمة يساوي $(x^2+12x+27)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $x^3+11x^2+15x-27=0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-1)(x^2+12x+27)=0$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x-1)(x+9)(x+3)=0$

بحل كل معادلة $\Rightarrow \boxed{x=1}$, $\Rightarrow \boxed{x=-9}$, $\Rightarrow \boxed{x=-3}$

إذا كان باقي قسمة كل من المقدارين:
$mx^3+x^2-10x-6$ ، و $2x^3-4x^2+mx+8$ على $(x-2)$ متساويا ً، فأجد قيمة الثابت m .

أعوض $\boxed{x=2} \Leftarrow x-2$ في المقدار الأول $mx^3+x^2-10x-6$ لإيجاد الباقي:

$$= m(2)^3+(2)^2-10(2)-6 \Longrightarrow= 8m+4-20-6 \Longrightarrow= \boxed{8m-22}$$

أعوض $\boxed{x=2} \Leftarrow x-2$ في المقدار الثاني $2x^3-4x^2+mx+8$ لإيجاد الباقي:

$$= 2(2)^3-4(2)^2+m(2)+8 \Longrightarrow= 16-16+2m+8 \Longrightarrow= \boxed{2m+8}$$

بمساواة باقي المقدارين:

$$8m-22=2m+8 \Rightarrow 8m-2m=8+22 \Rightarrow 6m=30 \Rightarrow \boxed{m=5}$$

أجزئ كلا ً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

11) $\dfrac{6}{(x+3)(x+1)}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيما ً مجهولة.

$$\frac{6}{(x+3)(x+1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x+3)(x+1)\frac{6}{(x+3)(x+1)}=(x+3)(x+1)\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$6=A(x+1)+B(x+3)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة:

$$6=A(-1+1)+B(-1+3) \quad \Rightarrow 6=2B \quad \Rightarrow \boxed{B=3}$$

بتعويض $x=-3$ في المعادلة الناتجة:

$$6=A(-3+1)+B(-3+3) \quad \Rightarrow 6=-2A \quad \Rightarrow \boxed{A=-3}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{6}{(x+3)(x+1)}=\frac{-3}{x+3}+\frac{3}{x+1} \quad \Rightarrow =\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+3}$$

12) $\dfrac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x} \Rightarrow = \frac{5x^2-6}{x(x^2-2x+1)} \Rightarrow = \frac{5x^2-6}{x(x-1)^2}$$

ملاحظة مهمة: التحقق من أن العبارة التربيعية قابلة للتحويل إلى قوس مرفوع لتربيع:

يجب أن تكون العبارة التربيعية عبارة من ثلاثة حدود، حيث يكون الحد الأول والثالث مربع كامل، والحد الأوسط يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث.

1) تحديد الجذر التربيعي للحد الأول: $\sqrt{x^2} \Rightarrow = x$

2) تحديد الجذر التربيعي للحد الثالث: $\sqrt{1} \Rightarrow = 1$

3) الحد الأوسط : يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث: $2 \times x \times 1 = 2x$

4) إذا كانت إشارة الحد الأوسط موجبة، فإن القوس سيكون (جذر الحد الأول + جذر الحد الثالث)^2

5) إذا كانت إشارة الحد الأوسط سالبة، فإن القوس سيكون (جذر الحد الأول - جذر الحد الثالث)^2

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثل قيماً مجهولة.

$$\frac{5x^2-6}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x-1)^2\,\frac{5x^2-6}{x(x-1)^2} = x(x-1)^2\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$5x^2-6 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$5(0)^2-6 = A(0-1)^2 + B(0)(0-1) + C(0) \quad \Rightarrow \boxed{A=-6}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة:

$$5(1)^2-6 = A(1-1)^2 + B(1)(1-1) + C(1)$$

$$-1 = 0 + 0 + C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة ، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$5(-1)^2 - 6 = -6(-1-1)^2 + B(-1)(-1-1) - 1(-1)$$

$$-1 = -24 + 2B + 1 \Rightarrow 2B = -1 - 1 + 24 \Rightarrow 2B = 22 \Rightarrow \boxed{B = 11}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{5x^2 - 6}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{-6}{x} + \frac{11}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

13) $\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x}$

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2 - 2x & 3x^2 + x - 4 \\ & (-)\ 3x^2 - 6x \\ \hline & \quad 7x - 4 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 3 ، والباقي $7x - 4$ ومنه، فإن:

$$\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x} \Rightarrow = 3 + \frac{7x - 4}{x^2 - 2x}$$

الخطوة الثانية: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{7x - 4}{x^2 - 2x} = \frac{7x - 4}{x(x-2)}$$

الخطوة الثالثة: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{7x-4}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}$$

الخطوة الرابعة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x-2)\frac{7x-4}{x(x-2)}=x(x-2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$7x-4=A(x-2)+Bx$$

الخطوة الخامسة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$7(0)-4=A(0-2)+B(0)\Rightarrow -4=-2A\Rightarrow \boxed{A=2}$$

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$7(2)-4=A(2-2)+B(2)\Rightarrow 10=2B\Rightarrow \boxed{B=5}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}\Rightarrow =3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x-2}$$

14) $\dfrac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}=\frac{4x^2-x-2}{x^2(x^2+2)}$$

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{4x^2-x-2}{x^2(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x^2(x^2+2)\left(\frac{4x^2-x-2}{x^2(x^2+2)}\right)=x^2(x^2+2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$4x^2-x-2=Ax(x^2+2)+B(x^2+2)+(Cx+D)x^2$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B, C, D.$ باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$4(0)^2-0-2=A(0)((0)^2+2)+B((0)^2+2)+(C(0)+D)(0)^2$$

$$-2=0+2B+0 \quad \Rightarrow 2B=-2 \quad \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمة B في المعادلة الناتجة:

$$4(1)^2-1-2=A(1)((1)^2+2)+(-1)((1)^2+2)+(C(1)+D)(1)^2$$

$1=3A-3+C+D \Rightarrow 4=3A+C+D$ .... معادلة رقم (1)

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=-1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمة B في المعادلة الناتجة:

$$4(-1)^2+1-2=A(-1)((-1)^2+2)+(-1)((-1)^2+2)+(C(-1)+D)(-1)^2$$

$3=-3A-3-C+D \Rightarrow 6=-3A-C+D$ .... معادلة رقم (2)

بجمع المعادلتين (1) و (2) :

$$\begin{array}{rl} & 4=3A+C+D \\ (+) & \underline{6=-3A-C+D} \\ & 10=2D \quad \Rightarrow \boxed{D=5} \end{array}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=2$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمة B و D في المعادلة الناتجة:

$$4(2)^2-2-2=A(2)((2)^2+2)+(-1)((2)^2+2)+(C(2)+5)(2)^2$$

$12=12A-6+8C+20 \Rightarrow -2=12A+8C$ .... معادلة رقم (3)

بتعويض $D=5$ في المعادلة رقم (2) :

$$6 = -3A - C + 5 \implies 1 = -3A - C$$

بضرب طرفي المعادلة الناتجة في 4 :

$$[1 = -3A - C\,] \times 4 \implies 4 = -12A - 4C$$

ومن ثم جمعها مع المعادلة رقم (3) :

$$\begin{array}{r} 4 = -12A - 4C \\ \underline{(+)\ -2 = 12A + 8C} \end{array}$$

$$2 = 4C \implies \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

بتعويض قيمة $C = \frac{1}{2}$ في إحدى المعادلتين:

$$4 = -12A - 4\left(\frac{1}{2}\right) \implies 4 = -12A - 2 \implies 6 = -12A \implies \boxed{A = -\frac{1}{2}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{4x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}x + 5}{x^2 + 2} \implies \frac{-1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x + 10}{2(x^2 + 2)}$$

15) إذا كان: $\frac{7x-5}{(x-a)(x-3)} = -\frac{9}{x-a} + \frac{b}{x-3}$ ، فأجد قيمة كل من: a و b .

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{7x - 5}{(x - a)(x - 3)} = \frac{A}{(x - a)} + \frac{B}{(x - 3)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x - a)(x - 3)\frac{7x - 5}{(x - a)(x - 3)} = (x - a)(x - 3)\left(\frac{A}{(x - a)} + \frac{B}{(x - 3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$7x - 5 = A(x - 3) + B(x - a)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$7(3) - 5 = A(3 - 3) + B(3 - a)$$
$$16 = 0 + B(3 - a) \implies 16 = 3B - aB$$

16) إذا كان العدد (-2) هو أحد حلول المعادلة: $x^3+5x^2+5x-2=0$ ، فأجد مجموع حلولها الأخرى.

بما أن العدد (-2) أحد حلول المعادلة إذن $(x+2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3+5x^2+5x-2=0$

$\times$	x^2	$3x$	-1
x	x^3	$3x^2$	$-x$
2	$2x^2$	$6x$	-2

0

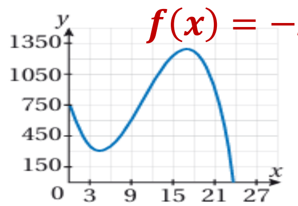
ناتج القسمة يساوي (x^2+3x-1) ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$x^3+5x^2+5x-2=0$ **المعادلة الأصلية**

$\Longrightarrow (x+2)(x^2+3x-1)=0$ **التحليل باستعمال القسمة**

17) استعمل التمثيل البياني المجاور للاقتران: $f(x)=-x^3+32x^2-224x+768$

لأحلله تحليلاً كاملاً.



من الشكل $x=24 \Longrightarrow x-24$

بما أن العدد (24) أحد حلول المعادلة إذن $(x-24)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-24)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$f(x)=-x^3+32x^2-224x+768$

$\times$	$-x^2$	$8x$	-32
x	$-x^3$	$8x^2$	$-32x$
-24	$24x^2$	$-192x$	768

0

ناتج القسمة يساوي $(-x^2+8x-32)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$f(x)=-x^3+32x^2-224x+768$ **المعادلة الأصلية**

$\Longrightarrow f(x)=(x-24)(-x^2+8x-32)$ **التحليل باستعمال القسمة**

18) يريد حداد أن يصنع خزان ماء على هيئة متوازي مستطيلات، بحيث يزيد طوله $1m$ على مثلي عرضه، ويزيد ارتفاعه $1m$ على عرضه، ويكون حجمه $30\ m^3$ ، كم متراً مربعاً من الحديد يلزمه لصنع خزان الماء؟

نفترض عرض الخزان x ، فيكون طوله $2x+1$ وارتفاعه $x+1$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $\Rightarrow V = xyh$

$V = x(2x+1)(x+1) \Rightarrow V = x(2x^2+2x+x+1)$

$\Rightarrow 30 = 2x^3+2x^2+x^2+x \Rightarrow 2x^3+2x^2+x^2+x-30=0$

إذن المعادلة الناتجة هي : $P(x) = 2x^3+3x^2+x-30$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (30)، وهي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (8)، وهي $\pm1, \pm2,$

الأصفار النسبية المحتملة = $\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2},$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 2(1)^3+3(1)^2+1-30=-24$	✗
2	$P(2) = 2(2)^3+3(2)^2+2-30=0$	✓

بما أن: $P(2)=0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x=2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) = 2x^3+3x^2+x-30$

×	$2x^2$	$7x$	15	
x	$2x^3$	$7x^2$	$15x$	0
-2	$-4x^2$	$-14x$	-30	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 12x + 27)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow (x-2)(2x^2 + 7x + 15) = 0$

العبارة التربيعية مميزها سالب وبالتالي لا يحلل $b^2 - 4ac \Rightarrow 7^2 - 4(2)(15) = -71$

بحل كل معادلة $\Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$

إذن عرض الخزان $x = 2$ ، فيكون طوله $2(2) + 1 \Longrightarrow \boxed{y = 5}$ ، وارتفاعه $2 + 1 \Longrightarrow \boxed{h = 3}$

المطلوب: كم متراً مربعاً من الحديد يلزمه لصنع خزان الماء إذن نقوم بحساب المساحة الكلية:

مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية = المساحة الكلية

$$SA = 2h(x+y) + 2(xy)$$

مساحة الحديد اللازم $SA = 2(3)(2+5) + 2(2\times 5) \Longrightarrow SA = 42 + 20 \Longrightarrow \boxed{SA = 62\ m^2}$

كتاب التمارين

الوحدة الأولى / الاقترانات والمقادير الجبرية

اختبر معلوماتي بحل التدريبات أولاً، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة استعين بالمثال المعطى.

قسمة كثيرات الحدود:

أجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1) $3x^3 - 6x^2 + 9x - 5 \div (x-4)$

$$3x^2 + 6x + 33$$

$$x - 4 \;\Big|\; 3x^3 - 6x^2 + 9x - 5$$

$$(-)\; 3x^3 - 12x^2$$

$$6x^2 + 9x - 5$$

$$(-) 6x^3 - 24x$$

$$33x - 5$$

$$(-)\; 33x - 132x$$

$$127$$

إذن ناتج القسمة $3x^2 + 6x + 33$ ، والباقي 127

2) $8x^4 + 6x^2 - 11x + 7 \div (2x+5)$

$$4x^3 - 10x + 28x - 75.5$$

$$2x + 5 \;\Big|\; 8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 11x + 7$$

$$(-)\; 8x^4 + 20x^3$$

$$-20x^3 + 6x^2 - 11x + 7$$

$$(-) - 20x^3 - 50x^2$$

$$56x^2 - 11x + 7$$

$$(-) 56x^2 + 140x$$

$$-151x + 7$$

$$(-) - 151x^2 - 377.5$$

$$384.5$$

إذن ناتج القسمة $4x^3 - 10x + 28x - 75.5$ ، والباقي 384.5

مثال : أجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي: $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 9 \\
\hline
x^2 - 3x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 9x - 5 \\
 & (-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
\hline
 & 9x^2 + 6x - 5 \\
 & (-)\ 9x^3 - 27x + 9 \\
\hline
 & 33x - 14
\end{array}
$$

إذن ناتج القسمة $3x + 9$ ، والباقي $33x - 14$

$$\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x} \Rightarrow = 3 + \frac{7x - 4}{x^2 - 2x}$$

تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

1) المعادلات التربيعية ثلاثة أنواع:

النوع الأول : لها حلان حقيقيان وهي التي يكون مميزها موجب $b^2 + 4ac \geq 0$.

النوع الثاني : لها حل واحد حقيقي وهي التي يكون مميزها يساوي صفر $b^2 + 4ac = 0$.

النوع الثالث : ليس لها حل حقيقي وهي التي يكون مميزها عدداً سالباً $b^2 + 4ac < 0$.

أحدد عدد حلول كل من المعادلات الآتية:

3) $x^2 + 6x - 7 = 0$

$a = 1 \quad , b = 6 \quad , c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 6^2 - 4(1)(-7) \Rightarrow 36 + 28 = 64$

قيمة المميز تساوي 64 (موجبة) ،إذن يوجد حلان حقيقيان لهذه المعادلة.

4) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1 \quad , b = -4 \quad , c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(4) \Rightarrow 16 - 16 = 0$

قيمة المميز تساوي 0 (صفر) ،إذن يوجد حل حقيقي واحد لهذه المعادلة.

5) $x^2 - 2x + 7 = 0$

$a = 1 \quad , b = -2 \quad , c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac \implies (-2)^2 - 4(1)(7) \implies 4 - 28 = -24$

قيمة المميز تساوي -24 (سالبة) ،إذن لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة.

مثال: أحدد عدد حلول كل من المعادلات الآتية:

$x^2 + x + 4 = 0$

أحدد قيم المعاملات، ثم أعوضها في صيغة المميز:

$a = 1 \quad , b = 1 \quad , c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \implies (1)^2 - 4(1)(4) \implies 1 - 16 = -15$

قيمة المميز تساوي -15 (سالبة) ،إذن لا يوجد حلول حقيقية لهذه للمعادلة التربيعية.

حل المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

6) $x^2 - 3x = 0$

$x^2 - 3x = 0 \implies x(x-3) = 0 \implies$ إما $\boxed{x = 0}$ أو $x - 3 = 0 \implies \boxed{x = 3}$

7) $8x^2 = -12x$

$8x^2 = -12x \implies 8x^2 + 12x = 0 \implies 4x(2x+3) = 0$

$\implies$ إما $4x = 0 \implies \boxed{x = 0}$ أو $2x + 3 = 0 \implies 2x = -3 \implies \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

8) $4x^2 + 9x = 0$

$4x^2 + 9x = 0 \implies x(4x+9) = 0 \implies$ إما $\boxed{x = 0}$ أو $4x + 9 = 0$

$\implies 4x = -9 \implies \boxed{x = -\frac{9}{4}}$

9) $7x^2 = 6x$

$7x^2 = 6x \implies 7x^2 - 6x = 0 \implies x(7x-6) = 0$

$\implies$ إما $\boxed{x = 0}$ أو $7x - 6 = 0 \implies 7x = 6 \implies \boxed{x = \frac{6}{7}}$

مثال: أحل المعادلة: $6x^2 = 20x$

$6x^2 = 20x \implies 6x^2 - 20x = 0 \implies 2x(3x-10) = 0$

$\implies$ إما $2x = 0 \implies \boxed{x = 0}$ أو $3x - 10 = 0 \implies 3x = 10 \implies \boxed{x = \frac{10}{3}}$

إذن الجذرين هما: $0, \frac{10}{3}$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

10) $x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x-5)(x+3) = 0 \implies \boxed{x = 5}$, $\boxed{x = -3}$

11) $t^2 - 8t + 16 = 0$

$(t-4)^2 = 0 \implies t = 4$

12) $x^2 - 18x = -32$

$x^2 - 18x + 32 = 0 \implies (x-16)(x-2) = 0 \implies \boxed{x = 16}$, $\boxed{x = 2}$

13) $x^2 + 2x = 24$

$x^2 + 2x - 24 = 0 \implies (x+6)(x-4) = 0 \implies \boxed{x = -6}$, $\boxed{x = 4}$

14) $x^2 = 17x - 72$

$x^2 - 17x + 72 = 0 \implies (x-9)(x-8) = 0 \implies \boxed{x = 9}$, $\boxed{x = 8}$

15) $x^2 + 5x + 4 = 0$

$x^2 + 5x + 4 = 0 \implies (x+4)(x+1) = 0 \implies \boxed{x = -4}$, $\boxed{x = -1}$

16) $s^2 + 20s + 100 = 0$

$(s+10)^2 = 0 \implies s = -10$

$17)\ y^2+8y=20$

$y^2+8y-20=0 \Rightarrow (y+10)(y-2)=0 \ \Rightarrow \boxed{y=-10}\ ,\ \boxed{y=2}$

$18)\ m^2-12m+32=0$

$m^2-12m+32=0 \Rightarrow (m-8)(m-4)=0 \ \Rightarrow \boxed{m=8}\ ,\ \boxed{m=4}$

مثال: أحل كلاً من المعادلات الآتية:

$a)\ x^2+6x+8=0$

$x^2+6x+8=0 \Rightarrow (x+4)(x+2)=0 \ \Rightarrow \boxed{x=-4}\ ,\ \boxed{x=-2}$

$\text{b})\ x^2+5x=6$

$x^2+5x-6=0 \Rightarrow (x+6)(x-1)=0 \ \Rightarrow \boxed{x=-6}\ ,\ \boxed{x=1}$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية: $ax^2+bx+c=0$

$19)\ 24x^2-19x+2=0$

$24x^2-19x+2=0 \Rightarrow= x^2-19x+48=0 \Rightarrow (x-16)(x-3)=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{16}{24}\right)\left(x-\frac{3}{24}\right) \Rightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}}\ ,\ \boxed{x=\frac{1}{8}}$

$20)\ 18t^2+9t+1=0$

$18t^2+9t+1=0 \Rightarrow= t^2+9t+18=0 \Rightarrow (t+6)(t+3)=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{6}{18}\right)\left(x+\frac{3}{18}\right) \Rightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}\ ,\ \boxed{x=-\frac{1}{6}}$

$21)\ \ 5x^2+8x+3=0$

$5x^2+8x+3=0 \Rightarrow= x^2+8x+15=0 \Rightarrow (x+5)(x+3)=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{5}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right) \Rightarrow (x+1)\left(x+\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{x=-1}\ ,\ \boxed{x=-\frac{3}{5}}$

$22)\ 5x^2-9x-2=0$

$5x^2-9x-2=0 \Rightarrow= x^2-9x-10=0 \Rightarrow (x-10)(x+1)=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{10}{5}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right) \Rightarrow (x-2)\left(x+\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \boxed{x=2}\ ,\ \boxed{x=-\frac{1}{5}}$

$23)\ \ 4t^2 - 4t - 35 = 0$

$4t^2 - 4t - 35 = 0 \Longrightarrow (2t-7)(2t+5) = 0$

$2t - 7 = 0 \Longrightarrow 2t = 7 \Longrightarrow \boxed{t = \frac{7}{2}}\ ,\quad 2t + 5 = 0 \Longrightarrow\ 2t = -5 \Longrightarrow \boxed{t = -\frac{5}{2}}$

$24)\ \ 6x^2 + 15x - 9 = 0$

$6x^2 + 15x - 9 = 0\ \ \Longrightarrow\ (6x-3)(x+3) = 0$

$6x - 3 = 0 \Longrightarrow 6x = 3\ \Longrightarrow x = \frac{3}{6}\ \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}\ ,\quad x + 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -3}$

$25)\ 28\,s^2 - 85s + 63 = 0$

$28\,s^2 - 85s + 63 = 0\ \ \Longrightarrow\ (4s-7)(7s-9) = 0$

$4s - 7 = 0\ \Longrightarrow 4s = 7\ \ \Longrightarrow \boxed{s = \frac{7}{4}}\ ,7s - 9 = 0\ \Longrightarrow 7s = 9\ \ \Longrightarrow \boxed{s = \frac{9}{7}}$

$26)\ \ 9d^2 - 24d - 9 = 0$

$9d^2 - 24d - 9 = 0 \Longrightarrow\ 3d^2 - 8d - 3 = 0 \Longrightarrow\ 3d^2 + d - 9d - 3 = 0$

$\Longrightarrow\ d(3d+1) - 3(3d+1) = 0 \Longrightarrow\ (3d+1)(d-3) = 0$

$\Longrightarrow\ 3d + 1 = 0\ \Longrightarrow 3d = -1 \Longrightarrow \boxed{d = -\frac{1}{3}}\quad ,d - 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{d = 3}$

$27)\ \ 8x(x+1) = 16$

$8x(x+1) = 16\quad \Longrightarrow\ x(x+1) = 2\quad \Longrightarrow x^2 + x = 2\quad \Longrightarrow\ x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0\ \ \Longrightarrow\ x + 2 = 0\ \Longrightarrow \boxed{x = -2},\quad x - 1 = 0\ \Longrightarrow \boxed{x = 1}$

مثال: أحل المعادلة: $30x^2 - 5x = 5$

لتحليل هذه المعادلة نتبع الخطوات التالية:

1) أجد عددين صحيحين حاصل ضربهما يساوي (ac) ، ومجموعهما يساوي b .

2) أقوم بتجميع الحدين الأولين، والحدين الآخرين.

3) استخرج المعامل المشترك الأكبر من كل مجموعة. واجمع الحدود.

$30x^2 - 5x = 5 \quad \Rightarrow \quad 30x^2 - 5x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - x - 1 = 0$

$a = 6 \quad , b = -1 \quad , c = -1$

حاصل ضربهما $ac = 2 \times -3 = -6$, ومجموعهما $b = 2 + -3 = -1$

$6x^2 + 2x - 3x - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow (6x^2 + 2x) - (3x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2x(3x + 1) - (3x - 1) = 0 \quad \Rightarrow (3x + 1)(2x - 1) = 0$

$\Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

أحل المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

28) $x^2 + x - 6 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = \frac{-6}{2} \Rightarrow \boxed{x = -3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

29) $x^2 + 4x - 1 = 0$

$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} \Rightarrow = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{x = -2 + \sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = -2 - \sqrt{5}}$$

30) $x^2 + 2x - 5 = 0$

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \boxed{x = -1 + \sqrt{6}} \Leftrightarrow x = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = -1 - \sqrt{6}}$$

مثال: أحل المعادلة: $x^2 + 4x - 12 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = -12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 8}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 - 8}{2} \Rightarrow x = \frac{-12}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = -6}$$

تبسيط المقادير النسبية

أبسط المقادير الآتية:

31) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3}$

$$\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3} \Rightarrow = \frac{2(x-3) + 5(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow \frac{2x - 6 + 5x + 5}{x^2 - 3x + x - 3} \Rightarrow \frac{7x - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

32) $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{5}{x+2}$

$$\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2} \quad \Longrightarrow = \frac{4(x+2)-5(x-3)}{(x-3)(x+2)} \quad \Longrightarrow \frac{4x+8-5x+15}{x^2+2x-3x-6} \quad \Longrightarrow \frac{-x+23}{x^2-x-6}$$

33) $\dfrac{3x}{x-1}\times\dfrac{x+4}{6x}$

$$\frac{3x}{x-1}\times\frac{x+4}{6x} \quad \Longrightarrow = \frac{1}{x-1}\times\frac{x+4}{2} \quad \Longrightarrow = \frac{x+4}{2x-2}$$

34) $\dfrac{x}{x+1}\div\dfrac{x+4}{2x+2}$

$$\frac{x}{x+1}\div\frac{x+4}{2x+2} \quad \Longrightarrow = \frac{x}{x+1}\times\frac{2x+2}{x+4} \quad \Longrightarrow = \frac{x}{x+1}\times\frac{2(x+1)}{x+4}$$

$$\Longrightarrow = \frac{x}{1}\times\frac{2}{x+4} \quad \Longrightarrow = \frac{2x}{x+4}$$

35) $\dfrac{x+4}{x^2-16}$

$$\frac{x+4}{x^2-16} \quad \Longrightarrow = \frac{x+4}{(x-4)(x+4)} \quad \Longrightarrow = \frac{1}{x-4}$$

36) $\dfrac{x^2-4x-5}{x+1}$

$$\frac{x^2-4x-5}{x+1} \quad \Longrightarrow = \frac{(x-5)(x+1)}{x+1} \quad \Longrightarrow = x-5$$

مثال: أحل المعادلة: أبسط المقادرين الآتيين:

a) $\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}$

$$\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5} \quad \Rightarrow \; = \frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$$

$$\Rightarrow \; = \frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30} \quad \Rightarrow \; = \frac{5x+8}{x^2+x-30}$$

b) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x}$

$$\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} \quad \Rightarrow = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1} \quad \Rightarrow = \frac{5x+2}{3} \times \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \; = \frac{5x+2}{3x+3} \quad \Rightarrow \; = \frac{5x+2}{3(x+1)}$$

الدرس الأول

نظرية الباقي والعوامل

استعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1) $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$

$\times$	$3x^2$	$-8x$	15
$2x$	$6x^3$	$-16x^2$	$30x$
3	$9x^2$	$-24x$	45

الباقي: 0

ناتج القسمة يساوي $(3x^2 - 8x + 15)$ والباقي 0

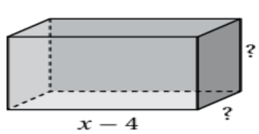
2) $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$

$\times$	$3x^3$	$7x^2$	$5x$	2
x	$3x^4$	$7x^3$	$5x^2$	$2x$
-2	$-6x^3$	$-14x^2$	$-10x$	-4

الباقي: 13

ناتج القسمة يساوي $(3x^3 + 7x^2 + 5x + 2)$ والباقي 13

3) يمثل الاقتران: $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور، أجد الأبعاد الأخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x ,



$\times$	x^2	$7x$	-8
x	x^3	$7x^2$	$-8x$
-4	$-4x^2$	$-28x$	32

الباقي: 0

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 7x - 8)$

اقتران حجم متوازي المستطيلات $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-4)(x^2 + 7x - 8)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x-4)(x+8)(x-1)$

أبعاد المستطيل $\Rightarrow \boxed{(x-1)}$, $\Rightarrow \boxed{(x+8)}$, $\Rightarrow \boxed{(x-4)}$

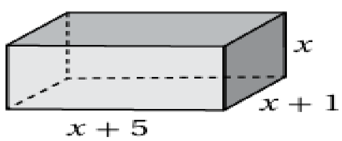
4) إذا كان باقي قسمة: $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$ على $h(x) = x + 2$ يساوي (-4) ، فما قيمة a ؟

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$$

$$\Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + 6 = -4$$

$$\Rightarrow -16 - 4 - 2a + 6 = -4 \Rightarrow -14 - 2a = -4 \Rightarrow -2a = 10 \Rightarrow \boxed{a = -5}$$

5) أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه $180cm^3$.



$$x(x+5)(x+1) = 180 \Rightarrow x(x^2 + 6x + 5) = 180 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 5x - 180 = 0$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (180)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm1 \pm 2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9, , \pm10, \pm12, \pm15, \pm18, \pm20 \pm 36, \pm45, \pm60$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 + 6(1)^2 + 5(1) - 180 = -168$	✗
4	$P(4) = (4)^3 + 6(4)^2 + 5(4) - 180 = 0$	✓

بما أن: $P(4) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 4$ إذن $(x-4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-4)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-4)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$x^3+6x^2+5x-180$

×	x^2	$10x$	45	
x	x^3	$10x^2$	$45x$	0
-4	$-4x^2$	$-40x$	-180	

ناتج القسمة يساوي $(x^2+10x+45)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$x^3+6x^2+5x-180=0$ المعادلة الأصلية

$\Rightarrow (x-4)(x^2+10x+45)=0$ التحليل باستعمال القسمة

أحدد قيم المعاملات، ثم أعوضها في صيغة المميز:

$a=1 \quad ,b=10 \quad ,c=45$

$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow (10)^2-4(1)(45) \Rightarrow 100-180=-80$

قيمة المميز تساوي -80 (سالبة) ،إذن لا يوجد حلول حقيقية لهذه للمعادلة التربيعية.

إذن $\boxed{x=4}$ ومنها أبعاد متوازي المستطيلات :

$x=\boxed{4cm} \quad ,x+5 \Rightarrow 4+5=\boxed{9cm} \quad ,x+1 \Rightarrow 5+1=\boxed{6cm}$

6) إذا كان باقي قسمة: $f(x)=ax^3+bx^2+bx+3$ على $h(x)=x-1$ يساوي (4) وكان $(x+1)$ عاملاً من عوامل $f(x)$ ، فما قيمة كل من a و b ؟

$f(x)=ax^3+bx^2+bx+3$

$f(-1)=0 \quad \Rightarrow = a(-1)^3+b(-1)^2+b(-1)+3=0$

$\Rightarrow -a+b-b+3=0 \quad \Rightarrow -a+3=0 \quad \Rightarrow \boxed{a=3}$

$f(1)=4 \quad \Rightarrow = a(1)^3+b(1)^2+b(1)+3=4$

$\Rightarrow a+b+b+3=4 \quad \Rightarrow a+2b+3=4$

$\Rightarrow 3+2b+3=4 \quad \Rightarrow 6+2b=4 \quad \Rightarrow 2b=-2 \quad \Rightarrow \boxed{b=-1}$

أحلل كل اقتران مما يأتي تحليلاً تاماً:

7) $3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (10)، وهي $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (3)، وهي $\pm1, \pm3$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 3(1)^3 + 14(1)^2 - 7(1) - 10 = 0$	✓

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) = 3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

$\times$	$3x^2$	$17x$	10	
x	$3x^3$	$17x^2$	$10x$	0
-1	$-3x^2$	$-17x$	-10	

ناتج القسمة يساوي $(3x^2 + 17x + 10)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$3x^3 + 14x^2 - 7x - 10 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Rightarrow (x-1)(3x^2 + 17x + 10) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

بحل المعادلة التربيعية $3x^2 + 17x + 10$

$3x^2 + 17x + 10 = 0 \quad \Rightarrow = x^2 + 17x + 30 = 0 \quad \Rightarrow (x + 15)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{15}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow\ = (x + 5)(3x + 2)$

$\Rightarrow \boxed{= (x - 1)(x + 5)(3x + 2)}$ التحليل التام

8) $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x$

$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x \ \Rightarrow\ x(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (2)، وهي $\pm 1, \pm 2$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm 1, \pm 2,$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{p}{q}$: $\pm 1, \pm 2,$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	$\frac{p}{q}$
✓	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2 = 0$	1

بما أن: $P(1) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 1$ إذن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x - 1)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) =\ 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

$\times$	$2x^2$	$3x$	-2
x	$2x^3$	$3x^2$	$-2x$
-1	$-2x^2$	$-3x$	2

0

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 + 3x - 2)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x$

التحليل باستعمال القسمة $\Longrightarrow x(x-1)(2x^2+3x-2)$

بحل المعادلة التربيعية $2x^2 + 3x - 2$

$2x^2 + 3x - 2 \quad \Longrightarrow = x^2 + 3x - 4 \quad \Longrightarrow (x+4)(x-1)$

$\Longrightarrow \left(x + \frac{4}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow = (x+2)(2x-1)$

التحليل التام $\Longrightarrow \boxed{x(x-1)(x+2)(2x-1)}$

أحلل كل معادلة مما يأتي:

9) $3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (4)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (3)، وهي $\pm1, \pm3$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 3(1)^3 - 4(1)^2 - 6(1) + 4 = -3$	✗
2	$P(2) = 3(2)^3 - 4(2)^2 - 6(2) + 4 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + 4$

$\times$	$3x^2$	$2x$	-2
x	$3x^3$	$2x^2$	$-2x$
-2	$-6x^2$	$-4x$	4

0

ناتج القسمة يساوي $(3x^2 + 2x + 4)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Longrightarrow (x-2)(3x^2 + 2x - 2) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

أحل المعادلة التربيعية: $3x^2 + 2x - 2$ باستعمال القانون العام.

$a = 3 \qquad b = 2 \qquad c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{6} \Longrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}}$$

$\Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$ بحل كل معادلة

$$\Longrightarrow \boxed{x = 2 \ , \quad x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \ , x = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}}$$ التحليل التام

10) $2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (36)، وهي $\pm1, \pm2, \pm4, \pm6, \pm9, \pm18, \pm36$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm1, \pm2$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q}$: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm18, \pm36, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{9}{2}$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - 16(1) - 36 = -45$	✗
-2	$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 16(-2) - 36 = 0$	✓

بما أن: $P(-2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = -2$ إذن $(x+2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x+2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 16x - 36$

$\times$	$2x^2$	x	-18	
x	$2x^3$	x^2	$-18x$	0
2	$4x^2$	$2x$	-36	

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 + x - 18)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$ المعادلة الأصلية

$\Longrightarrow (x+2)(2x^2 + x - 18) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

أحل المعادلة التربيعية: $2x^2 + x - 18$ باستعمال القانون العام.

$a = 2 \qquad b = 1 \qquad c = -18$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-18)}}{2(2)}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 144}}{4} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{4}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = -2 \ , \quad x = \frac{-1 + \sqrt{145}}{4} \ , x = \frac{-1 - \sqrt{145}}{4}}$$ التحليل التام

11) يزيد ارتفاع مخروط $5cm$ على طول نصف قطر قاعدته، إذا كان حجم هذا المخروط $24\pi cm^3$ ، فما أبعاده؟ (حجم المخروط هو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ، حيث r نصف قطر القاعدة، و h الارتفاع).

نفرض طول نصف قطر قاعدة المخروط r وارتفاعه h وحجمه V .

$$V = 24\pi cm^3 \qquad , h = r + 5 \qquad , r = ?$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$24\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 (r+5) \Rightarrow \left[24\pi = \frac{1}{3}\pi r^2(r+5)\right] \div \pi \Rightarrow 24 = \frac{1}{3} r^2 (r+5)$$

$$\Rightarrow \left[24 = \frac{1}{3} r^2 (r+5)\right] \times 3 \Rightarrow 72 = r^2(r+5) \Rightarrow 72 = r^3 + 5r^2 \Rightarrow r^3 + 5r^2 - 72 = 0$$

الخطوة الأولى: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بنا أن معامل الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (72)

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1 \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, , \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24 \pm 36, \pm 72$.

الخطوة الثانية: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	$\frac{P}{q}$
✗	$P(1) = (1)^3 + 5(1)^2 - 72 = -66$	1
✓	$P(3) = (3)^3 + 5(3)^2 - 72 = 0$	3

بما أن: $P(3) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $r = 3$ إذن $(r - 3)$ عامل من عوامل $P(r)$.

الخطوة الثالثة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً.

بما أن $(x - 3)$ عامل من عوامل $P(r)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(r)$ على $(r - 3)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$$P(r) = r^3 + 5r^2 - 72$$

$\times$	r^2	$8r$	24
r	r^3	$8r^2$	$24r$
-3	$-3r^2$	$-24r$	-72

0

ناتج القسمة يساوي $(r^2 + 8r + 24)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $r^3 + 5r^2 - 72 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (r-3)(r^2 + 8r + 24) = 0$

العبارة التربيعية مميزها سالب وبالتالي لا يحلل $b^2 - 4ac \Rightarrow 8^2 - 4(1)(24) = -32$

بحل كل معادلة $\Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 3}$

إذن أبعاد المخروط هي:

$$\boxed{r = 3cm} \quad , h = r + 5 \Rightarrow h = 3 + 5 \Rightarrow \boxed{h = 8cm}$$

الدرس الثاني

الكسور الجزئية

1) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)} \Rightarrow = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+1)(2x+5)(7-3x)} \Rightarrow = \frac{(x-3)}{(2x+5)(7-3x)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\Rightarrow = \frac{(x-3)}{(2x+5)(7-3x)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{7-3x}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(2x+5)(7-3x)\frac{(x-3)}{(2x+5)(7-3x)} = (2x+5)(7-3x)\left(\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{7-3x}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x-3 = A(7-3x) + B(2x+5)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -\frac{5}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$-\frac{5}{2} - 3 = A\left(7 - 3\left(-\frac{5}{2}\right)\right) + B\left(2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{11}{2} = A\left(7 + \frac{15}{2}\right) + B(0) \Rightarrow = -\frac{11}{2} = \frac{29}{2}A \Rightarrow = 11 = 29A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{11}{29}}$$

بتعويض $x = \frac{7}{3}$ في المعادلة الناتجة:

$$\frac{7}{3} - 3 = A\left(7 - 3\left(\frac{7}{3}\right)\right) + B\left(2\left(\frac{7}{3}\right) + 5\right)$$

$$-\frac{2}{3} = A(0) + B\left(\frac{14}{3} + 5\right) \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{29}{3}B \Rightarrow -2 = 29B \Rightarrow B = -\frac{2}{29}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)} \Rightarrow = \frac{-\frac{11}{29}}{2x+5} + \frac{-\frac{2}{29}}{7-3x} \Rightarrow = \frac{-11}{29(2x+5)} - \frac{2}{29(7-3x)}$$

2) $\frac{3x-5}{x(x-1)^2}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر، ألاحظ أن تحليل المقام هو $x(x-1)^2$ ، وأن العامل $(x-1)$ مكرر مرتين في هذا التحليل، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $x\,,(x-1)\,,\ (x-1)^2$.

$$\frac{3x-5}{x(x-1)^2} \Longrightarrow = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-1)^2$ فإن:

$$x(x-1)^2\frac{3x-5}{x(x-1)^2} = x(x-1)^2\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$3x-5 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$3(0)-5 = A(0-1)^2 + B(0)(0-1) + C(0) \Longrightarrow \boxed{A=-5}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة:

$$3(1)-5 = A(1-1)^2 + B(1)(1-1) + C(1) \Longrightarrow \boxed{C=-2}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=2$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$3(2)-5 = (-5)(2-1)^2 + B(2)(2-1) + (-2)(2)$$

$$\Longrightarrow\ 1 = -5 + 2B - 4 \Longrightarrow 1 = -9 + 2B \Longrightarrow 2B = 10 \Longrightarrow \boxed{B=5}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x-5}{x(x-1)^2} \Longrightarrow = \frac{-5}{x} + \frac{5}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

3) $\dfrac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

$$\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(2x-1)(x^2+1)$ فإن:

$$(2x-1)(x^2+1)\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)} = (2x-1)(x^2+1)\left(\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)$$

$$x^2+x-2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(2x-1)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=\frac{1}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2 = A\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)+\left(B\left(\frac{1}{2}\right)+C\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2 = A\left(\frac{1}{4}+1\right)+\left(\frac{1}{2}B+C\right)(0) \Rightarrow -\frac{5}{4} = \frac{5}{4}A \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

$$(0)^2+0-2 = -1((0)^2+1)+(B(0)+C)(2(0)-1)$$

$$-2 = -1+(C)(-1) \Rightarrow -2 = -1-C \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B في المعادلة الناتجة:

$$(1)^2+1-2 = -1((1)^2+1)+(B(1)+1)(2(1)-1)$$

$$0 = -2+B+1 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{-1}{2x-1}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

4) $\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$2x^2-5x-3 \quad \Rightarrow x^2-5x-6 \quad \Rightarrow (x-6)(x+1)$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{6}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow (x-3)(2x+1)$$

$$\frac{5x-1}{2x^2-5x-3} = \frac{5x-1}{(2x+1)(x-3)}$$ تحليل ثلاثي الحدود

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب كسرين جزئيين مقامهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر:

$$\frac{5x-1}{(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين وهو $(2x+1)(x-3)$ فإن:

$$(2x+1)(x-3)\frac{5x-1}{(2x+1)(x-3)} = (2x+1)(x-3)\left(\frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$5x-1 = A(x-3) + B(2x+1)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=3$ في المعادلة الناتجة:

$$5(3)-1 = A(3-3) + B(2(3)+1) \quad \Rightarrow \quad 14 = 7B \Rightarrow \boxed{B=2}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة:

$$5(1)-1 = A(1-3) + (2)(2(1)+1) \Rightarrow \quad 4 = -2A + 6$$

$$2A = 2 \quad \Rightarrow \boxed{A=1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{5x-1}{2x^2-5x-3} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-3}$$

5) $\dfrac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x} \Rightarrow = \frac{9-5x}{x(x^2-4x+3)} \Rightarrow = \frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)}$$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-3)}+\frac{C}{(x-1)}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-3)(x-1)$ فإن:

$$x(x-3)(x-1)\frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)} = x(x-3)(x-1)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-3)}+\frac{C}{(x-1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$9-5x = A(x-3)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x-3)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$9-5(0) = A(0-3)(0-1)+B(0)(0-1)+C(0)(0-3)$$

$$9 = 3A+0+0 \Rightarrow 9 = 3A \Rightarrow \boxed{A=3}$$

بتعويض $x=3$ في المعادلة الناتجة:

$$9-5(3) = A(3-3)(3-1)+B(3)(3-1)+C(3)(3-3)$$

$$9-15 = 0+6B+0 \Rightarrow -6 = 6B \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة ، إضافة إلى تعويض قيمتي A و B الناتجتين:

$$9-5(1) = 3(1-3)(1-1)+(-1)(1)(1-1)+C(1)(1-3)$$

$$4 = 0+0-2C \Rightarrow 4 = -2C \Rightarrow \boxed{C=-2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)} = \frac{3}{x}-\frac{1}{(x-3)}-\frac{2}{(x-1)}$$

6) $\dfrac{36+5x}{16-x^2}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{36+5x}{16-x^2}=\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}=\frac{A}{(4-x)}+\frac{B}{(4+x)}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $(4-x)(4+x)$ فإن:

$$(4-x)(4+x)\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}=(4-x)(4+x)\left(\frac{A}{(4-x)}+\frac{B}{(4+x)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$36+5x=A(4+x)+B(4-x)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=4$ في المعادلة الناتجة:

$$36+5(4)=A(4+4)+B(4-4)$$

$$56=8A+0 \quad \Rightarrow \boxed{A=7}$$

بتعويض $x=-4$ في المعادلة الناتجة:

$$36+5(-4)=A(4-4)+B(4+4)$$

$$16=0+8B \quad \Rightarrow \boxed{B=2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}=\frac{7}{(4-x)}+\frac{2}{(4+x)}$$

7) $\frac{8x+3}{x^2-3x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{8x+3}{x^2-3x} = \frac{8x+3}{x(x-3)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{8x+3}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-3)$ فإن:

$$x(x-3)\frac{8x+3}{x(x-3)} = x(x-3)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$8x+3 = A(x-3) + Bx$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة:

$$8(0)+3 = A(0-3) + B(0) \quad \Rightarrow \quad 3 = -3A \quad \Rightarrow \boxed{A = -1}$$

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$8(3)+3 = A(3-3) + B(3) \quad \Rightarrow \quad 27 = 3B \quad \Rightarrow \boxed{B = 9}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{8x+3}{x^2-3x} = \frac{-1}{x} + \frac{9}{x-3}$$

8) $\dfrac{3x^3-2x-5}{x^3+x^2}$

الخطوة الأولى: أحلل البسط والمقام تحليلاً كاملاً.

1) تحليل البسط:

$$3x^3-2x-5 \Rightarrow x^3-2x-15 \Rightarrow (x-5)(x+3) \Rightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)(x+1) \Rightarrow =(3x-5)(x+1)$$

2) تحليل المقام:

$$x^3+x^2 \quad \Rightarrow = x^2(x+1)$$

$$\frac{3x^3-2x-5}{x^3+x^2} \Rightarrow = \frac{(3x-5)(x+1)}{x^2(x+1)} \quad \Rightarrow = \frac{3x-5}{x^2}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيما ً مجهولة.

$$\frac{3x-5}{x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو x^2 فإن:

$$x^2\frac{3x-5}{x^2} = x^2\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$3x-5 = Ax+B$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B باستعمال التعويض.

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$3(0)-5 = A(0)+B \quad \Rightarrow \boxed{B=-5}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة ، إضافة إلى تعويض قيمة B الناتجة:

$$3(1)-5 = A(1)+(-5\ ) \Rightarrow -2 = A-5 \quad \Rightarrow \boxed{A=3}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^3-2x-5}{x^3+x^2} = \frac{-5}{x}+\frac{3}{x^2}$$

9) $\dfrac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر، ألاحظ أن تحليل المقام هو $(x-2)(x-3)^2$ ، وأن العامل $(x-3)^2$ مكرر مرتين في هذا التحليل، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور .

$$\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2} \Rightarrow = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $(x-2)(x-3)^2$ فإن:

$$(x-2)(x-3)^2\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2} = (x-2)(x-3)^2\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$3x^2+2x+2 = A(x-3)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-2)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$3(2)^2+2(2)+2 = A(2-3)^2+B(2-2)(2-3)+C(2-2)$$

$$\Rightarrow 12+4+2 = A+0+0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=18}$$

بتعويض $x=3$ في المعادلة الناتجة:

$$3(3)^2+2(3)+2 = A(3-3)^2+B(3-2)(3-3)+C(3-2)$$

$$\Rightarrow 27+6+2 = 0+0+C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=35}$$

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة ، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين :

$$3(0)^2+2(0)+2 = 18(0-3)^2+B(0-2)(0-3)+35(0-2)$$

$$\Rightarrow 0+0+2 = 162+6B-70 \Rightarrow 2 = 92+6B \Rightarrow 6B = -90 \Rightarrow \boxed{B=-15}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2} \Rightarrow = \frac{18}{x-2}-\frac{15}{x-3}+\frac{35}{(x-3)^2}$$

10) $\dfrac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x} \Longrightarrow = \frac{2x^2-3x-27}{x(x^2-6x+9)} \Longrightarrow = \frac{2x^2-3x-27}{x(x-3)^2}$$

ملاحظة مهمة: التحقق من أن العبارة التربيعية قابلة للتحويل إلى قوس مرفوع لتربيع:

يجب أن تكون العبارة التربيعية عبارة من ثلاثة حدود، حيث يكون الحد الأول والثالث مربع كامل، والحد الأوسط يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث.

1) تحديد الجذر التربيعي للحد الأول: $\sqrt{x^2} \Longrightarrow = x$

2) تحديد الجذر التربيعي للحد الثالث: $\sqrt{9} \Longrightarrow = 3$

3) الحد الأوسط : يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث: $2 \times x \times 3 = 6x$

4) إذا كانت إشارة الحد الأوسط موجبة، فإن القوس سيكون $($جذر الحد الأول + جذر الحد الثالث$)^2$

5) إذا كانت إشارة الحد الأوسط سالبة، فإن القوس سيكون $($جذر الحد الأول - جذر الحد الثالث$)^2$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر، ألاحظ أن تحليل المقام هو $x(x-3)^2$ ، وأن العامل $(x-3)$ مكرر مرتين في هذا التحليل، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $x, (x-3), (x-3)^2$.

$$\frac{2x^2-3x-27}{x(x-3)^2} \Longrightarrow = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-3)^2$ فإن:

$$x(x-3)^2\,\frac{2x^2-3x-27}{x(x-3)^2} = x(x-3)^2\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x^2-3x-27 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة:

$$2(0)^2 - 3(0) - 27 = A(0-3)^2 + B(0)(0-3) + C(0)$$

$$-27 = 9A + 0 + 0 \implies -27 = 9A \implies \boxed{A = -3}$$

بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة:

$$2(3)^2 - 3(3) - 27 = A(3-3)^2 + B(3)(3-3) + C(3)$$

$$-18 = 0 + 0 + 3C \implies -18 = 3C \implies \boxed{C = -6}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = 1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$2(1)^2 - 3(1) - 27 = (-3)(1-3)^2 + B(1)(1-3) + (-6)(1)$$

$$-28 = -12 - 2B - 6 \implies 2B = -12 + 28 - 6 \implies 2B = 10 \implies \boxed{B = 5}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 - 3x - 27}{x^3 - 6x^2 + 9x} \implies = \frac{-3}{x} + \frac{5}{x-3} + \frac{-6}{(x-3)^2}$$

$$11) \quad \frac{5x+8}{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}$$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{5x+8}{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}$$

الخطوة الثانية: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت (2)، وهي $\pm 1 \pm 2$.

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} = \frac{P}{q} : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

الخطوة الثالثة: أنشئ جدولاً لاختيار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{P}{q}$	$P\left(\frac{P}{q}\right)$	هل $\frac{P}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
1	$P(1) = 4(1)^3 - 12(1)^2 + 9(1) - 2 = -1$	✗
2	$P(2) = 4(2)^3 - 12(2)^2 + 9(2) - 2 = 0$	✓

بما أن: $P(2) = 0$ فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ إذن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة الرابعة: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً .

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

$4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$

$\times$	$4x^2$	$-4x$	1	
x	$4x^3$	$-4x^2$	x	0
-2	$-8x^2$	$8x$	-2	

ناتج القسمة يساوي $(4x^2 - 4x + 1)$ ومنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

المعادلة الأصلية $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$

التحليل باستعمال القسمة $\Rightarrow (x-2)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

ملاحظة مهمة: التحقق من أن العبارة التربيعية قابلة للتحويل إلى قوس مرفوع لتربيع:

يجب أن تكون العبارة التربيعية عبارة من ثلاثة حدود، حيث يكون الحد الأول والثالث مربع كامل، والحد الأوسط يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث.

1) تحديد الجذر التربيعي للحد الأول: $\sqrt{4x^2} \Rightarrow = 2x$

2) تحديد الجذر التربيعي للحد الثالث: $\sqrt{1} \Rightarrow = 1$

3) الحد الأوسط : يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول وجذر الحد الثالث: $2 \times 2x \times 1 = 4x$

4) إذا كانت إشارة الحد الأوسط موجبة، فإن القوس سيكون (جذر الحد الأول + جذر الحد الثالث)²

5) إذا كانت إشارة الحد الأوسط سالبة، فإن القوس سيكون (جذر الحد الأول - جذر الحد الثالث)²

بتحليل ثلاثي الحدود $\Rightarrow (x-2)(2x-1)^2 = 0$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

اكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزاً في بسط كل كسر، ألاحظ أن تحليل المقام هو $(x-2)(2x-1)^2$ ، وأن العامل $(2x-1)$ مكرر مرتين في هذا التحليل، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $(2x-1)^2$, $(2x-1)$, $(x-2)$.

$$\frac{5x+8}{(x-2)(2x-1)^2} \Rightarrow = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(2x-1)^2}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-3)^2$ فإن:

$$= (x-2)(2x-1)^2 \frac{5x+8}{(x-2)(2x-1)^2} \Rightarrow = (x-2)(2x-1)^2 \left(\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(2x-1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow 5x+8 = A(2x-1)^2 + B(x-2)(2x-1) + C(x-2)$$

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$5(2)+8 = A(2(2)-1)^2 + B(2-2)(2(2)-1) + C(2-2)$$

$$18 = 9A + 0 + 0 \Rightarrow 9A = 18 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

بتعويض $x=\frac{1}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$5\left(\frac{1}{2}\right) + 8 = A\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)^2 + B\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) + C\left(\frac{1}{2}-2\right)$$

$$\frac{5}{2} + 8 = 0 + 0 - \frac{3}{2}C \Rightarrow \frac{21}{2} = -\frac{3}{2}C \Rightarrow -3C = 21 \Rightarrow \boxed{C=-7}$$

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي A و Bالناتجتين:

$$5(0)+8 = 2(2(0)-1)^2 + B(0-2)(2(0)-1) + (-7)(0-2)$$

$$8 = 2 + 2B + 14 \Rightarrow 8 = 2B + 16 \Rightarrow -2B = 8 \Rightarrow \boxed{B=-4}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4} = \frac{2}{x-2} + \frac{-4}{2x-1} + \frac{-7}{(2x-1)^2}$$

12) $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً.

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)} = \frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{1-2x}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x^2+3)(1-2x)$ فإن:

$$(x^2+3)(1-2x)\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)} = (x^2+3)(1-2x)\left(\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{1-2x}\right)$$

$$5x^2+2 = (Ax+B)(1-2x)+C(x^2+3)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x=\frac{1}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^2+2 = \left(A\left(\frac{1}{2}\right)+B\right)\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)\right)+C\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\right)$$

$$\frac{5}{4}+2 = 0+\frac{13}{4}C \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{13}{4}C \Rightarrow 13 = 13C \Rightarrow \boxed{C=1}$$

بتعويض $x=0$ وقيمة C في المعادلة الناتجة:

$$5(0)^2+2 = (A(0)+B)(1-2(0))+1((0)^2+3)$$

$$2 = B+3 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x=1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي B و C في المعادلة الناتجة:

$$5(1)^2+2 = (A(1)+(-1))(1-2(1))+1((1)^2+3)$$

$$7 = (A-1)(-1)+4 \Rightarrow 7 = -A+1+4 \Rightarrow \boxed{A=-2}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)} = \frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{1}{1-2x}$$

13) $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتاً في بسط العامل الخطي، ومقداراً خطياً في بسط العامل التربيعي.

بما أن المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يمكن تحليله، فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتاً، وبسط الآخر سيكون مقداراً خطياً .

$$\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = \frac{Ax+B}{2x^2+x+5} + \frac{C}{x-1}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x^2+3)(1-2x)$ فإن:

$$(2x^2+x+5)(x-1)\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = (2x^2+x+5)(x-1)\left(\frac{Ax+B}{2x^2+x+5} + \frac{C}{x-1}\right)$$

$$24 = (Ax+B)(x-1) + C(2x^2+x+5)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B, C باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$24 = (A(1)+B)(1-1) + C(2(1)^2+1+5)$$

$$24 = 0 + C(2+1+5) \Rightarrow 24 = 8C \Rightarrow \boxed{C=3}$$

بتعويض $x = 0$ وقيمة C في المعادلة الناتجة:

$$24 = (A(0)+B)(0-1) + 3(2(0)^2+0+5)$$

$$24 = -B + 3(6) \Rightarrow 24 = -B + 15 \Rightarrow 24 = -B + 15 \Rightarrow \boxed{B=-9}$$

بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x مثل $x = -1$ في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتي B و C في المعادلة الناتجة:

$$24 = \big(A(-1)+(-9)\big)(-1-1) + 3(2(-1)^2+(-1)+5)$$

$$24 = (-A-9)(-2) + 3(2-1+5) \Rightarrow 24 = 2A + 18 + 18 \Rightarrow 2A = -12 \Rightarrow \boxed{A=-6}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = \frac{-6x-9}{2x^2+x+5} + \frac{3}{x-1}$$

14) $\dfrac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$

بما أن درجة البسط $\leq$ درجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3 \\ \hline 2x^2+3x-5 & 6x^2+8x-7 \\ & (-)\ 6x^2+9x-15 \\ \hline & \quad -x+8 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 3 ، والباقي $-x+8$ ومنه، فإن:

$$\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5} \Longrightarrow = 3 \ + \frac{-x+8}{2x^2+3x-5}$$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$2x^2+3x-5=0 \Longrightarrow x^2+3x-10=0 \Longrightarrow (x+5)(x-2)=0$$

$$\Longrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{2}{2}\right) \Longrightarrow (2x+5)(x-1)$$

$$3+\frac{-x+8}{2x^2+3x-5}=3+\frac{-x+8}{(2x+5)(x-1)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{-x+8}{(2x+5)(x-1)}=\frac{A}{2x+5}+\frac{B}{x-1}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(2x+5)(x-1)\frac{-x+8}{(2x+5)(x-1)}=(2x+5)(x-1)\left(\frac{A}{2x+5}+\frac{B}{x-1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-x + 8 = A(x-1) + B(2x+5)$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x = -\frac{5}{2}$ في المعادلة الناتجة:

$$-\left(-\frac{5}{2}\right) + 8 = A\left(-\frac{5}{2} - 1\right) + B\left(2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5\right) \Rightarrow \frac{5}{2} + 8 = -\frac{7}{2}A + 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} + 8 = -\frac{7}{2}A \Rightarrow \frac{21}{2} = -\frac{7}{2}A \Rightarrow 21 = -7A \Rightarrow \boxed{A = -3}$$

بتعويض $x = 1$ في المعادلة الناتجة:

$$-1 + 8 = A(1-1) + B(2(1)+5) \Rightarrow -1 + 8 = 0 + 7B$$

$$\Rightarrow 7 = 7B \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{6x^2 + 8x - 7}{2x^2 + 3x - 5} \Rightarrow = 3 + \frac{-3}{2x+5} + \frac{1}{x-1}$$

15) $\frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 12}{x^2 - 3x + 2}$

بما أن درجة البسط $\leq$ درجة المقام، فإنني أقسم أولاً البسط على المقام، ثم أجزئ.

الخطوة الأولى: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم اكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2 - 3x + 2 & x^3 - 3x^2 - 3x + 12 \\ & (-)\ x^3 - 3x^2 + 2x \\ \hline & -5x + 12 \end{array}$$

إذن ناتج القسمة 3 ، والباقي $-x + 8$ ومنه، فإن:

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 12}{x^2 - 3x + 2} = x + \frac{-5x + 12}{x^2 - 3x + 2}$$

الخطوة الثانية: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$x+\frac{-5x+12}{x^2-3x+2}=x+\frac{-5x+12}{(x-2)(x-1)}$$

الخطوة الثالثة: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$x+\frac{-5x+12}{(x-2)(x-1)}=x+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

الخطوة الرابعة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-2)(x-1)\frac{-5x+12}{(x-2)(x-1)}=(x-2)(x-1)\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-5x+12=A(x-1)+B(x-2)$$

الخطوة الخامسة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$-5(2)+12=A(2-1)+B(2-2)\quad\Rightarrow -10+12=A\Rightarrow \boxed{A=2}$$

بتعويض $x=1$ في المعادلة الناتجة:

$$-5(1)+12=A(1-1)+B(1-2)\quad\Rightarrow -5+12=0+-B$$

$$\Rightarrow\ 7=-B\ \Rightarrow \boxed{B=-7}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}\Rightarrow =x\ +\frac{2}{x-2}+\frac{-7}{x-1}$$

16) أجد الاقتران النسبي الذي يمكن كتابته في صورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{2}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)}$$

استخراج المقام المشترك:

1) المقام $(x-1)$ مكرر مرتين ، نأخذ أعلى قوة وهو $(x-1)^2$.

2) المقام $(x+1)$ يظهر مرة واحدة .

3) بالتالي المقام الموحد هو : $(x-1)^2(x+1)$

$$\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)}+\frac{1(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}+\frac{1(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)+(x+1)+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-2+x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{3x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$$

أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17) $\frac{ax+b}{(x-c)^2}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

ألاحظ أن تحليل المقام هو $(x-c)^2$،مكرر مرتين ، لذا يجب أن تحتوي التجزئة على كسرين مقاماتها هي: $(x-c)^2$, $(x-c)$.

$$\frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{ax+b}{(x-c)(x-c)^2}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{(x-c)^2}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-c)^2\frac{ax+b}{(x-c)^2}=(x-c)^2\left(\frac{A}{x-c}+\frac{B}{(x-c)^2}\right)$$

$$ax+b=(x-c)A+B$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x=c$ في المعادلة الناتجة:

$$ac+b=(c-c)A+B \Rightarrow ac+b=0+B \Rightarrow \boxed{B=ac+b}$$

بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة وتعويض قيمة B في المعادلة:

$$a(0)+b=(0-c)A+B \quad \Rightarrow b=-cA+ac+b$$

$$\Rightarrow cA=ac+b-b \Rightarrow cA=ac \Rightarrow \boxed{A=a}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{a}{x-c}+\frac{ac+b}{(x-c)^2}$$

18) $\frac{1}{x^2-ax-bx+abx}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{1}{x^2-ax-bx+abx}=\frac{1}{x(x-a-b+ab)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{1}{x(x-a-b+ab)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-a-b+ab}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x-a-b+ab)\frac{1}{x(x-a-b+ab)} = x(x-a-b+ab)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-a-b+ab}\right)$$

$$1 = A(x-a-b+ab)+Bx$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة:

$$1 = A(0-a-b+ab)+B(0) \Rightarrow 1 = A(-a-b+ab) \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{-a-b+ab}}$$

بتعويض $x = a+b-ab$ في المعادلة الناتجة وتعويض قيمة B في المعادلة:

$$1 = A(a+b-ab-a-b+ab)+B(a+b-ab)$$

$$\Rightarrow 1 = 0 + A(a+b-ab) \Rightarrow 1 = B(a+b-ab) \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{a+b-ab}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{x^2-ax-bx+abx} = \frac{\frac{1}{-a-b+ab}}{x}+\frac{\frac{1}{a+b-ab}}{x-a-b+ab}$$

19) $\frac{ax+b}{x^2-c^2}$

الخطوة الأولى: أحلل المقام تحليلاً كاملاً.

$$\frac{ax+b}{x^2-c^2} = \frac{ax+b}{(x-c)(x+c)}$$

الخطوة الثانية: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً مجهولة.

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x+c)} = \frac{A}{x-c}+\frac{B}{x+c}$$

الخطوة الثالثة: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$(x-c)(x+c)\frac{ax+b}{(x-c)(x+c)}=(x-c)(x+c)\left(\frac{A}{x-c}+\frac{B}{x+c}\right)$$

$$ax+b=(x+c)A+B(x-c)$$

الخطوة الرابعة: أجد قيمة كل من الثوابت $A, B.$ باستعمال التعويض.

بتعويض $x=c$ في المعادلة الناتجة:

$$ac+b=(c+c)A+B(c-c) \Rightarrow ac+b=2cA \Rightarrow \boxed{A=\frac{ac+b}{2c}}$$

بتعويض $x=-c$ في المعادلة الناتجة وتعويض قيمة B في المعادلة:

$$-ac+b=(-c+c)A+B(-c-c) \Rightarrow -ac+b=-2cB \Rightarrow \boxed{B=\frac{-ac+b}{-2c}}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{ax+b}{x^2-c^2}=\frac{\frac{ac+b}{2c}}{x-c}+\frac{\frac{-ac+b}{-2c}}{x+c}$$

20) أجزئ المقدار: $\frac{2}{x(x+2)}$ ، ثم استعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\cdots+\frac{2}{11\times 13}$$

الخطوة الأولى: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تمثيل قيماً ً مجهولة.

$$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

الخطوة الثانية: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

$$x(x+2)\frac{2}{x(x+2)}=x(x+2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\right)$$

$$2 = (x+2)A + Bx$$

الخطوة الثالثة: أجد قيمة كل من الثوابت A, B. باستعمال التعويض.

بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة:

$$2 = (0+2)A + B(0) \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

بتعويض $x = -2$ في المعادلة الناتجة وتعويض قيمة B في المعادلة:

$$2 = (-2+2)A + B(-2) \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

إذن يمكن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+2}$$

إيجاد ناتج التجزئة المجموع الآتي: $\frac{2}{1\times3} + \frac{2}{3\times5} + \frac{2}{5\times7} + \cdots + \frac{2}{11\times13}$

$$= \frac{1}{1} + \frac{-1}{1+2} = \frac{1}{1} + \frac{-1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{-1}{3+2} = \frac{1}{3} + \frac{-1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{-1}{5+2} = \frac{1}{5} + \frac{-1}{7}$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{-1}{7+2} = \frac{1}{7} + \frac{-1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{-1}{9+2} = \frac{1}{9} + \frac{-1}{11}$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{-1}{11+2} = \frac{1}{11} + \frac{-1}{13}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{-1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{-1}{13} = \boxed{\frac{12}{13}}$$