2017

0785968199

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

قال نبراس الأقصى :

الرياضيات مادة ممتعة و سهلة، إن أحببتها فستفهمها، و إن فهمتها فسوف تتمتع بها.

إعداد الأستاذ

ناصر حشكي

تطلب من مركز أكاديمية
الإنتماء الثقافي
0785226781
0796771768

الفرع العلمي
الصناعي

الاستاذ ناصر حشكي
0785968199

النهايات والاتصال

مركز أكاديمية الإنتماء
0797852004

T.Nasser Heshki

الدرس الأول: نهاية اقتران عند نقطة

مفهوم النهاية: دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير س من قيمة معينة ويرمز لها "نها" وتتم حسابها من خلال الطرق التالية.

① الجدول

مثال①: ادرس سلوك الاقتران ق(س) = س + ١ عندما يقترب س من العدد ٣.

يمين ← → يسار

س	٣,٣	٣,٢	٣,١	٣	٢,٩	٢,٨	٢,٧
ق(س)	٤,٣	٤,٢	٤,١		٣,٩	٣,٨	٣,٧

تقل ← ٤   ٤ → تزداد

نلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٣ سواء كان الاقتراب من يمينه ويسار العدد ٣ فإن الاقتران ق(س) يقترب من العدد ٤.

فإننا نقول أن نهاية ق(س) تساوي ٤ عندما تقترب س من العدد ٣ ونرمز لها $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ ق(س) = ٤

نرمز للاقتراب س من العدد ٣ من اليمين بـ س ← ٣+ وتكون نهاية من يمينه $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نها}$ ق(س) = ٤ وكذلك من اليسار س ← ٣- فإنه نهاية من يسار $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نها}$ ق(س) = ٤.

نلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نها}$ ق(س) لذلك نقول بأن النهاية موجودة وتساوي ٤ وإذا لم تكن نهاية من اليمين لا تساوي نهاية من اليسار فإن النهاية غير موجودة.

مثال②: جد قيمة $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) من خلال الآتي:

س	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨	١,٧
ق(س)	٥,٣	٥,٢	٥,١		٦,٩	٦,٨	٦,٧

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}$ ق(س) = ٧

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}$ ق(س)

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) غير موجودة

مثال③: بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ١ فإن $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) تساوي.

س	١,٣	١,٢	١,١	١	٠,٩	٠,٨	٠,٧
ق(س)	٤,٣	٤,٢	٤,١		٥,٩	٥,٨	٥,٧

أ) ٤   ب) ٦

ج) غير موجودة   د) ٥

③ الرسم

صورة العدد من الرسم ق(أ)

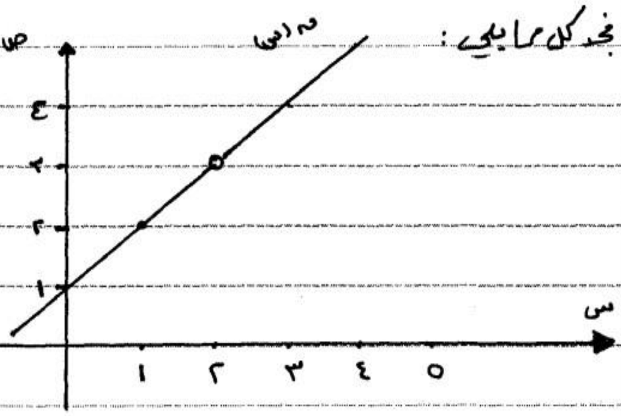
تكون صورة ق(أ) غير معرفة عند وجود دائرة مفتوحة ○

* النهاية: نقوم بإنزال (عمود) خط وهمي عند النقطة المطلوبة نقطة التقاء منحنى الاقتران من اليمين مع العمود هي قيمة $\underset{س \leftarrow أ^+}{نها}$ ق(س). نقطة التقاء منحنى الاقتران من اليسار مع العمود قيمة $\underset{س \leftarrow أ^-}{نها}$ ق(س)

← إذا تساوت النهايتين فإنه نهاية موجودة

← إذا اختلفت النهايتين فإن نهاية غير موجودة

مثال①: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) نجد كل مما يلي:



أ) نها ق(س) = ٢
س ← ١+

ب) نها ق(س) = ٢
س ← ١-

ج) نها ق(س) = ٢
س ← ١

د) ق(١) = ٢

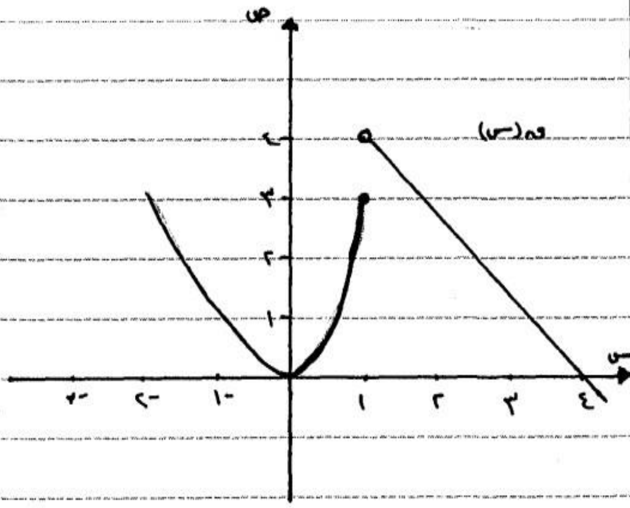
هـ) نها ق(س) = ٣
س ← ٢+

و) نها ق(س) = ٣
س ← ٢-

ل) نها ق(س) = ٣
س ← ٢

ط) ق(٢) = غير معرفة

مثال②: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) نجد كل مما يلي:



أ) نها ق(س) =
س ← ١-

ب) نها ق(س) =
س ← ١+

ج) نها ق(س) =
س ← ١

د) ق(١) =

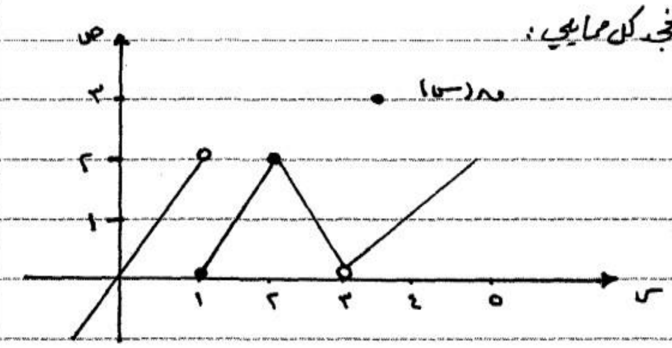
هـ) نها ق(س) =
س ← ١-+

و) نها ق(س) =
س ← ١--

ل) نها ق(س) =
س ← ١-

ط) ق(-١) =

مثال③ بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) نجد كل مما يلي:



أ) نها ق(س) =
س ← ٠

ب) نها ق(س)
س ← ١

ج) نها ق(س)
س ← ٢

د) نها ق(س)
س ← ٣

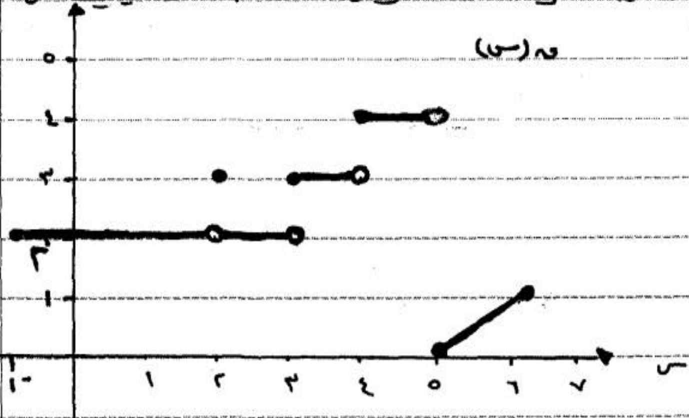
هـ) ق(٠)

و) ق(١)

ل) ق(٢)

ط) ق(٣)

مثال④: اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [-١، ٦] جد كلاً مما يلي:



أ) مجموعة قيم أ حيث نها ق(س) غير موجودة
س ← أ

أ = {٣، ٤، ٥}

ب) مجموعة قيم أ حيث نها ق(س) = ٣
س ← أ

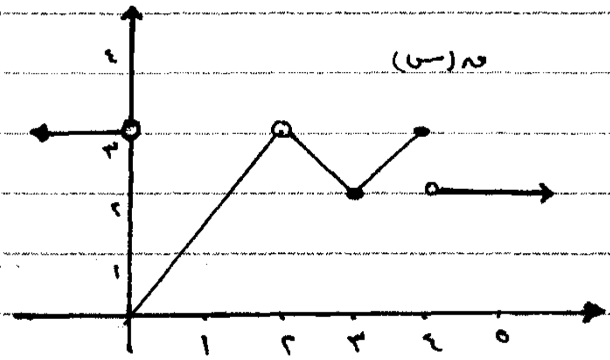
أ = (٣، ٤)

أسئلة سنوات سابقة

صيفي ٢٠٠٩: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن قيم أ حيث أن نهـا(س←أ) ق(س) = ٣ هي:

أ) (-∞، ٠] ∪ {٢} ب) (-∞، ٠) ∪ {٢}

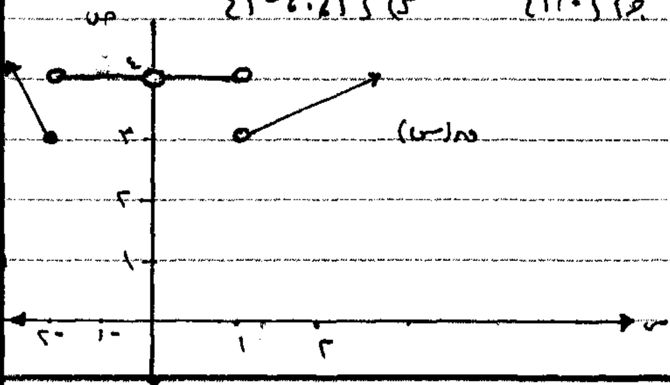
ج) (-∞، ٠] ∪ {٢، ٤} د) (-∞، ٠) ∪ {٢، ٤}



شتوي ٢٠١٠: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ بحيث أن نهـا(س←أ+) ق(س) = ٣ هي:

أ) {١} ب) {١، -٢}

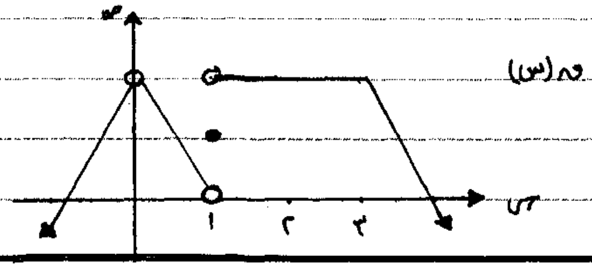
ج) {٠، ١} د) {١، ٠، -٢}



شتوي ٢٠١١: معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق فإن مجموعة قيم ل حيث أن نهـا(س←ل) ق(س) غير موجودة هي:

أ) {٠، ١، ٣} ب) {٠، ١}

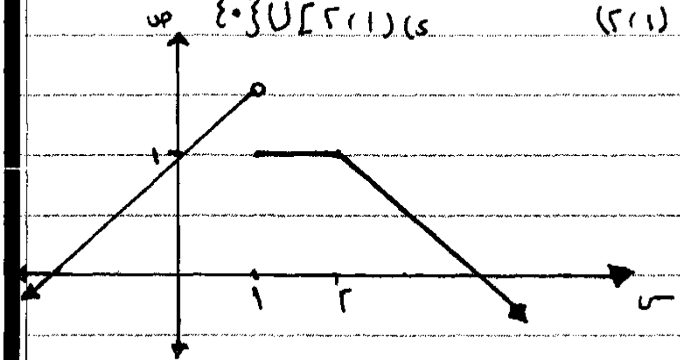
ج) {٣} د) {١}



شتوي ٢٠١٣: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ التي تجعل نهـا(س←أ) ق(س) = ١ هي

أ) (١، ٢] ب) [١، ٢] ∪ {٠}

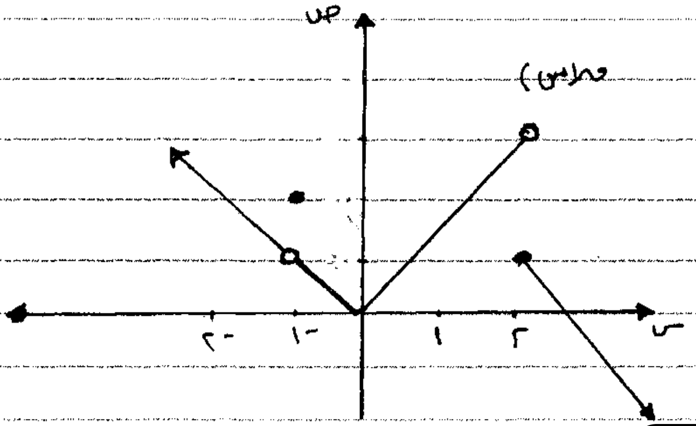
ج) (١، ٢) د) (١، ٢] ∪ {٠}



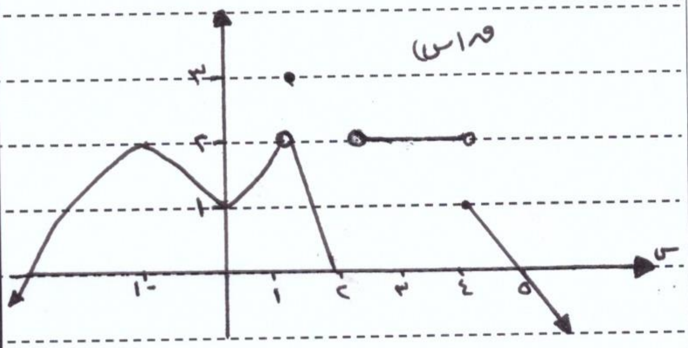
صيفي ٢٠١٣: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح، فإن مجموعة كل قيم ل حيث أن نهـا(س←ل) ق(س) غير موجودة هي

أ) {-١} ب) {٢}

ج) {-١، ٢} د) {-١، ٠، ٢}



وزاري ٢٠١٦: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) : س ∈ ح ، أجب عن كل مما يلي:



١- إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ٢ جد قيم الثابت أ؟

أ ∈ (٢،٤) ∪ {١، -١}

٢- إذا كانت $\lim_{س \to ب}$ ق(س) غير موجودة جد قيم الثابت ب؟

ب ∈ {٢، ٤}

الدرس الثاني: نظريات النهايات

3 حساب النهاية بالتعويض المباشر

نظرية (1):

(1) إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان ق(س) = ب لكل س في مجاله، فإن

$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ب "نهاية الثابت الثابت نفسه"

(2) إذا كان أ $\in$ ح، ق(س) = $س^ن$، فإن

$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) = $أ^ن$ حيث ن $\in$ {1، 2، 3، ...}

"نهاية كثير الحدود صورة العدد".

مثال (1) جد قيمة من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{س \to 3} 5 = 5$ (2) $\lim_{س \to -2} 7 = 7$

(3) $\lim_{س \to 1} -4 = -4$ (4) $\lim_{س \to 5} -8 = -8$

(5) $\lim_{س \to 2} س^3 = (2)^3 = 8$ (6) $\lim_{س \to -1} س^2 = (-1)^2 = 1$

(7) $\lim_{س \to 1} (س^4 + 3س - 1) = (1)^4 + 3\times 1 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

(8) $\lim_{س \to 3} (2س - 4) = 2\times 3 - 4 = 2$

نظرية (2):

إذا كان ق، هـ اقترانين، أ، ب، جـ، م $\in$ ح بحيث أن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ب ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = جـ فإن:

(1) $\lim_{س \to أ}$ (ق(س) $\pm$ هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) $\pm$ $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ب $\pm$ جـ

(2) $\lim_{س \to أ}$ م ق(س) = م $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = م $\times$ ب

(3) $\lim_{س \to أ}$ (ق(س) $\times$ هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) $\times$ $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ب $\times$ جـ

(4) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}$ ، جـ $\neq$ صفر

(5) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ب}$. شرط ب > 0 و ن عدد زوجي

ملاحظة: تتوزع النهاية على جميع العمليات الحسابية {جمع وطرح وضرب، قسمة والأسس}. وتتوزع النهاية على الجذور بشرط أن يكون الجذر معرف.

مثال (1): إذا علمت أن $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = 4 ، $\lim_{س \to 3}$ هـ(س) = 6 جد كلاً مما يلي:

(1) $\lim_{س \to 3}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \to 3}$ ق(س) + $\lim_{س \to 3}$ هـ(س)

$= 4 + 6 = 10$

(2) $\lim_{س \to 3}$ (5ق(س) - 2هـ(س)) = 5 $\lim_{س \to 3}$ ق(س) - 2 $\lim_{س \to 3}$ هـ(س)

$= 5\times 4 - 2\times 6 = 8$

(3) $\lim_{س \to 3} \sqrt{\frac{ق(س)}{هـ(س)}} = \sqrt{\frac{\lim_{س \to 3} ق(س)}{\lim_{س \to 3} هـ(س)}} = \sqrt{\frac{4}{6}}$

(4) $\lim_{س \to 3}$ (2س ق(س) + $(هـ(س))^2$)

= $\lim_{س \to 3}$ 2س $\times$ $\lim_{س \to 3}$ ق(س) + $(\lim_{س \to 3} هـ(س))^2$

$= 2\times 3 \times 4 + (6)^2 = 24 + 36 = 60$

(5) $\lim_{س \to 3}$ (2ق(س) $\times$ هـ(س))

= 2 $\lim_{س \to 3}$ ق(س) $\times$ $\lim_{س \to 3}$ هـ(س)

$= 2\times 4\times 6 = 48$

مثال (2): إذا كانت $\lim_{س \to -2}$ ق(س) = 5 ، $\lim_{س \to -2}$ هـ(س) = -3

جد كلاً مما يلي:

(1) $\lim_{س \to -2}$ (3ق(س) - 2هـ(س))

= 3 $\lim_{س \to -2}$ ق(س) - 2 $\lim_{س \to -2}$ هـ(س)

$= 3\times 5 - 2\times -3 = 15 + 6 = 21$

(2) $\lim_{س \to -2} \sqrt[3]{5هـ(س) + 6س} = \sqrt[3]{5 \lim_{س \to -2} هـ(س) + \lim_{س \to -2} 6س}$

$= \sqrt[3]{5\times -3 + 6\times -2} = \sqrt[3]{-15 + -12}$

$= \sqrt[3]{-27} = -3$

③ $\lim\limits_{س\to-٢} \left(\frac{س^٣-١}{هـ(س)} + \sqrt{٢ق(س)+س^٤+٢} \right)$

$= \frac{\lim\limits_{س\to-٢} س^٣-١}{\lim\limits_{س\to-٢} هـ(س)} + \sqrt{٢\lim\limits_{س\to-٢} ق(س) + \lim\limits_{س\to-٢}(س^٤+٢)}$

$= \frac{(-٢)^٣-١}{-٣} + \sqrt{٢\times٥+(-٢)^٤+٢} = \frac{-٩}{-٣} + \sqrt{١٦}$

$٣+٤ = ٧$

④ $\lim\limits_{س\to-٢} \left(هـ^٣(س) - ٢ق^٢(س) \right)$

$\left(\lim\limits_{س\to-٢} هـ(س)\right)^٣ - ٢\left(\lim\limits_{س\to-٢} ق(س)\right)^٢$

$(-٣)^٣ - ٢(٥)^٢ = -٢٧ - ٥٠ = -٧٧$

مثال⑤: إذا كانت $\lim\limits_{س\to٤} ق(س) = ٨$ فجد

$\lim\limits_{س\to٢} \left(٦ق(٣س-٢) + ٥س^٢\right)$

$\lim\limits_{س\to٢} \left(٦ق(٣س-٢) + ٥س^٢\right)$

$= ٦\underbrace{\lim\limits_{س\to٢} ق(٣س-٢)}_{\text{استبدال}} + \lim\limits_{س\to٢} ٥س^٢$

$ص = ٣س-٢$ $\quad ٣\times٢-٢ = ٦-٢ = ٤$

عندما $س\to٢$ فإن $ص\to٤$

$٦\lim\limits_{ص\to٤} ق(ص) + \lim\limits_{س\to٢} ٥س^٢$

$٦\times٨ + ٥\times٤ = ٤٨+٢٠ = ٦٨$

مثال③: إذا كانت $\lim\limits_{س\to٢} \left(٣ق(س)+٢س^٢\right) = ٢٠$ فجد

$\lim\limits_{س\to٢} \left(٣ق^٢(س) - ٥س\right)$.

$\lim\limits_{س\to٢} \left(٣ق(س)+٢س^٢\right) = ٣\lim\limits_{س\to٢} ق(س) + \lim\limits_{س\to٢} ٢س^٢ = ٢٠$

$٣\lim\limits_{س\to٢} ق(س) + ٢(٢)^٢ = ٢٠$

$٣\lim\limits_{س\to٢} ق(س) = ٢٠-٨$

$٣\lim\limits_{س\to٢} ق(س) = ١٢ \leftarrow \lim\limits_{س\to٢} ق(س) = ٤$

$\lim\limits_{س\to٢} \left(٣ق^٢(س) - ٥س\right) = ٣\lim\limits_{س\to٢} ق^٢(س) - \lim\limits_{س\to٢} ٥س$

$= ٣\left(\lim\limits_{س\to٢} ق(س)\right)^٢ - ٥\times٢$

$٣(٤)^٢ - ١٠ = ٤٨-١٠ = ٣٨$

مثال⑥: إذا علمت أن $\lim\limits_{س\to٣} \left(\frac{١}{٣}ق(س) - ٤\right) = ١$

جد $\lim\limits_{س\to٩} \left(ق(\sqrt{س}) + ٢س - ١\right)$

$\lim\limits_{س\to٩} ق(\sqrt{س}) + \lim\limits_{س\to٩} (٢س-١)$

$ص = \sqrt{س}$

عندما $س\to٩$ فإن $ص\to٣$

$\lim\limits_{ص\to٣} ق(ص) + \lim\limits_{س\to٩} (٢س-١)$

$١٥ + (٢\times٩-١)$

$١٥+١٧$

٣٢

$\lim\limits_{س\to٣} \left(\frac{١}{٣}ق(س) - ٤\right) = ١$

$\frac{١}{٣}\lim\limits_{س\to٣} ق(س) = ١+٤$

$\frac{١}{٣}\lim\limits_{س\to٣} ق(س) = ٥$

$\lim\limits_{س\to٣} ق(س) = ١٥$

مثال④: إذا علمت أن $\lim\limits_{س\to-١} \left(٤س\,ق(س)+٣\right) = ١١$

جد $\lim\limits_{س\to-١} \left(ق^٤(س) + \frac{٧}{ق(س)}\right)$.

$\lim\limits_{س\to-١} \left(٤س\,ق(س)+٣\right) = \lim\limits_{س\to-١} ٤س \times \lim\limits_{س\to-١} ق(س) + ٣ = ١١$

$-٤\lim\limits_{س\to-١} ق(س) = ٨ \leftarrow \lim\limits_{س\to-١} ق(س) = -٢$

$\lim\limits_{س\to-١} \left(ق^٤(س) + \frac{٧}{ق(س)}\right) = \left(\lim\limits_{س\to-١} ق(س)\right)^٤ + \frac{٧}{\lim\limits_{س\to-١} ق(س)}$

$= (-٢)^٤ + \frac{٧}{-٢}$

$١٦ + \frac{-٧}{٢} = \frac{٣٢-٧}{٢} = \frac{٢٥}{٢}$

مثال⑦: إذا كانت $\lim\limits_{س\to١} ق(٢س-٤) = ٥$ فجد $\lim\limits_{س\to-٢} \left(ق^٢(س) + \frac{١٠}{ق(س)}\right)$

$\lim\limits_{س\to١} ق(٢س-٤) = ٥$

$ص = ٢س-٤$ عندما $س\to١$ فإن $ص\to-٢$

$\therefore \lim\limits_{ص\to-٢} ق(ص) = ٥$

$\lim\limits_{س\to-٢} \left(ق^٢(س) + \frac{١٠}{ق(س)}\right) = \left(\lim\limits_{س\to-٢} ق(س)\right)^٢ + \frac{١٠}{\lim\limits_{س\to-٢} ق(س)}$

$= (٥)^٢ + \frac{١٠}{٥}$

$= ٢٥+٢$

٢٧

مثال ⑤: إذا علمت أن نها$_{س\to 1}$ ٢ ق$(س^٢-١)$ = ٦ ، جد نها$_{س\to ٠}$ (٤ ق(س) − ٧).

نها$_{س\to 1}$ ٢ ق$(س^٢-١)$ = ٢ نها$_{س\to 1}$ ق$(س^٢-١)$ = ٦

∴ نها$_{س\to 1}$ ق$(س^٢-١)$ = ٣

ص = س^٢ − ١ عندما س ← ١ فإن ص ← ٠

∴ نها$_{ص\to ٠}$ ق(ص) = ٣

نها$_{س\to ٠}$ (٤ ق(س) − ٧) = ٤ نها$_{س\to ٠}$ ق(س) − ٧

= ٤ × ٣ − ٧ = ٥

نهاية الاقترانات المتشعبة:

[1] نهاية الاقتران المتشعب الصريح:

لإيجاد النهاية عند نقطة التشعب "التحول" نجد النهاية عن يمين النقطة ويسارها وإذا تساوتا نقول أن النهاية موجودة وإذا لم تتساويا فإن النهاية غير موجودة.

مثال ①: إذا كان ق(س) = { ٢س^٢ − ١ ، س ≥ ١
{ ٥س − ٤ ، س < ١

اوجد ⓐ نها$_{س\to 1}$ ق(س)

نها$_{س\to 1^+}$ ق(س) = نها$_{س\to 1^+}$ (٢س^٢ − ١) = ٢(١)^٢ − ١ = ١

نها$_{س\to 1^-}$ ق(س) = نها$_{س\to 1^-}$ (٥س − ٤) = ٥×١ − ٤ = ١

∴ نها$_{س\to 1^-}$ ق(س) = نها$_{س\to 1^+}$ ق(س) = ١

∴ نها$_{س\to 1}$ ق(س) = ١ موجودة

ⓑ نها$_{س\to ٣}$ ق(س) = نها$_{س\to ٣}$ (٢س^٢ − ١) = ٢(٣)^٢ − ١ = ١٧

ⓒ نها$_{س\to ٠}$ ق(س) = نها$_{س\to ٠}$ (٥س − ٤) = ٥×٠ − ٤ = −٤

مثال ②: إذا كان ق(س) = { س^٣ + ٤ ، س < −٢
{ ٢س + ١ ، س = −٢
{ ٣س + ١ ، س > −٢

اوجد كل من مايلي:

① نها$_{س\to -٢}$ ق(س)

نها$_{س\to -٢^+}$ ق(س) = نها$_{س\to -٢^+}$ (٣س + ١) = ٣×−٢ + ١ = −٥

نها$_{س\to -٢^-}$ ق(س) = نها$_{س\to -٢^-}$ (س^٣ + ٤) = (−٢)^٣ + ٤ = −٤

∴ نها$_{س\to -٢^+}$ ق(س) ≠ نها$_{س\to -٢^-}$ ق(س)

∴ نها$_{س\to -٢}$ ق(س) غير موجودة.

② نها$_{س\to -٣}$ ق(س) = نها$_{س\to -٣}$ (س^٣ + ٤) = (−٣)^٣ + ٤ = −٢٧ + ٤ = −٢٣

③ نها$_{س\to ٠}$ ق(س) = نها$_{س\to ٠}$ (٣س + ١) = ٣×٠ + ١ = ١

مثال ③: إذا كان ق(س) = { ٣س^٢ − ٤ ، ٠ ≤ س < ٢
{ ٢س − ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

جد:

① نها$_{س\to ٢}$ ق(س)

نها$_{س\to ٢^+}$ ق(س) = نها$_{س\to ٢^+}$ (٢س − ١) = ٢×٢ − ١ = ٣

نها$_{س\to ٢^-}$ ق(س) = نها$_{س\to ٢^-}$ (٣س^٢ − ٤) = ٣(٢)^٢ − ٤ = ٨

∴ نها$_{س\to ٢^+}$ ق(س) ≠ نها$_{س\to ٢^-}$ ق(س)

∴ نها$_{س\to ٢}$ ق(س) غير موجودة

② نها$_{س\to ٣}$ ق(س) = نها$_{س\to ٣}$ (٢س − ١) = ٢×٣ − ١ = ٥

③ نها$_{س\to ٠}$ ق(س) = غير موجودة (لأنه طرف فترة)

④ نها$_{س\to ٠^+}$ ق(س) = نها$_{س\to ٠^+}$ (٣س^٢ − ٤) = ٣(٠)^٢ − ٤ = −٤

⑤ نها$_{س\to ٥^-}$ ق(س) = نها$_{س\to ٥^-}$ (٢س − ١) = ٢×٥ − ١ = ٩

⑥ نها$_{س\to ١}$ ق(س) = نها$_{س\to ١}$ (٣س^٢ − ٤) = ٣(١)^٢ − ٤ = −١

الاستاذ ناصر حشكي
0785968199

النهايات والاتصال

مركز أكاديمية الإنتماء
0797852004

مثال ④: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ - ١١ & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٤\text{س} - ٣ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

اوجد ① $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} (٢\text{س}^٢ - ١١) = ٢(٣)^٢ - ١١ = ٧$

② $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} (٢\text{س}^٢ - ١١) = (٢(١)^٢ - ١١) = -٩$

$\boxed{٢}$ نهاية اقترانات القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة: بُعد النقطة التي تمثل العدد الحقيقي عن نقطة الاصل على خط الاعداد ويرمز لها | |.

$|٥| = ٥$ ، $|-٣| = ٣$ ، $|٠| = ٠$ ، $|-٤| = ٤$

إعادة تعريف القيمة المطلقة:

① إيجاد أصفار الاقتران وذلك بالمساواة ما داخل القيمة المطلقة بالصفر

② نحدد أصفار الاقتران على خط الأعداد

③ اختبار الاشارة وكتابة القواعد وذلك

اشارة موجب يبقى الاقتران كما هو والسالب نقوم بضرب الاقتران بسالب واحد.

مثال ①: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$ فجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} |\text{س} - ٢|$.

نعيد التعريف $\text{س} - ٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٢$

$-(\text{س}-٢)$ ‎ − − − ‎ ٢ ‎ + + + ‎ $\text{س} - ٢$

$\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢| = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{س} > ٢ \\ ٢ - \text{س} & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ونضع المساواة على أي فترة

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} (\text{س} - ٢) = ٢ - ٢ = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} (٢ - \text{س}) = ٢ - ٢ = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

مثال ⑤ جد قيمة النهايات في كل مما يلي

① $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} |\text{س}^٢ - ٩|$ ‎ ‎ $\text{س}^٢ - ٩ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^٢ = ٩$

$\text{س} = \pm ٣$

$\text{س}^٢ - ٩$ ‎ + + + + ‎ −٣ ‎ − − − − ‎ $-(\text{س}^٢ - ٩)$ ‎ ٣ ‎ + + + ‎ $\text{س}^٢ - ٩$

$|\text{س}^٢ - ٩| = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٩ & ، \text{س} \geq ٣ \text{ ، } \text{س} \leq -٣ \\ ٩ - \text{س}^٢ & -٣ < \text{س} < ٣ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \text{س}^٢ - ٩ = \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نها}} ٩ - \text{س}^٢ = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} |\text{س} - \text{س}^٢|$

$\text{س} - \text{س}^٢ = \text{صفر}$

$\text{س}(١ - \text{س}) = \text{صفر}$

$\text{س} = ٠ ، \text{س} = ١$

$\text{س}^٢ - \text{س}$ ‎ − − ‎ ٠ ‎ + + ‎ $\text{س} - \text{س}^٢$ ‎ ١ ‎ − − ‎ $\text{س}^٢ - \text{س}$

$|\text{س} - \text{س}^٢| = \begin{cases} \text{س}^٢ - \text{س} & ، \text{س} \geq ١ \text{ ، } \text{س} \leq ٠ \\ \text{س} - \text{س}^٢ & ، ٠ \leq \text{س} < ١ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \text{س} - \text{س}^٢ = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \text{س}^٢ - \text{س} = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} |\text{س} - \text{س}^٢| = \text{صفر}$

③: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س} - ٣| - ١}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$|\text{س} - ٣| = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq ٣ \\ ٣ - \text{س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣ - \text{س} - ١}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} = -١$

④ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(\text{س} + ٢)^٢}}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س} + ٢|}{\text{س} + ٢}$

$|\text{س} + ٢| = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \text{س} \geq -٢ \\ -\text{س} - ٢ & ، \text{س} < -٢ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to -٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} \overset{?}{=} \underset{\text{س}\to -٢^-}{\text{نها}} \dfrac{-\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$

$١ \neq -١$ نهاية غير موجودة.

خصائص القيمة المطلقة

١) $|\text{س}| = \text{أ} \Leftarrow \text{س} = \text{أ} ، -\text{أ}$ ‎ ‎ ٢) $|\text{س}| < \text{أ} \Leftarrow -\text{أ} < \text{س} < \text{أ}$

٣) $|\text{س}| > \text{أ} \Leftarrow \text{س} > \text{أ} ، \text{س} < -\text{أ}$

٤) $\sqrt{\text{س}^٢} = |\text{س}|$

③ نهاية اقتران أكبر عدد صحيح

تذكير: $[3] = 3$ ، $[-5] = -5$

$[6.9] = 6$ ، $[-6.9] = -7$

$[0.8] = 0$ ، $[-0.5] = -1$

إعادة تعريف الأكبر عدد صحيح $[\text{م}\,\text{س} + \text{ب}]$:

① نجد طول الدرجة $\text{ل} = \dfrac{1}{|\text{معامل س}|} = \dfrac{1}{|\text{م}|}$

② نجد أصفار الاقتران وتحديد الأصفار على خط الأعداد

③ نزيد أو نطرح طول درجة حسب الفترة المطلوبة.

④ عندما يكون معامل س موجب تكون المساواة للطرف الأول، عندما يكون معامل س سالب تكون المساواة للطرف الثاني.

مثال ①: اعد تعريف الاقترانات الآتية.

① $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س} + 1]$ ، $\text{س} \in [1, 4]$

$\text{س} + 1 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = -1$

$\text{ل} = \dfrac{1}{|1|} = 1$

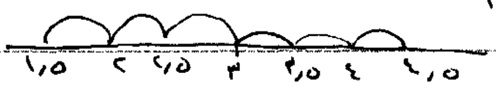
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2 , & 1 \le \text{س} < 2 \\ 3 , & 2 \le \text{س} < 3 \\ 4 , & 3 \le \text{س} < 4 \\ 5 , & \text{س} = 4 \end{cases}$$

معامل س موجب المساواة عند بداية الفترة

② $\text{هـ}(\text{س}) = [2\text{س} - 6]$

$2\text{س} - 6 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = 3$

$\text{ل} = \dfrac{1}{|2|} = \dfrac{1}{2}$



∴ المساواة عند بداية الفترة لأن

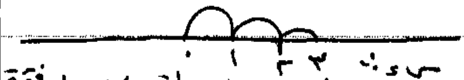
معامل س موجب

قيم الاقتران تزداد

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} -3 , & 1.5 \le \text{س} < 2 \\ -2 , & 2 \le \text{س} < 2.5 \\ -1 , & 2.5 \le \text{س} < 3 \\ 0 , & 3 \le \text{س} < 3.5 \\ 1 , & 3.5 \le \text{س} < 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

③ $\text{ق}(\text{س}) = [2 - \text{س}]$ ، $\text{س} \in [0, 3]$

$2 - \text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = 2$ ، $\text{ل} = \dfrac{1}{|-1|} = 1$



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2 , & \text{س} = 0 \\ 1 , & 0 < \text{س} \le 1 \\ 0 , & 1 < \text{س} \le 2 \\ -1 , & 2 < \text{س} \le 3 \end{cases}$$

المساواة على يسار فترة لأن معامل س سالب

④ $\text{ل}(\text{س}) = [5 - \text{س}]$ ، $\text{س} \in [1, 5]$

$5 - \text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = 5$ ، $\text{ل} = \dfrac{1}{|-1|} = 1$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} 4 , & \text{س} = 1 \\ 3 , & 1 < \text{س} \le 2 \\ 2 , & 2 < \text{س} \le 3 \\ 1 , & 3 < \text{س} \le 4 \\ 0 , & 4 < \text{س} \le 5 \end{cases}$$

معامل س سالب لذلك المساواة على يسار الفترة وقيم الاقتران تتناقص

ملاحظة: لإيجاد نهاية اقتران $\text{ق}(\text{س}) = [\;]$ عند نقطة فإن:

① إذا كان اقتران $[\;]$ غير مرتبط بالاقتران آخر فإن ناتج التعويض المباشر (الداخلي) عدد صحيح فإن النهاية غير موجودة وذلك لأن نهاية عند اليمين ≠ نهاية من اليسار، وإذا كان ناتج تعويض المباشر (داخلي) عدد غير صحيح فإن النهاية موجودة.

② إذا كان اقتران $[\;]$ مرتبط بالاقتران آخر فهنا لا بد من إعادة تعريف ليكون لدينا اقتران متشعب نجد نهاية عند النقطة المطلوبة.

مثال ②: اوجد $\lim_{\text{س}\to ٠,٣} [٢\text{س} + ٤] = [٠,٦ + ٤] = [٤,٦] = ٤$

لأن ناتج تعويض عدد غير صحيح

مثال ③: $\lim_{\text{س}\to ٠,١} [٦ - ٣\text{س}] = [٦ - ٠,٣] = [٥,٧] = ٥$

مثال ④: $\lim_{\text{س}\to ٢,١} [٦\text{س} + ٠,٨] = [١٢,٦ + ٠,٨] = [٢] =$ غير موجودة

لأن ناتج تعويض عدد صحيح.

مثال ⑤: $\lim_{\text{س}\to ١} [\frac{١}{٢}\text{س} - ٨] = [\frac{١}{٢} - ٨] = [-٧,٥] = -٨$

مثال ⑥: $\lim_{\text{س}\to ٢,٥} [\text{س}]^{[\text{س}]} = [٢,٥]^{[٢,٥]} = ٢^{٢} = ٤$

مثال ⑦: $\lim_{\text{س}\to ٤,٨} [\text{س} - ١]^{[\text{س} - ٢]} = [٤,٨ - ١]^{[٤,٨ - ٢]} = ٣^{٢} = ٩$

$$[\text{س} + ١] = \begin{cases} ١ & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٢ & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} - ١ & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} - ٢ & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ٣ & ، ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

أ) $\lim_{\text{س}\to \frac{١}{٤}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to \frac{١}{٤}} (٢\text{س} - ١) = ٢ \times \frac{١}{٤} - ١ ، = -\frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{\text{س}\to ٤} \text{ق(س)}$

$\lim_{\text{س}\to ٤^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٤^{+}} (٢\text{س} - ٣) = ٢\times٤ - ٣ ، ٥$

$\lim_{\text{س}\to ٤^{-}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٤^{-}} (٢\text{س} - ٢) = ٢\times٤ - ٢ ، ٦$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٤} \text{ق(س)}$ غير موجودة

مثال ⑧: جد قيمة $\lim_{\text{س}\to ٠} ٢\text{س}[\text{س}]$.

لابد من إعادة تعريف $[\text{س}]$. س ، :

$-١ \quad ٠ \quad ١$

$$[\text{س}] = \begin{cases} -١ & ، -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = ٢\text{س}[\text{س}] = \begin{cases} -١ \times ٢\text{س} & ، -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٠ \times ٢\text{س} & ، ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} -٢\text{س} & ، -١ \le \text{س} < ٠ \\ \text{صفر} & ، ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{صفر} ، \text{صفر}$

$\lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} -٢\text{س} = -٢\times٠ ، \text{صفر}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق(س)} = \text{صفر}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{ق(س)} = \text{صفر}$ موجودة .

مثال ⑩: ليكن $\text{ق(س)} ، [\text{س} + ٨] - [\text{س} + ٣]$ اوجد $\lim_{\text{س}\to ٤} \text{ق(س)}$.

$\text{ق(س)} ، [\text{س} + ٨] - [\text{س} + ٣]$

$= [\text{س}] + ٨ - [\text{س}] - ٣$

$\text{ق(س)} = ٥$

$\lim_{\text{س}\to ٤} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٤} ٥ = ٥$.

لا يمكن استخدام $\lim_{\text{س}\to ٤} ([\text{س} + ٨] - [\text{س} + ٣]) = \lim_{\text{س}\to ٤} [\text{س} + ٨] - \lim_{\text{س}\to ٤} [\text{س} + ٣]$ لانه شرط استخدام نظرية أن نهاية موجودة للاقترانين .

يمكن حل المثال بإعادة تعريف الاقترانين .

مثال ⑨: إذا كان $\text{ق(س)} ، ٢\text{س}^{٢} - [\text{س} + ١]$ اوجد:

أ) $\lim_{\text{س}\to \frac{١}{٤}} \text{ق(س)}$

ب) $\lim_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)}$

لابد من اعادة تعريف

مثال ⑪: اوجد قيمة $\lim_{\text{س}\to ١,١} \frac{[٤ - \text{س}]}{٢}$.

اعادة تعريف $[٤ - \text{س}]$ ، تعويض مباشر

$\lim_{\text{س}\to ١,١} \frac{[٤ - ١,١]}{٢} = \lim_{\text{س}\to ١,١} \frac{[٢,٩]}{٢} = \lim_{\text{س}\to ١,١} \frac{٢}{٢} =$

$\lim_{\text{س}\to ١,١} ١ ، ١$

مثال (11): إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |س+٢| ، & ٣ \le س < ٥ \\ [س-١] ، & ٥ \le س < ٧ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٥} ق(س)$.

إعادة تعريف:

$ق(س) = \begin{cases} س+٢ ، & ٣ \le س < ٥ \\ ٤ ، & ٥ \le س < ٦ \\ ٥ ، & ٦ \le س < ٧ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^+} ق(س) = \lim_{س \to ٥^+} ٤ = ٤$

$\lim_{س \to ٥^-} ق(س) = \lim_{س \to ٥^-} س+٢ = ٧$

$\lim_{س \to ٥} ق(س)$ غير موجودة.

إيجاد المجاهيل في النهايات:

في الاقترانات المتشعبة التي يوجد فيها مجاهيل وذكر في سؤال أن النهاية موجودة فإن نهاية من يمين = نهاية من يسار .

مثال (1): إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س - أ ، & س \ge ٢ \\ س^٢ + ٥ ، & س < ٢ \end{cases}$

جد قيمة الثابت أ بحيث أن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢^+} (س - أ) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ + ٥)$

$٢ - أ = ٤ + ٥$

$٢ - أ = ٩ \leftarrow -أ = ٧ \leftarrow \boxed{أ = -٧}$

مثال (2): إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٤أ ، & س < -١ \\ ٥س ، & س = -١ \\ أس^٢ + ٨ ، & س > -١ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to -١} ق(س)$ موجودة.

$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = \lim_{س \to -١^-} ق(س)$

$\lim_{س \to -١^+} (أس^٢ + ٨) = \lim_{س \to -١^-} (س^٣ + ٤أ)$

$أ + ٨ = -١ + ٤أ$

$٨ + ١ = ٤أ - أ \leftarrow ٣أ = ٩ \leftarrow \boxed{أ = ٣}$

مثال (3): إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ + |س|}{٤س} = ٣$ ، فما قيمة أ ؟؟

$\frac{أ + |٢|}{٤ \times ٢} = ٣ \leftarrow أ + ٢ = ٣ \times ٨$

$أ + ٢ = ٢٤$

$\boxed{أ = ٢٢}$

تذكير: $[ق(س)] = أ$

$أ \le ق(س) < أ + ١$

① $[س] = ٣$: $٣ \le س < ٤$ ، $س \in [٣، ٤)$

② $[٣س+١] = ٤$: $٤ \le ٣س + ١ < ٥$

$٣ \le ٣س < ٤$

$١ \le س < \frac{٤}{٣}$ ، $س \in [١، \frac{٤}{٣})$

③ إذا كانت $أ \in ص$ فإن $[أ]^- = أ - ١$ ، $[أ]^+ = أ$

④ إذا كانت $أ \notin ص$: $[أ]^+ = [أ]^- = أ$

مثال (4): إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س+٢] ، & س \ge أ \\ ٧ - [س] ، & س < أ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة.

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

$\lim_{س \to أ^+} [س+٢] = \lim_{س \to أ^-} ٧ - [س]$

$[أ+٢]^+ = ٧ - [أ]^-$

$[أ]^+ + ٢ = ٧ - [أ]^-$

هنا يوجد حالتين

① $\text{أ} \in \text{ص}$: $[\text{أ}]^{+} + 2 = 7 - [\text{أ}]^{-}$

$\text{أ} + 2 = 7 - \text{أ} + 1$

$\text{أ} + \text{أ} = 8 - 2$

$2\text{أ} = 6 \leftarrow \boxed{\text{أ} = 3}$

② $\text{أ} \notin \text{ص}$: $[\text{أ}]^{+} + 2 = 7 - [\text{أ}]^{-}$

$[\text{أ}] + 2 = 7 - [\text{أ}]$

$[\text{أ}] + [\text{أ}] = 7 - 2$

$2[\text{أ}] = 5 \leftarrow [\text{أ}] = \frac{5}{2}$

لا يوجد لها حل

مثال ⑩: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} - 2] &، \text{س} \geq \text{أ} \\ 6 - [\text{س}] &، \text{س} < \text{أ} \end{cases}$

جد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة.

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{ق}(\text{س})$

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} [\text{س} + 2] = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} 6 - [\text{س}]$

$[\text{أ} - 2]^{+} = 6 - [\text{أ}]^{-}$

① $\text{أ} \in \text{ص}$

$[\text{أ}]^{+} - 2 = 6 - [\text{أ}]^{-}$

$\text{أ} - 2 = 6 - \text{أ} + 1$

$\text{أ} + \text{أ} = 7 + 2$

$2\text{أ} = 9 \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{9}{2}}$

② $\text{أ} \notin \text{ص}$

$[\text{أ}]^{+} + 2 = 6 - [\text{أ}]^{-}$

$[\text{أ}] + 2 = 6 - [\text{أ}]$

$[\text{أ}] + [\text{أ}] = 6 + 2$

$2[\text{أ}] = 8$

$[\text{أ}] = 4$

$4 \leq \text{أ} < 5$

$\text{أ} \in [4 ، 5)$

مثال ⑨: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس} + \text{س}^2 &، 0 \leq \text{س} \leq 2 \\ [\text{س}] + 6 & 2 < \text{س} \leq 5 \end{cases}$

جد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

$\lim_{\text{س} \to 2^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 2^{-}} \text{ق}(\text{س})$

$\lim_{\text{س} \to 2^{+}} [\text{س}] + 6 = \lim_{\text{س} \to 2^{-}} (\text{أس} + \text{س}^2)$

$[2] + 6 = 2\text{أ} + 4$

$2 + 6 = 2\text{أ} + 4$

$8 - 4 = 2\text{أ} \leftarrow 4 = 2\text{أ} \leftarrow \boxed{\text{أ} = 2}$

الدرس الثالث: نهاية الاقترانات الكسرية

الاقتران الكسري: هو اقتران على صورة $\frac{\text{ق}(س)}{\text{ع}(س)}$

عند إيجاد نهاية الاقتران النسبي (الكسري) نقوم بعملية التعويض المباشر ويكون لدينا أربع حالات:

[1] $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ نهاية موجودة.

مثال:- جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^2+3}{س-5} = \frac{(2)^2+3}{2-5} = \frac{7}{-3} = \frac{-7}{3}$ موجودة

② $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^2+2س-1}{س+3} = \frac{9+6-1}{3+3} = \frac{14}{6}$ ، 2,3 موجودة

[2] $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$ نهاية موجودة.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{س^2-16}{س+8} = \frac{16-16}{8+4} = \frac{\text{صفر}}{12} = \text{صفر}$ موجودة

② $\underset{س \to -5}{\text{نها}} \frac{س+5}{س^2+10} = \frac{-5+5}{(-5)^2+10} = \frac{\text{صفر}}{15} = \text{صفر}$ موجودة

[3] $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ نهاية غير موجودة.

مثال:- جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^2-2}{س-3} = \frac{9-2}{3-3} = \frac{7}{\text{صفر}}$ غير موجودة

② $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^2+1}{2س-6} = \frac{9+1}{2\times3-6} = \frac{10}{\text{صفر}}$ = غير موجودة

[4] $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة في هذه الحالة

نقوم بمعالجة صفر المقام بإحدى الطرق الآتية:

① الاختصار ② تحليل الى عوامل

③ توحيد مقامات ④ ضرب المرافق (تربيعي، تكعيبي)

⑤ استبدال ⑥ إضافة وطرح

① الاختصار :- يكون ناتج تعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويحوي البسط والمقام على مقدارين متشابهين أو معاكسين بالإشارة مثل: $\frac{س-أ}{س-أ}$ ، $\frac{س-أ}{أ-س}$ ، $\frac{-س-أ}{س+أ}$

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س-2}{س-2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ،
$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{\cancel{س-2}}{\cancel{س-2}} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} 1$ ، 1

② $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^3-27}{27-س^3} = ÷ \leftarrow \underset{س \to 3}{\text{نها}} \frac{س^3-27}{-(س^3-27)} = \underset{س \to 3}{\text{نها}} -1$ ، -1

③ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{4-س^2}{س^2-4} = ÷ \leftarrow \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{-(س^2-4)}{س^2-4} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} -1$ ، -1

② تحليل الى عوامل

تذكير:

* فرق بين مربعين $(س^2-أ^2) = (س-أ)(س+أ)$
* فرق بين مكعبين $(س^3-أ^3) = (س-أ)(س^2+أس+أ^2)$
* مجموع بين مكعبين $(س^3+أ^3) = (س+أ)(س^2-أس+أ^2)$

ملاحظة:- ① نستخدم تحليل في أغلب الأحيان إذا كان ناتج تعويض ÷ وكان $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$.

② عندما تكون نهاية تقترب من العدد أ

س ← أ نحذف من بسط ومقام $(س-أ)$

س ← −أ نحذف من بسط ومقام $(س+أ)$

مثال:- جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{س^2-1}{س-1} = ÷ \leftarrow \underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)}$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} س+1 = 1+1 = 2$

② $\underset{س \to -9}{\text{نها}} \frac{س^2-81}{س+9} = ÷ \leftarrow \underset{س \to -9}{\text{نها}} \frac{(س-9)(س+9)}{س+9}$

$\underset{س \to -9}{\text{نها}} س-9 = -9-9$ ، -18

③ $\underset{س\to -2}{\text{نها}} \dfrac{س^2-4}{س^2+5س+6} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to -2}{\text{نها}} \dfrac{س^2-4}{س^2+5س+6} = \underset{س\to -2}{\text{نها}} \dfrac{(س-2)\cancel{(س+2)}}{(س+3)\cancel{(س+2)}}$

$\underset{س\to -2}{\text{نها}} \dfrac{س-2}{س+3} = \dfrac{-4}{1} = -4$

④ $\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2-1}{س^3-1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-1)}(س+1)}{\cancel{(س-1)}(س^2+س+1)} = \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{س+1}{س^2+س+1} = \dfrac{2}{3}$

⑤ $\underset{س\to -1}{\text{نها}} \dfrac{س^3+1}{س^2+س} = \dfrac{0}{0}$

$= \underset{س\to -1}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س+1)}(س^2-س+1)}{س\cancel{(س+1)}} = \underset{س\to -1}{\text{نها}} \dfrac{س^2-س+1}{س} = \dfrac{3}{-1} = -3$

⑥ $\underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^3-4س^2}{س^3-8} = \dfrac{0}{0}$

$= \underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^2\cancel{(س-2)}}{\cancel{(س-2)}(س^2+2س+4)} = \underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^2}{س^2+2س+4} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

⑦ $\underset{س\to \frac{9}{2}}{\text{نها}} \dfrac{(2س-5)^2-16}{2س-9} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to \frac{9}{2}}{\text{نها}} \dfrac{(2س-5+4)(2س-5-4)}{2س-9} = \underset{س\to \frac{9}{2}}{\text{نها}} \dfrac{(2س-1)\cancel{(2س-9)}}{\cancel{2س-9}}$

$= \underset{س\to \frac{9}{2}}{\text{نها}} 2س-1 = 8$

⑧ $\underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س-1)^2-4}{س^4-81} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س-1-2)(س-1+2)}{(س^2-9)(س^2+9)} = \underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-3)}(س+1)}{\cancel{(س-3)}(س+3)(س^2+9)}$

$\underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{س+1}{(س+3)(س^2+9)} = \dfrac{4}{6\times 18} = \dfrac{4}{108}$

$= \dfrac{1}{27}$

⑨ $\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س+1)^3-8}{س^2+3س-4} = \dfrac{0}{0}$

$= \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س+1-2)\left((س+1)^2+2(س+1)+4\right)}{(س-1)(س+4)}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-1)}\left((س+1)^2+2(س+1)+4\right)}{\cancel{(س-1)}(س+4)}$

$= \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س+1)^2+2(س+1)+4}{س+4} = \dfrac{4+4+4}{5} = \dfrac{12}{5}$

⑩ $\underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-3)^2-1}{(س^3-7)^2-1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-3-1)(س^2-3+1)}{(س^3-7-1)(س^3-7+1)} = \underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-4)(س^2-2)}{(س^3-8)(س^3-6)}$

$= \underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-2)\cancel{(س-2)}(س+2)}{\cancel{(س-2)}(س^2+2س+4)(س^2-6)} =$

$= \underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-2)(س+2)}{(س^2+2س+4)(س^2-6)} = \dfrac{2\times 4}{12\times 2} = \dfrac{1}{3}$

⑪ $\underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2س+1)^3-125}{(2س^2-4)^2-16}$

ج : $\dfrac{75}{13}$

⑫ $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٣ + ٢س^٢ - ٥س - ٦}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٢}{نها} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٤س + ٣)}{\cancel{(س - ٢)}(س - ١)} = \underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س - ١}$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٢	−٥	−٦
$\boxed{٢}$		٢	٨	٦
	١	٤	٣	٠

$س^٢ + ٤س + ٣$

$= \frac{٤ + ٨ + ٣}{١} = ١٥$

⑬ $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س^٣ - ٣س^٢ - ٦س + ٨}{س^٣ - س} = \frac{٠}{٠}$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	−٣	−٦	٨
$\boxed{١}$		١	−٢	−٨
	١	−٢	−٨	٠

$س^٢ - ٢س - ٨$

$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{(س - ١)(س^٢ - ٢س - ٨)}{س(س^٢ - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ - ٢س - ٨)}{س\cancel{(س - ١)}(س + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{س^٢ - ٢س - ٨}{س(س + ١)} = \frac{-٩}{٢}$

⑭ $\underset{س \to -١}{نها} \frac{٢س^٣ - س^٢ - ٨س - ٥}{س^٣ + ١}$

ج : صفر

⑮ $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٦ - ٩س^٣ + ٨}{٣س^٤ - ١٢س} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٢}{نها} \frac{(س^٣)^٢ - ٩(س^٣) + ٨}{٣س(س^٢ - ٤)} = \underset{س \to ٢}{نها} \frac{(س^٣ - ٨)(س^٣ - ١)}{٣س(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{نها} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٢س + ٤)(س^٣ - ١)}{٣س\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)} = \ldots$

$= \underset{س \to ٢}{نها} \frac{(س^٢ + ٢س + ٤)(س^٣ - ١)}{٣س(س + ٢)} = \frac{١ \times ٤٢}{٤ \times ٦} = \frac{١}{٢}$

③ توحيد المقامات :

إذا كان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ واحتوى البسط أو المقام أو كلاهما على كسر.

مثال: جد قيمة كل مما يلي :

① $\underset{س \to ٣}{نها} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٣}{نها} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right) \times \left(\frac{١}{س - ٣}\right) =$

$= \underset{س \to ٣}{نها} \frac{\cancel{٣ - س}}{٣س} \times \frac{١}{\cancel{س - ٣}} = \underset{س \to ٣}{نها} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$

② $\underset{س \to ٤}{نها} \frac{\frac{٣}{س + ٢} - \frac{٢}{س}}{س - ٤}$

ج : $\frac{١}{٢٤}$

③ $\underset{س \to ١}{نها} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢س}\right)\left(\frac{١}{س^٣ - ١}\right)$

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{٢س - ٢}{٤س} \times \frac{١}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{٢\cancel{(س - ١)}}{٤س} \times \frac{١}{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}$

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{٢}{٤س} \times \frac{١}{س^٢ + س + ١}$

$\frac{٢}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

④ $\lim_{س\to ٢} \left(\frac{١}{س+٣} - \frac{٢}{٣س+٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢+س-٢}\right)$

ج: $\boxed{\frac{١}{٩٦}}$

⑤ $\lim_{س\to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{س+٥} - \frac{١}{٥-س}\right)$

$\lim_{س\to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{٥-س-٥-س}{(٥-س)(س+٥)} = \lim_{س\to ٠} \frac{١}{\cancel{س}} \times \frac{-٢\cancel{س}}{(٥-س)(س+٥)}$

$\lim_{س\to ٠} \frac{-٢}{(٥-س)(س+٥)} = \frac{-٢}{٢٥}$

⑥ $\lim_{س\to ٢} \left(١-\frac{٢}{س}\right)\left(\frac{٣}{س^٢-٤}\right)$

$\lim_{س\to ٢} \left(\frac{١}{١} - \frac{٢}{س}\right)\left(\frac{٣}{س^٢-٤}\right) = \lim_{س\to ٢} \left(\frac{س-٢}{س}\right)\left(\frac{٣}{س^٢-٤}\right)$

$\lim_{س\to ٢} \frac{\cancel{س-٢}}{س} \times \frac{٣}{(\cancel{س-٢})(س+٢)} = \lim_{س\to ٢} \frac{٣}{س(س+٢)} = \frac{٣}{٤\times٢}$

$= \frac{٣}{٨}$

⑦ $\lim_{س\to \frac{١}{٢}} \frac{٨س^٣-١}{س-\frac{١}{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س\to \frac{١}{٢}} \frac{٨(س^٣-\frac{١}{٨})}{س-\frac{١}{٢}} = \lim_{س\to \frac{١}{٢}} \frac{٨\cancel{(س-\frac{١}{٢})}(س^٢+\frac{١}{٢}س+\frac{١}{٤})}{\cancel{س-\frac{١}{٢}}}$

$\lim_{س\to \frac{١}{٢}} ٨(س^٢+\frac{١}{٢}س+\frac{١}{٤}) = ٨\times\frac{٣}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

حساب النهايات للجذور

أ- الجذور الفردية :

$\lim_{س\to أ} \sqrt[ن]{ه(س)}$ ، ن فردي ن : ٣، ٥، ٧، ...

تعويض مباشر وتقبل جميع الاجابات .

ب- الجذور الزوجية :

$\lim_{س\to أ} \sqrt[ن]{ه(س)}$ ن : زوجي ن : ٢، ٤، ٦، ٨، ...

الاعتماد على ناتج تعويض داخل الجذر

١- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر سالب "نهاية غير موجودة"

٢- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر موجب "فإن نهاية موجودة وتساوي قيمة الجذر" .

٣- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر "صفر"

ندرس إشارة الاقتران ه(س) حول س = أ .

مثال : جد قيمة كل مما يلي :

① $\lim_{س\to ٣} \sqrt[٣]{س^٢-١} = \sqrt[٣]{٩-١} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

② $\lim_{س\to ٤} \sqrt[٣]{٥-٢س^٢} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ملاحظة : لا يوجد مانع من وجود السالب داخل الجذر فردي

③ $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س^٣+١} = \sqrt{٨+١} = \sqrt{٩} = ٣$

④ $\lim_{س\to ٥} \sqrt{٩-س^٢} = \sqrt{٩-٢٥} = \sqrt{-١٦}$ غير موجودة

⑤ $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س-٢} = \sqrt{٢-٢} = \sqrt{٠}$

$- - - - \underset{٢}{|} + + + +$

$\lim_{س\to ٢^+} \sqrt{س-٢} =$ صفر موجودة

$\lim_{س\to ٢} \sqrt{س-٢}$ ∴ غير موجودة

$\lim_{س\to ٢^-} \sqrt{س-٢} =$ غير موجودة

⑥ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \sqrt{\text{س}^2 - 1} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0}$

$+++ \quad -1 \quad --- \quad 1 \quad +++$

$\text{نها}_{\text{س}\to 1^+} \sqrt{\text{س}^2 - 1} = \sqrt{0} = $ صفر "موجودة"

$\text{نها}_{\text{س}\to 1^-} \sqrt{\text{س}^2 - 1}$ غير موجودة

$\therefore \text{نها}_{\text{س}\to 1} \sqrt{\text{س}^2 - 1}$ غير موجودة

⑦ $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \sqrt{9\text{س} - \text{س}^3} = \sqrt{27-27} = \sqrt{0}$

$+++ \quad -3 \quad --- \quad 0 \quad +++ \quad 3 \quad ---$

$\text{نها}_{\text{س}\to 3^+} \sqrt{9\text{س} - \text{س}^3} = $ غير موجودة لانه سالب داخل الجذر الزوجي

$\text{نها}_{\text{س}\to 3^-} \sqrt{9\text{س} - \text{س}^3} = \sqrt{27-27} = \sqrt{0} = $ صفر موجودة

⑧ $\text{نها}_{\text{س}\to 3^+} \sqrt{\text{س}^2 - 3\text{س}}$

$+++ \quad 0 \quad --- \quad 3 \quad +++$

$\therefore \text{نها}_{\text{س}\to 3^+} \sqrt{\text{س}^2 - 3\text{س}} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = $ صفر "موجودة".

⑨ $\text{نها}_{\text{س}\to 4^-} \sqrt{\text{س} - 4}$

$--- \quad 4 \quad +++$

$\therefore \text{نها}_{\text{س}\to 4^-} \sqrt{\text{س} - 4}$ غير موجودة

④ الضرب بالمرافق :

أ- الضرب بالمرافق التربيعي.

نستخدمها عندما يكون ناتج تعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وبالاضافة لوجود الجذر التربيعي.

ويكون المقدار المرافق هو فقط عكس الاشارة الفاصلة بين الحدين ......

مقدار	مرافقه	مقدار × مرافقه
$\sqrt{\text{س}} - \text{أ}$	$\sqrt{\text{س}} + \text{أ}$	$(\sqrt{\text{س}}-\text{أ})(\sqrt{\text{س}}+\text{أ}) = \text{س} - \text{أ}^2$
$\sqrt{\text{س}} - 4$	$\sqrt{\text{س}} + 4$	$(\sqrt{\text{س}}-4)(\sqrt{\text{س}}+4) = \text{س} - 16$
$\sqrt{\text{س}} + \text{أ}$	$\sqrt{\text{س}} - \text{أ}$	$(\sqrt{\text{س}}+\text{أ})(\sqrt{\text{س}}-\text{أ}) = \text{س} - \text{أ}^2$
$\sqrt{\text{س}} + 3$	$\sqrt{\text{س}} - 3$	$(\sqrt{\text{س}}+3)(\sqrt{\text{س}}-3) = \text{س} - 9$
$\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}$	$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}$	$(\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}})(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{ص}}) = \text{س} - \text{ص}$
$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}$	$\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}$	$(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{ص}})(\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}}) = \text{س} - \text{ص}$
$\sqrt{2\text{س}} - \sqrt{3\text{س}+1}$	$\sqrt{2\text{س}} + \sqrt{3\text{س}+1}$	$2\text{س} - 3\text{س} - 1$

مثال:- جد قيمة كل مما يلي :

① $\text{نها}_{\text{س}\to 9} \frac{\sqrt{\text{س}} - 3}{\text{س} - 9} = \frac{0}{0}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 9} \frac{\sqrt{\text{س}} - 3}{\text{س} - 9} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 3}{\sqrt{\text{س}} + 3} = \text{نها}_{\text{س}\to 9} \frac{\cancel{\text{س} - 9}}{(\cancel{\text{س} - 9})(\sqrt{\text{س}} + 3)}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 9} \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

② $\text{نها}_{\text{س}\to 4} \frac{4 - \text{س}}{2 - \sqrt{\text{س}}} = \frac{0}{0}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 4} \frac{4 - \text{س}}{2 - \sqrt{\text{س}}} \times \frac{2 + \sqrt{\text{س}}}{2 + \sqrt{\text{س}}} = \text{نها}_{\text{س}\to 4} \frac{(\cancel{4 - \text{س}})(2 + \sqrt{\text{س}})}{\cancel{4 - \text{س}}}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 4} 2 + \sqrt{\text{س}} = 2 + 2 = 4$

③ $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{س^٣ - ١}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}} = \dfrac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{س^٣ - ١}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}} \times \dfrac{٢ + \sqrt{س^٢ + ٣}}{٢ + \sqrt{س^٢ + ٣}}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{(س^٣ - ١)(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{٤ - (س^٢ + ٣)} = \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{(س^٣ - ١)(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{٤ - س^٢ - ٣}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{(\cancel{س - ١})(س^٢ + س + ١)(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{(١ + س)(\cancel{س - ١})}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{-(س^٢ + س + ١)(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{(١ + س)} = \dfrac{-٣ \times ٤}{٢} = -٦$

① $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\sqrt{٥س - ١} - \sqrt{س + ٣}}{س^٢ + ٣س - ٤} = \dfrac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\sqrt{٥س - ١} - \sqrt{س + ٣}}{س^٢ + ٣س - ٤} \times \dfrac{\sqrt{٥س - ١} + \sqrt{س + ٣}}{\sqrt{٥س - ١} + \sqrt{س + ٣}}$

$\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{٥س - ١ - س - ٣}{س^٢ + ٣س - ٤} \times \dfrac{١}{٢ + ٢}$

$\dfrac{١}{٤} \times \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{٤س - ٤}{(س - ١)(س + ٤)} = \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{٤(\cancel{س - ١})}{(\cancel{س - ١})(س + ٤)} \times \dfrac{١}{٤}$

$\dfrac{١}{٤} \times \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{٤}{س + ٤} = \dfrac{٤}{٥} \times \dfrac{١}{٤} = \dfrac{١}{٥}$

④ $\text{نها}_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س^٢ - س - ١٢}$

ج: $\dfrac{١}{٢١}$

⑦ $\text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{\sqrt{٦ - س} - \sqrt{٢س}}{٨ - س^٣}$

ج: $\dfrac{٣}{٤٨}$

⑤ $\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س^٢ - ٩} = \dfrac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س^٢ - ٩} \times \dfrac{٢ + \sqrt{س + ١}}{٢ + \sqrt{س + ١}} = \text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{٤ - س - ١}{(س^٢ - ٩)(٢ + \sqrt{س + ١})}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{\cancel{٣ - س}}{(\cancel{٣ - س})(٣ + س)(٢ + \sqrt{س + ١})}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{-١}{(س + ٣)(٢ + \sqrt{س + ١})} = \dfrac{-١}{٦ \times ٤} = \dfrac{-١}{٢٤}$

⑧ $\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ + ٢س - ١٥}{\sqrt{س^٣ - ٢} - \sqrt{٢س^٢ + ٧}} = \dfrac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ + ٢س - ١٥}{\sqrt{س^٣ - ٢} - \sqrt{٢س^٢ + ٧}} \times \dfrac{\sqrt{س^٣ - ٢} + \sqrt{٢س^٢ + ٧}}{\sqrt{س^٣ - ٢} + \sqrt{٢س^٢ + ٧}}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س^٣ - ٢ - ٢س^٢ - ٧} \times \text{نها} \sqrt{س^٣ - ٢} + \sqrt{٢س^٢ + ٧}$

	س³	س²	س	ثابت
	١	−٢	٠	−٩
$\boxed{٣}$		٣	٣	٩
	١	١	٣	٠

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{(س - ٣)(س + ٥)(٥ + ٥)}{س^٣ - ٢س^٢ - ٩}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{(\cancel{س - ٣})(س + ٥)(١٠)}{(\cancel{س - ٣})(س^٢ + س + ٣)}$

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{(١٠)(س + ٥)}{س^٢ + س + ٣} = \dfrac{١٠ \times ٨}{٩ + ٦} = \dfrac{٨٠}{١٥}$

⑨ $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٣-\sqrt{س+٨}}{\sqrt{س}-١} = \dfrac{٠}{٠}$ ← نضرب بالمرافقين التربيعيين

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٣-\sqrt{س+٨}}{\sqrt{س}-١} \times \dfrac{٣+\sqrt{س+٨}}{٣+\sqrt{س+٨}} \times \dfrac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٩-س-٨}{س-١} \times \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+١}{٣+\sqrt{س+٨}}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{١-س}}{\cancel{س-١}} \times \dfrac{١+١}{٣+٣}$

$-١ \times \dfrac{٢}{٦} = \dfrac{-١}{٣}$

---

⑩ $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٢-\sqrt{س}}{\sqrt{٢س+١}-٣} = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٢-\sqrt{س}}{\sqrt{٢س+١}-٣} \times \dfrac{٢+\sqrt{س}}{٢+\sqrt{س}} \times \dfrac{\sqrt{٢س+١}+٣}{\sqrt{٢س+١}+٣}$

$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٤-س}{٢س+١-٩} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢س+١}+٣}{٢+\sqrt{س}}$

$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٤-س}}{٢\cancel{(س-٤)}} \times \dfrac{٣+٣}{٢+٢} = -١ \times \dfrac{٦}{٤} = -\dfrac{٣}{٢}$

---

⑪ $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢س\sqrt{س}-٢}{س^٢-١} = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢س\sqrt{س}-٢}{س^٢-١} \times \dfrac{٢س\sqrt{س}+٢}{٢س\sqrt{س}+٢}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤س^٢ \times س-٤}{س^٢-١} \times \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{١}{٢س\sqrt{س}+٢}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤س^٣-٤}{س^٢-١} \times \dfrac{١}{٢+٢}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٤}(س^٣-١)}{س^٢-١} \times \dfrac{١}{\cancel{٤}} = \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-١)}(س^٢+س+١)}{(س+١)\cancel{(س-١)}}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢+س+١}{س+١} = \dfrac{١+١+١}{١+١} = \dfrac{٣}{٢}$

---

⑫ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٣\sqrt{٢س+٣}-٩}{س^٢-٧س+١٢}$

$\boxed{ج : ١}$

---

⑬ $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+٧}-٣}{س^٣-٦٤} = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+٧}-٣}{س^٣-٦٤} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+٧}+٣}{\sqrt{\sqrt{س}+٧}+٣}$

$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+٧-٩}{س^٣-٦٤} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{\sqrt{س}+٧}+٣}$

$\dfrac{١}{٦} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}-٢}{س^٣-٦٤} \times \dfrac{\sqrt{س}+٢}{\sqrt{س}+٢}$

$\dfrac{١}{٦} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س-٤}{س^٣-٦٤} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{س}+٢}$

$\dfrac{١}{٦} \times \dfrac{١}{٤} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س-٤}}{\cancel{(س-٤)}(س^٢+٤س+٤)}$

$\dfrac{١}{٢٤} \times \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{١}{س^٢+٤س+٤} = \dfrac{١}{٢٤} \times \dfrac{١}{١٢} = \dfrac{١}{٢٨٨}$

ب- الضرب بالمرافق الجذر التكعيبي :

نستخدمها عندما يكون ناتج تعويض $\frac{0}{0}$ وبالاضافة إلى وجود الجذر التكعيبي ($\sqrt[3]{\ }$) .

المقدار	المرافق	ناتج ضربهما
$\sqrt[3]{\text{س}} - \text{أ}$	$(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \text{أ}\sqrt[3]{\text{س}} + \text{أ}^2$	$\text{س} - \text{أ}^3$
$\sqrt[3]{\text{س}} - 2$	$(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4$	$\text{س} - 8$
$3 - \sqrt[3]{\text{س}}$	$9 + 3\sqrt[3]{\text{س}} + (\sqrt[3]{\text{س}})^2$	$27 - \text{س}$
$\sqrt[3]{\text{س}} + \text{أ}$	$(\sqrt[3]{\text{س}})^2 - \text{أ}\sqrt[3]{\text{س}} + \text{أ}^2$	$\text{س} + \text{أ}^3$
$\sqrt[3]{\text{س}} + 4$	$(\sqrt[3]{\text{س}})^2 - 4\sqrt[3]{\text{س}} + 16$	$\text{س} + 64$
$5 + \sqrt[3]{\text{س}}$	$25 - 5\sqrt[3]{\text{س}} + (\sqrt[3]{\text{س}})^2$	$125 + \text{س}$

مثال : جد قيمة كل مما يلي :

① $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\text{س}^2 - 1} = \frac{0}{0}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\text{س}^2 - 1} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{\text{س} - 1}}{(\cancel{\text{س} - 1})(\text{س} + 1)} \times \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\text{س} + 1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

② $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 12}{\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} - 3} = \frac{0}{0}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 12}{\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} - 3} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9}{(\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 12}{\text{س}^3 + 19 - 27} \times \text{نها}_{\text{س}\to 2} \left[(\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19})^2 + 3\sqrt[3]{\text{س}^3 + 19} + 9\right]$

$\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 12}{\text{س}^3 - 8} \times (9 + 9 + 9)$

$\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{(\cancel{\text{س} - 2})(\text{س} + 6)}{(\cancel{\text{س} - 2})(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)} \times 27$

$\text{نها}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س} + 6}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4} \times 27$

$= \frac{8}{4 + 4 + 4} \times 27 =$

③ $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{2\text{س} - 2}{3 - \sqrt[3]{26 + \text{س}}}$

ج: ٥٤-

④ $\text{نها}_{\text{س}\to -7} \frac{\sqrt[3]{2\text{س} + 6} + 2}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 21} = \frac{0}{0}$

$\text{نها}_{\text{س}\to -7} \frac{\sqrt[3]{2\text{س} + 6} + 2}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 21} \times \frac{(\sqrt[3]{2\text{س} + 6})^2 + 2\sqrt[3]{2\text{س} + 6} + 4}{(\sqrt[3]{2\text{س} + 6})^2 + 2\sqrt[3]{2\text{س} + 6} + 4}$

$\text{نها}_{\text{س}\to -7} \frac{2\text{س} + 6 + 8}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 21} \times \text{نها}_{\text{س}= -7} \frac{1}{(\sqrt[3]{2\text{س} + 6})^2 + 2\sqrt[3]{2\text{س} + 6} + 4}$

$\text{نها}_{\text{س}\to -7} \frac{2(\cancel{\text{س} + 7})}{(\cancel{\text{س} + 7})(\text{س} - 3)} \times \frac{1}{4 + 4 + 4}$

$\text{نها}_{\text{س}\to -7} \frac{2}{\text{س} - 3} \times \frac{1}{12} = \frac{2}{-10} \times \frac{1}{12} = \frac{-1}{60}$

⑤ $\text{نها}_{\text{س}\to -8} \frac{2 + \sqrt[3]{\text{س}}}{\text{س}^2 - 64}$

ج: $\frac{-1}{192}$