الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

١- تطبيقات هندسية

٢- تطبيقات فيزيائية

٣- المعدلات المرتبطة بالزمن

٤- التزايد والتناقص

٥- القيم القصوى

٦- تطبيقات القيم القصوى

٧- حلول تدريبات وتمارين الكتاب جميعها

٨- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٦)

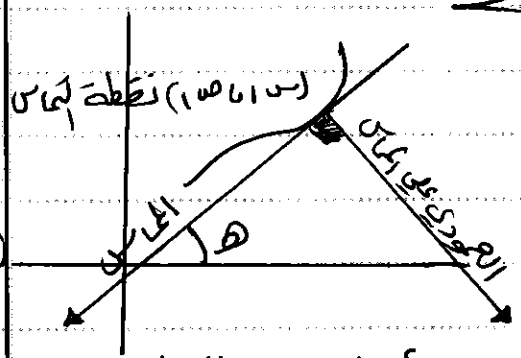
٩- اوراق عمل شاملة على كل درس

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

تطبيقات هندسية

التفسير الهندسي للمشتقة



تفسر المشتقة الأولى عند النقطة (س١ ، ص١) على انها ميل المماس لمنحنى ق(س) عند تلك النقطة

اي أن المماس هو الخط المستقيم الذي يمس أو يقطع منحنى ق(س) في نقطة تسمى نقطة التماس (س١ ، ص١)

ميل المماس = ميل المنحنى = ق'(س١)
= ظا هـ

حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب (الاتجاه الموجب)

ميل المماس عند (س١ ، ص١) = م = ق'(س١)

معادلة المماس عند نقطة التماس (س١ ، ص١)

ص - ص١ = م (س - س١)

معادلة العمودي على المماس عند (س١ ، ص١)

ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١)

ملاحظات هامة

① ميل المستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) يساوي م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$

② اذا توازى مستقيمان فان ميلهما متساوي م١ = م٢

③ اذا تعامد مستقيمان فان
م١ × م٢ = -١
م١ = $\frac{-١}{م٢}$

④ المستقيم الذي يوازي محور السينات يسمى مستقيم افقي ويكون ميله يساوي صفر (المشتقة = صفر)

⑤ ميل المستقيم على الصورة ص = م س + ن
يساوي م = معامل س

⑥ ميل المستقيم الذي على الصورة
م س + ن ص + ع = ٠
يساوي = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-م}{ن}$

⑦ المستقيم الذي يوازي محور الصادات ميله غير معروف = ظا ٩٠°
← ينتج

ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⑨ لايجاد نقطه تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ق(س) = ٠ أو ص = ٠

لايجاد نقطه تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠

لايجاد نقطه (نقط) التقاطع بين المنحنيين نساويهما معًا ق(س) = هـ(س)

لايجاد تقاطع علاقتين ضمنيتين نعوض احداهما في الأخرى

مثال
جد نقط التقاطع بين العلاقتين
$س^2 - ص^2 = 9$ ، $س + ص = 3$

الحل
$س + ص = 3 \leftarrow ص = 3 - س$
نعوضها في الأولى
$س^2 - (3-س)^2 = 9$
$س^2 - (9 - 6س + س^2) = 9$
$س^2 - 9 + 6س - س^2 = 9$
$6س = 18 \Leftarrow س = 3$

$ص = 3 - 3 = ٠$
النقطه (٣، ٠)

أولاً
ايجاد معادلة المماس والعمودي اذا علمت نقطة التماس

لأيجاد معادلة المماس يلزم النقطة (نقطة التماس $(س_1، ص_1)$) والميل ، واذا علمت $س_1$ فانستطيع ايجاد $ص_1$ بتعويض $س_1$ في ق(س)

مثال ①
اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الأقتران ق(س) = $س^2 + 2$ عند النقطة (٣، ٠) .

الحل
$(س_1، ص_1) = (3، 0)$ نقطة التماس
الميل = ق'(س) = ق'(٣)
ق'(س) = ٢س ⇐ ق'(٣) = صفر

معادلة المماس هي
$ص - ص_1 = م(س - س_1)$
$ص - 0 = 0 \times (س - 3)$
$ص = 0$

معادلة العمودي
$ص - 0 = \frac{-1}{0}(س - 3)$ مقام = صفر
$س = 3$ معادلة العمودي

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ②

اوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $ق(س) = \frac{٢س}{٢س - ١}$ عند $س = ١$

الحل

$س_١ = ١$ نجد $ص_١ = ق(س_١) = ق(١)$

$= \frac{٢}{١-٢} = -٢$

نقطة التماس هي $(١، -٢)$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = \frac{(٢س-١)(٢) - (٢س)(٢)}{(٢س-١)^٢}$

$ق'(١) = \frac{(١)(٢) - (٢)(٢)}{(١)^٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

معادلة المماس هي

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - (-٢) = -٢(س - ١)$

$ص + ٢ = -٢س + ٢$

$ص = -٢س$

معادلة العمودي هي

$ص - ص_١ = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}(س - س_١)$

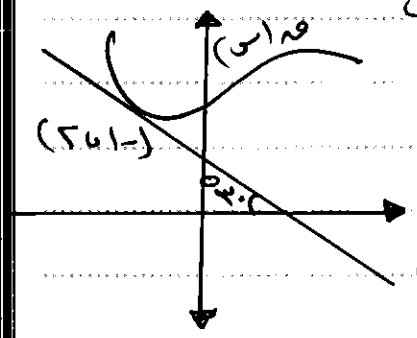
$ص + ٢ = \frac{-١}{-٢}(س - ١)$

$ص + ٢ = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}$

$ص = \frac{١}{٢}س - \frac{٥}{٢}$

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور جد معادلة المماس



الحل

نقطة التماس هي $(-١، ٢)$

ميل المماس $= ظا(١٨٠ - ٣٠) = ظا ١٥٠°$

$= -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (الاتجاه الموجب)

معادلة المماس هي

$ص - ٢ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}(س + ١)$

مثال ④

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة

$٧ص^٢ - س^٣ص + س + ٥ = ٠$ عند النقطة $(١، ٤)$ ؟

الحل

نقطة التماس $(س_١، ص_١) = (١، ٤)$

نشتق ضمنياً

$١٤ص \frac{دص}{دس} - (س^٣ \times \frac{دص}{دس} + ص \times ٣س^٢) + ١ = ٠$

نعوض النقطة $(١، ٤)$ لايجاد $\frac{دص}{دس}$

$١٤ \times ٤ \frac{دص}{دس} - (١ \times \frac{دص}{دس} + ٤ \times ٣) + ١ = ٠$

$٥٦ \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} - ١٢ + ١ = ٠$

$٥٥ \frac{دص}{دس} - ١١ = ٠ \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١١}{٥٥}$

$= \frac{١}{٥}$

يتبع الحل

ميل المماس = $-\frac{٤٧}{٥٠}$ ، ميل العمودي = $\frac{٥٠}{٤٧}$

معادلة المماس

ص − ١ = $-\frac{٤٧}{٥٠}$ (س − ٤)

معادلة العمودي

ص − ١ = $\frac{٥٠}{٤٧}$ (س − ٤)

مثال ⑤

أثبت ان المماس لمنحنى الاقتران
و(س) = س^{٢} عند النقطة (ب، ب^{٢})
يقطع محور الصادات عند النقطة ($\frac{ب^{٢}}{٢}$، ٠)

الحل

نجد معادلة المماس .

و′(س) = ٢س ← ميل المماس = و′(ب)

= ٢ب

نقطة المماس هي (ب، ب^{٢})

معادلة المماس هي

ص − ب^{٢} = ٢ب (س − ب)

ولايجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

صفر − ب^{٢} = ٢ب (٠ − ب)

−ب^{٢} = −٢ب^{٢} + ٢ب س

٢ب س = ٢ب^{٢} − ب^{٢} = ب^{٢}

س = $\frac{ب^{٢}}{٢ب}$ = $\frac{١}{٢}$ ب

نقطة التقاطع مع محور الصادات
هي ($\frac{ب}{٢}$ ، ٠)

مثال ⑥

اوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
م(س) اذا كان م = ٣ع^{٢} − ٥ع + ٧
ع = س^{٢} + ١ عند س = صفر

الحل

س = ٠ ← م(١) =

عندما س = ٠ ← ع = ١

وعندما ع = ١ فان م = ٣(١)^{٢} − ٥(١) + ٧

= ٥

نقطة المماس هي (٠ ، ٥)

ميل المماس : نستخدم قاعدة السلسلة

$\frac{د م}{د س} = \frac{د م}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

= (٦ع − ٥) × ٢

$\left|\frac{د م}{د س}\right|$ = (٦ × ١ − ٥) × ٢ = ٢

ع = ١

معادلة المماس هي

ص − ٥ = ٢ (س − ٠)

ص − ٥ = ٢س

ص = ٢س + ٥

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٢}{١ + جتا س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

عند $س = \frac{\pi}{٢}$ فان $ق(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢}{١ + جتا^{٢} \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{٢}{١ + ٠} = \frac{٢}{١} = ٢$

نقطة المماس $(\frac{\pi}{٢}, ٢)$

ميل المماس $= ق'(\frac{\pi}{٢})$

$ق'(س) = \frac{-٢ \times -جا س}{(١ + جتا س)^{٢}}$

$ق'(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢ \times جا \frac{\pi}{٢}}{(١ + جتا \frac{\pi}{٢})^{٢}} = \frac{٢ \times ١}{(١ + ٠)^{٢}}$

$= ٢$

معادلة المماس

$ص - ٢ = ٢ (س - \frac{\pi}{٢})$

معادلة العمودي

$ص - ٢ = -\frac{١}{٢} (س - \frac{\pi}{٢})$

مثال ⑧

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س ص^{٢} = جا (س + ص)$ عند النقطة $(٠, ٠)$.

الحل

نقطة المماس $(٠, ٠)$

نشتقه

$س \times ٢ ص ص' + ص^{٢} \times ١ = جتا(س + ص) \times (١ + ص')$

نعوض $(٠, ٠)$

$٠ \times ٢ \times ٠ ص' + ٠^{٢} \times ١ = جتا ٠ \times (١ + ص')$

$ص' = ١ \times (١ + ص')$

$\Leftarrow ص' = -١$

معادلة المماس $ص - ٠ = -١ (س - ٠)$

مثال ⑨

اوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $ص^{٢} + (س - ص)^{٣} = ٩$ عند النقطة $(س, ١, ص, ١ - ١)$ التي تقع على منحنى العلاقة

الحل

نعوض $(س, ١, ص, ١ - ١)$ في العلاقة

$(-١)^{٢} + (س, ١ + ١)^{٣} = ٩$

$\Leftarrow (س + ١)^{٣} = ٩ - ١ = ٨$ اخذ الجذر للطرفين

$س + ١ = ٢ \Leftarrow س = ١$

نقطة المماس هي $(١, -١)$

نجد الميل بالاشتقاق ضمنياً

$٢ ص ص' + ٣ (س - ص)^{٢} (١ - ص') = ٠$

نعوض النقطة $(١, -١)$ يتبع الحل

$-٢٧-١٨ص^{٢}+٣(١+ص)^{٤}(١-ص)=٠$

$-٢ص^{٢}+١٢(١-ص)=٠$

$-٢ص^{٢}+١٢-١٢ص=٠$

$-١٤ص^{٢}=-١٢ \Leftarrow ص^{٢}=\frac{١٢}{١٤}=\frac{٦}{٧}$

معادلة المماس هي

$ص+١=\frac{٦}{٧}(س-١)$

مثال (١٠)

اذا كانت $ص=٣س-٥$ هي معادلة التحودي عند النقطة $(٢،ق(٢))$ اوجد هنا $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ عند $س=٢$

$\Delta س \to ٠$

الحل

بما ان $ص=٣س-٥$ هي معادلة التحودي ميل التحودي $=٣$ (اتفاقا)

$\Leftarrow$ ميل المماس $=-\frac{١}{٣}$ عند النقطة $(٢،ق(٢))$

وعليه فان نهاية $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}=ق'(٢)$

$\Delta س \to ٠$

$=-\frac{١}{٣}$

مثال (١١)

اذا كان $هـ(٢)=٥$ ، $ق'(٥)=-٤$

$(ق \circ هـ)'(٢)=٨$ فاوجد معادلة المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند $س=٢$

الحل

نقطة المماس هي $(٢، هـ(٢))$

$=(٢،٥)$

ميل المماس $=هـ'(٢)$

$(ق \circ هـ)'(٢)=ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$٨=ق'(٥) \times هـ'(٢)$

$٨=-٤ \times هـ'(٢)$

$\Leftarrow هـ'(٢)=\frac{٨}{-٤}=-٢$

معادلة المماس هي

$ص-٥=-٢(س-٢)$

ملاحظة

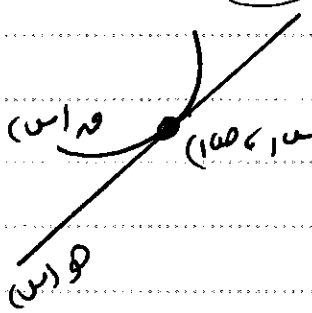
ميل الخط المستقيم

$أ س+ب ص+جـ=$ صفر

يساوي $=-\frac{أ}{ب}=-\frac{\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظه هامة جداً



عند نقطة إلتماس
(س١، ص١)
يتحقق شرطان
① ه(س١) = هـ(س١)
② ه'(س١) = هـ'(س١)
أي أن
الصورة = الصورة
المشتقة = المشتقة

مثال (١٢)
اوجد قيمة الثابت جـ في الأقتران ه(س) = س٢ + جـ والذي يجعل المستقيم ص = ٤س مماساً له

الحل
عند نقطة إلتماس ه(س١) = صـ
٢س١ = ٤ ⇐ س١ = ٢
ه(٢) = ص(٢)
٤ + جـ = ٤ × ٢
٤ + جـ = ٨ ⇐ جـ = ٤
نلاحظ المشتقة = المشتقة
الصورة = الصورة

مثال (١٣)
اذا كان ص = س٢ + ٣ يمس الأقتران ه(س) = ٩س٢ + بس + ١٠ عندما س = ١ فاوجد قيمة ٩، ب ؟

الحل
عند س = ١
① الصورة = الصورة
ه(١) = ص(١)
٩(١)٢ + ب(١) + ١٠ = ١ × ٢ + ٣
٩ + ب + ١٠ = ٥
٩ + ب = ٥ - - - - - ①
② المشتقة = المشتقة
ه'(١) = صـ(١)
ه'(س) = ٢ × ٩س + ب
صـ = ٢
٢ × ٩ × ١ + ب = ٢
١٨ + ب = ٢
٩ + ب = ٢ - - - - - ②
نحل المعادلتين
٩ + ب = ٥ - بالطرح
٩ + ب = ٢
⇐ ٩ - ٩ = ٥ - ٢ ⇐ ٩ = ٧
نعوض ٩ = ٧ في المعادلة ①
٧ + ب = ٥
ب = -١٢

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

جد قيمة الثابت جـ الذي يجعل المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠٫٥) ، (-٣، ٥٫٦) مماساً لمنحنى الأقتران

$$ق(س) = \frac{جـ}{س + ١}$$

الحل

$$\text{ميل المماس} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠٫٥ - ٥٫٦}{٢ - (-٣)} = -١$$

معادلة المماس هي

$$ص - ٠٫٥ = -١(س - ٢)$$

$$ص = -س + ٢$$

عند نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

① $ق(س_١) = ص(س_١)$

$$\frac{جـ}{س_١ + ١} = -س_١ + ٢$$

$$\Leftarrow جـ = (-س_١ + ٢)(س_١ + ١) \quad \text{---} ①$$

② $ق(س_١) = ص'(س_١)$

$$\frac{-جـ}{(س_١ + ١)^٢} = -١$$

$$\Leftarrow جـ = (س_١ + ١)^٢ \quad \text{---} ②$$

من ① ، ②

$$(س_١ + ١)^٢ = (-س_١ + ٢)(س_١ + ١)$$

بالقسمة على $س_١ + ١$

$$س_١ + ١ = -س_١ + ٢$$

$$٢س_١ = ١ \Leftarrow س_١ = \frac{١}{٢}$$

بالتعويض في ②

$$جـ = (\frac{١}{٢} + ١)^٢ = (\frac{٣}{٢})^٢ = \frac{٩}{٤}$$

ثانياً

معادلة المماس والعمودي اذا كانت نقطة التماس مجهولة

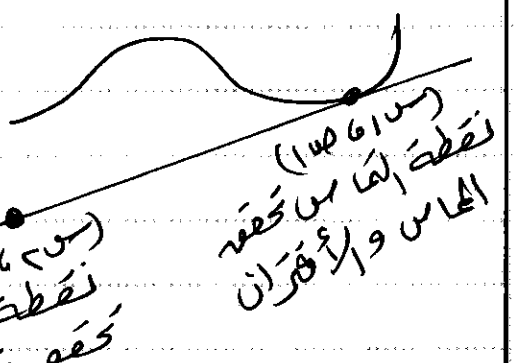
لأيجاد نقطة التماس

① نجد ميل المماس

② نجد $ق(س)$

③ نضع $ق(س_١)$ = ميل المماس ومنها نجد $س_١$ ، نعوضها في قاعدة الأقتران لايجاد $ص_١$

ملاحظة هامة



في حالة النقطة الخارجية

كالنقطة $(س_٢ ، ص_٢)$ فهي لا تحقق منحنى الأقتران $ق(س)$ لكنها تحقق معادلة المماس فقط

$$\Leftarrow \text{ميل المماس} = \text{المشتقة}$$

$$\text{أي} \quad \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = ق'(س_١)$$

مكتبة العلم ALELSAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال ①

جد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الأقتران $f(x) = x^2 - 3x + 1$ حيث ان المماس يصنع زاوية مقدارها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل المماس $= f'(x_1) = \tan\theta$

$2x_1 - 3 = \tan 45 = 1$

$2x_1 = 4 \longleftarrow x_1 = 2$

نعوضها في $f(x)$ لايجاد y_1

$f(2) = 2^2 - 3(2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$

نقطة التماس هي $(2, -1)$

ميل المماس $= 1$

معادلة المماس: $y + 1 = 1(x - 2)$

معادلة العمودي: $y + 1 = -1(x - 2)$

مثال ②

اذا رسم من النقطة $(0, -2)$ مماسان لمنحنى $f(x) = x^2 + 2$ فجد معادلات المماس لمنحنى $f(x)$

الحل

نفرض ان نقطة التماس هي (x_1, y_1)

ميل المماس $= f'(x_1) = 2x_1$

$$= \frac{y_1 + 2}{x_1 - 0}$$

$$\leftarrow \frac{y_1 + 2}{x_1} = 2x_1 \quad \cdots ①$$

وكذلك النقطة (x_1, y_1) تقع على منحنى $f(x)$ ← تحقق معادلته

$\leftarrow y_1 = x_1^2 + 2 \quad \cdots ②$

نعوض y_1 في معادلة ①

$$\frac{2x_1}{1} = \frac{x_1^2 + 2 + 2}{x_1}$$

$2x_1^2 = x_1^2 + 4 \leftarrow x_1^2 = 4$

$x_1 = 2 \quad , \quad x_1 = -2$

عندما $x_1 = 2 \leftarrow y_1 = 2^2 + 2 = 6$

نقطة التماس الأولى $(2, 6)$

عندما $x_1 = -2 \leftarrow y_1 = 6$

نقطة التماس الثانية هي $(-2, 6)$

① $(2, 6)$

ميل المماس $= f'(2) = 2(2) = 4$

معادلة المماس $y - 6 = 4(x - 2)$

② $(-2, 6)$

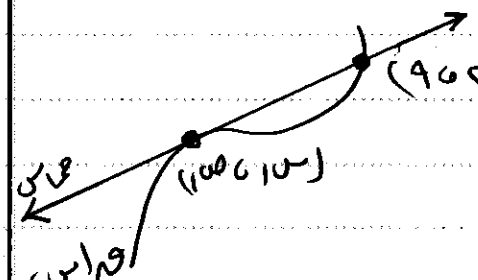
ميل المماس $= f'(-2) = -4$

معادلة المماس $y - 6 = -4(x + 2)$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

رسم محاس لمنحنى الأقتران
ق(س) = س^{٣} + ١ عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)
قطع المنحنى في نقطة ثانية هي
(٢، ٩) جد معادلة هذا المحاس



الحل

ميل المحاس = ميل المنحنى

$$\frac{ص_{١} - ٩}{س_{١} - ٢} = ٣س_{١}^{٢}$$

ولكن ص$_{١}$ = س$_{١}^{٣}$ + ١

$$\Leftarrow \frac{س_{١}^{٣} + ١ - ٩}{س_{١} - ٢} = ٣س_{١}^{٢}$$

س$_{١}^{٣}$ − ٨ = ٣س$_{١}^{٣}$ − ٦س$_{١}^{٢}$

٢س$_{١}^{٣}$ − ٦س$_{١}^{٢}$ + ٨ = ٠ بالقسمة على ٢

س$_{١}^{٣}$ − ٣س$_{١}^{٢}$ + ٤ = ٠

بالقسمة التركيبية نجرب العوامل للعدد ٤ (−١) أكبر

	١	−٣	٠	٤
		−١	٤	−٤
	١	−٤	٤	٠

(س + ١)(س^{٢} − ٤س + ٤) = ٠

(س + ١)(س − ٢)(س − ٢) = ٠

← س$_{١}$ = −١ ، ص$_{١}$ = ٢

عندما س$_{١}$ = −١ فإن ص$_{١}$ = (−١)^{٢} + ١ = ٠

(−١، ٠)

عندما س$_{١}$ = ٢ ← ص$_{١}$ = ٢^{٢} + ١ = ٩

(٢، ٩) تحقق

معادلة المحاس

ص − ٠ = ٣(س − (−١))

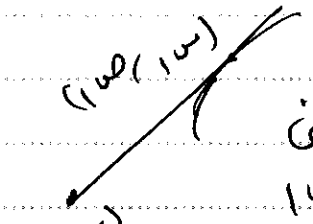
ص = ٣س + ٣

مثال ④

جد معادلة المحاس المرسوم من النقطة (−٠٫٥، ٠) لمنحنى الأقتران
ق(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٠٫٥}$

الحل

نفرض أن نقطة المحاس هي
(س$_{١}$، ص$_{١}$)



ميل المحاس = ميل المنحنى

$$\frac{ص_{١} - ٠}{س_{١} + ٠٫٥} = \frac{س_{١}}{\sqrt{س_{١}^{٢} + ٠٫٥}}$$

ولكن ص$_{١}$ = $\sqrt{س_{١}^{٢} + ٠٫٥}$

$$\frac{\sqrt{س_{١}^{٢} + ٠٫٥}}{س_{١} + ٠٫٥} = \frac{س_{١}}{\sqrt{س_{١}^{٢} + ٠٫٥}}$$

ضرب تبادلي ← تبسيط

مكتبة الوسام AL WESSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$ع(س^2 + ٢٠) = ع س_1 (س + ١٥)$

$٤س^2 + ٤٠ = ٤س_1^2 + ١٠س_1$

$١٠س_1 = ٤٠ \Leftarrow س_1 = ٤$

$\Leftarrow ص = \sqrt{٤^2 + ٤٠} = \sqrt{٣٦} = ٦$

نقطة التماس هي $(٤، ٦)$

ميل المماس $= \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{٤}{٤ + ٢}$

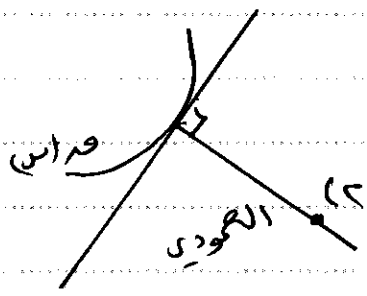
معادلة المماس

$ص - ٦ = \frac{٢}{٣}(س - ٤)$

مثال ⑤

اذا كان $ه(س) = \frac{١}{٤}س^2$ وكان العمودي على المنحنى يمر بالنقطة $(١، ٢)$ فاوجد معادلة العمودي

الحل



نقطة التماس $(س_1، ه(س_1))$

ميل العمودي $= \frac{ص_1 - ٢}{س_1 - ١}$

ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}س_1}$

$= \frac{-٢}{س_1}$

$\frac{ص_1 - ٢}{س_1 - ١} = \frac{-٢}{س_1}$

لكن $ص_1 = \frac{١}{٤}س_1^2$

$\frac{\frac{١}{٤}س_1^2 - ٢}{س_1 - ١} = \frac{-٢}{س_1}$

$\frac{١}{٤}س_1^3 - ٢س_1 = -٢س_1 + ٢$

$\frac{١}{٤}س_1^3 = ٢ \Leftarrow س_1^3 = ٨$

$س_1 = ٢$

$\Leftarrow ص_1 = \frac{١}{٤}(٢)^2 = ١$

نقطة التماس $(٢، ١)$

ميل العمودي $= \frac{-٢}{٢} = -١$

معادلة العمودي

$ص - ١ = -١(س - ٢)$

مثال ⑥

جد جميع النقط الواقعة على منحنى العلاقة $ع: س^2 - ٤س + ص^2 - ١٠ = ٠$ التي يمر المماس المرسوم للمنحنى للعلاقة عند كل منها بالنقطة $(٤، ١٠)$

الحل

نفرض ان نقط التماس هي $(س_1، ص_1)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$\frac{ص_1 - ١٠}{س_1 - ٤} \leftarrow$ يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

نشتقه ضمنياً

$٤س - ٤ + ٢ص ص' = ٠$

$٢ص ص' = -٤س + ٤$

$ص' = \frac{-٤س+٤}{٢ص} = \frac{-٢س+٢}{ص}$

$\frac{ص_١ - ٠}{س_١ - ٤} = \frac{-٢س_١+٢}{ص_١}$

$ص_١^٢ = -٢س_١^٢ + ٨س_١ + ٢س_١ - ٨$ ---①

وكذلك $(س_١ ، ص_١)$ تحقق ضمنى العلاقة

$س_١^٢ - ٤س_١ + ص_١^٢ - ١٠ = ٠$

$ص_١^٢ = -س_١^٢ + ٤س_١ + ١٠$ ---②

بالتعويض معادلة ② في معادلة ①

$-س_١^٢ + ٨س_١ - ٨ = -س_١^٢ + ٤س_١ + ١٠$

$٤س_١ = ١٨$

$س_١ = ٣$

بالتعويض في معادلة ②

$ص_١^٢ = -(٣)^٢ + ٤(٣) + ١٠$

$ص_١^٢ = -٩ + ١٢ + ١٠ = ١٣$

$ص_١ = \pm ٣$

النقط هي $(٣ ، ٣)$ ، $(٣ ، -٣)$

مثال ⑦

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(٢ ، \frac{١}{٢})$ ويكون عمودي على المنحنى

$ص = س^٢$ ؟

الحل

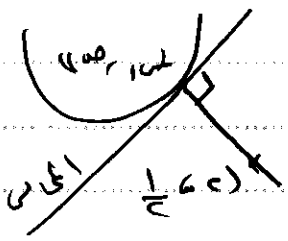
نفرض ان نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

$ق(س) = س$ ميل المماس $= ق'(س_١)$

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-١}{ق'(س_١)}$

ايضاً ميل العمودي

$= \frac{ص_١ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$



$\frac{-١}{ق'(س_١)} = \frac{ص_١ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$ $\quad ص_١ = س_١^٢$

$\frac{-١}{ق'(س_١)} = \frac{س_١^٢ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$

$ق'(س_١) = س_١^٣ - ص_١ = -س_١ + ٢$

$ق'(س_١) = ٢ \Leftarrow س_١^٣ = ١ \Leftarrow س_١ = ١$

$ص_١ = (١)^٢ = ١$

النقطة هي $(١ ، ١)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{١ - ٢} = \frac{-١}{-١} = ١$

معادلة العمودي

$ص - ١ = ١ (س - ١)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)
اوجد معادلة المماس للمنحنى $ص^2 - ١٦س = صفر$ اذا كانت معادلة العمودي $ص + س = ٩$

الحل
ميل العمودي
$ص + ١ = ٠ \Leftarrow$ ص$' = -\frac{١}{ص}$

ميل المماس $= \frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-١}{-\frac{١}{ص}} = ص$

نشتق المعادلة ضمنيًا
$٢ص \cdot ص' - ١٦ = صفر$
$٢ص \cdot ص' = ١٦ \Leftarrow ص' = \frac{١٦}{٢ص}$
ميل المماس $= ص = \frac{١٦}{٢ص}$
$\Leftarrow ٤ص = ١٦ \quad ص = ٤$
بما أن $ص^2 - ١٦س = ٠$
$٤^2 - ١٦س = ٠$
$\Leftarrow ١٦ - ١٦س = ٠ \leftarrow س = ١$
معادلة المماس هي
$ص - ٤ = ٤(س - ١)$

مثال (٩)
اذا كان منحنى $ق(س) = ٢س^2 + بس + ٤$ يقطع محور الصادات في النقطة $(٠، ٣)$ وله مماسان، المماس الأول عند النقطة $س = -١$، ويصنع زاوية مقدارها $٤٥°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، والمماس الثاني عند النقطة $س = ٢$ ويصنع زاوية مقدارها $١٣٥°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. اوجد $٢، ب، ق، ق'$

الحل
النقطة $(٠، ٣)$ تقع على $ق(س)$
$ق(٠) = ٣$
$٢(٠)^2 + ب(٠) + ٤ = ٣$
$\Leftarrow ٤ = ٣$

المماس الأول عند $س = ١$
ميل المماس $= ظ٤٥° \leftarrow ق'(-١) = ١$
$ق'(س) = ٤أس + ب$
$ق'(-١) = -٤أ + ب = ١$ ---①

المماس الثاني عند $س = ٢$
ميل المماس $= -ظ١٣٥° = -(-١) = ١$
$ق'(٢) = ٤أ + ب = -١$ ---②
بحل المعادلتين
$-٤أ + ب = ١$ بالطرح
$٤أ + ب = -١$
$-٨أ = ٢ \Leftarrow أ = -\frac{١}{٤}$
نعوض في ①
$-٢ + ب = ١$
$ب = ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الرياضيات
ALWESHAH
إعداد: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)
اثبت أن $ه(س) = ٣س^٤ + ٥س + ٥$
$هـ(س) = س^٣ + س^٢ - ٢س + ١$ مماسين
عند النقطة $(-١، ٢)$

الحل
عند النقطة $(-١، ٣)$ يجب التحقق
من الشرطين.

(١) $ه(-١) = هـ(-١)$
$٣(-١)^٤ + ٥(-١) + ٥ = (-١)^٣ + (-١)^٢ - ٢(-١) + ١$
$٣ = ٣$
تحقق

(٢) $ه'(-١) = هـ'(-١)$
$ه'(س) = ٦س + ٥$
$هـ'(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢$
$ه'(-١) = ٦(-١) + ٥ = -١$
$هـ'(-١) = ٣ + ٢(-١) - ٢ = -١$
تحقق $\Leftarrow$ $ه$ ، $هـ$ مماسين
عند $(-١، ٣)$

مثال (١١)
جد معادلة المماس للأقتران
$ه(س) = س^٣ + ١$ عند نقطة
تقاطعه مع محور السينات

الحل
نجد نقطة تقاطع مع محور السينات
نوجد $ص = ٠$
$\Leftarrow س^٣ + ١ = ٠ \Leftarrow س^٣ = -١$
$\Leftarrow س = -١$
النقطة $(-١، ٠)$
ميل المماس $= ه'(س) = ٣س^٢$
$ه'(-١) = ٣$
معادلة المماس $ص - ٠ = ٣(س + ١)$

مثال (١٢)
جد جميع النقط الواقعة على منحنى
العلاقة $س^٢ + ص^٢ - ٢ص = ٦٧$
والتي يكون ميل المماس لهذا المنحنى
عند كل منها يساوي ٤ ؟

الحل
نفرض ان النقطة $(س_١، ص_١)$ نقطة
التماس
باشتقاق المعادلة ضمنياً
$٢س + ٢ص ص' - ٢ص' = ٠$
$ص'(٢ص - ٢) = -٢س$
$ص' = \frac{-٢س}{٢ص - ٢} = \frac{-س}{ص - ١}$
ميل المماس $= ٤ = \frac{-س_١}{ص_١ - ١}$
$\Leftarrow ٤ص_١ - ٤ = -س_١$
$س_١ = ٤ - ٤ص_١$ ---(١)
لكن $(س_١، ص_١)$ تحقق معادلة المنحنى
$\Leftarrow س_١^٢ + ص_١^٢ - ٢ص_١ = ٦٧$ ---(٢)
بتعويض (١) في (٢) ينتج ان
$\Leftarrow$ ينتج الكل

$(٤ص_١)^{٢} + ص_١^{٢} - ٢ص_١ = ٦٧$

$١٦ - ٣٢ص_١ + ص_١^{٢} + ص_١^{٢} - ٢ص_١ = ٦٧$

$١٧ص_١^{٢} - ٣٤ص_١ + ١٦ - ٦٧ = ٠$

$١٧ص_١^{٢} - ٣٤ص_١ - ٥١ = ٠$

بالقسمة على ١٧

$ص_١^{٢} - ٢ص_١ - ٣ = ٠$

$(ص_١ - ٣)(ص_١ + ١) = ٠$

$ص_١ = ٣$ ، $ص_١ = -١$

بالتعويض في معادلة ①

$ص_١ = ٣ \leftarrow س_١ = ٤ - ٢ \times ٢$

$= -٨$

$ص_١ = -١ \leftarrow س_١ = ٤ - ٢ \times ٢$

$= ٨$

النقط $(-٨، ٣)$ ، $(٨، -١)$

مثال (١٣)

اوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س^{٢} + ص = ص^{٢}$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم $ص + س + ١ = ٠$ في الربع الثاني

الحل

$س = -ص - ١$ نعوضها بدل س في العلاقة $س^{٢} + ص = ص^{٢}$

$(-ص - ١)^{٢} + ص = ص^{٢}$

$ص^{٢} + ٢ص + ١ + ص = ص^{٢}$

$٣ص + ٣ = ٠ \leftarrow ص = -١ \leftarrow س = \frac{-١}{٣}$

حيث $س = -ص - ١$

$= -\frac{-١}{٣} - ١ = -\frac{٢}{٣}$

نقطة التقاطع هي $(-\frac{٢}{٣}، \frac{-١}{٣})$

نوجد المماس نشتقه ضمنياً

$٢س + ص_{١} = ٢ص ص_{١}$

$-\frac{٤}{٣} + ص_{١} \times \frac{-١}{٣} = ٢ص_{١} \times \frac{-٢}{٣}$

$-\frac{٤}{٣} + ص_{١} = -\frac{٤}{٣} ص_{١}$

$\Leftarrow ص_{١} + \frac{٤}{٣} ص_{١} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{٥}{٣} ص_{١} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow ص_{١} = \frac{٤}{٥}$

معادلة المماس هي

$ص - \frac{-١}{٣} = \frac{٤}{٥}(س - \frac{-٢}{٣})$

مثال (١٤)

اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين

$٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٤٥$ ، $٦س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥$

عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول يكونان متعامدين

الحل

عند نقطة التقاطع إما بالحذف أو التعويض

← يتبع

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

← تابع لكل

نرتب المعادلة الثانية

$س^2 = ٥ + ٤ص^2$ ونعوضها في الأولى.

$٤(٥ + ٤ص^2) + ٩ص^2 = ٤٥$

$٢٠ + ١٦ص^2 + ٩ص^2 = ٤٥$

$٥ص^2 = ٢٥$

$ص^2 = ١ \Leftarrow ص = \pm ١$

نأخذ $ص = ١$ في الربع الأول

نعوض $س$ بالتعويض في المعادلة الثانية

$س^2 - ٤ = ٥ \leftarrow س^2 = ٩$

$\Leftarrow س = ٣ ، -٣$

وفي الربع الأول $س = ٣$

← نقطة التقاطع والتماس هي $(٣ ، ١)$

نشتق المعادلة ضمنياً

$٨س + ١٨ص \, ص' = ٠$

نعوض النقطة $(٣ ، ١)$

$٨ \times ٣ + ١٨ \times ١ \, ص' = ٠$

$\leftarrow ١٨ ص' = -٢٤ \leftarrow ص' = \frac{-٢٤}{١٨} = \frac{-٤}{٣}$

ميل المماس $= \frac{-٤}{٣}$

نشتق الثانية

$٢س - ٨ص \, ص' = ٠$ نعوض $(٣ ، ١)$

$٢ \times ٣ - ٨ \times ١ \, ص' = ٠$

$\leftarrow ٨ص' = ٦ \leftarrow ص' = \frac{٣}{٤}$

$\frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} = -١$

المماسان متعامدان

مثال (١٥)

أوجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع العلاقة $ص^2 + ٤س = ٤ص$ مع محور الصادات.

الحل

نعوض $س = ٠$ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات:

$ص^2 + ٤ \times ٠ - ٤ = ٠ \times ص$

$ص^2 - ٤ = ٠ \Leftarrow ص = \pm ٢$

نقطة التقاطع $(٠ ، ٢)$ ، $(٠ ، -٢)$

نشتق العلاقة ضمنياً

$٢ص \, ص' + ٤ = ٤س + ٤ص \, ص'$

① عند النقطة $(٠ ، ٢)$

$٤ + ٢ص \, ص' = ٤س + ٤ص \, ص'$

$٤ص' = ٠ \Leftarrow ص' = ٠$

معادلة المماس

$ص - ٢ = ٠ (س - ٠)$

$ص = ٢$

② عند النقطة $(٠ ، -٢)$

$-٤ + ٢ص \, ص' = ٤س + ٤ص \, ص'$

$-٤ص' = -٤ \Leftarrow ص' = ١$

معادلة المماس هي

$ص + ٢ = ١ (س - ٠)$

$ص + ٢ = س$

$ص = س - ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

ثالثاً

التوازي والتعامد

مثال ①
جد معادلة المماس للأقتران
$ق(س) = س^2 + ٤س + ٣$
اذا كان المماس يوازي المستقيم
$ص = ٦س - ٥$

الحل
$ق'(س) = ٢س + ٤$ ، $م_{ل} = ٦$
المماس // المستقيم
$ق'(س) = م_{ل}$
$٢س + ٤ = ٦ \Leftarrow ٢س = ٢ \Leftarrow س = ١$
$ق(١) = ١^2 + ٤ \times ١ + ٣ = ٨$
نقطة المماس $(١ ، ٨)$
ميل المماس $= ٦$
معادلة المماس $ص - ٨ = ٦(س - ١)$

مثال ②
اذا كان $ق(س) = س^2 + ١$ ، جد
معادلة المماس للأقتران $ق(س)$
اذا كان المماس يعامد $ص = \frac{١}{٤}س + ١$

← الحل

الحل
$ق'(س) = ٢س$ ، $م_{ل} = \frac{١}{٤}$
ميل المماس $\perp$ ميل المستقيم $= -١$
$ق'(س_١) \times م_{ل} = -١$
$٢س_١ \times \frac{١}{٤} = -١$
$\frac{س_١}{٢} = -١ \Leftarrow س_١ = -٢$
$ق(-٢) = (-٢)^2 + ١ = ٥$
نقطة المماس هي $(-٢ ، ٥)$
ميل المماس $= ق'(-٢) = ٢ \times -٢ = -٤$
معادلة المماس هي
$ص - ٥ = -٤(س + ٢)$

مثال ③
جد النقطة على منحنى الاقتران
$ق(س) = ظا س$ التي يكون عندها
المماس موازيًا للمستقيم $ص = ٢س$
حيث $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل
$ق'(س) = قا^2 س$ ، $م_{ل} = ٢$
المماس // المستقيم $\Leftarrow$ ميل المماس $=$ ميل المستقيم
$قا^2 س_١ = ٢ \Leftarrow قا س_١ = \pm\sqrt{٢}$
لكن $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$
$\Leftarrow قا س_١ = \sqrt{٢} \Leftarrow س_١ = \frac{\pi}{٤}$
$ق(\frac{\pi}{٤}) = ظا \frac{\pi}{٤} = ١$
النقطة هي $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

AlWeSAM
الموقع ناجح الجمزاوي

مثال ④
اذا كان ه(س) = $\frac{ل(س) + ٨س}{هـ(س)}$
حيث هـ(س) ≠ ٠ ، وكان لمنحنى كل من ل(س) ، هـ(س) مماسًا افقيًا عند النقطة (١ ، ٤) فما قيمة ه'(١)

الحل
النقطة (١ ، ٤) تحقق ل ، هـ
← ه(١) = ٤ ، هـ(١) = ٤
مماس افقي عند النقطة (١ ، ٤)
← ل'(١) = صفر ، هـ'(١) = صفر

$ه'(س) = \frac{هـ(س) \times (ل'(س) + ٨) - (ل(س) + ٨س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$ه'(١) = \frac{هـ(١) \times (ل'(١) + ٨) - (ل(١) + ٨) \times هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}}$

$= \frac{٤ \times ٨ - (٤ + ٨) \times ٠}{٤^{٢}} = \frac{٣٢}{١٦} = ٢$

مثال ⑤
جد جميع النقط الواقعة على منحنى
ه(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥س + ٧
والتي يكون المماس لمنحنى ه(س) عندها يوازي المستقيم س + ٥ص + ٢ = ٠

الحل
نفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس
المشتقة ضمنيًا
١٨س + ٣٠ص ص' = ٠
٣٠ص ص' = −١٨س
ص' = $\frac{-١٨س}{٣٠ص} = \frac{-٩س}{١٦ص}$ ←

الحل
نفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس
المشتقة
ه'(س) = ٦س^{٢} − ٦س + ٥
ميل المماس = ه'(س$_{١}$) = ٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ + ٥
ميل المستقيم = $\frac{١}{٥}$

ميل المستقيم × ميل العمودي = −١
$(٦س_{١}^{٢} - ٦س_{١} + ٥) \times \frac{١}{٥} = -١$

٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ + ٥ = −٥
٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ = ٠
٦س$_{١}$ (س$_{١}$ − ١) = ٠
س$_{١}$ = ٠ ، س$_{١}$ = ١
ه(٠) = ٧ ، ه(١) = ١١
النقط (٠ ، ٧) ، (١ ، ١١)

مثال ⑥
جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة
٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥ موازيًا للمستقيم ٩س − ٨ص = ١

الحل
نفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس
المشتقة ضمنيًا
١٨س + ٣٢ص ص' = ٠
٣٢ص ص' = −١٨س
ص' = $\frac{-١٨س}{٣٢ص} = \frac{-٩س}{١٦ص}$ ←

ميل المماس = $\frac{-٩ س^{٢}}{١٦ ص^{٣}}$ ، ميل المستقيم = $\frac{٩}{٨}$

المماس // المستقيم

$\frac{-٩ س^{٢}}{١٦ ص^{٣}} = \frac{٩}{٨}$ ⇐ $-٨ س^{٢} = ١٦ ص^{٣}$

⇐ $-س^{٢} = ٢ ص^{٣}$ ---- ①

نقطة المماس $(س_١ ، ص_١)$ تحقق المعادلة نعوض $س_١ = -٢ ص_١^{٣}$ في العلاقة

$٩(-٢ ص_١^{٣})^{٢} + ١٦ ص_١^{٢} = ٥٠$

$٩ \times ٤ ص_١^{٦} + ١٦ ص_١^{٢} = ٥٠$

$٣٦ ص_١^{٦} + ١٦ ص_١^{٢} = ٥٠$

$٥٠ ص_١^{٢} = ٥٠$ ⇐ $ص_١^{٢} = ١$ ⇐ $ص_١ = \pm ١$

عندما $ص_١ = ١$ ⇐ $س_١ = -٢ \times ١ = -٢$

عندما $ص_١ = -١$ ⇐ $س_١ = -٢ \times -١ = ٢$

النقط هي

$(٢ ، -١)$ ، $(-٢ ، ١)$

مثال ⑦

اثبت ان المماسين للمنحنيين $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ ، $ص = س^{٢}$ متعامدين عند النقطة $(١ ، ١)$

الحل

نقطة المماس $(١ ، ١)$

نشتق ضمنياً

$٢ س + ٢ ص ص' = ٨$

$ص' = \frac{٤ - س}{ص}$

ميل المماس $= \frac{٤ - ١}{١} = ٣$ كيف عرفت

المماس يوازي محور الصادات

$ص = س^{٢}$ ⇐ $ص' = ٢ س$

ميل المماس $= ٢ \times ١ = ٢ =$ صعب

⇐ المماس يوازي محور السينات

⇐ المماسين متعامدين

مثال ⑧

جد جميع قيم $(س)$ بحيث يكون لمنحنى $ص = ٤ جتا ٢س$ مماساً افقياً في الفترة $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$(س_١ ، ص_١)$ نقطة المماس

$ص' = ٤ \times ٢ جتا ٢س = ٨ جتا ٢س$

المماس افقي ⇐ ميل المماس = صفر

$٨ جتا ٢س = صفر$

⇐ $٢س = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$

أو $س_١ = \frac{\pi}{٤} + ن\pi$

⇐ $س_١ = \frac{\pi}{٤} + ن\pi$ أو

$س_١ = \frac{٣\pi}{٤} + ن\pi$

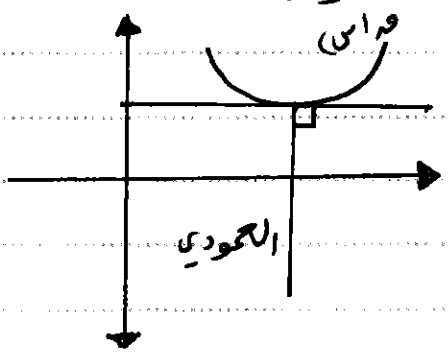
عندما $ن = ٠$ ⇐ $س_١ = \frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$

$ن = ١$ ⇐ $س_١ = \frac{٥\pi}{٤}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$ ∉

$س = \{\frac{\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤}\}$

ملاحظة هامة

① اذا كان المحوري على المماس يوازي محور الصادات فان المماس يوازي محور السينات (المماس افقي)



② تكون النقطة (س١ ، ص١) نقطة تماس منحنيين ق ، هـ ، يجب توفر شرطين

① ميل ق × ميل هـ = ١

② ق(س١) = هـ(س١)

(س١ ، ص١) نقطة مشتركة نقطة تقاطع

مثال

جد نقط تماس منحنيين الاقترانين ق(س) = س٢ ، هـ(س) = -س٢ + ٢س + ١

الحل

لتكن (س١ ، ص١) نقطة التماس

ق(س) = س٢

ميل ق(س) = ٢س

هـ(س) = -س٢ + ٢س

ميل هـ(س) = -٢س + ٢

م ق × م هـ = -١

٢س١ × (-٢س١ + ٢) = -١

٤س١٢ - ٤س١ + ١ = ٠

(٢س١ - ١)(٢س١ - ١) = ٠

٢س١ - ١ = صفر

س١ = ١/٢

ق(١/٢) = (١/٢)٢ = ١/٤

هـ(١/٢) = -(١/٢)٢ + ٢(١/٢) + ١

= ١/٤

⇐ ق(١/٢) = هـ(١/٢)

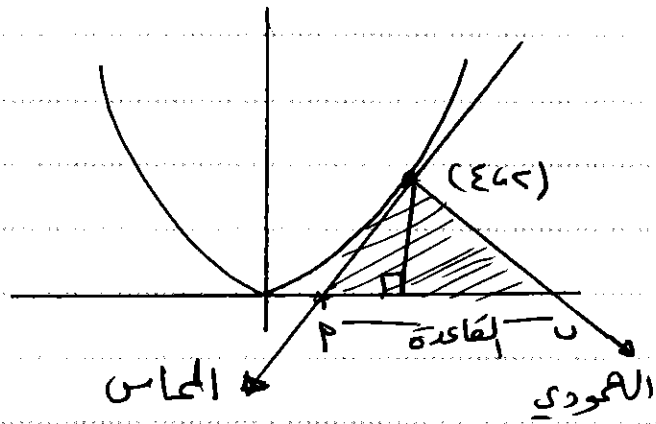
(١/٢ ، ١/٤) نقطة التماس

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أمثلة وتطبيقات هندسية متنوعة

مثال ①

اوجد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس ومحور السينات للأقتران $ق(س) = س^2$ عند النقطة $(٢، ٤)$



نجد معادلة المماس والعمودي

$ق'(س) = ٢س$، ميل المماس $= ق'(٢) = ٤$

معادلة المماس $ص - ٤ = ٤(س - ٢)$

نجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

نوعوض $ص = ٠ \leftarrow ٠ - ٤ = ٤(س - ٢)$

$\leftarrow س - ٢ = -١ \leftarrow س = ١$

النقطة $(١، ٠) =$ النقطة م

معادلة العمودي $ص - ٤ = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$

نجد نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات

$ص = ٠ \Leftarrow$

$٠ - ٤ = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$

$\leftarrow ١٦ = س - ٢ \leftarrow س = ١٨$

النقطة $(١٨، ٠) =$ ب

طول القاعدة $= ب - م = ١٨ - ١ = ١٧$

الارتفاع $= ٤$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ١٧ \times ٤ = ٣٤$

مثال ② س٢ ص ١٦ من الكتاب

اوجد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة $(١، ٥)$ لمنحنى الأقتران $ق(س) = س^2 + ٣$ والعمودي على المماس عند نقطة المماس والمستقيم $ص = ١$

الحل

لتكن نقطة المماس $(س_١، ص_١)$

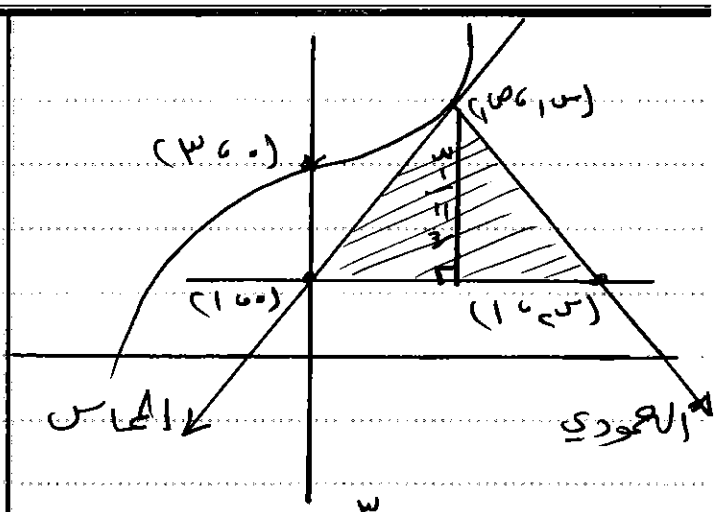
$ق'(س) = ٢س \leftarrow$ ميل المماس $= ٢س_١$

ميل المماس $= \frac{ص_١ - ١}{س_١}$ لكن $ص_١ = س_١^2 + ٣$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= \frac{س_١^2 + ٣ - ١}{س_١} = \frac{س_١^2 + ٢}{س_١}$

$\leftarrow$ نتبع الحل

مكتبة السلام NEWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي



$\Leftarrow 3س_1^2 = \frac{س_1^3 + 2}{س_1}$

$\leftarrow 3س_1^3 = س_1^3 + 2 \leftarrow 2س_1^3 = 2$

$\leftarrow س_1^3 = 1 \leftarrow س_1 = 1$

$ه(1) = (1)^3 + 3 = 4$

نقطة التماس $(س_1، ص_1) = (1، 4)$

ميل المماس $= ه'(1) = 3$

ميل العمودي $= \frac{-1}{3}$

معادلة المماس $ص - 4 = 3(س - 1)$

$\leftarrow ص = 3س + 1$

معادلة العمودي $ص - 4 = \frac{-1}{3}(س - 1)$

نجد نقطة تقاطع العمودي مع $ص = 1$

$1 = \frac{-1}{3}س + \frac{13}{3}$

$-س + 13 = 2 \Leftarrow س = 10$

النقطة هي $(10، 1) = (س_2، ص_2)$

القاعدة $= 10$

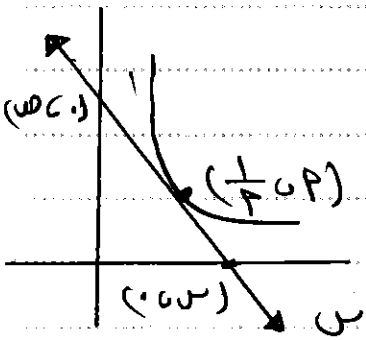
الارتفاع $= 4 - 1 = 3$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 3$

$= 15$

مثال (٣)

اثبت ان مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى $ص = \frac{1}{س}$ عند النقطة $(ب، \frac{1}{ب})$ والمحورين يساوي ٢ وحدة مربعة (الربع الأول)



الحل

$ص' = \frac{-1}{س^2}$

ميل المماس عند النقطة $(ب، \frac{1}{ب}) = \frac{-1}{ب^2}$

معادلة المماس $ص - \frac{1}{ب} = \frac{-1}{ب^2}(س - ب)$

نجد نقطة تقاطع مع محور الصادات

نضع $س = 0 \Leftarrow ص - \frac{1}{ب} = \frac{-1}{ب^2}س + \frac{1}{ب}$

$\leftarrow \frac{1}{ب^2}س = \frac{2}{ب} \leftarrow ب س = 2ب^2$

$\leftarrow س = 2ب$

نجد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات

نضع $س = 0$

$ص - \frac{1}{ب} = \frac{-1}{ب^2}(0 - ب)$

$\leftarrow ص = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{2}{ب}$

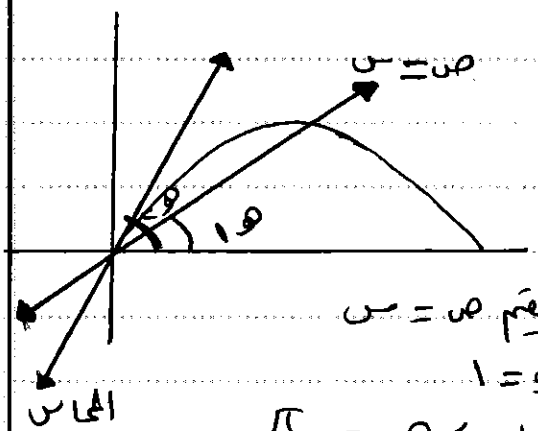
مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times 2ب \times \frac{2}{ب} = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

من الشكل المجاور، أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران و(س) = √٣ س − س² عند النقطة (٠، ٠)



ميل المستقيم ص = س
يساوي = ١
∴ ظا θ١ = ١ ← θ١ = π/٤
و(س) = √٣ س − س²
و′(س) = √٣ − ٢س
ميل المماس = و′(٠) = √٣
← ظا θ٢ = √٣ ← θ٢ = π/٣
الزاوية المحصورة = θ٢ − θ١
= π/٣ − π/٤ = π/١٢

الحل

ميل المماس = −معامل س / معامل ص = −(−٨/٤) = ٢

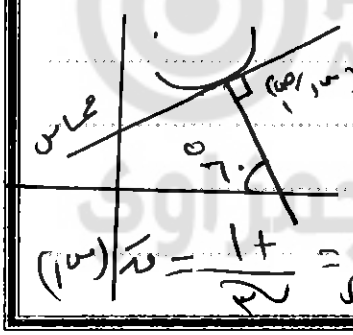
لتكن (س١، ص١) نقطة التماس
ميل المماس = ميل المنحنى
و′(س) = ٣/٢ س − ٨ س^(١/٢)
و′(س١) = ٣/٢ س١ − ٨ × ١/٤ س١^(−١/٢)
و′(س١) = ٣/٢ + ٤ / √س١
و′(س١) = ٣/٢ + ٤/√س١
٣/٢ + ٤/√س١ = ٢ ← ٤/√س١ = ١/٢
← √س١ = ٨ ← س١ = ٦٤
← س١ = ∛٦٤ = ٤
ص١ = ٣/٢ × ٤ − ٨/√٤ = ٦ − ٤ = ٢
نقطة التماس هي (٤، ٢)
النقطة تحقق معادلة المماس
٨ × ٤ − ٤ × ٢ + د = ٠
← ٣٢ − ٨ + د = ٠ ← د = −٢٤

مثال ⑤

اذا كان المستقيم ٨س − ٤ص + د = ٠ يمس منحنى الاقتران
و(س) = ٣/٢ س − ٨/√س حيث
قيمة جـ ؟

مثال ⑥

في الشكل المجاور، أوجد و′(س١)



الحل
ميل العمودي = ظا ١٢٠
= −√٣
ميل المماس = −١ / ميل العمودي = ١/√٣ = و′(س١)

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = -٣\sqrt{٣}$

فاوجد قياس زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق عند النقطة $(٢، ق(٢))$

الحل

ميل المماس = ظا زاوية المماس

$ق'(٢) = -٣\sqrt{٣}$

$\leftarrow$ ظا هـ $= -٣\sqrt{٣}$ = ميل

هـ $= ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠^\circ$

مثال (٨)

اذا كان $ق(س) = س^٣ - ٢ب س^٢ + ١$

وكان ميل العمودي على المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ١$ هو $(-\frac{١}{٥})$ فاوجد قيمة الثابت ب؟

الحل

ميل المماس = ميل المنحنى

ميل العمودي $= -\frac{١}{٥} \leftarrow$ ميل المماس $= ٥$

ميل المنحنى $ق'(س) = ٣س^٢ - ٢ب س$

$ق'(١) = ٣ - ٢ب = ٥$

$٢ب = -٢ \leftarrow ب = -١$

مثال (٩)

اذا كانت معادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ٣$ هي $ص + ٢س = ١١$

وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى $ه(س)$ عند $س = ٣$ هي $٤ص + س = ١٥$ وكانت $ل(س) = ق(س) \times ه(س)$ فاوجد $ل'(٣)$

الحل

نجد كل من $ق(٣)$ ، $ق'(٣)$ ، $ه(٣)$ ، $ه'(٣)$

المماس لمنحنى $ق(س)$ هو $ص + ٢س = ١١$

$ق(٣)$ = بتعويض ٣ في المماس

$= -٢ \times ٣ + ١١ = ٥$

$ق(٣) = ٥$

$ص = -٢ \quad ق'(٣) = -٢$

المماس لمنحنى $ه(س)$ $٤ص + س = ١٥$

$ه(٣) = ص(٣) = \frac{١٥ - ٣}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$ه'(٣) = ص'_{س=٣} = -\frac{١}{٤}$ = ميل العمودي $= ٤$

$ل'(س) = ق(س) \times ه'(س) + ه(س) \times ق'(س)$

$ل'(٣) = ق(٣) \times ه'(٣) + ه(٣) \times ق'(٣)$

$= ٥ \times ٤ + ٣ \times -٢$

$= ٢٠ - ٦ = ١٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

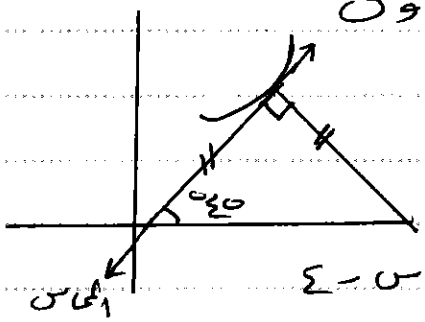
مثال (١٠)

أوجد قيم س على المنحنى
$ص = \frac{1}{3}س^3 - س^2 - 4س + 1$
والتي يصنع كل من المماس والعمودي عندها مع محور السينات مثلث متساوي الساقين

الحل

يوجد حالتان

① الحالة الأولى



$ص' = س^2 - 2س - 4$

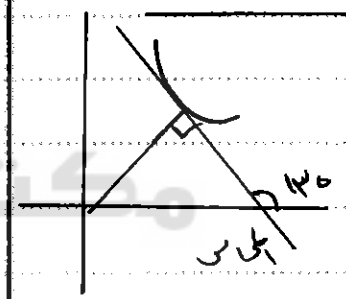
$= ظا ٤٥° = 1$

$س^2 - 2س - 5 = 0$ بالقانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أ ج}}{2أ}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2}$$

② الحالة الثانية



$ص' = س^2 - 2س - 4$

$= ظا ١٣٥° = -1$

$س^2 - 2س - 3 = 0$

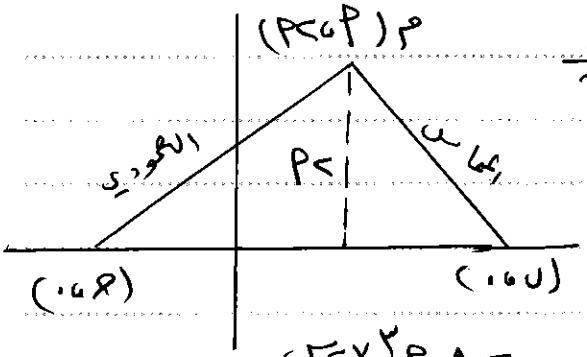
$(س - 3)(س + 1) = 0$

$س = 3$ ، $س = -1$

مثال (١١)

اذا قطع المماس والعمودي لمنحنى $و(س) = \frac{8أ^3}{3أ^3 + س^2}$ عند النقطة $(أ، ٢أ)$ محور السينات في النقطتين ب، جـ على الترتيب فجد مساحة المثلث م ب جـ

الحل



$$و'(س) = \frac{-8أ^3 \times 2س}{(3أ^2 + س^2)^2}$$

$$و'(أ) = \frac{-8أ^3 \times 2أ}{(3أ^2 + أ^2)^2} = \frac{-16أ^4}{16أ^4} = -1$$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= -1$

وأيضاً ميل المماس $= \frac{٠ - ٢أ}{ب - أ} = -1$

$\Leftarrow -2أ = -أ - ب \Leftarrow ب = 3أ$

ميل العمودي $= 1$

وأيضاً ميل العمودي $= \frac{٠ - ٢أ}{جـ - أ} = 1$

$\Leftarrow -2أ = جـ - أ \Leftarrow جـ = -أ$

$\Leftarrow ب جـ = 3أ - (-أ) = 4أ$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 4أ \times 2أ$

$= 4أ^2$

تدريبات الكتاب

① تدريب ① ص١٥٤
جد معادلة المماس والعمودي على المماس للمنحنى الاقتران
$ق(س) = \frac{1}{س}$ عند $س = ٢$

الحل
ميل المماس $= ق'(٢)$
$ق'(س) = \frac{-١}{س^٢} \leftarrow ق'(٢) = \frac{-١}{٤}$
$ص_١ = ق(٢) = \frac{١}{٢}$
نقطة المماس هي $(٢ ، \frac{١}{٢})$
معادلة المماس هي
$ص - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$
معادلة العمودي
$ص - \frac{١}{٢} = ٤(س - ٢)$

② تدريب ② ص١٥٥
بين ان المماسين للمنحنى $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = س$ متعامدين عند نقطة تقاطعهما
الحل
نجد نقط التقاطع
$\frac{١}{س} = س \Rightarrow س^٢ = ١ ، س = \pm ١$

$ق'(س) = \frac{-١}{س^٢}$ ، $هـ'(س) = ١$
عند $س = ١$
$ق'(١) \times هـ'(١) = \frac{-١}{١} \times ١ = -١$
متعامدان
عند $س = -١$
$ق'(١) \times هـ'(١) = \frac{-١}{١} \times ١ = -١$
متعامدان

③ تدريب ③ ص١٥٦
عين الثابت $ج$ في الاقتران $ق(س) = ج س^٢$ ، اذا كان قياس زاوية ميل المماس للمنحنى $ق(س)$ عند $س = ١$ هو $٤٥°$

الحل
$ق'(س) = ٢ ج س$
$ق'(١) = ٢ ج = ظا ٤٥ = ١$
$ج = \frac{١}{٢}$

④ تدريب ④ ص١٥٨
جد معادلة المماس المرسوم من النقطة $(٠ ، ٦)$ للمنحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

الحل
$(٠ ، ٦)$ لا تقع على المنحنى
نفرض ان نقطة المماس هي $(س_١ ، ص_١)$

يتبع ←

نشتقه ضمنياً

$2س + 2ص ص' = 0$

$\Leftarrow ص' = \frac{-2س}{2ص} = \frac{-س}{ص}$

ايضاً ميل المماس $= \frac{ص_1 - 0}{س_1 - 6}$

$\Leftarrow \frac{ص_1}{س_1 - 6} = \frac{-س_1}{ص_1}$

$ص_1^2 = -س_1^2 + 6س_1$

$ص_1^2 + س_1^2 = 6س_1$ من العلاقة

$18 = 6س_1 \Leftarrow س_1 = 3$

بالتعويض $(3)^2 + ص_1^2 = 18$

$ص_1^2 = 9 \Leftarrow ص = \pm 3$

النقاط $(3، 3)$ و $(3، -3)$

عند $(3، 3)$

$م = \frac{-س}{ص} = \frac{-3}{3} = -1$

المماس : $ص - 3 = -(س - 3)$

عند $(3، -3)$

$م = \frac{-3}{-3} = 1$

المماس : $ص + 3 = 1(س - 3)$

⑤ تدريب ⑤ ص ١٥٨

بين أن المنحنى الاقتران $و(س) = س^2 + 8$ مماسين مرسومين من النقطة $(1، 5)$ التي لا تقع عليه.

الحل

النقطة $(1، 5)$ لا تقع عليه

نفرض ان نقطة التماس $(س، ص)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$\frac{ص - 5}{س - 1} = 2س$

$ص - 5 = 2س^2 - 2س$

لكن $ص = س^2 + 8$

$س^2 + 8 - 5 = 2س^2 - 2س$

$س^2 - 2س - 3 = 0$

$(س - 3)(س + 1) = 0$

$س = 3$ $س = -1$

عند $س = 2 \Leftarrow ص = 4 + 8 = 12$

الميل $= 2 \times 2 = 6$

معادلة المماس هي $ص - 12 = 6(س - 2)$

عند $س = -1 \Leftarrow ص = 1 + 8 = 9$

$(-1، 9)$

الميل $= 2 \times -1 = -2$

معادلة المماس

$ص - 9 = -2(س + 1)$

مكتبة الإسلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل الكتاب (صفحة ١٠٩)

السؤال الأول

جد ميل المماس لمنحنى الاقتران
$f(س) = س^{٢} - ٤س + ٣$ عند
النقطة $(١، ٠)$

الحل

$f'(س) = ٢س - ٤$
$f'(١) = ٢ - ٤ = -٢$

السؤال الثاني

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة
$س^{٢} - ص^{٢} = ٨$ المرسوم له
النقطة $(-٤، ٠)$

الحل

نفرض ان النقطة المماس $(س_{١}، ص_{١})$
نشتقه ضمنياً
$٢س - ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = م$
$\leftarrow م = \frac{س}{ص}$
ايضاً الميل $= \frac{ص - ٠}{س + ٤}$
$\frac{ص}{س+٤} = \frac{س}{ص}$
$ص^{٢} = س^{٢} + ٤س$
$س^{٢} - ص^{٢} = -٤س$
$-٨ = -٤س \leftarrow س = \frac{-٨}{-٤} = ٢$
بالتعويض في العلاقة
$(٢)^{٢} - ص^{٢} = ٨$
$\leftarrow ص^{٢} = ٤ + ٨ = ١٢$
$ص = \pm \sqrt{١٢}$
النقاط $(٢، \sqrt{١٢})$ ، $(٢، -\sqrt{١٢})$
عند $(٢، \sqrt{١٢})$
الميل $= \frac{س}{ص} = \frac{٢}{\sqrt{١٢}}$

معادلة المماس : $ص - \sqrt{١٢} = \frac{٢}{\sqrt{١٢}}(س - ٢)$
عند النقطة $(٢، -\sqrt{١٢})$
الميل $= \frac{س}{ص} = \frac{-٢}{\sqrt{١٢}}$

معادلة المماس : $ص + \sqrt{١٢} = \frac{-٢}{\sqrt{١٢}}(س - ٢)$

السؤال الثالث

جد معادلة المماس لمنحنى
$f(س) = س^{٢} - ٦س + ٧$ عند نقطة
تقاطعة مع المستقيم $ص - ٣س + ١ = ٠$

الحل

$ص = ٣س - ١$ عند نقطة التقاطع
يساوي بينهما
$ص = f(س)$
$س^{٢} - ٦س + ٧ = ٣س - ١$
$س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠$
$(س - ٨)(س - ١) = ٠ \leftarrow$ ينتج

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تابع الكل

س = ٨ ، ١

عند س = ١ ← ص = ٢

النقطة (١ ، ٢)

عند س = ٨ ← ص = ٣٢

النقطة (٨ ، ٣٢)

عند النقطة (١ ، ٢)

ق'(س) = ٢س - ٦

ق'(١) = ٢ × ١ - ٦ = -٤

معادلة المماس ص - ٢ = -٤ (س - ١)

عند النقطة (٨ ، ٣٢)

ق'(٨) = ٢ × ٨ - ٦ = ١٠

معادلة المماس

ص - ٣٢ = ١٠ (س - ٨)

السؤال الرابع

اذا كان المستقيم ٤س - ٢ص - ٨ = ٠ يمس منحنى ق عند النقطة (٣ ، ٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س = صفرًا عموديًا على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣ ، -١) فجد (ق × ل)'(٣)

الحل

ميل المماس = $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

= ق'(٣)

وايضاً ق'(٣) = ٢ ← نقطة تماس

ميل العمودي على ل

$= \frac{-٣}{٩} = -\frac{١}{٣}$

← ل'(٣) = ٣ لأنه عمودي

ل(٣) = -١

(ق × ل)'(٣) =

ق(٣) × ل'(٣) + ل(٣) × ق'(٣)

٢ × ٣ + -١ × ٢

= ٦ - ٢ = ٤

السؤال الخامس

جد معادلة المماس لمنحنى

$س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ عند نقطة تماسه مع المستقيم س + ص = ١

الحل

ص = ١ - س نعوضها في المنحنى

$س^٢ + (١ - س)^٢ = ٢٥$

$س^٢ + ١ - ٢س + س^٢ = ٢٥$

$٢س^٢ - ٢س - ٢٤ = ٠$

$س^٢ - س - ١٢ = ٠$

(س - ٤)(س + ٣) = ٠

س = ٤ ، س = -٣

عند س = ٤ ← ص = ١ - ٤ = -٣

النقطة (٤ ، -٣)

عند س = -٣ ← ص = ١ - -٣ = ٤

(-٣ ، ٤) ← يتبع

سابع الحل

نشتق ضمنياً

$2س + 2ص ص' = 0$

$ص' = \frac{-2س}{2ص} = \frac{-س}{ص}$

عند $(-3، 4)$

الميل $= \frac{3+}{4}$

معادلة المماس $ص - 4 = \frac{3}{4}(س + 3)$

عند $(4، -3)$

الميل $= \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

معادلة المماس $ص + 3 = \frac{4}{3}(س - 4)$

السؤال السادس

اذا كان المستقيم $2س + 3ص = 1$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = 4س^2 + 2س + ب$ عند النقطة $(1، ق(1))$ فجد قيمة 2 و $ب$

الحل

$ق(س) = 8س + 2$

$ق(1) = 8 + 2$ ، ميل المستقيم $= \frac{-2}{3}$

المشتقة = المشتقة $(عند\ س)$

$8 + 2 = \frac{-2}{3} \leftarrow 24 + 6 = -2$

$24 = -4 \leftarrow 2 = -6$

بالتعويض في معادلة المستقيم

$-6 + 3ص = 1$

$3ص = 7 \leftarrow ص = \frac{7}{3}$ عندما $س = 1$

$ق(1) = 4(1)^2 + -6(1) + ب$

$= 4 - 6 + ب = -2 + ب$

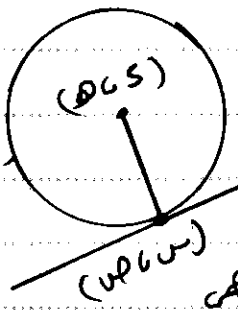
الصورة = الصورة

$-2 + ب = \frac{7}{3} \Leftarrow ب + 2 = \frac{7}{3}$

$ب = \frac{13}{3}$

السؤال السابع

اثبت باستخدام التفاضل ان نصف قطر الدائرة يكون عمودياً على مماس الدائرة عند نقطة التماس



الحل

معادلة الدائرة التي مركزها $(ك، هـ)$ ونصف قطرها نقه هي

$(س - ك)^2 + (ص - هـ)^2 = نقه^2$

نشتقه

$2(س - ك) + 2(ص - هـ) \times ص' = 0$

$2(ص - هـ) \times ص' = -2(س - ك)$

$ص' = \frac{-2(س - ك)}{2(ص - هـ)} = \frac{-(س - ك)}{ص - هـ}$

نصف القطر يمر بالنقطة

ميل نصف القطر $= \frac{ص - هـ}{س - ك}$

ميل المماس × ميل نصف القطر

$= \frac{-(س - ك)}{ص - هـ} \times \frac{ص - هـ}{س - ك} = -1$

متعامدان

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

جد جميع قيم س التي يكون العمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = س - جتا٢س$ عندها موازيًا لمحور الصادات.

الحل

العمودي يوازي الصادات فيكون المماس يوازي محور السينات

$ق'(س) = ١ - ٢جتا٢س = ٠$

$١ = ٢جتا٢س \Leftarrow جتا٢س = \frac{١}{٢}$

$٢س = ٦٠° + ٣٦٠° ن$

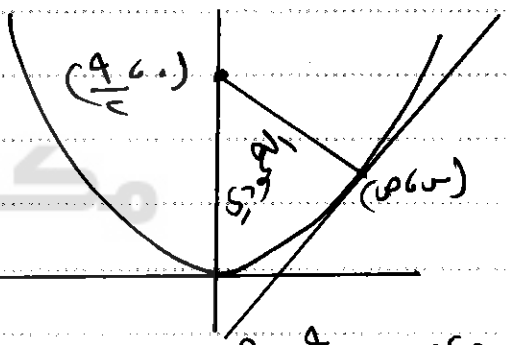
$\Leftarrow س = ٣٠° + ١٨٠° ن$

أو $٢س = ٣٠٠° + ٣٦٠° ن$

$س = ١٥٠° + ١٨٠° ن$

السؤال التاسع

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = س^٢$، إذا كان العمودي مرسومًا من النقطة $(٠، \frac{٩}{٤})$



ميل العمودي $= \frac{\frac{٩}{٤} - ص}{-س}$

$= \frac{\frac{٩}{٤} - س^٢}{-س}$

ميل المماس $= ص' = ٢س$

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-١}{٢س}$

$\frac{\frac{٩}{٤} - س^٢}{-س} = \frac{-١}{٢س}$

$٩ - ٤س^٢ = س^٣$

$٢س^٣ = ٩ - س = ٨س$

$٢س^٣ - ٨س = ٠$

$٢س(س^٢ - ٤) = ٠$

$س = ٠$، $س = ٢$ ، $س = -٢$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ق(٠) = ٠$ $(٠، ٠)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٠}$ (عمودي على السينات)

أي المعادلة $س = ٠$ محور الصادات

عندما $س = ٢ \Leftarrow ق(٢) = ٤$ $(٢، ٤)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٤}$

معادلة العمودي $ص - ٤ = \frac{-١}{٤}(س - ٢)$

عندما $س = -٢$ $ق(-٢) = ٤$

$(-٢، ٤)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{-٤} = \frac{١}{٤}$

معادلة العمودي

$ص - ٤ = \frac{١}{٤}(س + ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال العاشر

حل السؤال ص١٥ الدوسية
مثال (١٤)

السؤال الثاني عشر

حل السؤال ص٢١ الدوسية
مثال (٢)

السؤال الحادي عشر

اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٥-، ٢) ، (٢، ٦، ٦) يمس منحنى الاقتران ق(س) = ٢س^٣ + ٢س - ١ عند قيمة ٢ .

الحل

نجد معادلة المستقيم

ميل = $\frac{٦+٢}{٢-٠} = \frac{٨}{٢} = ٤$

ص + ٢ = ٤ (س - ٠)

ص = ٤س - ٢

ق'(س) = ٦٢س + ٢

ميل المستقيم = ٤

$\Leftarrow ٦٢س + ٢ = ٤ \Leftarrow ٦٢س = ٢$

$٢ = \frac{٢}{٦س} = \frac{١}{٣س}$

الصورة = الصورة

$٤س - ٢ = ٢س^٣ + ٢س - ١$

$٤س - ٢ = \frac{١}{٣س} + ٢س - ١$

$٤س - ٢ = س + ٢س - ١$

$٤س - ٢ = ٣س - ١$

$س = ١ \Leftarrow ٢ = \frac{١}{س} = \frac{١}{١}$

= ١

تمارين مراجعة ص١٣٢

السؤال الأول

اذا كان المستقيم ٣س - ص - ح = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣-}{س+١}$ عند النقطة (س١، ص١)

الواقعة على منحناه اوجد

(أ) احداثي النقطة (س١، ص١)

(ب) قيمة الثابت ح .

الحل

ص = ٣س - ح

ص' = ٣ ، ق'(س) = $\frac{٣}{(س+١)^٢}$

(ب) ص' = ق'

$٣ = \frac{٣}{(س+١)^٢} \leftarrow ٣(س+١)^٢ = ٣$

$\Leftarrow (س+١)^٢ = ١ \Leftarrow س+١ = \pm\sqrt{١}$

س = ١ - ١ = ٠ ، س = -٢

عند س = ٠ ، ص = ق(س) = $\frac{٣-}{١}$ = -٣

(٠، -٣)

وبالتعويض في المستقيم

٣ × ٠ - ح = -٣ ، ح = ٣

عند س = -٢ ، ص = $\frac{٣-}{١+(-٢)}$ = ٣

(-٢، ٣)

اختبار ذاتي ص٢١٧

السؤال الثاني

(ب) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = (س-٣)^{٢}$ اذا كان هذا المماس مرسوما من النقطة (٠، ٠)

الحل

نفرض ان نقطة المماس $(س_١، ص_١)$

ميل المماس $= \frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{ص}{س}$

$= \frac{(س-٣)^{٢}}{س}$

ميل المنحنى $= ق'(س) = ٢(س-٣)$

$\frac{(س-٣)^{٢}}{س} = ٢(س-٣)$

$(س-٣)^{٢} = ٢س(س-٣)$

$(س-٣)^{٢} - ٢س(س-٣) = ٠$

$(س-٣)(س-٣-٢س) = ٠$

$(س-٣)(-س-٣) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -٣$

عند $س = ٣ \Leftarrow ق(٣) = ٠$ $(٣، ٠)$

الميل $= ق'(٣) = ٢(٣-٣) = ٠$

المماس $\Leftarrow ص = ٠$

العمودي $س = ٠$

عند $س = -٣$

$ق(-٣) = (-٣-٣)^{٢} = ٣٦$

النقطة $(-٣، ٣٦)$

$ق'(-٣) = ٢(-٣-٣) = -١٢$

المماس

$ص - ٣٦ = -١٢(س+٣)$

العمودي

$ص - ٣٦ = \frac{١}{١٢}(س+٣)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية
جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢} + ٣ ، اذا كان الميل
على هذا المماس عند النقطة (٩/٤ ، ٠)

الحل

نفرض نقطة التماس هي (س ، ص)
ميل المماس = ق'(س) = ٢س
ميل المحدد $\frac{ص - \frac{٩}{٤}}{س - ٢}$

$= \frac{س^{٢} + ٣ - \frac{٩}{٤}}{س - ٠} = \frac{س^{٢} - \frac{٣}{٤}}{س}$

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$\frac{س^{٢} - \frac{٣}{٤}}{س} = \frac{-١}{٢س}$

$٢س^{٣} - ٣س = -س$
$٢س^{٣} - ٢س = ٠$
$٢س(س^{٢} - ١) = ٠$
س = ٠ ، ١ ، -١
عند س = ٠ ← ق(٠) = ٣ (٠ ، ٣)
ميل المماس = صفر
معادلة المماس ص = ٣
عند س = ١ ← ق(١) = ٤ (١ ، ٤)
ق(١) = ٢
معادلة المماس ص - ٤ = ٢(س - ١)
عند س = -١ ← ق(-١) = ٤ (-١ ، ٤)
ق(-١) = -٢ = م
معادلة المماس ص - ٤ = -٢(س + ١)

---

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

① اذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢ ، ١٦) ، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فاوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{٤ - ٢س}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{٤ - ٢س}$ = $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{-(٢س - ٤)}$

$= -\frac{١}{٢} \times ق'(٢) = -\frac{١}{٢} \times ظا٤٥°$
$= -\frac{١}{٢} \times ١ = -\frac{١}{٢}$

---

② اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٥ - ب) ، (٢ ، ٦ ب) عمودي على منحنى الاقتران ق(س) = ٥س^{٢} + ٢س - ١
فجد قيمة الثابت ب ؟

الحل

ميل المماس = ق'(س) = ١٠س + ٢
ميل المستقيم = $\frac{٦ب - (٥ - ب)}{٢ - ١} = \frac{٨}{٤}$ = ٤

يتبع ←

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

ميل المماس = ميل المستقيم

$ص = ٤س + ج = ٤$

$\leftarrow ٢ل س = ٢ \leftarrow ل س = ١ \leftarrow ل = \frac{١}{س}$

نجد معادلة المستقيم

$ص + ٢ = ٤(س - ٠)$

$ص = ٤س - ٢$

$ص = هـ$

$٤س - ٢ = ل س^{٢} + ج س - ١$

$٤س - ٢ = \frac{١}{س} \times س^{٢} + ج - ١$

$٤س - ٢ = س + ج - ١$

$٤س - ٣س = ١ - ٢$

$س = ١ \quad \therefore ل = \frac{١}{١} = ١$

---

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $هـ(س) = ج س - جا س$

حيث $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ فجد جميع قيم س التي يكون عندها المحودي على المماس لمنحنى هـ موازيًا لمحور الصادات ثم جد معادلة احد هذه المماسات فقط

الحل

المحودي يوازي الصادات ← المماس يوازي السينات ←

$هـ'(س) = ٠$

$هـ'(س) = ٢ - ٤ جتا ٤س = ٠$

$جتا ٤س = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$٤س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

$س = \frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{٥\pi}{١٢}$

نجد معادلة المماس عند $س = \frac{\pi}{١٢}$

$هـ(\frac{\pi}{١٢}) = \frac{\pi ٢}{١٢} - جا ٤ \times \frac{\pi}{١٢}$

$= \frac{\pi}{٦} - \frac{٣}{٢}$

المماس

$ص = \frac{\pi}{٦} - \frac{٣}{٢}$

---

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان منحنيا الأقترانين

$هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ل$

$و(س) = س^{٣} - س^{٢} - س + ج$ مماسان عند النقطة $(-١ ، ٠)$ فجد

① قيمة كل من الثوابت $٢ ، ل ، ج$

② معادلة المماس المشترك لمنحنيي الأقترانين هـ ، و عند النقطة $(-١ ، ٠)$

الحل

هـ يمر بالنقطة $(-١ ، ٠)$

$\leftarrow هـ(-١) = ٠ \leftarrow ١ - ٢ + ل = ٠$

$\leftarrow -٢ + ل = -١ \quad ---①$

هـ يمر بالنقطة $(-١ ، ٠) \leftarrow$

$و(-١) = -١ - ١ + ١ + ج = ٠$

$\leftarrow \boxed{ج = ١}$

$\leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام
AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

$ق'(س) = ٢س + ب$
$ق'(-١) = -٢ + ب$
$هـ'(س) = ٣س^٢ - ٢س - ١$
$هـ'(-١) = ٣ + ٢ - ١ = ٤$
$ق'(-١) = هـ'(-١)$
$-٢ + ب = ٤ \leftarrow ب = ٦$
وبالتعويض $-٦ + ل = -١$
$ل = -١ + ٦ = ٥$
$\leftarrow ق(س) = س^٢ + ٦س + ٥$
$ق'(س) = ٢س + ٦$
$ق'(-١) = -٢ + ٦ = ٤$
المماس
$ص - ٠ = ٤(س + ١)$
$ص = ٤س + ٤$

---

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ حيث يكون المماس عند نقطة التماس عموديًا على المستقيم $٦ص - ٣س - ٥ = ٠$

الحل

$هـ'(س) = ٢س - ٤ =$ ميل المماس
ميل المستقيم (العمودي) $= \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس × ميل العمودي $= -١$
$(٢س - ٤) \times -\frac{١}{٢} = -١$
$س - ٢ = -١$
$س = ١$
بالتعويض $س = ١$ في $ق(١) = ١ - ٤ + ٣ = ٠$
نقطة التماس $(١، ٠)$
ميل المماس $= ٢ \times ١ - ٤ = -٢$
معادلة المماس
$ص - ٠ = -٢(س - ١)$
$ص = -٢س + ٢$

---

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ + أس - ٤$ عندما $س = ٣$

الحل

$س - ٤ = ٠$

	$س - ٤$	$٤ - س$
٤	+	

⑤ ↗

$ق(س) = ب س^٢ - ٤س + ٤$
$ق'(س) = ٢ب س - ٤$
$ق'(٣) = ٦ب - ٤ = ١$
ميل المماس $= ٦ \times ٢ - ٤ = ٥$
$ص_١ = ٣ \times ٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٤ = ١٠$
معادلة المماس هي
$ص - ١٠ = ٥(س - ٣)$
العمودي
$ص - ١٠ = -\frac{١}{٥}(س - ٣)$

مركز الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

جد نقطة تقاطع منحنى الاقترانين
$ق(س) = \sqrt{٤-س}$ ، $هـ(س) = س^٢$
ثم جد معادلة المماس لمنحنى الاقترانين
$ق(س)$ ، $هـ(س)$ عند تلك النقطة

الحل

$هـ'(س) = \frac{-١}{\sqrt{٤-س}}$ ، $هـ'(س) = ٢س$

$ق'(س) \times هـ'(س) = -١$

$\frac{-١}{\sqrt{٤-س}} \times ٢س = -١$

$س = \sqrt{٤-س}$ بالتربيع

$س^٢ = ٤ - س \Leftarrow$

$س^٢ + س - ٤ = ٠$

$(س+٢)(س-١) = ٠$

$س = ١$ ، $س = -٢$ مرفوض لأنها ليست نقطة تقاطع

$هـ(١) = ١$

∴ نقطة التقاطع $(١، ١)$

ميل المماس لمنحنى $هـ = \frac{-١}{\sqrt{٤-س}}$

$= \frac{-١}{٢}$

معادلة المماس

$ص - ١ = -\frac{١}{٢}(س - ١)$

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان المستقيم $س + ٦ص + ك = ٠$
يمس منحنى الاقتران
$هـ(س) = \frac{٣س}{س-٢}$ ، $س \neq ٢$
فجد قيمة الثابت ك ؟

الحل

ميل المستقيم $= -\frac{١}{٦}$

$هـ'(س) = \frac{(س-٢) \times ٣ - ٣س \times ١}{(س-٢)^٢}$

$= \frac{-٦}{(س-٢)^٢}$

$ص = هـ \Leftarrow -\frac{١}{٦} = \frac{-٦}{(س-٢)^٢}$

$(س-٢)^٢ = ٣٦$

$\leftarrow س - ٢ = \pm ٦$

$س = ٨$ ، $س = -٤$

عند $س = ٨ \leftarrow هـ(٨) = \frac{٤ك}{٦} = ٤$

$(٨، ٤)$

بالتعويض في المستقيم

$٨ + ٦ \times ٤ + ك = ٠ \leftarrow ك = -٣٢$

عند $س = -٤ \leftarrow هـ(-٤) = \frac{-١٢}{-٦} = ٢$

النقطة $(-٤، ٢)$

بالتعويض في معادلة المستقيم

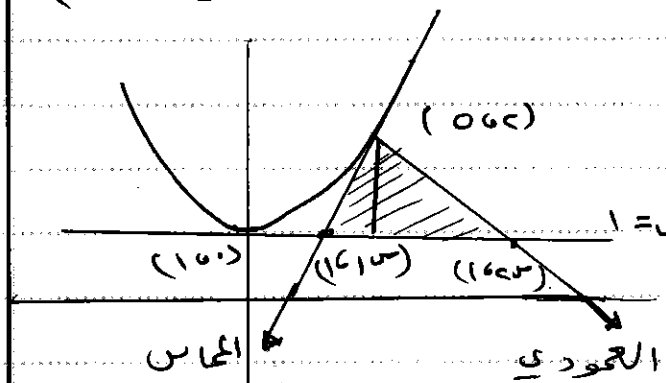
$-٤ + ٦ \times ٢ + ك = ٠$

$ك = -٨ \leftarrow$

مكتبة العلم ALELM.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ١$ عند النقطة $(٢، ٥)$، والمستقيم $ص = ١$ علماً بأن معادلة العمودي $ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢}$



$ق'(س) = ٢س \Leftarrow ق'(٢) = ٤$

ميل المماس $= ٤$ ميل العمودي $= -\frac{١}{٤}$

ميل المماس $= \frac{٥ - ١}{٢ - س_{١}} = ٤$

$\Leftarrow ٨ - ٤س_{١} = ٤ \Leftarrow ٤س_{١} = ٤ \quad س_{١} = ١$

ميل العمودي $= \frac{٥ - ١}{٢ - س_{٢}} = -\frac{١}{٤}$

$\Leftarrow س_{٢} = ١٨$

طول القاعدة $= ١٨ - ١ = ١٧$

الارتفاع $= ٥ - ١ = ٤$

مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times ١٧ \times ٤ = ٣٤$

⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة $(ص - ٣)^{٢} = س + ٤$ موازياً المستقيم $٢س + ص + ١ = ٠$

الحل

ميل المستقيم $= \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

نشتق المعادلة

$٢(ص - ٣) \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٣)}$

المستقيم // المماس

$\frac{١}{٢(ص - ٣)} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ص - ٣ = -١$

$\Leftarrow ص = ٢$

بالتعويض

$(٢ - ٣)^{٢} = س + ٤$

$١ = س + ٤$

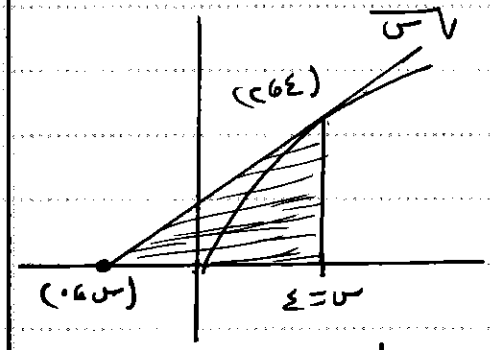
$\Leftarrow س = -٣$

النقطة $(-٣، ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

جد مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $ص = \sqrt{س}$ عند النقطة (٤، ٢) ومحور السينات ومستقيم $س = ٤$



ميل المماس $= \frac{١}{\sqrt{س}}$ عند $س = ٤$

$= \frac{١}{\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢}$

أيضاً ميل المماس $= \frac{٢ - ٠}{٤ - س}$

$\frac{٢}{٤ - س} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٤ - س = ٨$

$\boxed{س = -٤}$

القاعدة $= ٤ + ٤ = ٨$

الارتفاع $= ٢$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢$

$= ٨$

(١٢) وزارة (٢٠١٣) صيفية

جد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة $(ص - ٤)^٢ = س + ٢$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $٣س + ٦ص + ٢ = ٠$

الكل

ميل المستقيم $= \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس (اشتقاق ضمنياً)

$٢(ص - ٤) \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٤)}$

المستقيم // المماس

$\frac{١}{٢(ص - ٤)} = -\frac{١}{٢}$

$-٢(ص - ٤) = ٢$

$ص - ٤ = -١ \Leftarrow ص = ٣$

نعوضها في العلاقة

$(٣ - ٤)^٢ = س + ٢$

$١ = س + ٢$

$\Leftarrow س = -١$

النقطة $(-١، ٣)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان المستقيم ٢س - ص + ٢ = صفر
يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٢}{س}$
س ≠ ٠ عند النقطة (س١ ، ص١)
الواقعة على منحناه فجد قيم الثابت ج

الحل

ميل المستقيم = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

ق'(س) = $\frac{+٢}{س^{٢}}$

ص' = ق'(س)

$\frac{٢}{س^{٢}}$ = ٢ ⇐ س^{٢} = ١

س = ١ س = -١

عند س = ١ ⇐ ق(١) = -٢

النقطة (١ ، -٢)

بالتعويض في المستقيم

٢ × ١ - (-٢) + ج = ٠ ⇐ ج = -٤

عند س = -١ ق(-١) = ٢

النقطة (-١ ، ٢)

بالتعويض في المستقيم

٢ × -١ - ٢ + ج = ٠

⇐ ج = ٤

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

بين ان لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢} + ٤ مماسين
مرسومين من النقطة (١ ، ١)

الحل

نفرض نقطة بمماس (س ، ص)

ميل المماس = $\frac{ص - ١}{س - ١}$ =

= $\frac{س^{٢} + ٤ - ١}{س - ١}$ = $\frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$

ميل المنحنى ق'(س) = ٢س

ق'(س) = ميل المماس

$\frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$ = ٢س

س^{٢} + ٣ = ٢س^{٢} - ٢س

س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

(س - ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ ⇐ ق(٣) = ٩ + ٤ = ١٣

(٣ ، ١٣)

س = -١ ⇐ ق(-١) = ٥

(-١ ، ٥)

مماسين مرسومين

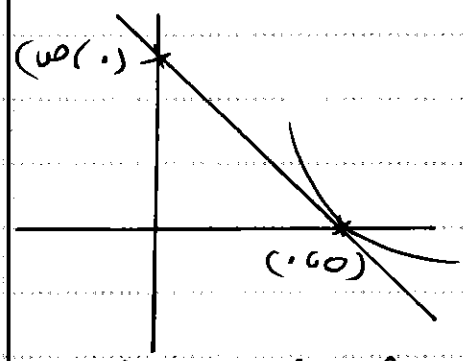
مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

مساحة المثلث الواقع في الربع الأول والمحصور بين محوري الإحداثيات والمماس لمنحنى العلاقة $ص = \frac{٥}{س} - \frac{س}{٥}$ ، $س \neq ٠$ عند النقطة $(٥، ٠)$

الحل

النقطة $(٥، ٠)$ تقع على المنحنى



ميل المماس $= \frac{ص - ٠}{٠ - ٥} = -\frac{ص}{٥}$

$ص' = -\frac{٥}{س^٢} - \frac{١}{٥}$

$ص'|_{س=٥} = -\frac{٥}{٢٥} - \frac{١}{٥} = -\frac{٢}{٥}$

ميل المماس = ميل العمودي

$= \frac{٥}{٢}$ ← $ص = ٢$

مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كان $ل(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $س = ٢$ وكان $ل(س) + هـ^٢(س) = ٩$ حيث ٩ ثابت $\neq ٠$ وكان $هـ(٢) = ٣\sqrt{٣}$ ، $هـ'(٢) = -٢\sqrt{٣}$ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ل(س)$ عند $س = ٢$

الحل

$س = ٢ \Leftarrow ل(٢) \times هـ^٢(٢) = ٩$

$ل(٢) \times (٣\sqrt{٣})^٢ = ٩$

$ل(٢) \times ٢٧ = ٩$

$ل(٢) = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

نقطة التماس $(٢، \frac{١}{٣})$

$ل(س) \times ٢هـ(س) \times هـ'(س) + هـ^٢(س) \times ل'(س) = ٠$

$ل(٢) \times ٢هـ(٢) \times هـ'(٢) + هـ^٢(٢) \times ل'(٢) = ٠$

$\frac{١}{٣} \times ٢ \times ٣\sqrt{٣} \times -٢\sqrt{٣} + (٣\sqrt{٣})^٢ \times ل'(٢) = ٠$

$-٢٤ + ٢٧ ل'(٢) = ٠$

$٢٧ ل'(٢) = ٢٤$

$ل'(٢) = \frac{٢٤}{٢٧} = \frac{٨}{٩}$

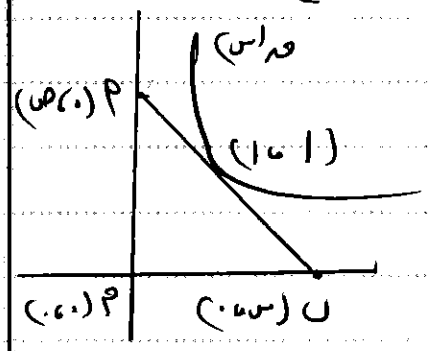
معادلة المماس

$ص - \frac{١}{٣} = \frac{٨}{٩}(س - ٢)$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل المثلث م م ن الذي ضلعه $\overline{م ن}$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{ح}{س+١}$ حيث $س \neq -١$ عند النقطة (١، ١) حيث ح ثابت حقيقي، والتي تجعل مساحته تساوي $(\frac{٩}{٤})$ وحدة مربعة



(١، ١) تقع على المنحنى ⟵

$ق(١) = ١ \Leftarrow \frac{ح}{٢} = ١ \Leftarrow ح = ٢$

$ق'(س) = \frac{-ح}{(س+١)^{٢}} = \frac{-٢}{(س+١)^{٢}}$

$ق'(١) = \frac{-ح}{٤} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس $= \frac{ص-١}{٠-١} = -\frac{١}{٢}$

$٢ص - ٢ = ١+$

$٢ص = ٣ \quad ص = \frac{٣}{٢}$

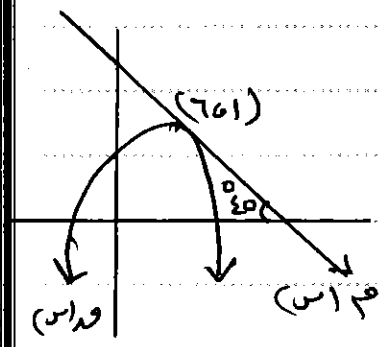
ميل المماس $= \frac{١-٠}{١-س} = -\frac{١}{٢}$

$٢ = -١+س \quad س = ٣$

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤}$

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $ق(س)$ ، $ل(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق حيث ان $ق(س) = (س+٢)\, ل(٢س)$ وكان م (س) مماساً للاقتران $ق(س)$ عند النقطة (١، ٦) كما هو موضح في الشكل المجاور حيث $ل'(٢)$



الحل

$ق(س) = (س+٢)\, ل'(٢س)$

$ق'(س) = (س+٢)\, ل''(٢س) \times ٢ + ل'(٢س) \times ١$

المطلوب $ل'(٢) \Leftarrow ٢س = ٢$

$س = ١$

$ق'(١) = (١+٢)\, ل''(٢) \times ٢ + ل'(٢)$

$= ٣\, ل''(٢) \times ٢ + ل'(٢)$

$= ٦\, ل''(٢) + ل'(٢)$

$ق'(١) = ظا ١٣٥° = -١$

لكن $ق'(١) = ٣\, ل'(٢) = ٦$

لأن $ق'(١) = ٦$ من النقطة

$ل'(٢) = \frac{٦}{٣} = ٢$

$ق'(١) = ٦\, ل''(٢) + ل'(٢)$

$-١ = ٦\, ل''(٢) + ٢$

$٦\, ل''(٢) = -٣ \quad ل''(٢) = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

مكتبة الأكاديمي ACADEMY
المعلم ناجح الجمزاوي

ورقة عمل التطبيقات الهندسية

السؤال الأول :

ألتب معادلة المماس والعمودي على المماس فيما يلي

١) $ق(س) = س^٣ + س^٢$ عند $س = ١$

٢) $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٥}$ عند $س = ٢$

٣) $س^٢ + ص^٣ = ١٧$ عند $س = ٢$

٤) $س = ن^٢ + ٢$ ، $ص = ن^٣ + ١$ عند $ن = ١$

السؤال الثاني

(أ) جد النقطة على المنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ بحيث يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $٣س + ٦ص = ٧$

ج : (٤، ٦)

(ب) ألتب معادلة المماس للمنحنى $جا(س + ص) + س^٢ = ٤$ عند نقاط التقاطع مع المستقيم $س + ص = ٠$

ج = (٤، ١٦)

(ج) جد معادلة المماس للمنحنى $ق(س) = جاس - جتاس$ حيث $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$ عند النقطة التي يقطع فيها المنحنى محور السينات

ج : $ص - ٠ = ٢(س - \frac{\pi}{٤})$

(د) جد معادلة المماس للمنحنى $ق(س) = ظاس$ حيث $س \in [٠، \frac{\pi}{٢})$ عندما يكون المماس موازيًا للمستقيم $ص = ٤س + ٢$

ج : $ص - ١ = ٢(س - \frac{\pi}{٤})$

(هـ) جد معادلة المماس للمنحنى الذي $ق(س) = جاس$ عند النقطة التي يصنع المماس عندها زاوية قياسها $١٢٠°$ مع الاتجاه السالب لمحور السينات علمًا بأن $س \in (٠، \frac{\pi}{٢})$

ج : $ص - \frac{١}{٢} = -\sqrt{٣}(س - \frac{\pi}{١٢})$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاعلام : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ) اذا كانت $\text{هـ}(س) = \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(١)}{ع - ١}$ = -١
$ع \leftarrow ١$
جد قياس زاوية ميل المماس لمنحنى هـ عند النقطة (١، هـ(١))

$م = \frac{٣\pi}{٤}$

(ب) جد احداثي نقطة لبماس التي يكون عندها المماس لمنحنى
$ص^{٢} - ٢ = ٨س^{٢}$ عمودياً على المستقيم $ص = \frac{س + ٥}{٢}$

(ج) اذا كان المستقيم $١٣س - ص - ٧ = ٠$ عمودي على منحنى $ص = ب س^{٣} + ب س^{٢}$ عند النقطة (١، ٦) فما قيمة
ب ، ب

ب = ١ ، ب = ٥

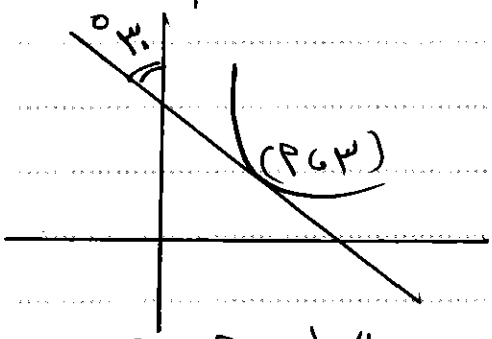
(د) اوجد معادلة المماس المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى
$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ عند النقطة
(٢، ٤)

السؤال الرابع

(أ) اوجد قيم ب ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنى الدالة
$ص = ب س^{٣} + ب س$ ، $ص = جـ س^{٢} - س$
مماساً مشتركاً عند النقطة (-١، ٢)

ب = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = $\frac{٣}{٢}$ ، جـ = ١

(ب) الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة حيث رسم مماس للأقتران عند النقطة (٣، ب) فما قيمة الثابت ب



الجواب ب = $٣\sqrt{٣}$

(ج) اذا كان المستقيم
$٨س - ٤ص + جـ = ٠$ عمودي منحنى الاقتران $\text{هـ}(س) = \frac{٣}{٢}س - \frac{٨}{\sqrt{س}}$
فما قيمة الثابت جـ

جـ = -٢٤

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) جد مساحة المثلث المكون من المحاس والعمودي على المحاس لمنحنى الاقتران ص = $\frac{9-س^2}{2}$ عند س = -١ ومحور السينات

(ب) اذا كانت
ق(س) = $س^2 - ٢س - (١-٢)$
جد قيمة الثابت ٢ التي تجعل محور السينات مماساً لمنحنى ق

٢ = ٢

(ج) اذا كان المستقيم ص = ٦س - ٧ عمودي على منحنى ق(س) = $٢س^2 + بس + ج$ عند النقطة (١،٣) و المستقيم ص = ٢ يمس نفس المنحنى عند النقطة (٢،٠) فجد قاعدة ق(س)

ق(س) = $س^2 + ج$

(د) اذا كانت $ص^2 + ٣س = ٧$ تمثل معادلة العمودي لمنحنى ق(س) عند س = ١ وكانت ل(س) = ٦س ق(س) فاوجد ل(١)

الجواب = ١٦

السؤال السادس

(أ) اذا كانت ق(س) = $\frac{س^2}{ل(س)}$
ل(س) ≠ ٠ وكانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ هي $٣س + ص = ١١$ فجد ق(٢)

الجواب $\frac{٣٢}{٢٥}$

(ب) اذا كان المستقيم المماس للقطع (١،٠) و (٣،٤) يمس المنحنى ق(س) = $٢س^2 - ٧س + ٥$ فجد قيمة ٢

الجواب ٢ = ٤

(ج) اذا كان المستقيم ص = ٣س + ٤ يمس المنحنى ق(س) = $٢ جاس + ب$ عند النقطة (٠،٤) فجد ٢ ، ب

٢ = ٣ ، ب = ٤

(د) رسم من النقطة ٢(٠،٤) مماسان لمنحنى ق(س) = $س^2 - ٢س + ل$ يمسانه في ل ، ك فاذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ل ك}$ هي ص + ٥س - ٤ = ٠ جد معادلة $\overleftrightarrow{٢ ك}$

ص - ٣ = -(س - ١)

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السابع

(م) أكتب معادلة المماس للمنحنى $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ والمرسوم من النقطة $(-٢، ٠)$

$ص + ٢ = ٢(س + ١)$

$ص - ٢ = ٢(س + ١)$

(ل) اذا كانت معادلة المماس للمنحنى $ه(س)$ عند $س = ٢$ هي $ص + ٣س = ١٠$ وكان

$ل(س) = س^{٢} ه(س) + \frac{١٦}{ه(س)}$

فجد $ل'(٢)$

$ل'(٢) = ٧$

(ه) اذا كان لكل المنحنيين $ه(س)$ ، $و(س)$ مماس افقي عند $(٤، ٢)$ وكان $ل(س) = \frac{١٦س + ه(س)}{و(س)}$

اوجد $ل'(٢)$

$ل'(٢) = ٤$

(ك) اذا كانت معادلة المحوري على المماس للمنحنى $ه(س)$ عند النقطة $(٤، ١)$ هي $٣ص - ٤س = ٨$ فجد $ه'(١)$

$ه'(١) = -\frac{٣}{٤}$

السؤال الثامن

(م) اذا كان المستقيم $٨س - ٤ص = ٠$ مماساً لمنحنى $ه(س)$ عند $(٣، ٥)$ وكان المستقيم $٣س - ٦ص + ١٥ = ٠$ عمودياً على منحنى $ل(س)$ عند $(٢، ٤)$ فجد $(ه \cdot ل)'(٣)$

الجواب $= -٢$

(ل) اذا كانت معادلة المماس للمنحنى $ه(س) = ٣س^{٣} + ب س^{٢}$ عند $س = ١$ هي $٣س + ص = ٨$ فجد $ب$ ، $ب$

$ب = -١٣$ $ب = ١٨$

(ه) اذا كان $ه(س) = س ل'(٣س)$ وكانت $ص = \frac{٤٨ - س}{٥}$ تمثل معادلة المحوري على المماس للمنحنى $ه$ عند $س = ٣$ فجد $ل''(٦)$

$ل''(٦) = \frac{١}{٥}$

(ك) اذا كان المماس للمنحنى $ه(س) = \frac{أ}{س}$ ، $س > ٠$ يمر بالنقطتين $(-٦، ٢)$ ، $(١٥، ٠)$ فجد $أ$

$أ = \frac{١}{٤}$

مكتبة الرواد Alrowad
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

تطبيقات فيزيائيه

اذا كان ف (ن) يمثل اقتران المسافه في الفترة [ن١ ، ن٢] فإن

① السرعة المتوسطة ع = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن٢) - ف(ن١)}{ن٢ - ن١}$

وعندما $\Delta ن \to$ صفر فانها تصبح

سرعة لحظيه = مشتقة المسافه

ع (ن) = ف′(ن)

= $\frac{د ف}{د ن}$ = معدل تغير المسافه بالنسبه للزمن

② التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(ن٢) - ع(ن١)}{ن٢ - ن١}$

وعندما $\Delta ن \to$ صفر فان التسارع يصبح لحظي

التسارع اللحظي = مشتقة السرعة

تـ(ن) = ع′(ن) = ف″(ن)

= $\frac{د ع}{د ن} = \frac{د^٢ ف}{د ن^٢}$

= معدل تغير السرعه بالنسبة للزمن

بشكل عام

ف ← (اشتقاقه) ع ← (اشتقاقه) تـ (مشتقة ثانيه)

ملاحظات هامة

① السرعة الابتدائيه = ع (٠)

② ن = ٠ عندما

ⓐ بداية الحركه ⓑ السرعه الابتدائيه

ⓒ اللحظه التي تقذف الجسم فيها

③ ع (ن) = صفر

ⓐ عندما يصل الجسم الى اقصى ارتفاع

ⓑ عندما تنعدم السرعة

ⓒ عندما يتوقف الجسم او يكون لحظيا

ⓓ عندما يقلب اتجاه حركته

④ تـ(ن) = صفر

ⓐ تنعدم التسارع

ⓑ عند السرعة الثابته

⑤ الزمن دائماً موجب

⑥ يعود الجسم الى نقطة القذف

ف (ن) = صفر

← تابع الملاحظات

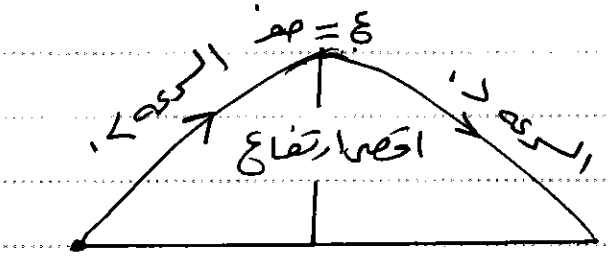
مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

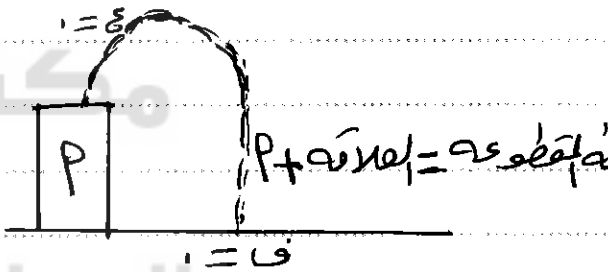
ملاحظات هامة

① السرعة عكن ان تكون موجبة أو تكون سالبة أو صفر حيث
السرعة موجبة ← الجسم يتحرك باتجاه الحركة
السرعة سالبة ← الجسم يتحرك عكس اتجاه الحركة
السرعة صفر ← الجسم ساكن أو متوقف

② التسارع يمكن ان يكون موجب أو سالب حيث
التسارع موجب ← السرعة تزداد (الجسم يتسارع)
التسارع سالب ← السرعة تتناقص (يتباطأ)
التسارع صفر ← السرعة ثابتة

③ في المقذوفات





مثال ①

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن³ + ن²

① اجد سرعة وتسارع الجسم عندما ن = ٥

② اجد السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط في [١، ٣]

الحل

ف(ن) = ن³ + ن²
ع = ف' = ٣ن² + ٢ن
ت = ع' = ٦ن + ٢

① ع(٥) = ٣(٥)² + ٢×٥ = ٨٥
ت(٥) = ٦×٥ + ٢ = ٣٢

② السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$
$= \frac{(٣^٣ + ٣^٢) - (١^٣ + ١^٢)}{٢} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$

التسارع المتوسط = $\frac{ع(٣) - ع(١)}{٣ - ١}$
$= \frac{٣٣ - ٥}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①
يتحرك جسم حسب العلاقة
$ف(ن) = \frac{ن^3}{3} - \frac{ن^2}{2} - 6ن$
اوجد مايلي

① المسافة التي تقطعها الجسم بعد ٦ ثواني

الحل
$ف(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} - 6\times6 = 18$

② سرعة الجسم بعد ٤ ثواني
$ع(ن) = ف'(ن) = ن^2 - ن - 6$
$ع(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6$ م/ث

③ تسارع الجسم بعد ثانيتين
$ت(ن) = ع'(ن) = 2ن - 1$
$ت(2) = 2\times2 - 1 = 3$ م/ث^2

④ الساع عندما تنعدم السرعة
الحل
تنعدم السرعة $= ع(ن) = 0$
$ن^2 - ن - 6 = 0$
$(ن - 3)(ن + 2) = 0 \Rightarrow ن = 3$ أو $ن = -2$ (مرفوض)
$ت(3) = 2\times3 - 1 = 5$

⑤ متى يكون التسارع سالباً
$ت(ن) = 2ن - 1 < 0$
$ن < \frac{1}{2}$

− − −	0	+ + +
	$\frac{1}{2}$	

التسارع سالب عندما $ن < \frac{1}{2}$

⑥ اوجد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه $= 3$ م/ث^2

الحل
$ت(ن) = 3$
$2ن - 1 = 3 \Leftarrow ن = \frac{4}{2} = 2$
$ع(ن) = ن^2 - ن - 6$
$ع(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4$ م/ث
عكس اتجاه الحركة

مثال ②
تحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده س $= ف(ن) = جا\frac{\pi}{2}ن$
$ن \in [0, 4\pi]$ اوجد تسارع الجسم عندما تكون السرعة $= \frac{1}{2}$ م/ث

الحل
$ع(ن) = ف'(ن) = \frac{\pi}{2} جتا\frac{\pi}{2}ن \times \frac{1}{2}$
يتبع الحل

ع(ن) = $\frac{1}{2}$ حان (متطابقة)

ع(ن) = $\frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{1}{2}$ حان = $\frac{1}{2}$

← حان = ١ ← ن = $\frac{\pi}{2}$

ت(ن) = $\frac{1}{2}$ حتان

ت($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{1}{2}$ حتا$\frac{\pi}{2}$ = $\frac{1}{2}$ × صفر = صفر

مثال (٣)

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = حا^{٤}ن اوجد سرعة الجسم في اللحظة التي تنعدم تسارعه لأول مرة بعد تحركه.

الحل

ف(ن) = حا^{٤}ن

ع(ن) = ف'(ن) = ٤حا^{٣}ن حتان

ت(ن) = ٤حا^{٣}ن × حتان + حتان × ١٢حا^{٢}ن حتان

صفر = ٤حا^{٤}ن + ١٢حا^{٢}ن حتا^{٢}ن

٤حا^{٢}ن(حا^{٢}ن + ٣حتا^{٢}ن) = صفر

٤حا^{٢}ن = ٠ ← حان = ٠

← ن = ٠، π، ٢π ...

حا^{٢}ن + ٣حتا^{٢}ن = ٠

حا^{٢}ن = ٣حتا^{٢}ن بالقسمة على حتا^{٢}ن

$\frac{\text{حا}^{٢}\text{ن}}{\text{حتا}^{٢}\text{ن}}$ = $\frac{٣\,\text{حتا}^{٢}\text{ن}}{\text{حتا}^{٢}\text{ن}}$ = ٣

ظا^{٢}ن = ٣ ⇐ ظان = ± $\sqrt{٣}$

⇐ ن = $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٢\pi}{٣}$، ... .

اول مرة تنعدم فيها التسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٣}$

ع($\frac{\pi}{٣}$) = ٤حا$^{٣}\frac{\pi}{٣}$ حتا$\frac{\pi}{٣}$

= ٤($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^{٣} × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ م/ث

مثال (٤)

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية

ف(ن) = ن^{٣} − ٣ن^{٢} − ٤ ن ≥ ٠

اوجد

① سرعة الجسم وتسارعه عندما ن = ٣

② الفترة الزمنية التي تكون سرعة الجسم سالبة

الحل

① ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} − ٦ن

ع(٣) = ٣(٣)^{٢} − ٦ × ٣ = ٩ م/ث

ت(ن) = ٦ن − ٦

ت(٣) = ٦ × ٣ − ٦ = ١٢ م/ث^{٢}

② ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٦ن = ٠

٣ن(ن − ٢) = ٠ ن = ٠ ، ن = ٢

السرعة سالبة في الفترة (٠، ٢)

ملاحظة هامة

$ع = \frac{د ف}{د ن} = ف'$

$ن = \frac{د ع}{د ن} = ع'$

مثال

اشتقة $ف^{٣} = ٣ف^{٢} \times ف'$

$= ٣ف^{٢} \times ع$

اشتقة $ع^{٢} = ٢ع \times ع'$

$= ٢ع \times ن$

مثال ⑤

يتحرك جسم بحيث أن

$ع = ٤ف^{٢} - ٦ف$

حيث ف : إزاحة بالامتار

ع : السرعة م/ث

اوجد التسارع عندما ف = ٢

الحل

اشتقاق ضمني بالنسبة للزمن

$ع' = ٨ف \times ف' - ٦ف'$

$ن = ٨ف \times ع - ٦ع$

عندما ف = ٢ فان

$ع = ٤(٢)^{٢} - ٦ \times ٢ = ٤$

$ن = ٨ \times ٢ \times ٤ - ٤ \times ٦ = ٤٠$

مثال ⑥

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته تتغير بالعلاقة

$ع(ن) = \frac{ن}{ف(ن)}$

اثبت تسارع الجسيم عندما ن = ٣ علما بان سرعته عندئذ $\frac{١}{٢}$ م/ث

الحل

$ع'(ن) = \frac{ف(ن) \times ١ - ن \times ف'(ن)}{(ف(ن))^{٢}}$

$ن(ن) = \frac{ف(ن) - ن \times ع(ن)}{(ف(ن))^{٢}}$

نجد $ف(٣) \leftarrow ع(٣) = \frac{٣}{ف(٣)}$

$\frac{١}{٢} = \frac{٣}{ف(٣)} \Leftarrow ف(٣) = ٦$

$ن(٣) = \frac{ف(٣) - ٣ \times ع(٣)}{(ف(٣))^{٢}}$

$= \frac{٦ - ٣ \times \frac{١}{٢}}{٣٦} = \frac{٦ - \frac{٣}{٢}}{٣٦} = \frac{١}{٨}$ م/ث^{٢}

مثال ⑦

اذا كانت $ع = \sqrt{ف}$ ع : السرعة ف : إزاحة اوجد التسارع

الحل

$ع'(ن) = \frac{ف'}{٢\sqrt{ف}}$

$ن(ن) = \frac{ع}{٢ع} = \frac{١}{٢}$ م/ث^{٢}

مكتبة الأوائل AlAwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اذا كانت ع = ٢ب ف حيث ٢ ثابت
ع : السرعة ، ف : المسافة اثبت
ان التسارع ثابت ؟

الحل

$ع' = ٢ \times \frac{ف'}{ب ق} = \frac{ع}{ب} \times \frac{٢}{ق}$

$ت(ن) = \frac{ع}{\frac{ع}{٢}} \times \frac{٢}{ق} = ٢ \times \frac{٢}{ق} = \frac{٢}{ق^{٢}}$ ثابت

مثال ⑨

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن^{٢} − ن^{٣} اوجد
سرعة هذا الجسم عندما تكون
واحدة علما بان تسارع هذا
الجسم في تلك اللحظة ٨ م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٤ن − ٣ن^{٢}
ت(ن) = ٤ − ٦ن
ت(١) = ٤ − ٦ = −٢
٨ = ١ع(١) − ٣(١)^{٢}
= ١ع − ٣ = ١١ م/ث

مثال ⑩

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن^{حـ} حيث حـ > ١
اذا كانت سرعة الجسم عند الثواني
تساوي مثلي سرعته عند ٥
ثواني اوجد قيمة حـ ؟

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = حـ ن$^{حـ-١}$
ع(١٠) = ٢ع(٥)
١٠ حـ$^{حـ-١}$ = ٢ × ٥ حـ$^{حـ-١}$
٢$^{حـ-١}$ = ٢^{١}
حـ − ١ = ١ ⇐ حـ = ٢

مثال ⑪

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = جا٢ن + ٣ جتا٢ن اوجد
التسارع لهذا الجسم عندما يقطع
٣ أمتار ؟

الحل

ع(ن) = ٢ جتا٢ن − ٦ جا٢ن
ت(ن) = −٤ جا٢ن − ١٢ جتا٢ن
← يتبع الحل

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ت(ن) = -٤ جا٢ن - ١٢ جتا٢ن
= -٤ (جا٢ن + ٣ جتا٢ن)
= -٤ × ف
= -٤ × ٣ = -١٢ م/ث٢

مثال (١٢)
يتحرك جسم حسب العلاقة
ف١(ن) = ن٣ - ٣ن + ٦
ويتحرك جسم آخر حسب العلاقة
ف٢(ن) = ن٣ + ن + ٢

(أ) متى يلتقي الجسمان
(ب) اين يلتقي الجسمان
(ج) ما سرعة الجسمين لحظة التقائهما

الحل
(أ) يلتقي الجسمان عندما
ف١(ن) = ف٢(ن)
ن٣ - ٣ن + ٦ = ن٢ + ن + ٢
٤ن = ٤ ن = ١

(ب) يلتقي الجسمان عند تقطعان
نقص إزاحة
ف١(١) = ف٢(١) = ١ - ٣ + ٦
= ٤ م

(ج) ع١(ن) = ٣ن٢ - ٣
ع١(١) = ٣ - ٣ = صفر
ع٢(ن) = ٣ن٢ + ١ ← ع٢(١) = ٤ م/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

تحرك جسمان مادياً من نقطة واحدة الأول حسب العلاقة ف١(ن) = ن٣ + ٢ن + ١٢ والثاني حسب العلاقة ف٢(ن) = ٤/٣ ن٢ + ٦ن + ٥ اصطدم كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس السرعة.

الحل

ع١ = ف١' = ٣ن٢ + ٢

ع٢ = ف٢' = ٢ن + ٦

ع١ = ع٢ ← ٣ن٢ + ٢ = ٢ن + ٦

← ن٢ = ٤ ← ن = ٢

ت١' = ٦ ن ← ت١'(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

ت٢' = ٤ ن ← ت٢'(٢) = ٤ × ٢ = ٨

مثال (١٤)

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية

ف(ن) = ١/٤ (ن + ٢)٤ − ٦ن٢

حيث ن الزمن بالثواني، ف بالأمتار

جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ١/٤ × ٤(ن + ٢)٣ − ١٢ن

ع(ن) = (ن + ٢)٣ − ١٢ن

= (ن + ٢)(ن + ٢)٢ − ١٢ن

= (ن + ٢)(ن٢ + ٤ن + ٤) − ١٢ن

= ن٣ + ٤ن٢ + ٤ن + ٢ن٢ + ٨ن + ٨ − ١٢ن

= ن٣ + ٦ن٢ − ٨ = ٨٩

ن٣ + ٦ن٢ − ٨١ = ٠

بالقسمة المركبة بالجزيء

الجذر = ٣

٣	١	٦	٠	−٨١
		٣	٢٧	٨١
	١	٩	٢٧	٠

(ن − ٣)(ن٢ + ٩ن + ٢٧) = ٠ لا تحل

ن = ٣

ت(ن) = ع'(ن) = ٣ن٢ + ١٢ن

ت(٣) = ٣(٣)٢ + ١٢ × ٣

= ٢٧ + ٣٦ = ٦٣ م/ث٢

مثال (١٥)

يتحرك جسيم في خط مستقيم فيقطع مسافة قدرها ف متراً في زمن قدره ن ثانية حيث

ف(ن) = ٢ن٣ − ١٧ن٢ + ٤٤ن + ١٠

جد السرعة والتسارع عندما ف(ن) = ٤٦ م.

الحل

ف(ن) = ٤٦ ← يتبع

مكتبة الوسام AL-WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تابع الكل

$٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن + ١٠ = ٤٦$

$٢ن^{٣} - ١٧ن^{٢} + ٤٤ن - ٣٦ = ٠$

بالتجريب نجد ن = ٢ جذر المعادلة

	٢	-١٧	٤٤	-٣٦
٢		٤	-٢٦	٣٦
	٢	-١٣	١٨	٠

$(ن-٢)(٢ن^{٢} - ١٣ن + ١٨) = ٠$

$(ن-٢)(٢ن-٩)(ن-٢) = ٠$

$ن = \frac{٩}{٢}$ $ن = ٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن^{٢} - ٢٤ن + ٤٤$

$ع(٢) =$ صفر

$ع(\frac{٩}{٢}) = ٦ \times \frac{٨١}{٤} - ٢٤ \times \frac{٩}{٢} + ٤٤ = \frac{٢٥}{٢}$

$ت(ن) = ٢ن - ٣٤$

$ت(٢) = ٢ \times ٢ - ٣٤ = -١٠$

$ت(\frac{٩}{٢}) = ٢ \times \frac{٩}{٢} - ٣٤ = ٠$

مثال (١٦)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن من الثواني يساوي

$ف(ن) = \frac{١}{٣}ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٣ن + ٥$

$ن \geq ٠$

جد بعد الجسم عن نقطة الاصل وسرعته عندما تنعدم تسارعه

الحل

المطلوب ف(ن) ، ع(ن) عندما ت(ن) = صفر

$ع(ن) = ف'(ن) = ن^{٢} - ٤ن + ٣$

$ت(ن) = ع'(ن) = ٢ن - ٤$

ت(ن) = صفر تنعدم التسارع

$٢ن = ٤ \leftarrow ن = ٢$

$ف(٢) = \frac{١}{٣}(٢)^{٣} - ٢(٢)^{٢} + ٣(٢) + ٥$

$= \frac{١٧}{٣}$

$ع(٢) = ٢^{٢} - ٤ \times ٢ + ٣ = -١$ م/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

المقذوفات

مثال ①
قذف جسم لأعلى حسب العلاقة
ف(ن) = ١٦ن - ٢ن^٢ احسب
ما يلي
① اقصى ارتفاع يصله الجسم
② سرعة الجسم عند القذف
③ سرعة الجسم عند عودته وملامسته الارض
④ سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٤ ٢م اثناء الصعود

الحل
ع(ن) = ف'(ن) = ١٦ - ٤ن

① عند اقصى ارتفاع ، ع(ن) = ٠
١٦ - ٤ن = ٠ ← ٤ن = ١٦
ن = ٤
اقصى ارتفاع = ف(٤)
= ١٦ × ٤ - ٢(٤)^٢
= ٦٤ - ٣٢ = ٣٢م

② السرعة الابتدائية = سرعة الجسم عند القذف = ع(٠)
= ١٦ - ٤ × ٠ = ١٦م/ث

③ عندما يلامس الارض فان
ف(ن) = صفر
١٦ن - ٢ن^٢ = ٠
٢ن(٨ - ن) = ٠ ← ن = ٠ ، ن = ٨
ع(٨) = ١٦ - ٤ × ٨ = ١٦ - ٣٢
= -١٦م/ث عكس اتجاه الحركة

④ على ارتفاع ٤ ٢ ← ف(ن) = ٤ ٢
١٦ن - ٢ن^٢ = ٤ ٢
٢ن^٢ - ١٦ن + ٤ ٢ = ٠ بالقسمة على ٢
ن^٢ - ٨ن + ١٢ = ٠
(ن - ٢)(ن - ٦) = ٠
ن = ٢ صعود
ن = ٦ هبوط
ع(٢) = ١٦ - ٤ × ٢ = ٨م/ث

مثال ②
قذف جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢٤ن - ٦ن^٢ اوجد قيمة م اذا كان اقصى ارتفاع يصله الجسم ٤ ٢م ؟

الحل
يصل الجسم اقصى ارتفاع عندما
ع(ن) = صفر
ع(ن) = ٢٤ - ١٢ن = صفر
١٢ن = ٢٤ ← ن = ٢
ف(ن) = ٢٤ن - ٦ن^٢ ← ٢٤ × ٢ - ٦ × ٢^٢
٤ ٢ = ٤٨ - ٢٤ ← ٢٤ = ٤٨ - م
م = ٤٨ - ٢٤ = ٢٤

← يتبع

١٢ ن^{٢} − ٦ ن^{٢} = ٤ ن^{٢}

٦ ن^{٢} = ٤ ن^{٢}

← ن^{٢} = ٤ ← ن = ٢ ، ن = −٢ مرفوض

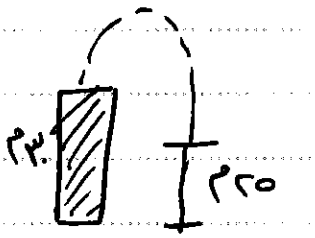
← م = ٦ × ن

= ٦ × ٢ = ١٢

مثال ③

قذف جسم حسب العلاقة ف(ن) = ٤ ن − ن^{٢} فن برج ارتفاعه ٣٠ م احسب سرعة الجسم وصوله على ارتفاع ٥٢ م من سطح الارض

الحل



المسافه المقطوعة = العلاقة + ٣٠

٥٢ = ف(ن) + ٣٠

ن − ن^{٢} + ٣٠ = ٥٢

ن^{٢} − ن − ٥ = ٠

(ن + ١) (ن − ٥) = ٠

ن = −١ مرفوض ، ن = ٥

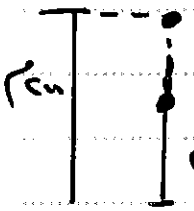
ع(ن) = ف′(ن) = ٤ − ٢ن

ع(٥) = ٤ − ٢ × ٥ = −٦ م/ث

مثال ④

اسقط جسم من ارتفاع ٢٠٠ م عن سطح الارض بحيث كانت المسافه بالامتار التي يقطعها في ن ثانيه هي ف = ٥ ن^{٢} جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٢٠ متر من سطح الارض ؟

الحل



العلاقة + ١٢٠ = ٢٠٠ ٥ ن^{٢}

٥ ن^{٢} = ٨٠

ن^{٢} = ١٦

ن = ٤ ، ن = −٤ مرفوض

ع(ن) = ١٠ ن

ع(٤) = ٤٠ م/ث

مثال ⑤

قذف جسم عن سطح بناية حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ ن − ٢ ن^{٢} فاذا علمت ان سرعة الجسم لحظة وصولة الارض ٤٠ م/ث فاحسب ارتفاع البناية .

الحل

نفرض ان ارتفاع البناية = P

المسافه المقطوعه = ف(ن) + P

ف(ن) = ٢٠ ن − ٢ ن^{٢} + P

← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

ع(ن) = ف'(ن) = ٢٠ - ٤ن = -٢٤
(-٢٤) عكس اتجاه الحركة
٤ن = ٤٤ ← ن = ١١ ثانية
عند وصولة الارض ← ف(ن) = صفر
ف(١١) = ٢٠ × ١١ - ٢(١١)^٢ + م = ٠
٢٢٠ - ٢٤٢ + م = ٠ ← م = ٢٢ م

مثال ٦
قذف جسم رأسيًا إلى اعلى حسب العلاقة ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢
ما الزمن اللازم الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها

الحل
ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن
السرعة الابتدائية (عند القذف)
ع(٠) = ١٢٨
ع(ن) = ١/٢ × ١٢٨ = ٦٤
١٢٨ - ٣٢ن = ٦٤
٣٢ن = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤
ن = ٢

مثال ٧
من قمة برج ارتفاعة ٦٠ م قذف جسم رأسيًا لأعلى حسب العلاقة ف١(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢، ومن سطح الارض قذف جسم آخر رأسيًا لأعلى حسب العلاقة ف٢(ن) = ٩٠ن - ٥ن^٢ فاذا كان لهما نفس اقصى ارتفاع جد قيمة م ؟

الحل
ع١ = ٢٠ - ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٢
اقصى ارتفاع عن قمة البرج
= ف١(٢) = ٢٠ × ٢ - ٥(٢)^٢ = ٢٠
وعن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع
= ٦٠ + ٢٠ = ٨٠
وللجسم الثاني
ع٢ = ٩٠ - ١٠ن = ٠ ← ١٠ن = ٩٠
ف٢(ن) = ٩٠ن - ٥ن^٢ = ٨٠
١٠ن × ن - ٥ن^٢ = ٨٠
١٠ن^٢ - ٥ن^٢ = ٥ن^٢ = ٨٠
ن^٢ = ١٦ ← ن = ٤ ، ن = -٤ مرفوض
م = ١٠ن = ١٠ × ٤ = ٤٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)
قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن + ٥ن^٢ بسرعة
ابتدائية ٤٠ م/ث ، فاذا كان اقصى
ارتفاع وصلة الجسم هو ٨٠ م فاوجد
قيمة كل من ٢ ، ٥ ؟

الحل

ع = ٢ + ٢٥ن

ع(ن) = ٢ + ٠ ، = ٤٠ ← ٢ = ٤٠

∴ ف(ن) = ٤٠ ن + ٥ن^٢

وعند اقصى ارتفاع تكون ع = ٠

← ع = ٤٠ + ٢٥ن = ٠

٢٥ن = -٤٠ ← ن = -ع/٢ن = -٤٠/ن

ف = ٢ن + ٥ن^٢

٨٠ = ٤٠ن + (-٤٠/ن)ن^٢

٨٠ = ٤٠ن - ٢٠ن = ٢٠ن

← ن = ٨٠/٢٠ = ٤

← ٥ = -٤٠/٤ = ٥

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① صـ١٦٢

اذا كان ف (ن) = ٣ جا٤ن - ٥ ضتا٤ن
حيث ف المسافة بالامتار، ن الزمن بالثواني فاحسب كلاً من المسافة والسرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٨}$

الحل

ف $(\frac{\pi}{٨})$ = ٣ جا٤ × $\frac{\pi}{٨}$ - ٥ ضتا٤ × $\frac{\pi}{٨}$
= ٣ جا $\frac{\pi}{٢}$ - ٥ ضتا $\frac{\pi}{٢}$
= ٣ × ١ - ٥ × ٠ = ٣

ع = ١٢ ضتا٤ن + ٢٠ جا٤ن
ع $(\frac{\pi}{٨})$ = ١٢ × ٠ + ٢٠ × ١ = ٢٠

ت = - ٤٨ جا٤ن + ٨٠ ضتا٤ن
ت $(\frac{\pi}{٨})$ = - ٤٨ × ١ + ٨٠ × ٠ = - ٤٨

تدريب ② صـ١٦٣

اذا كانت س = ف (ن)
= $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٥ ن هي المعادلة الزمنية لحركة جسم على خط مستقيم حيث ن الزمن بالثواني، س المسافة بالامتار فاحسب تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

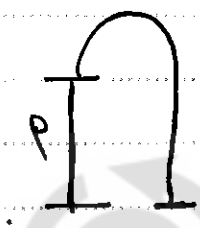
الحل

ع = ف" = ن^{٢} - ٦ ن + ٥ = ٠
(ن - ٥) (ن - ١) = ٠
ن = ٥ ، ن = ١
ت = ع' = ٢ ن - ٦
ت (٥) = ٢ × ٥ - ٦ = ٤
ت (١) = ٢ × ١ - ٦ = - ٤

تدريب ③ صـ١٦٤

قذف جسم من سطح بناية رأسياً إلى اعلى بحيث ان ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران
ف (ن) = ٣٠ ن - ٥ ن^{٢} م اذا كانت سرعته لحظة وصوله الارض تساوي - ٦٠ م/ث، جد ارتفاع البناية

الحل



ف = ٣٠ ن - ٥ ن^{٢} + ع
ع = - ٣٠ = ١٠ ن = - ٦٠
٩٠ = ١٠ ن
ن = ٩
ف (٩) = ٣٠ × ٩ - ٥ (٩)^{٢} + ع ← زمن وصوله الارض
٠ = ع + ٤٠٥ - ٢٧٠
ع = ١٣٥ م

مكتبة السمك AUWCSAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب

(صفحه ١٦٥)

السؤال الأول

جسيم يتحرك في خط مستقيم فاذا كانت سرعته بعد ن ثانية من حركته هي ع(ن) = ن٢ - ٣ن + ٢ فجد

(أ) سرعته الابتدائية

(ب) متى يكون الجسيم لحظيا وما قيمة تسارعه حينئذ

الحل

(أ) ع(٠) = ٠ - ٠ + ٢ = ٢

(ب) ع = ن٢ - ٣ن + ٢ = ٠

(ن - ٢)(ن - ١) = ٠

ن = ٢ ، ن = ١

ت = ع' = ٢ن - ٣

ت(٢) = ٤ - ٣ = ١

ت(١) = ٢ × ١ - ٣ = -١

السؤال الثاني

يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث حسب العلاقة ف(ن) = أ ن٢ + ب ن حيث أ، ب ثوابت ، احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان من الحركة علما بان تسارعه ٨ م/ث٢

الحل

ع = ف' = ٢أ ن + ب

ع(٠) = ٠ + ب = ٢ ← ب = ٢

ت = ع' = ٢أ = ٨ ← أ = ٤

∴ ف(ن) = ٤ ن٢ + ٢ ن

ف(٣) = ٤ × ٩ + ٢ × ٣ = ٤٢

السؤال الثالث

يتحرك جسيم بحيث ان بعده عن نقطة ثابتة بالامتار بعد ن ثانية من بدء حركته يحقق وفقا للأقتران ف(ن) = حا ن + جتا ن ، ن ∈ [٠، ٢π] جد المسافة والتسارع في حالة السكون اللحظي للجسيم

يتبع اكل

الحل

ع = ف' = جتا ن − جا ن = ٠

جتا ن = جا ن

⇐ ن = ٤٥°، ٢٢٥° = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

ف($\frac{\pi}{٤}$) = جا $\frac{\pi}{٤}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$

= $\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

ف($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

ن' = ع' = − جا ن − جتا ن

ن($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

ن'($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

السؤال الرابع

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقاً للاقتران ف(ن) = ن^{٣} ، فما اكانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، ٢] تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ؟ فجد قيمة ؟

الحل

ع = ف' = ٣ن^{٢}

ع(؟) = ١٢

السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$

= $\frac{٨ - ٠}{٢}$ = ٤ ⇐ ١٢ = ٣؟^{٢} ⇐ ؟^{٢} = ٤

⇐ ؟ = ٠ (؟ − ٤) = ٠ ⇐ ؟^{٣} − ٤؟ = ٠

؟ = ٠ ، ٢$\sqrt{٤}$ ، − ٢$\sqrt{٤}$

نأخذ ؟ = ٢$\sqrt{٤}$

السؤال الخامس

يتحرك جسيم بسرعة تعطى حسب العلاقة ع^{٢} = ١ − ف^{٣} حيث ف المسافة بالامتار بين ان تسارع الجسيم يساوي − $\frac{٣}{٢}$ م/ن^{٢} عندما ف = ١م

الحل

ع^{٢} = ١ − ف^{٣}

٢ع ع' = − ٣ف^{٢} × ف'

٢ع × ن = − ٣ف^{٢} × ع

ن = $\frac{-٣ف^{٢}}{٢}$

وعندما ع = ٠

فإن ٠ = ١ − ف^{٣} ⇐ ف^{٣} = ١

⇐ ف = ١

ن = $\frac{-٣ \times ١}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية ف(ن) = $\frac{1}{4}$(ن+٠)^{٤} − ٦ن^{٢}
حيث ن بالثواني، ف بالأمتار
جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث

حل السؤال: مثال (٤) ص ٥٤ في الكراسة

السؤال السابع

قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الارض، فاذا كان بعده عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالأقتران
ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^{٢}، بيّن أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨ قدمًا

الحل

ع = ف′ = ٦٤ − ٣٢ن
ع(٠) = ٦٤ − ٠ = ٦٤
وعندما ف = ٤٨ فإن
٤٨ = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} بالقسمة على ١٦
٣ = ٤ن − ن^{٢}
ن^{٢} − ٤ن + ٣ = ٠
(ن − ٣)(ن − ١) = ٠
ن = ٣ ، ن = ١
ع(١) = ٦٤ − ٣٢ = ٣٢
= ٦٤ × $\frac{1}{2}$

ع(٣) = ٦٤ − ٣ × ٣٢ = −٣٢
= −٦٤ × $\frac{1}{2}$ الجسم هابط

السؤال الثامن

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة
ف(ن) = حاٰن ، فجد سرعة الجسم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد تحركه

الحل

ع = ف′ = ٢حاٰن جتاٰن = حا٢ن
ت = ع′ = ٢ جتا٢ن = ٠
٢ن = $\frac{\pi}{2}$ ٢ن = $\frac{٣\pi}{2}$
ن = $\frac{\pi}{٤}$ ن = $\frac{٣\pi}{٤}$

ينعدم لما ع عند ن = $\frac{\pi}{٤}$
ع($\frac{\pi}{٤}$) = جا٢ × $\frac{\pi}{٤}$ = حا$\frac{\pi}{2}$ = ١

مكتبة البرنامج AWGSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال التاسع

تحرك نقطة مادية حسب العلاقة $ف(ن) = \sqrt{ن}(٢٧ - ن)$ اثبت ان هذه النقطة بدأ حركتها من السكون ثم عادت الى السكون بعد ٩ ثوان، ثم جد المسافة التي قطعتها النقطة حينئذ

الحل

$ف(ن) = ن^{\frac{1}{٢}}(٢٧ - ن)$

$= ٢٧ن^{\frac{1}{٢}} - ن^{\frac{٣}{٢}}$

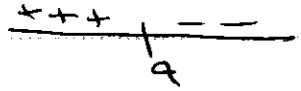
$ع = ف' = ٢٧ \times \frac{1}{٢} ن^{-\frac{1}{٢}} - \frac{٣}{٢} ن^{\frac{1}{٢}} = ٠$

$\frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}} - \frac{٣}{٢}\sqrt{ن} = ٠$

$\frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{ن}$

$٢٧ \times ٢ = ٣ن \times ٢\sqrt{ن}$

$\frac{٢٧}{٣} = ن \Leftarrow ن = ٩$



السرعة تغير اشارتها عند ن = ٩

∴ الجسم يغير اتجاه حركته

$ف(٩) = ٤٥$

السؤال العاشر

من نقطة على ارتفاع ٨٠ قدماً عن سطح الارض، قذف جسم رأسياً إلى اعلى وفقد اقترن المسافة $ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن^٢$ جد:

(أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

$ع = ف' = ٦٤ - ٣٢ن = ٠$

$\Leftarrow ن = ٢$

اقصى ارتفاع عند نقطة القذف

$ف(٢) = ٦٤ \times ٢ - ١٦ \times ٤$

$= ٦٤$

وعن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع هو $٦٤ + ٨٠ = ١٤٤$ قدم

(ب) الزمن الذي يعود الى نقطة القذف

$ف = ٠ \Leftarrow ٦٤ن - ١٦ن^٢ = ٠$

$١٦ن(٤ - ن) = ٠$

$ن = ٠ \quad ن = ٤ \quad \therefore ن = ٤$

(ج) الزمن الذي يعود الى سطح الارض

ف عن الارض $= ٦٤ن - ١٦ن^٢ + ٨٠$

وعندما يصل سطح الارض تكون $ف = ٠$

$٦٤ن - ١٦ن^٢ + ٨٠ = ٠$ بالقسمة على ١٦

$ن^٢ - ٤ن - ٥ = ٠$

$(ن - ٥)(ن + ١) = ٠$

$ن = ٥ \quad ، \quad ن = -١$ مهمل

← يتبع الحل

مكتبة الرواد
ALRWAD
المعلم: ناجح الجمزاوي

(S) متى تصبح سرعة الجسم ٤ قدم/ث
ع = ٤ - ٦ن² = ٠ ⇒ ٤ = ٣ن²
ن² = ٤/٣ ⇒ ن = ٢/√٣

(هـ) مجموعة القيم ن ≥ ٠ التي تكون عندها ع(ن) ≤ ٠

الحل
ندرس اشارة ع
ع = ٤ - ٦ن² = ٠ ⇒ ن = ٢/٣
ع ≤ ٠ في [٢/٣ ، ∞)
المدى

السؤال الحادي عشر

من سطح بناية ، اطلق شخص جسماً من السكون وفق الاقتران ف₁(ن) = ١٦ن² ، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسماً عمودياً الى اسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ قدم/ث وفق الاقتران ف₂(ن) = ٤٠ن + ١٦ن² ، فاذا ارتطم الجسم الأول بعد ١/٢ ثانية من ارتطام الجسم الثاني جد

(أ) سرعة كل من الجسم الأول والجسم الثاني لحظة ارتطامهما بالارض

(ب) ارتفاع البناية .

الحل
اذا اصطدم الجسم الثاني ن ثانية فان الجسم الأول يصطدم ن + ١/٢ ثانية
∴ ف₁(ن + ١/٢) = ف₂(ن)
الجسمان مطلقان من السكون وبسرعة مع اختلاف الزمن
١٦(ن + ١/٢)² = ٤٠ن + ١٦ن²
بالقسمة على ٤
٤(ن + ١/٢)² = ٥ن + ٤ن²
٤(ن² + ن + ١/٤) = ٥ن + ٤ن²
٤ن² + ٤ن + ١ = ٥ن + ٤ن²
ن = ١
زمن الجسم الأول = ١ + ١/٢ = ٣/٢
زمن الجسم الثاني = ١

(أ) ع₁ = ف₁' = ٣٢ن
ع₁(٣/٢) = ٣٢ × ٣/٢ = ٤٨

ع₂ = ف₂' = ٣٢ن + ٤٠
ع₂(١) = ٣٢ + ٤٠ = ٥٢

(ب) ف₁(٣/٢) = ١٦ × (٣/٢)²
= ١٦ × ٩/٤ = ٣٦
ف₂(١) = ٤٠ × ١ + ١٦ × ١
= ٣٦

مكتبة الوسام ALWESAM
التعليم: ناجح الجمزاوي

تمارين مراجعة ص١٣

السؤال الثاني

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف(ن) = ن + جتان ، ن ∈ [٠، π]

جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

الحل

ع = ف' = ١ - جتان = ٠

١ = جتان ← ن = π/٢

ت = ع' = جتات

ت(π/٢) = جتا π/٢ = صفر

اختبار ذاتي ص١٥

السؤال الأول

(٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي ف(ن) = ٦ن^٢ - ن^٣ جد المسافة التي يقطعها الجسم بالامتار حتى يصبح تسارعه صفراً

الحل

ع = ف' = ١٢ن - ٣ن^٢

ت = ع' = ١٢ - ٦ن = ٠

ن = ٢

ف(٢) = ٦(٢)^٢ - ٢^٣ = ٢٤ - ٨

= ١٦

(٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي ف(ن) = ٩ جتا ٣ن حيث ٩ ثابت، اوجد تسارع الجسم عندما يقطع ٤ أمتار

الحل

ع = ف' = ٣٩ جتا ٣ن ← يتبع

مكتبة العلم ALELEM.COM
المعلم ناجح الجمزاوي

← تابع الحل

ن = ع = - ٩ حا ٢ن
= - ٩ (ف)
= - ٩ × ٤ = - ٣٦

◎ قذف جسم رأسيًا لأعلى من سطح بناية ، فإذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الارض يتعين بالمعادلة
ف(ن) = ٧ + ٣٢ن - ١٦ن²
حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأقدام اوجد اقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الارض

الحل

ع = ف' = ٣٢ - ٣٢ن = ٠
⇐ ن = ١

ف(١) = ٧ + ٣٢ - ١٦ = ٢٣

السؤال الثاني ص ٢١٧

① قذفت كرة رأسيًا الى الأعلى من قمة برج ارتفاعة ٢٢٥ م اذا كان ارتفاع الكرة عن نقطة القذف يتعين بالمعادلة
ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن² فجد
① اقصى ارتفاع وصلت اليه الكرة عن سطح الارض
② سرعة الكرة عندما تصل الى سطح الارض

الحل

① ع = ف' = ٦٠ - ١٠ن = ٠
ن = ٦
ف(٦) = ٦٠ × ٦ - ٥(٦)²
= ٣٦٠ - ١٨٠ = ١٨٠ عن قمة البرج
ويكون اقصى ارتفاع عن سطح الارض
= ١٨٠ + ٢٢٥ = ٤٠٥

② ف عن الارض = ٦٠ن - ٥ن² + ٢٢٥
وعند وصولة الارض
٦٠ن - ٥ن² + ٢٢٥ = ٠ بالقسمة على (٥)
ن² - ١٢ن - ٤٥ = ٠
(ن - ١٥)(ن + ٣) = ٠
ن = ١٥ ، ن = - ٣ مرفوض
ع = ٦٠ - ١٠ن
ع(١٥) = ٦٠ - ١٥٠ = - ٩٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

من نقطة على محطة (٥٥) مترًا عن سطح الارض قذف جسم رأسيًا الى اعلى بحيث ان مسافته المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية من قذف الجسم تعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن² جد سرعة الجسم لحظة وصوله مستوى سطح الارض

الحل

عندما يصل الجسم الى سطح الارض تكون ف(ن) = ٥٥

ن ٦٠ن - ٥ن² = ٥٥

-٥ن² + ٦٠ن - ٥٥ = ٠ ÷ -٥

ن² - ١٢ن + ١١ = ٠

(ن - ١)(ن - ١١) = ٠ ⟵

ن = ١ أو ن = ١١

ع(ن) = ف' = ٦٠ - ١٠ن

ع(١) = ٦٠ - ١٠ × ١ = ٥٠

ع(١١) = ٦٠ - ١٠ × ١١ = -٥٠

② وزارة (٢٠٠٨) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ١٢

① احسب تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته

② جد الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسم سالبة.

الحل

ع = ٦ن² - ٦ن = ٠

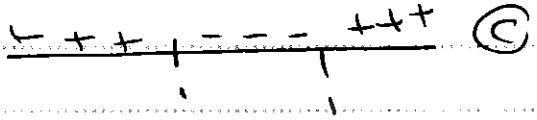
٦ن(ن - ١) = ٠

ن = ٠ ، ن = ١

① ت = ١٢ن - ٦

ت(٠) = ٠ - ٦ = -٦

ت(١) = ١٢ - ٦ = ٦

② 

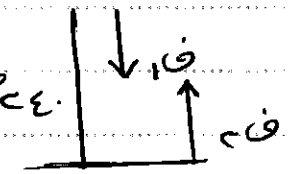
ع < ٠ في (٠، ١)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اسقط جسم من ارتفاع (٤٠) مترًا عن سطح الارض سقوطاً حرًا بحيث ان إزاحته التي يقطعها بالامتار بعد ن ثانية هي ف١(ن) = ٥ن٢ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الارض رأسيًا للأعلى بحيث ان إزاحته التي يقطعها بالامتار بعد ن ثانية ف٢(ن) = ٦٠ن - ٥ن٢ حيث سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض.

الحل



لهما نفس الارتفاع

← ف١ + ف٢ = ٤٠

٥ن٢ + ٦٠ن - ٥ن٢ = ٤٠

٦٠ن = ٤٠ ⇐ ن = ٤

ع١ = ف١' = ١٠ن

ع١(٤) = ١٠ × ٤ = ٤٠

ع٢ = ف٢' = ٦٠ - ١٠ن

ع٢(٤) = ٦٠ - ٤٠ = ٢٠

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اسقط شخص جسمًا من نقطة على سطح بناية سقوطاً حرًا بحيث ان إزاحته بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية هي ف١(ن) = ١٦ن٢، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثاني جسمًا عموديًا الى أسفل بحيث ان إزاحته بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية هي

ف٢(ن) = ٤٠ن + ١٦ن٢ فاذا ارتطم الجسم الأول بالارض بعد ثانية واحدة من ارتطام الجسم الثاني بالارض جد

① سرعة الجسم الثاني لحظة ارتطامه بالارض

② ارتفاع البناية

الحل

نفرض زمن الجسم الثاني هو ن فيكون زمن الجسم الأول ن+١

ف١(ن+١) = ف٢(ن)

١٦(ن+١)٢ = ٤٠ن + ١٦ن٢

١٦(ن٢+٢ن+١) = ٤٠ن + ١٦ن٢

١٦ن٢ + ٣٢ن + ١٦ = ٤٠ن + ١٦ن٢

٨ن = ١٦ ⇐ ن = ٢

زمن الجسم الأول = ٢+١ = ٣

زمن الجسم الثاني = ٢

← يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

ع١ = ٣ن٢ = ٣×٣٢ = ٩٦
ع٢ = ٤٠ + ٢ن٢ = ٤٠ + ٢×٣٢
= ١٠٤
ف١(٣) = ١٦(٣)٢ = ١٤٤
ف٢(٣) = ٤٠×٣ + ١٦(٣)٢ = ١٤٤
ارتفاع البناية = ١٤٤

الارض تساوي ٦٠ م/ث
حيث ارتفاع البناية

ملاحظه
حل السؤال ص٦ الدوسيه
تدريب ③ الكتاب ص١٦٤

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

قذف جسم رأسيًا الى أعلى من نقطة على سطح الارض ، فاذا كانت المسافة بالاقدام التي تقطعها الجسم بعد ن ثانية من بدء حركته تعطى بالقانون ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن٢ اثبت ان الجسم فقد نصف سرعته الابتدائية عند ارتفاع ٤٨ قدم

ملاحظه
حل السؤال في الدوسية ص٦٢
السؤال السابع (الكتاب)

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كانت ف = $\frac{1}{3}$ ن٣ - ٣ن٢ + ٥ن
هي معادلة الزمنية لحركة جسم على خط مستقيم حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالامتار اثبت تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

ملاحظه
حل السؤال ص٦ الدوسيه
تدريب ④ من الكتاب ص١٦٣

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

قذف جسم من سطح بناية رأسيًا الى اعلى بحيث ان ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركه يعطى بالأمتار ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن٢
اذا كانت سرعته لحظة وصوله

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام :ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

قذف جسم رأسيًا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها ع. ، فاذا كان بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالأقتران ف(ن) = ع. ن - ٥ ن٢ اذا علمت ان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم (٤٥) متر ، فجد قيمة السرعة الابتدائية ع.

الحل

ع = ف' = ع. - ١٠ ن = ٠

⇐ ع. = ١٠ ن

ف(ن) = ع. ن - ٥ ن٢

= ١٠ ن × ن - ٥ ن٢

= ١٠ ن٢ - ٥ ن٢

= ٥ ن٢

ف(ن) = ٤٥

٥ ن٢ = ٤٥ ⇐ ن٢ = ٩

ن = ٣ ، ن = -٣ (مرفوض)

∴ ع. = ١٠ ن = ١٠ × ٣ = ٣٠

④ وزارة (٢٠١٢) شتوية

قذف جسم رأسيًا الى أعلى من نقطة على سطح الارض ، فاذا كان (ف) بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من البدء بالحركة فعطى بالأقتران ف(ن) = ٣٠ ن - ٥ ن٢ فجد ارتفاع الجسم عن سطح الارض عندما يفقد نصف سرعته الابتدائية

الحل

ع = ف' = ٣٠ - ١٠ ن

السرعة الابتدائية = ع(١)

= ٣٠ - ١٠ × ٠

= ٣٠

$\frac{1}{2}$ السرعة الابتدائية = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ = ١٥

٣٠ - ١٠ ن = ١٥

١٠ ن = ١٥ ⇐ ن = $\frac{3}{2}$

ف($\frac{3}{2}$) = ٣٠ × $\frac{3}{2}$ - ٥ ($\frac{3}{2}$)٢

= $\frac{135}{4}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑩ وزارة (٢٠١٤) صيفية

قذف جسم رأسيًا للأعلى من قمة برج ارتفاعة ١٤٤ قدمًا عن سطح الارض فاذا كانت المسافه ف بالاقدام التي يقطعها الجسم بعد ن ثانيه من بدء الحركه محطاه بالعلاقه ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} جد كلاً مما يلي

① اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم عن سطح الارض

② سرعة الجسم لحظه اصطدامه بالارض

الحل

① ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} + ١٤٤

عند اقصى ارتفاع ع (ن) = ٠

ع = ف' = ١٢٨ - ٣٢ ن = ٠

ن = ٤

اقصى ارتفاع

ف (٤) = ١٢٨ (٤) - ١٦ (٤)^{٢} + ١٤٤

= ٤٠٠

② عند وصوله الارض ف = ٠

١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} + ١٤٤ = ٠ ÷ -١٦

ن^{٢} - ٨ ن - ٩ = ٠

(ن - ٩) (ن + ١) = ٠

ن = ٩ ، ن = -١ مرفوض

ع (٩) = ١٢٨ - ٣٢ × ٩ = -١٦٠

⑪ وزارة (٢٠١٣) شتوية

يتحرك جسيم على خط الاعداد وفقد العلاقه ف (ن) = ١٧ ن - ٤ ن^{٢} حيث ف: بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد المسافه التي يقطعها الجسيم عندما تكون سرعته ١م/ث

الحل

ع = ف' = ١٧ - ٨ ن = ٠

ع (ن) = ١

١٧ - ٨ ن = ١ ← ٨ ن = ١٦

← ن = ٢

ف (٢) = ١٧ × ٢ - ٤ (٢)^{٢}

= ٣٤ - ١٦ = ١٨

⑫ وزارة (٢٠١٣) صيفية

يقف شخصان على سطح بناية ، اطلق الشخص الأول كره فتسقط وفقد العلاقه ف (ن) = ٥ ن^{٢} وفي اللحظه نفسها رمى الشخص الثاني كره أخرى عموديًا الى اسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ١٥م/ث وفقد العلاقه ف (ن) = ١٥ ن + ٥ ن^{٢} حيث ف المسافه بالامتار ، ن الزمن بالثواني ماذا ارتطمت كره الشخص الأول بعد ثانيه من ارتطام كره الشخص الثاني بالارض جد سرعة كره الشخص الثاني لحظه ارتطامها بالأرض

← يتبع الحل

الحل

$ف_1(ن) = ٥ن^2$ ، $ف_2(ن) = ١٥ن + ٥ن^2$

الزمن الثاني = ن ، الزمن الأول = ن + ١

$ف_1(ن+١) = ف_2(ن)$

$٥(ن+١)^2 = ١٥ن + ٥ن^2$

$٥(ن^2 + ٢ن + ١) = ١٥ن + ٥ن^2$

$٥ن^2 + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^2$

$٥ن = ٥ \Leftarrow ن = ١$

$ع_2 = ١٥ + ١٠ن$

$ع_2(١) = ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان المسافه ف بالامتار تعطى بالعلاقه $ف(ن) = \frac{ن}{ع(ن)}$ حيث ع السرعه

ن الزمن بالثواني ، فجد تسارع الجسم عندما ن = (٢) ثانيه ، علماً بان السرعة عندئذ تساوي (٣) م/ث

الحل

$ف' = \frac{ع \times ١ - ن \times ع'}{ع^2}$

$ع' = \frac{ع - ن \times ن}{ع^2}$

$ع'(٢) = \frac{ع(٢) - ن \times ن'(٢)}{[ع(٢)]^2}$

$٣ = \frac{٣ - ٢ \times ن'(٢)}{(٢)^2}$

$٣ \times ٤ = ٣ - ٢ن'(٢)$

$ن'(٢) = \frac{٣ - ١٢}{-٢} = ٤.٥$

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم وفقه العلاقه $ف(ن) = \frac{(ن+٢)^2}{٤} - ٦ن^2$

حيث ن الزمن بالثواني ف المسافه بالامتار ، جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث

الحل

$ع = ف' = \frac{٢(ن+٢)}{٤} - ١٢ن$

$(ن+٢) - ١٢ن = ٨٩$

$ن^2 + ٦ن + ٤ - ١٢ن = ٨٩$

$ن^2 - ٦ن - ٨١ = ٠$

بالتجريب ن = ٣ هي احد الجذور

	١	-٦	-٨١
٣		٣	-٩
	١	-٣	-٩٠

$\leftarrow (ن-٣)(ن^2 - ٣ن - ٢٧)$ للحل

ن = ٣

$ت = ع' = ٣(ن+٢)^2 - ١٢$

$ت(٣) = ٣ \times ٢٥ - ١٢ = ٦٣$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

قذف جسم رأسياً الى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (١١٢) متر/ث وفقه العلاقة ف(ن) = ١١٢ن - ١٦ن^{٢} حيث ف المسافه التي يقطعها الجسم بالامتار ن الزمن بالثواني جد ما يأتي

① اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

② الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع (٩٦) متراً من نقطة القذف

الحل

① ع = ف' = ١١٢ - ٣٢ن = ٠

١١٢ = ٣٢ن ← ن = $\frac{١١٢}{٣٢} = \frac{٧}{٢}$

اقصى ارتفاع ف($\frac{٧}{٢}$)

= ١١٢ × $\frac{٧}{٢}$ - ١٦ × ($\frac{٧}{٢}$)^{٢} = ١٩٦

② ف = ١١٢ن - ١٦ن^{٢} = ٩٦

١٦ن^{٢} - ١١٢ن + ٩٦ = ٠ بالقسمة على ١٦

ن^{٢} - ٧ن + ٦ = ٠

(ن - ٦)(ن - ١) = ٠

ن = ٦ ، ن = ١

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٢} - ٣ن + ٢ حيث ف المسافه بالامتار ، ن الزمن بالثواني فاذا كانت سرعته المتوسطه في [٠ ، ٢] تساوي سرعته اللحظيه عندما ن = ٥ جد قيمة ٢ ؟

الحل

ع = ف' = ٢ن - ٣

ع(٥) = ٢ × ٥ - ٣ = ٧

السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية

$\frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١}$ = ٧

$\frac{٢^{٢} - ٣٢ + ٢ - ٢}{٢}$ = ٧

$\frac{٢^{٢} - ٣٢}{٢}$ = ٧

٢^{٢} - ٣٢ = ٧٢

٢^{٢} - ١٠٢ = ٠

٢(٢ - ١٠) = ٠

٢ = ٠ مرفوضة

٢ = ١٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ع٢(ن) = ٦ - $\frac{م}{ف(ن)}$ ، حيث ف
المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني
اذا علمت ان تسارع الجسيم في اللحظة
التي تنعدم فيها سرعته يساوي ٩ م/ث٢
جد قيمة الثابت م

الحل
بالاشتقاق
٢ع ع' = $-\frac{م \times ف'}{ف^2}$
٢ع × ن = $\frac{م \times ع}{ف^2}$
٢ن = $\frac{م}{ف^2}$ ---- ①
عندما ع = ٠ ⇐
٠ = ٦ - $\frac{م}{ف}$ ⇐ $\frac{م}{ف}$ = ٦
⇐ ف = $\frac{م}{٦}$ نعوض في
في المعادلة ①
٢ × ن = $\frac{م}{(\frac{م}{٦})^2}$ = $\frac{٣٦}{م^2}$
٩ × ٢ = $\frac{٣٦}{م^2}$ ⇐
م٢ ١٨ = ٣٦ م ⇐ م ١٨ (م - ٢) = ٠
م = ٠ مرفوضة م = ٢

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق
العلاقة ف(ن) = ٢ جا$\frac{\pi}{٢}$ ن + $\frac{\pi}{٢}$ ن
ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] حيث ف المسافة بالامتار
ن الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم
عندما تكون سرعته ٣ $\sqrt{٢}$ م/ث

الحل
ع = ف' = ٢ ع جا$\frac{\pi}{٢}$ ن × جتا$\frac{\pi}{٢}$ ن × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\pi}{٢}$
= ٢ جا$\frac{\pi}{٢}$ ن جتا$\frac{\pi}{٢}$ ن + $\frac{\pi}{٢}$
= جا ن + $\frac{\pi}{٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$
جا ن = ٣ $\sqrt{٢}$ - $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{\pi}{٢}$
ن = $\frac{\pi}{٣}$
ت = ع' = جتا ن
ت ($\frac{\pi}{٣}$) = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

ورقة عمل تطبيقات فيزيائية

السؤال الأول

(أ) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته معطاه بالعلاقه
ع(ن) = ٧ن٢ - ٦ن + ١٣ احسب سرعة الجسم عندما تنعدم تسارعة

ع = ٢٠ م/ث

(ب) يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافه ف مترا في زمن ن ثانيه حيث
ف(ن) = ن٣ - ٧ن٢ + ٩ن + ١
اوجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ١م/ث

ن = ١٠ ، ١٠

(ج) يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة ف مترا في زمن قدرة ن ثانية حيث
ف(ن) = ٢ن٣ - ١٧ن٢ + ٢٤ن + ١٠
جد السرعة والتسارع عندما
ف(ن) = ٤٦

ع = ١٢,٥ ، ن = ٤,١٠

السؤال الثاني

(أ) يتحرك جسم على خط مستقيم فيقطع مسافة ف مترا ، في زمن قدرة ن ثانيه حيث
ف(ن) = ٢ - ٣ن٦ + ١٥ن٢ - ن٢
جد مجموعة قيم (ن) التي تكون فيها سرعة الجسم موجبه

(٧٦٣)

(ب) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان مسافه المعطاه بالعلاقه
ف(ن) = ٩ جتا $\frac{\pi ن}{٤}$ + ن جا $\frac{\pi ن}{٤}$
اذا كانت السرعة المتوسطه في [٢٠٠] تساوي ٣م/ث وسرعة الجسم بعد ٤ ثواني هي ٥م/ث
جد الثابتين ٩ ، ن

(ج) يسير جسم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل يعطى بالعلاقه ف(ن) = ٩ جا٤ن
اوجد تسارع الجسم في اللحظة التي يقطع فيها مسافة ٤٥ م

مكتبة الأحلام ACHLESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ) يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) وكانت
$= \frac{\text{ف}(\text{ن}+\Delta\text{ن})-\text{ف}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$ ها
$\Delta\text{ن} \leftarrow 0$
$= ٣\text{ن}^{٢}-٤\text{ن}+٢$
فاوجد سرعة الجسم عندما ن = ٣

(ب) يتحرك جسم حسب العلاقة
ع(ن) = ف(٢ن − ن) جد التسارع بعد ثانيتين علما بان السرعة عندما ن = ٦ تساوي ٣ م/ث
ج = ١٢

(ج) يتحرك جسم حسب العلاقة
$\text{ع} = ٢\sqrt{\text{ف}+١}$ جد التسارع لهذا الجسم
ت = ٢ م/ث^{٢}

(د) اذا كانت السرعة = $\frac{١}{\text{ف}}$ حيث ف المسافة بالامتار بعد ن ثانية فاوجد التسارع

الجواب $\frac{-١}{\text{ف}^{٢}}$

السؤال الرابع

(أ) قذف جسم رأسيا لأعلى حسب العلاقة
ف(ن) = ٨ن − ن^{٢} + P وكان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم هو ٣٥ فما هو الثابت P ؟

P = ١٩

(ب) قذفت كرة رأسيا للأعلى من قمة برج ارتفاعه ١٤٠ م حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{٢} حيث ف المسافة بالامتار ن الزمن بالثواني جد سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض
ع = −٨٠

(ج) قذف جسم رأسيا الى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} من سطح بناية ارتفاعها ٢٠٠ قدم ما سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٢٠ قدم من سطح الأرض
ع = −٩٦

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(م) اسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ م عن سطح الارض سقوطاً حراً حيث ان المسافة المقطوعة بالامتار بعد ن ثانية هي ف(ن) = ٥ن٢ وفي نفس الوقت قذف جسم من سطح الارض للأعلى حيث ان المسافة التي يقطعها ف٢(ن) = ٥٠ن - ٥ن٢ حد سرعة كلاً من الجسمين عندما يكون بينهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض.

١٤ = ٢٠، ٤٠ = ٣٠

(أ) قذف جسم رأسياً الى اعلى من سطح بناية ارتفاعها ٤٠ م عن سطح الارض فكان ارتفاعه في اي لحظة ف(ن) = ٢ن - ٨ن٢ فاذا كان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٧٢ م جد

(١) قيمة الثابت ٢

(٢) سرعة الجسم لحظة وصوله الارض

(٣) المسافة التي يكون قد قطعها بعد ٤ ثوان من انطلاقه

السؤال السادس

(م) قذف جسم من سطح بناية رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن٢ حيث ف بالامتار، ن بالثواني جد ارتفاع البناية اذا علمت ان اقصى ارتفاع وصلة الجسم من سطح الارض ٥٠ م.

ع = ٣٠

(أ) قذف جسم من سطح عمارة ارتفاعها ١٠ م حسب العلاقة ف(ن) = ٢ن - ٥ن٢ وكان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ١٦٥ م اوجد

(١) سرعته الابتدائية

(٢) الزمن الذي يمضي ليعود الجسم الى الارض

(م) يتحرك جسم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة ف(ن) = ن٣ - ٣ن٢ + ٣ن + ٣ حيث ف بالامتار، ن الزمن بالثواني اثبت ان الجسم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

الجواب ع(ن) = (ن - ١)٢

ن	١
ع	- | +

السؤال السابع

(أ) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بناية ارتفاعها (ل) متر وفصاد الى مستوى سطح البناية بعد ٤ ثواني ثم اصطدم بالارض بعد ٦ ثانية وكان ارتفاع الجسم عن سطح البناية يعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٢ن − ٥ن² اوجد
قيمة ٢ ، ل

٢ = ٢٠ ، ل = ٢٠ م

(ب) يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن³ − ٤٢ن + ٢٠ حتى تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة
ن = ٤

(ج) يتحرك جسم بحيث ان ع = ف³
احسب التسارع عندما تكون السرعة = ٨ م/ث
ن = ٤٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

المعدلات المرتبطة بالزمن

قوانين هامة جداً

① مساحة المربع = الضلع × الضلع
محيط المربع = ٤ × طول الضلع

② مساحة المستطيل = الطول × العرض
محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

③ مساحة المثلث =
$\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

الارتفاع : العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة

④ مساحة المثلث اذا علم ضلعين وزاوية محصورة بينهما
مساحة المثلث
= $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب الضلعين × جا الزاوية

م = $\frac{1}{2}$ × س × ص × جا هـ

⑤ مساحة الدائرة = π نق^2
محيط الدائرة = 2π نق

⑥ مساحة سطح المنحرف
= $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ ع (س + ص)

⑦ مساحة متوازي الاضلاع
= القاعدة × الارتفاع

= س × ع

⑧ مساحة المعين

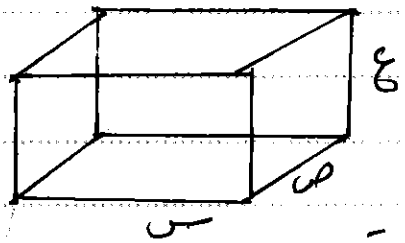
= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

مكتبة الوسام
ALWESAM
للعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ حجم متوازي المستطيلات

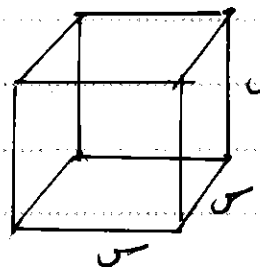
ح = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س × ص × ع



المساحة الكلية =
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدتين
= (ص + س) × ٢ × ع + ٢ × س ص

⑩ حجم المكعب



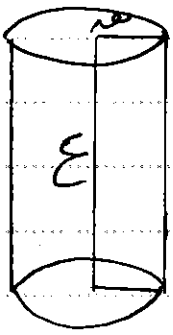
ح = (الضلع)^{٣}

مساحة المكعب
= ٦ × مساحة احد الاوجه
= ٦ × س^{٢}
= ٦ س^{٢}

⑪ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

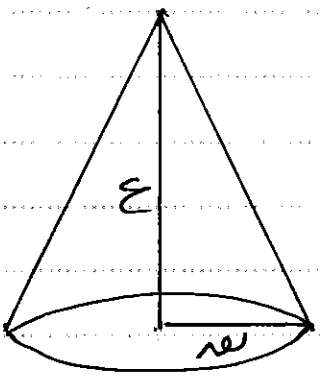
⑫ حجم الاسطوانة



= مساحة القاعدة × الارتفاع
= π نق^{٢} × ع

مساحة الاسطوانة =
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

⑬ حجم المخروط



= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

قوانين هامة

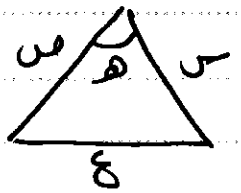
① المسافة بين نقطتين
أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢)

$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

② نظرية فيثاغورس
مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

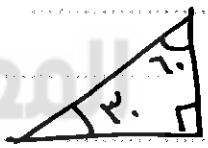
$ف^2 = س^2 + ص^2$

③ قانون جيب التمام



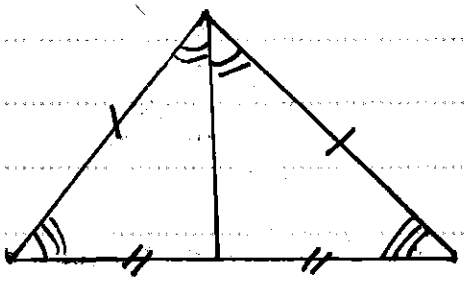
$ع^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \text{ جتا } هـ$

④ في مثلث قائم الزاوية
الذي فيه قياسا
كون الضلع المقابل للزاوية
$(٣٠^\circ) = \frac{1}{2}$ طول الوتر

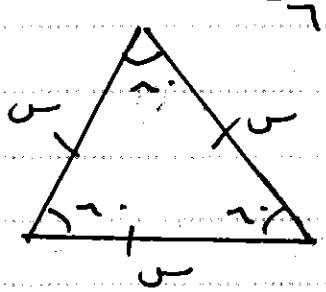


خواص المثلثات

① في مثلث متساوي الساقين
العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة ينصفها ويكون محوري عليها وأيضاً ينصف زاوية الرأس وزاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين متساويتين



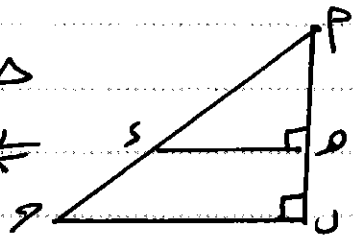
② زوايا مثلث متساوي الاضلاع متساوية = ٦٠°



③ تطبيقات المثلثات باربع حالات
① ثلاثة اضلاع
② ضلعين وزاوية محصورة بينهما
③ ضلعين وزاوية قاعدة
④ زاويتين وضلع

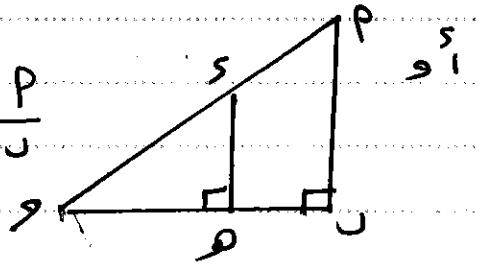
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ متشابه المثلثان اذا وجدنا زاويتان قياسهما وتناسب من التشابه نسبة وتناسب

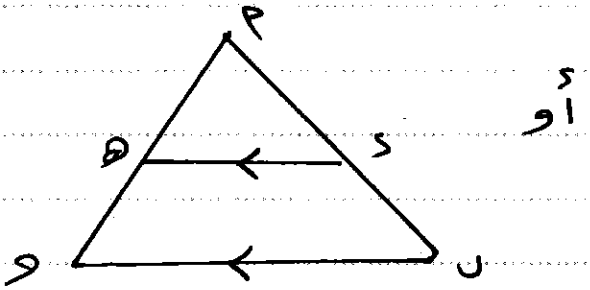


Δ P ك هـ $\sim$ Δ P و ن

$\frac{P ك}{P و} = \frac{ك هـ}{و ن} = \frac{P هـ}{P ن}$



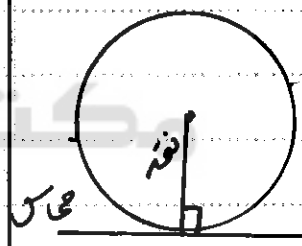
$\frac{P ك}{ك و} = \frac{P هـ}{هـ و} = \frac{ك هـ}{و ن}$



$\frac{P ك}{ك و} = \frac{P ن}{ن و}$

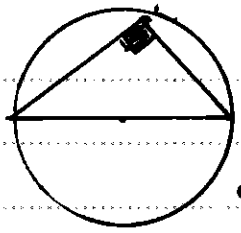
الدائرة

① نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس



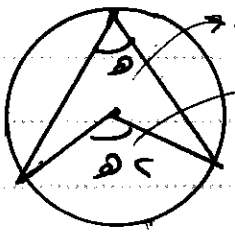
---

⑤ الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة = ٩٠°



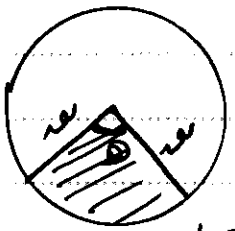
---

③ الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس



---

④ القطاع الدائري : هو جزء من الدائرة محصور بين نصفي قطرين وقوس



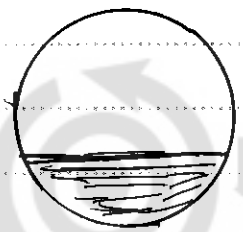
قطاع دائري

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} \times$ نق$^2 \times$ هـ

هـ : زاوية مركزية بالتقدير الدائري

---

* القطعة الدائرية : هي جزء من الدائرة محصورة بين وتر وقوس



قطعة دائرية

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2}$ نق^2 (هـ − جا هـ)

* طول قوس الدائرة (ل) $=$ نق هـ

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مفهوم المعدلات المرتبطة بالزمن

هي اقترانات لها علاقة مع الزمن ونسمى هذه الأقترانات اقترانات زمنية ، مثل السرعة ، المساحة المساع ، زيادة ، ونقصان حجم الجسم ؟ ـ ـ ـ ـ ـ ـ

لذلك عندما نشتقه هذه الأقترانات فاننا نشتقها ضمنيًا بالنسبة للزمن .

مشتقة ع هي $\frac{دع}{دن}$ معدل تغير ع بالنسبه للزمن

مشتقة ف؟ هي ؟ ف × $\frac{دف}{دن}$

س ص ← س × $\frac{دص}{دن}$ + ص × $\frac{دس}{دن}$

مشتقة حاهـ ← حتاهـ × $\frac{دهـ}{دن}$

$\frac{دص}{دن}$ = معدل تغير ص بالنسبه للزمن

$\frac{دهـ}{دن}$ = معدل تغير هـ بالنسبه للزمن

خطوات حل المسألة

١ـ قراءة المسألة جيدًا والرسم التوضيحي للسؤال .

٢. تحديد الثوابت و المتغيرات وفرض الرموز للمتغيرات
س ، ص ، ف ، ع ـ ـ ـ ـ

٣. تحويل السؤال من نص كلامي إلى رموز حيث ان معدل أو السرعة تعني المشتقة بالنسبة للزمن .

٤. اذا كان المعدل الزمني يزداد بازدياد الزمن فان قيمته موجبه

واذا كان المعدل الزمني يقل بازدياد الزمن فان قيمته سالبه

٥. تكوين علاقة تحتوي على المطلوب وترتبط هذه العلاقة بالمعطيات وعند الحاجة نستبدل متغير بدلالة آخر من خلال علاقة جانبيه

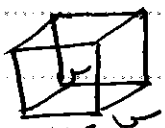
٦. نشتق متغيرات العلاقه ضمنيًا بالنسبة للزمن

٧. نعوض معطيات السؤال في المشتقة ونجد المطلوب

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ① سلك معدني على شكل مربع وعاء من الثلج على شكل مكعب فإذا تناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠١ سم/د، جد معدل تناقص كل من حجمه ومساحته الكلية عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

الحل



نفرض طول ضلع المكعب $= س$

$\frac{د س}{د ن} =$ معدل تغير ضلعه متناقص $= -٠,٠٠١$

ح : حجم المكعب

$\frac{د ح}{د ن} = ؟؟$ المطلوب ايجادها عندما $س = ١٠$

$ح = س^٣ \leftarrow \frac{د ح}{د ن} = ٣ س^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

اشتقاقه ضمني بالنسبة للزمن

$\left| \frac{د ح}{د ن} \right._{س=١٠} = ٣ \times ١٠^٢ \times -٠,٠٠١ = -٣ \times \frac{١}{١٠٠٠} = -٠,٣$

- مساحته الكلية $= ٦ س^٢$

$م = ٦ س^٢$

$\frac{د م}{د ن} = ١٢ س \frac{د س}{د ن}$

$\left| \frac{د م}{د ن} \right._{س=١٠} = ١٢ \times ١٠ \times -٠,٠٠١ = -\frac{١}{١٠٠٠} = -٠,٠١٢$

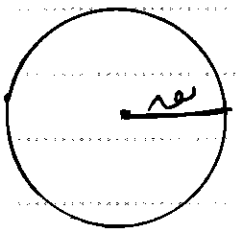
مثال ②

بالون كروي يتسرب منه الهواء بمعدل ٣ سم٣/دقيقة اوجد

① معدل تقصان نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر ١٠ سم.

② معدل التغير في مساحة سطح البالون في تلك اللحظة

الحل



ح : حجم البالون

$\frac{د ح}{د ن} = -٣$

نق : نصف قطر البالون

① المطلوب $\left| \frac{د نق}{د ن} \right._{نق=١٠}$

$ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ نق^٢ \times \frac{د نق}{د ن}$

$-٣ = ٤ \pi \times (١٠)^٢ \times \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د نق}{د ن} = \frac{-٣}{٤٠٠ \pi}$

② م : مساحة سطح البالون

$م = ٤ \pi نق^٢$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ \pi نق \times \frac{د نق}{د ن}$

$\left| \frac{د م}{د ن} \right._{نق=١٠} = ٨ \pi \times ١٠ \times \frac{-٣}{٤٠٠ \pi} = -\frac{٣}{٥}$ سم٢/د

مثال (٣)

بركة ماء كرة ألقي فيها حجر فأحدث موجات دائرية، وفي لحظة ما كانت مساحة المدى الموجات تزداد بمعدل 21π م^2/د، أوجد معدل التغير في محيط الموجة اذا كان نصف القطر عندئذ هو ٧ م

الحل

م^2: مساحة الموجة

$\frac{د م}{د ن} = 21\pi$

ل: محيط الموجة

المطلوب $\frac{د ل}{د ن}$ عندما نق = ٧

محيط الموجة ل $= 2\pi$ نق

$\frac{د ل}{د ن} = 2\pi \times \frac{د نق}{د ن}$

نجد $\frac{د نق}{د ن}$ من معرفة $\frac{د م}{د ن}$

م $= \pi$ نق^2

$\frac{د م}{د ن} = 2\pi$ نق $\times \frac{د نق}{د ن}$

$21\pi = 2\pi \times 7 \times \frac{د نق}{د ن}$

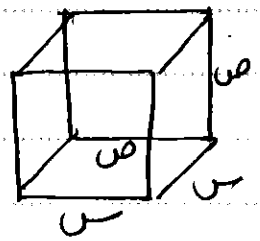
$\frac{د نق}{د ن} = \frac{21\pi}{14\pi} = \frac{3}{2}$

بالتعويض

$\frac{د ل}{د ن} = 2\pi \times \frac{3}{2} = 3\pi$ م/د

مثال (٤)

صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاثة أمثال طول ضلع القاعدة فاذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل $\frac{1}{4}$ سم/ث، أجب معدل التغير في الحجم ومعدل التغير في مساحة السطح الكلية للصندوق عندما يكون طول الضلع ٨ سم.



الحل

ص $= 3$ س

$\frac{د س}{د ن} = \frac{1}{4}$

س $= 8$ المطلوب $\frac{د م}{د ن}$ ، م: مساحة السطح الكلية : $\frac{د ح}{د ن}$

ح = الطول × العرض × الارتفاع

$= س \times س \times ص = س^2 \times ص$

$= س^2 \times 3 س = 3 س^3$

$\frac{د ح}{د ن} = 9 س^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$= 9 \times 8^2 \times \frac{1}{4} = 9 \times 8 \times 8 \times \frac{1}{4}$

$= 144$

مساحة الكلية $= 2 س^2 + 4 س ص$

$= 2 س^2 + 4 س \times 3 س$

م $= 2 س^2 + 12 س^2 = 14 س^2$

$\frac{د م}{د ن} = 28 س \times \frac{د س}{د ن}$

$= 28 \times 8 \times \frac{1}{4} = 56$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

صفيحة حديد مستطيلة الشكل سخنت بحيث تتمدد فكان طولها يزداد بمعدل ٣ سم/ساعة وعرضها يزداد بمعدل ٤ سم/ساعة وفي لحظة ما كان طولها ١٦ سم وعرضها ١٢ سم

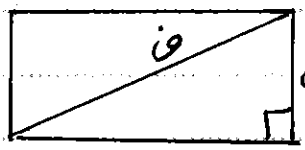
جد

① معدل التغير في محيطها

② معدل التغير في مساحتها

③ معدل التغير في قطرها في تلك اللحظة

الحل



$\frac{د ص}{د ن} = ٤$ سم/ث

$\frac{د س}{د ن} = ٣$ سم/ث

① محيطها $= م = ٢ س + ٢ ص$

$\frac{د م}{د ن} = ٢ \times \frac{د س}{د ن} + ٢ \times \frac{د ص}{د ن}$

$= ٢ \times ٣ + ٢ \times ٤$

$= ١٠$ سم/ث

② المساحة $= م = س \times ص$

$\frac{د م}{د ن} = س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن}$

$= ١٦ \times ٤ + ١٢ \times ٣$

$= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$ سم/ث

③ ف : القطر $\quad \frac{د ف}{د ن} = ؟؟$

نستخدم نظرية فيثاغورس

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢$ نشتقة

$٢ ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{س \times \frac{د س}{د ن} + ص \times \frac{د ص}{د ن}}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

$\left.\frac{د ف}{د ن}\right| = \frac{١٦ \times ٣ + ١٢ \times ٤}{\sqrt{(١٦)^٢ + (١٢)^٢}}$

$س = ١٦$

$ص = ١٢$

$= \frac{٤٨ + ٤٨}{\sqrt{٢٥٦ + ١٤٤}} = \frac{٩٦}{\sqrt{٤٠٠}} = \frac{٩٦}{٢٠} = ٤٫٨$ سم/ث

مثال ⑥

تسير نقطة على منحنى $ص^٢ = ٢ س^٣$ بحيث أن $\frac{د ص}{د ن} = س$ أوجد $\frac{د س}{د ن}$ عند النقطة $(٢، ٤)$

الحل

$ص^٢ = ٢ س^٣$

$٢ ص \times \frac{د ص}{د ن} = ٦ س^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

$٢ ص \times س = ٦ س^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

$٢ \times ٤ \times ٢ = ٦ \times ٤ \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مكتبة السوسن ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

تتحرك نقطة على $س^2 + ص^2 = ١١٧$ جد احداثيات النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل التغير في الاتجاه السيني ٣ سم/ث، ومعدل التغير في الاتجاه الصادي ٢ سم/ث

الحل

$\frac{د س}{د ن} = ٣$ ، $\frac{د ص}{د ن} = ٢$

$٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$٢ س \times ٣ + ٢ ص \times ٢ = ٠$

$٦ س + ٤ ص = ٠ \Leftarrow ٤ ص = -٦ س$

$\leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} س$ بالتعويض في

$س^2 + ص^2 = ١١٧$

$س^2 + (-\frac{٣}{٢} س)^2 = ١١٧$

$س^2 + \frac{٩}{٤} س^2 = ١١٧ \rightarrow \times ٤$

$٤ س^2 + ٩ س^2 = ٤٦٨$

$١٣ س^2 = ٤٦٨ \leftarrow س^2 = \frac{٤٦٨}{١٣} = ٣٦$

$س = \pm ٦$

$س = ٦ \leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} \times ٦ = -٩$

النقطة $(٦ ، -٩)$

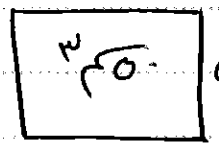
$س = -٦ \leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} \times -٦ = ٩$

$(-٦ ، ٩)$

مثال ⑧

قطعة مساحتها ٥٠ سم^2 اذا زاد طول ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢ سم/ث، وتناقص طول الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابتة، فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها المحيط عن التناقص.

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ٢$

محيط المستطيل $= ل = ٢ س + ٢ ص$

$م = س \times ص = ٥٠$

$\leftarrow ص = \frac{٥٠}{س}$ بتعويضها في ل

$ل = ٢ س + ٢ \times \frac{٥٠}{س} = ٢ س + \frac{١٠٠}{س}$

$\frac{د ل}{د ن} = ٢ \times \frac{د س}{د ن} - \frac{١٠٠}{س^2} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما يتوقف المحيط عن التناقص فان المحيط ل يصبح ثابت $\leftarrow \frac{د ل}{د ن} =$ صفر

صفر $= ٢ \times ٢ - \frac{١٠٠}{س^2} \times ٢$

$= ٤ - \frac{٢٠٠}{س^2}$

$\frac{٢٠٠}{س^2} = ٤ \leftarrow ٤ س^2 = ٢٠٠$

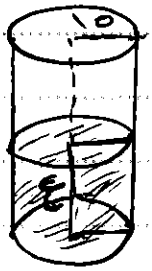
$\leftarrow س^2 = ٥٠ \quad س = ٥٠٧$

$ص = \frac{٥٠}{س} = \frac{٥٠}{٥٠٧} = ٥٠٧$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٩)

خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠ م يخرج منه الماء بمعدل ٢م٣/د فجد سرعة انخفاض سطح الماء فيه



الحل

حجم الماء = ح

$\frac{دح}{دن} = -٢$

القطر = ٣٠ ⇐ نق = ١٥

ح = π نق^{٢} ع = π(١٥)^{٢} ع

= ٢٢٥ π ع

(نصف القطر للاسطوانة ثابت)

$\frac{دح}{دن} = ٢٢٥\pi \times \frac{دع}{دن}$

$-٢ = ٢٢٥\pi \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{-٢}{٢٢٥\pi}$

مثال (١٠)

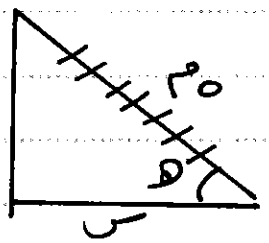
يرتكز سلم طوله ٥ م على حائط عمودي واسفله على ارض افقية بدأ السلم الانزلاق بسرعة ٣ م/د وفي لحظة معينة كان بعد أسفل السلم ٣م عن الحائط اوجد

① سرعة هبوط اعلى السلم في تلك اللحظة

② معدل تغير الزاوية المحصورة بين أسفل السلم والارض في تلك اللحظة

③ معدل تغير مساحة المثلث المحصورة بين السلم والارض والجدار.

الحل



①

$\frac{دس}{دن} = ٣$

$\frac{دص}{دن} = ؟؟$

س = ٣

حسب نظرية فيثاغورس س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$

$٢ \times ٣ \times ٣ + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$

عندما س = ٣ فان ٣^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

٩ + ص^{٢} = ٢٥ ⇐ ص^{٢} = ١٦ ص = ٤

$٢ \times ٣ \times ٣ + ٢ \times ٤ \frac{دص}{دن} = ٠$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-١٨}{٨} = \frac{-٩}{٤}$

②

$\frac{دهـ}{دن} = ؟؟$

جتا هـ = $\frac{س}{٥}$ ⇐ -جاهـ $\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٥} \frac{دس}{دن}$

عندما س = ٣ ، ص = ٤

جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ⇐ جاهـ = $\frac{٤}{٥}$

$-\frac{٤}{٥} \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٥} \times ٣$ ⇐ $\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٣}{٤}$

③ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

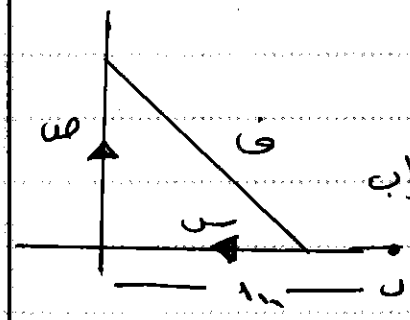
م = $\frac{١}{٢}$ س ص

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢}(س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن})$

$= \frac{١}{٢}(٣ \times \frac{-٩}{٤} + ٤ \times ٣) = \frac{٢١}{٨}$

مثال (١١)

سفينتان البعد بينهما ١٠٠ ميل ، ف تقع غربي ن ، وتسير كل منهما في اتجاه عمودي على ن ، ف تسير غربًا بسرعة ٣٠ ميل/س ، و ب تسير جنوبًا بسرعة ٤٠ ميل/س ، جد معدل تغير البعد بين السفينتين بعد مرور ساعتين .



الحل

$\frac{د س}{د ن}$ = -٣٠ اقتراب

$\frac{د ص}{د ن}$ = ٤٠

$ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$٢ ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن}$ ①

بعد ساعتين ⇐ المسافة = السرعة × الزمن

$ص = ٤٠ \times ٢ = ٨٠$

$س = ١٠٠ - ٣٠ \times ٢ = ٤٠$

$ف^{٢} = (٤٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} = ١٦٠٠ + ٦٤٠٠$

$= ٨٠٠٠$

ف = $\sqrt{٨٠٠٠}$ = $٤\sqrt{٥٠}$ ② بالتعويض

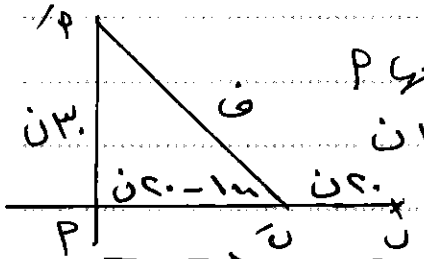
$٢ \times ٤\sqrt{٥٠} \times \frac{د ف}{د ن} = ٢ \times ٣٠ \times ٤٠ + ٢ \times ٤٠ \times ٨٠$

$٨\sqrt{٥٠} \times \frac{د ف}{د ن} = ٢٤٠٠ - ٣٢٠٠$

$٨\sqrt{٥٠} \times \frac{د ف}{د ن} = -٨٠٠$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{-٨٠٠}{٨\sqrt{٥٠}} = \frac{-١٠}{\sqrt{٢}}$

حل آخر بدلالة الزمن (ن)



المسافة التي تقطعها ب = ٣٠ × ن = ٣٠ن

المسافة التي تقطعها ا = ٤٠ × ن = ٤٠ن

$ف = \sqrt{(١٠٠ - ٣٠ن)^{٢} + (٤٠ن)^{٢}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(١٠٠ - ٣٠ن) \times -٣٠ + ٢ \times ٤٠ن \times ٤٠}{٢\sqrt{(١٠٠ - ٣٠ن)^{٢} + (٤٠ن)^{٢}}}$

$\left| \frac{د ف}{د ن} \right|_{ن=٢} = \frac{٢ \times ١٨٠٠ + ٢ \times ٤٠ \times (-٤٠)}{٢\sqrt{(١٠٠ - ٦٠)^{٢} + (٨٠)^{٢}}}$

$= \frac{٣٦٠٠ - ٢٤٠٠}{٢\sqrt{٣٦٠٠ + ٦٤٠٠}}$

$= \frac{١٢٠٠}{٢\sqrt{١٠٠٠٠}}$

$= \frac{١٠}{٢\sqrt{٢}}$

مكتبة الإسلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

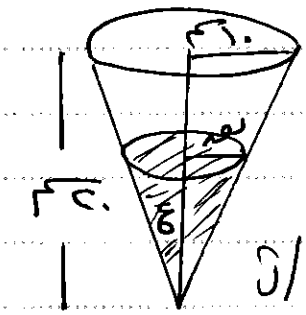
مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ارتفاعه ٤٠ سم، ونصف قطره ١٠ سم يسكب فيه الماء من الأعلى بمعدل ٨ سم٣/ث، ويخرج منه الماء بمعدل ٥ سم٣/ث، وفي لحظة ما كان ارتفاع الماء فيه ٦ سم، اوجد ما يلي

① سرعة ارتفاع الماء في المخروط في تلك اللحظة

② معدل التغير في نصف قطر سطح الماء في تلك اللحظة

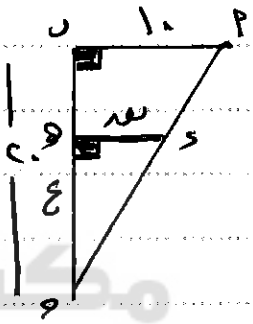
③ معدل التغير في مساحة سطح الماء في تلك اللحظة.

الحل



ح: حجم الماء في المخروط

$\frac{دح}{دن} = ٨ - ٥ = ٣$ سم٣/ث



① ع: ارتفاع الماء

$\frac{دع}{دن}$ | $ع = ٦$

من تشابه $\triangle$ أ ب هـ، $\triangle$ د ب هـ

$\frac{١٠}{٤٠} = \frac{نق}{ع} \leftarrow نق = \frac{١}{٤} ع$

$\leftarrow$ **$نق = \frac{١}{٤} ع$**

$ح = \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

$ح = \frac{١}{٣} \pi (\frac{١}{٤} ع)^٢ ع = \frac{١}{١٢} \pi ع^٣$

$\frac{دح}{دن} = \frac{٣}{١٢} \pi ع^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$٣ = \frac{١}{٤} \times \pi \times ٦^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$٣ = \pi ٩ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{٣}{\pi ٩} = \frac{١}{\pi ٣}$

② $\frac{دنق}{دن}$ | $ع = ٦$ $\quad نق = \frac{١}{٤} ع$

$\leftarrow \frac{دنق}{دن} = \frac{١}{٤} \times \frac{دع}{دن}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\pi ٣} = \frac{١}{\pi ١٢}$

③ م: مساحة سطح الماء

م $= \pi$ نق^٢

$\frac{دم}{دن} = ٢ \pi \times نق \times \frac{دنق}{دن}$

عندما ع $= ٦$ فإن $نق = \frac{١}{٤} \times ٦ = ٣$

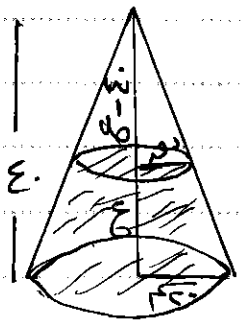
$\frac{دم}{دن} = ٢ \times \pi \times ٣ \times \frac{١}{\pi ١٢} = \frac{١}{٢}$ سم٢/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

مخروط دائري قائم قاعدته لاسفل ونصف قطر قاعدته ٢٠ سم، وارتفاعه ٤٠ سم، ينسكب فيه الماء بمعدل ٣٠ سم٣/د اوجد معدل التغير في ارتفاع الماء داخل المخروط عندما يكون ارتفاع الماء يساوي ١٦ سم.

الحل



ح: حجم الماء

$\frac{دح}{دن} = ٣٠$ سم٣/د

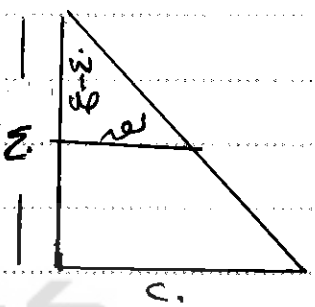
ع: ارتفاع الماء

$\frac{دع}{دن} = ؟؟$

ع = ١٦

حجم الماء = حجم المخروط الكبير − حجم المخروط الصغير

$ح = \frac{1}{3}\pi(٢٠)^2 \times ٤٠ - \frac{1}{3}\pi نق^2 (٤٠-ع)$



من تشابه المثلثات

$\frac{٤٠}{٢٠} = \frac{٤٠-ع}{نق}$

$٢نق = ٤٠ - ع$

$نق = ٢٠ - \frac{1}{2}ع$

$ح = \frac{1}{3}\pi(٢٠-\frac{1}{2}ع)^2(٤٠-ع) - \frac{١٦٠٠٠}{3}\pi$

$ح = \frac{1}{12}\pi(٤٠-ع)^3 - \frac{١٦٠٠٠}{3}\pi$

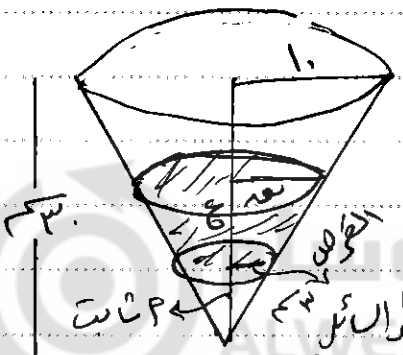
$\frac{دح}{دن} = صفر - \frac{1}{4\pi}(٤٠-ع)^2 \times -\frac{دع}{دن}$

$٣٠ = \frac{1}{4\pi}(٤٠-١٦)^2 \times \frac{دع}{دن}$

$٣٠ = \frac{١٤٤}{\pi}\frac{دع}{دن} \leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{\pi ٥}{٤}$

مثال (١٤)

يمثل الشكل المجاور إناء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطرة ١٠ سم، وارتفاعة ٣٠ سم، اغلقه جزء منه بقرص معدني دائري رقيق طول نصف قطره ٣ سم يوازي قاعدة المخروط يمنع وصول اي مادة للجزء السفلي من الاناء، فاذا صُب سائل في هذا الاناء بمعدل ثابت قدرة $(\pi ٥)$ سم٣/د، جد سرعة ارتفاع السائل في الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء $(\pi ٢٧)$ سم٣



الحل

نق: نصف قطر السائل

ع: ارتفاع السائل

ح: حجم السائل

← يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\frac{دع}{دن} = ٥\pi$ سم^٣/ث

المطلوب $\left|\frac{دع}{دن}\right|$ عندما $ع = ٢٧\pi$

نفرض ان ارتفاع المخروط الصغير $= ف$ ، ولايجاد قيمة $ف$ من تشابه المثلثات نجد ان

$\frac{ف}{٣} = \frac{٣٠}{١٠} \Leftarrow ف = ٩$

ح(ب ك) = حجم المخروط الكبير − حجم المخروط الصغير (أ)

$ع = \frac{\pi}{٣}$ نق^٢ $(٩+ف) - \frac{\pi}{٣}$ $(٣)^٢ \times ٩$

$ع = \frac{\pi}{٣}$ نق^٢ $(٩+ف) - ٢٧\pi$

ومن تشابه المثلثان

$\frac{نق}{٩+ف} = \frac{٣}{٩} \Leftarrow \frac{نق}{٩+ف} = \frac{١}{٣}$

$\Leftarrow ٣$ نق $= ٩+ف \leftarrow$ نق $= \frac{٩+ف}{٣}$

$\Leftarrow ع = \frac{\pi}{٣}\left(\frac{٩+ف}{٣}\right)^٢ \times (٩+ف) - ٢٧\pi$

$ع = \frac{\pi}{٢٧}(٩+ف)^٣ - ٢٧\pi$ العلاقة

$\frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{٢٧} \times ٣(٩+ف)^٢ \times \frac{دف}{دن} + ٠$

نجد قيمة ع عندما $ع = ٢٧\pi$

$\frac{\pi}{٢٧}(٩+ف)^٣ - ٢٧\pi = ٣٧\pi$

$\frac{\pi}{٢٧}(٩+ف)^٣ = ٦٤\pi$

$(٩+ف)^٣ = ٦٤ \times ٢٧$

$\Leftarrow ٩+ف = \sqrt[٣]{٦٤ \times ٢٧}$

$٩+ف = ٣ \times ٤ = ١٢$

$ف = ١٢ - ٩ = ٣$

$\Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{٩}(٩+ف)^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{\pi}{٩}(٩+٣)^٢ \times \frac{دع}{دن} = ٦\pi$

$\frac{دع}{دن} \times ١٤٤ = ٤٥$

$\Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{٤٥}{١٤٤} = \frac{٥}{١٦}$

ملاحظة هامة

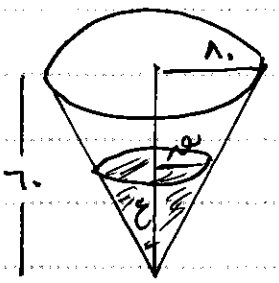
في اسئلة المخروط نجعل علاقة الحجم (ع) بدلالة متغير واحد دائماً ، ولذلك نحتاج دائماً علاقة تربط بين نق ، ع

مكتبة الوسام AlwesamBook
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ١٥

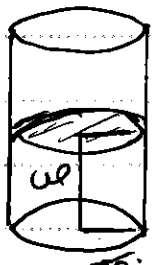
مخروط دائري قائم راسه لأسفل نصف قطر قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ١٦٠ سم يسرب منه الماء ويتجمع في وعاء اسطواني الشكل نصف قطره ٥٠ سم، أوجد ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط ضعف معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة.

الحل



نبدأ بالمخروط أولاً

$ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$



من تشابه المثلثات

$\frac{نق}{ع} = \frac{٨٠}{١٦٠}$

$\Leftarrow ٢ نق = ع$

$\Leftarrow نق = \frac{1}{2} ع$

$\therefore ح = \frac{1}{3} \pi \times (\frac{1}{2} ع)^2 ع$

$= \frac{\pi}{12} ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{12} \times ٣ ع^2 \times \frac{دع}{دن}$

$= \frac{\pi}{4} ع^2 \times \frac{دع}{دن}$

الاسطوانة

$ح = \pi نق^2 ع$ نق: ثابت = ٥٠

$ع = ص$

$ح = \pi \times ٥٠^2 \times ص$

$\frac{دح}{دن} = \pi \times ٥٠^2 \times \frac{دص}{دن}$

لكن $\frac{دح}{دن}$ للمخروط = $\frac{دح}{دن}$ للاسطوانة

$\frac{\pi}{4} \times ع^2 \times \frac{دع}{دن} = \pi \times (٥٠)^2 \times \frac{دص}{دن}$

لأن المطلوب ع عندما $\frac{دع}{دن} = \frac{دص}{دن}$

$\Leftarrow ع^2 \times \frac{\pi}{4} = \pi \times ٥٠^2$

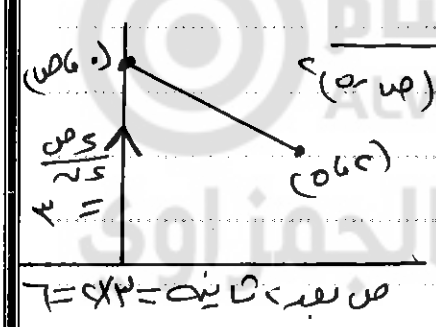
$ع^2 = ٥٠^2 \Leftarrow ع^2 = ٤ \times ٥٠^2$

$ع = \sqrt{٤ \times ٥٠^2} = ٢ \times ٥٠ = ١٠٠$

مثال ١٦

بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفي الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣ سم/ث وبعد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٥، ٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة.

الحل



$ف = \sqrt{(٠-٥)^2 + (ص-٥)^2}$

ص بعد ثانيتين = ٢ × ٣ = ٦

← يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$ف = \sqrt{(-٢-٠)^٢ + (٥-ص)^٢}$

$ف = \sqrt{٤ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥}$

$ف = \sqrt{ص^٢ - ١٠ص + ٢٩}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ص - ١٠}{٢\sqrt{ص^٢ - ١٠ص + ٢٩}} \times \frac{د ص}{د ن}$

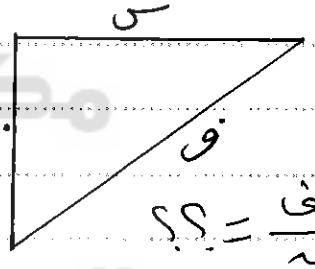
$= ٢ \times \frac{-٦ - ١٠}{٢\sqrt{٣٦ - ٦٠ + ٢٩}}$

$= ٢ \times \frac{-٤}{٢\sqrt{٥٧}} = \frac{-٣}{\sqrt{٥٧}}$

مثال (١٧)

يسير ولد بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة ١٢٠م والرياح تأخذ الطائرة من الولد افقيا بمعدل ٨م/ث، كم السرعة التي يعطي بها الولد الخيط عندما يبعد الطائرة عنه ١٥٠م

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ٨$

$ف = ١٥٠$ ، $\frac{د ف}{د ن} = ؟؟$

$ف^٢ = (١٢٠)^٢ + س^٢$

$(١٥٠)^٢ = (١٢٠)^٢ + س^٢$

$٢٢٥٠٠ - ١٤٤٠٠ = س^٢$

$س^٢ = ٨١٠٠ \Leftarrow س = ٩٠$

بالتعويض

$ف \times \frac{د ف}{د ن} \times ٢ = س \times \frac{د س}{د ن} \times ٢$

$١٥٠ \times \frac{د ف}{د ن} \times ٢ = ٩٠ \times ٨ \times ٢$

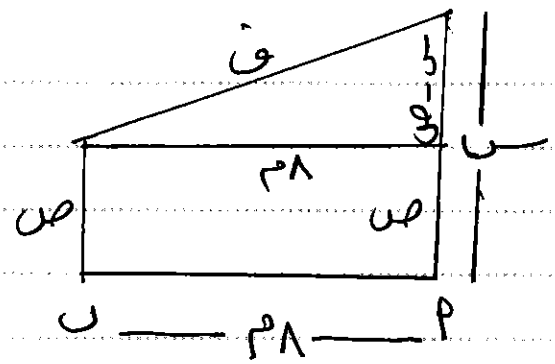
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٩٠ \times ٨ \times ٢}{١٥٠ \times ٢} = \frac{٢٤}{٥}$

مثال (١٨)

صعدان كهربائيان أ، ب ينطلقان في إطار بعد الارضي من عمارة والمسافة الافقية بينهما ٨م، بدأ المصعد أ يرتفع للأعلى بسرعة ٣م/ث، وبعد ثانيتين بدأ المصعد ب في الارتفاع للأعلى بسرعة ١م/ث، جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ٢ ثانية من بدء حركة المصعد ب؟

الحل ⇐

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي



س : المسافة التي قطعها الصقر أ

$\frac{د س}{د ن} = ٢$

ص : المسافة التي قطعها الصقر ب

$\frac{د ص}{د ن} = ١$

$ف^{٢} = (س - ص)^{٢} + ٨^{٢}$

المسافة = السرعة × الزمن

$س = ٢ \times ٤ = ٨$

$ص = ١ \times ٢ = ٢$

$ف = \sqrt{(س - ص)^{٢} + ٦٤}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(س - ص)(\frac{د س}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})}{٢\sqrt{(س - ص)^{٢} + ٦٤}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(٨ - ٢)(٢ - ١)}{\sqrt{(٨ - ٢)^{٢} + ٦٤}}$

$= \frac{٦}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٦}{\sqrt{١٠٠}}$

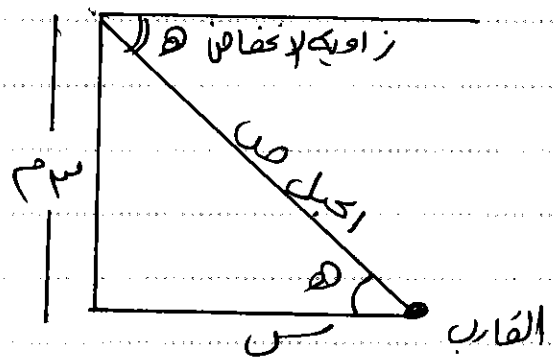
$= \frac{٦}{١٠} = ٠٫٦$ م/ث

مثال (١٩)

يقف شخص على حافة رصيف شاطئ بحر، ويسحب حبلاً متصلاً بقارب بمعدل ٥٠٠ سم/ث، فإذا كان ارتفاع يدي الشخص مع ارتفاع الرصيف عن مستوى نقطة اتصال الحبل بالقارب هو ٣م فجد

① سرعة تغير زاوية انخفاض الحبل في اللحظة التي يكون فيها القارب على بعد ٤م من الرصيف

② معدل تغير اقتراب القارب من قاعدة الرصيف في تلك اللحظة



① $\frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{٢}$ ث/ث ، هـ : زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع

$ظا هـ = \frac{٣}{ص}$

عندما س = ٤م فإنه حسب نظرية فيثاغورس ← يتبع

مكتبة السيسم ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

← $ص = ٥م \leftarrow$ ضاهـ $= \frac{٤}{٥}$

ضاهـ $= \frac{٣}{ص}$ نشتقه

ضاهـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{-٣}{ص^٢} \times \frac{د ص}{د ن}$

$\frac{٤}{٥} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{-٣}{٢٥} \times \frac{-١}{٢}$

$\leftarrow \frac{د هـ}{د ن} = \frac{٣}{٥٠} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤٠}$ راديان

ⓒ $\frac{د س}{د ن}$ | $_{س=٤}$ ؟؟

$ص^٢ = س^٢ + ٩$

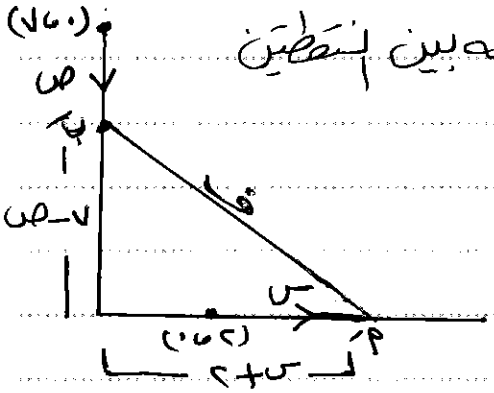
$ص \times \frac{د ص}{د ن} = س \times \frac{د س}{د ن}$

$٥ \times \frac{-١}{٢} = ٤ \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{-٥}{٨}$ م/ث

مثال ⓒ

بدأت النقطة م الحركة من النقطة (٧،٠) باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٣ سم/د وفي نفس اللحظة بدأت النقطة (ن) الحركة من النقطة (٠،٧) باتجاه نقطة الاصل بسرعة ٤ سم/د جد معدل تغير البعد بين النقطتين بعد مرور ٢ دقيقة من الحركة



ف : المسافة بين النقطتين

$\frac{د س}{د ن} = ٣$

$\frac{د ص}{د ن} = -٢$

س : المسافة التي قطعتها النقطة الأولى

س = السرعة × الزمن = ٣ × ٢ = ٦

ص : المسافة التي قطعتها النقطة الثانية

ص = ٢ × ٢ = ٤

$ف^٢ = (س+٢)^٢ + (٧-ص)^٢$

$ف = \sqrt{(س+٢)^٢ + (٧-ص)^٢}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(س+٢) \times \frac{د س}{د ن} + ٢(٧-ص) \times -\frac{د ص}{د ن}}{٢\sqrt{(س+٢)^٢ + (٧-ص)^٢}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(٦+٢) \times ٣ + (٧-٤) \times -٢}{٢\sqrt{(٦+٢)^٢ + (٧-٤)^٢}}$

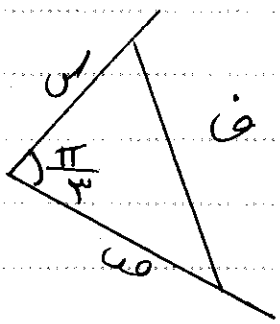
$= \frac{٢٤ - ٦}{\sqrt{٦٤ + ٩}} = \frac{١٨}{\sqrt{٧٣}}$ سم/د

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال (٢١)

خطان مستقيمان يلتقيان في النقطة م بزاوية $\frac{\pi}{3}$ تحركت النقطة P من النقطة م على أحد الخطين بسرعة ٣ م/ث وبعد مرور ثانية واحدة تحركت النقطة ن من النقطة م بسرعة ٢ م/ث على الخط الآخر، أوجد معدل تغير البعد بينهما بعد ٤ ثواني من حركة النقطة ن .

الحل



حسب قانون جيب التمام

$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \text{ جتا } \frac{\pi}{3}$

$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \times \frac{1}{2}$

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}$

$س$ = السرعة × الزمن $= 3 \times 5 = 15$

$ص = 2 \times 4 = 8$

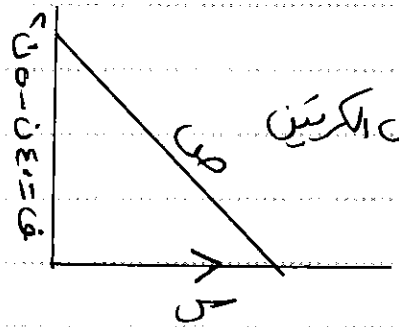
$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{2 س \frac{د س}{د ن} + 2 ص \frac{د ص}{د ن} - (س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن})}{2\sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}}$$

$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{2 \times 15 \times 2 + 2 \times 8 \times 3 - (15 \times 3 + 8 \times 2)}{2\sqrt{(15)^2 + 8^2 - 15 \times 8}} = \frac{34}{13}$$

مثال (٢٢)

تقع النقطة م على شارع مستقيم أفقي تحركت كرتان P، ب من النقطة م في لحظة حيث تحركت الكرة P على الشارع في خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م/ث في حين قذفت الكرة (ب) رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وكان ارتفاعها يعطى بالعلاقة $ف(ن) = 40 ن - 5 ن^2$ أوجد معدل تغير المسافة بين الكرتين P، ب عندما تصل ب الى اقصى ارتفاع

الحل



$ص$ = المسافة بين الكرتين

$\frac{د س}{د ن} = 15$

المطلوب $\frac{د ص}{د ن}$ |

عند اقصى ارتفاع

عند اقصى ارتفاع ع $= \frac{د ف}{د ن} =$ صفر

ع $= ف'(ن) = 40 - 10 ن =$ صفر

$\leftarrow ن = 4$

$س = 15 \times 4 = 60$

$ف(4) = 40 \times 4 - 5 \times (4)^2 = 80$ م

حسب فيثاغورس

$ص^2 = س^2 + ف^2$

$ص = \sqrt{س^2 + ف^2}$

يتبع الحل

تابع الحل

$$\frac{ص}{ن} = \frac{س \frac{س}{ن} + ف \frac{ف}{ن}}{\sqrt{س^2 + ف^2}}$$

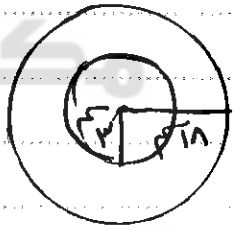
$$\left|\frac{ص}{ن}\right|_{ن=٤} = \frac{٦٠ \times ١٥ + ٨٠ \times ٠}{\sqrt{(٦٠)^2 + (٨٠)^2}}$$

$$= \frac{٩٠٠}{\sqrt{١٠٠ \times ٣٦ + ١٠٠ \times ٦٤}} = \frac{٩٠٠}{١٠٠} = ٩ \text{ م/ث}$$

مثال (٣)

دائرتان متحدتان في المركز نصفا قطريهما ٣ سم ، ١٨ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٣ سم/د ، وفي نفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل ٣ سم/د ، اوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين عندما تصبح هذه المساحة صفر

الحل



في اللحظة ن

نصف قطر الدائرة الصغرى = ٣ + ٣ ن سم

نصف قطر الكبرى = ١٨ − ٣ ن

المساحة المحصورة

= مساحة الكبرى − مساحة الصغرى

$م = \pi (١٨ - ٣ن)^2 - \pi (٣ + ٣ن)^2$

$$\frac{دم}{دن} = \pi ٢ (١٨ - ٣ن)(-٣) \times ٢ - \pi ٢ (٣ + ٣ن)(٣) \times ٢$$

عندما م = ن

نصف قطر الصغرى = نصف قطر الكبرى

$٣ + ٣ن = ١٨ - ٣ن$

$٦ن = ١٥ \leftarrow ن = ٣$

$$\left|\frac{دم}{دن}\right|_{ن=٣} = \pi ٢ (١٨ - ٣ \times ٣)(-٣) \times ٢ - \pi ٢ (٣ + ٣ \times ٣)(٣) \times ٢$$

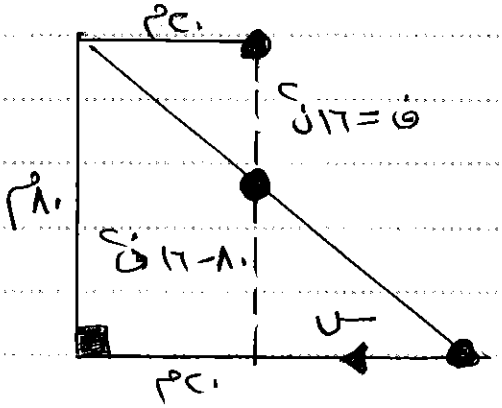
$= -\pi ٢٧٠ - \pi ٣٦ = -\pi ٩٠$

مثال (٤)

يقع مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٨٠ م ، اسقطت كرة من نفس الارتفاع من نقطة تبعد ٦٠ م من المصباح ، اذا كانت الكرة تسقط حسب العلاقة $ف = ١٦ ن^2$ فما سرعة تحرك ظل الكرة على الارض بعد ثانية واحدة من سقوطها .

← يتبع الحل

مكتبة الأوائل
AlAwaelSchool
المعلم: ناجح الجمزاوي



س: بعد ظل الكرة عن مكان السقوط المطلوب $\left|\frac{ك س}{ك ن}\right|_{ن=١}$

$$\frac{٨٠}{س + ٤٠} = \frac{٨٠ - ١٦ن^{٢}}{س}$$ ضرب تبادلي

$$٨٠س = (س + ٤٠)(٨٠ - ١٦ن^{٢})$$

$$٨٠س = ٨٠س - ١٦ن^{٢}س + ٦٤٠ - ٣٢٠ن^{٢}$$

$$\frac{١٦ن^{٢}س}{١٦ن^{٢}} = \frac{٦٤٠ - ٣٢٠ن^{٢}}{١٦ن^{٢}}$$

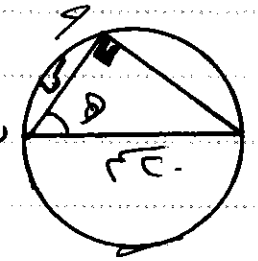
$$س = \frac{٤٠}{ن^{٢}} - ٤٠$$ (العلاقة)

$$\frac{ك س}{ك ن} = \frac{-٤٠ \times ٢ن}{ن^{٣}} = -\frac{٨٠}{ن^{٢}}$$ م/ث

$$\left|\frac{ك س}{ك ن}\right|_{ن=١} = -\frac{٨٠}{١} = -٨٠$$ م/ث

مثال (٢٥)

في الشكل المجاور $\overline{UP}$ قطر في دائرة طوله ٤٠ سم تتحرك النقطة ج على قوس $\overset{\frown}{UP}$، بحيث يزيد قياس الزاوية جـ د P بمعدل ٣°/د، احسب معدل تغير مساحة المثلث UPجـ عندما يكون قياس الزاوية جـ د P يساوي $\frac{\pi}{٣}$؟



الحل

نفرض ان $ق(\angle جـ د P) = هـ$

$د ن = س$

م: مساحة المثلث UPجـ

$$\frac{ك هـ}{ك ن} = ٣° = \frac{\pi \times ٣}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦٠}$$ راديان

$$م = \frac{١}{٢} \times UP \times ن جـ \times \text{جا} هـ$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٤٠ \times س \times \text{جا} هـ$$

$$= ١٠ س \text{ جا} هـ$$

$ق(\angle P د جـ) = ٩٠°$ محيطية ورسومه على قطر

$$\text{جا} هـ = \frac{س}{٤٠} \leftarrow س = ٤٠ \text{ جا} هـ$$

$$م = ٤٠ \times ١٠ \text{ جا} هـ \text{ جا} هـ$$

$$= ٤٠٠ \text{ جا}^{٢} هـ$$

$$\frac{ك م}{ك ن} = ٤٠٠ \times ٢ \text{ جا} هـ \times \frac{ك هـ}{ك ن}$$

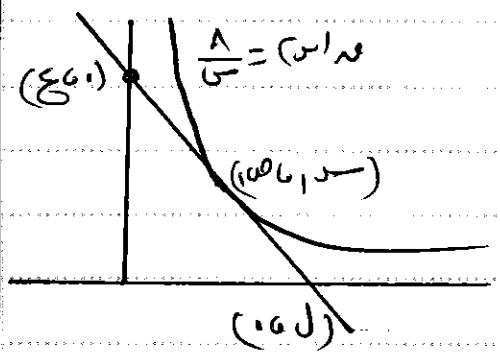
$$= ٤٠٠ \times ٢ \text{ جا} \frac{\pi}{٣} \times \frac{\pi}{٦٠}$$

$$= ٤٠٠ \times \frac{١}{٤} - \times \frac{\pi}{٦٠} = -\frac{١٥\pi}{٢}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٦)

رسم محاس لمنحنى الإيرادات ق(س) = $\frac{٨}{س}$ في الربع الأول كما في الشكل المجاور، فكان مقطعة السيني والصادي ل، ع على الترتيب، فإذا كان المقطع السيني يتزايد بمعدل ٢ وحدة/ث فجد معدل تغير المقطع الصادي عندما يكون المقطع السيني ١٠ وحدات



أولاً

ميل المحاس = ميل المنحنى = ق'(س١)

المحاس يمر بالنقطتين (ل، ٠)، (٠، ع)

ميل المحاس = $\frac{ع - ٠}{٠ - ل} = \frac{-ع}{ل}$

ق'(س) = $\frac{-٨}{س^٢}$ ← $\frac{-ع}{ل} = \frac{-٨}{س_١^٢}$

← ٨ ل = ع $س_١^٢$ ---- ①

ثانياً

المحاس يمر بالنقطتين (س١، ص١) (ل، ٠)

ميل المحاس = $\frac{ص_١ - ٠}{س_١ - ل} = \frac{ص_١}{س_١ - ل}$

ولكن ص١ = $\frac{٨}{س_١}$

← ميل المحاس = $\frac{\frac{٨}{س_١}}{ل - س_١}$

ميل المحاس = ميل المنحنى

$\frac{\frac{٨}{س_١}}{ل - س_١} = \frac{٨}{س_١^٢}$ (بالتبادلي)

← ٨ $س_١$ = ٨ ل − ٨ $س_١$

٨ ل = ١٦ $س_١$ ---- ②

بتعويض معادلة ② في معادلة ①

٨ ل = ع ٧ $(\frac{١}{٤} ل)^٢$

٨ ل = ع × $\frac{١}{٤} ل^٢$

ع = $\frac{٣٢}{ل}$ العلاقة

$\frac{دع}{دن} = \frac{-٣٢}{ل^٢} \times \frac{دل}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{-٣٢}{(١٠)^٢} \times ٢$

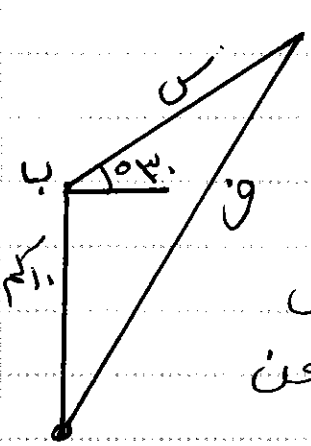
$= \frac{-٦٤}{١٦} = -٤$ وحدة/ث

مكتب الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

صاروخ يرتفع عمودياً عن سطح الارض إلى أعلى بمعدل ٢كم/ث وعندما وصل إلى ارتفاع ١٠كم عن الارض انحرف مساراً حركته بزاوية مقدارها ٣٠° مع الافقه (شمال شرقه) محافظاً على نفس السرعة السابقه، ما معدل تغير المسافه بين الصاروخ ونقطة انطلاقه عندما يكون الصاروخ على بعد $10\sqrt{3}$ كم من نقطه الانطلاق

الحل



نفرض ان
ف: بعد الصاروخ عن نقطة الانطلاق
س: بعد الصاروخ عن النقطة ب.

$\angle PBP' = 90 + 30 = 120°$

$\frac{ds}{dt} = 2$ كم/ث المطلوب $\frac{df}{dt}$

$f = 10\sqrt{3}$

حسب قانون جيب التمام

$f^2 = s^2 + 10^2 - 2 \times s \times 10 \times \cos 120°$

$= s^2 + 100 - 20s \times (-\frac{1}{2})$

$= s^2 + 100 + 10s$

العلاقه $f = \sqrt{s^2 + 10s + 100}$

$\frac{df}{dt} = \frac{2s \times \frac{ds}{dt} + 10 \times \frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2 + 10s + 100}}$

لكن $f = 10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3} = \sqrt{s^2 + 10s + 100}$

بالتربيع

$300 = s^2 + 10s + 100$

$s^2 + 10s - 200 = 0$

$(s + 20)(s - 10) = 0$

$s = -20$ تهمل $s = 10$

$\frac{df}{dt} = \frac{2 \times 10 + 2 \times 10 \times 2}{2\sqrt{10^2 + 10 \times 10 + 100}}$

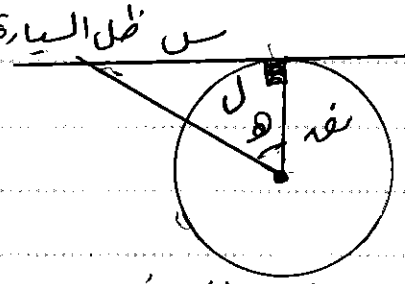
$= \frac{60}{2\sqrt{300}} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٨)

تسير سيارة بسرعة ٨م/ث على مضمار سباق دائري، ويوجد في مركزه مصدر ضوء، ويوجد سياج مستقيم مماس للدائرة، فإذا بدأت السيارة بالحركة من نقطة التماس فجد سرعة ظل السيارة على السياج عندما تقطع السيارة $\frac{1}{8}$ دورة؟



ل: طول قوس الدائرة التي تسير عليه السيارة

س: ظل السيارة على السياج

هـ: الزاوية المركزية المقابلة للقوس (ل)

نصف: نصف قطر الدائرة (ثابت)

$\frac{دل}{دن} = 8$ م/ث، $\frac{1}{8}$ دورة $= \frac{1}{8} \times 360 = 45°$

المطلوب $\frac{دس}{دن}$ | $هـ = 45°$

$ظا هـ = \frac{س}{نصف}$ (العلاقة)

$\frac{دهـ}{دن} \times ظا هـ = \frac{1}{نصف} \times \frac{دس}{دن}$

لأن نصف ثابت

نريد إيجاد $\frac{دهـ}{دن}$ ؟

$ل = نصف \times هـ$ طول القوس

$\frac{دل}{دن} = نصف \times \frac{دهـ}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{8}{نصف}$ ← بالتعويض

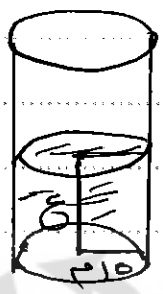
$\frac{8}{نصف} \times ظا^2 45° = \frac{1}{نصف} \times \frac{دس}{دن}$

$8 \times 2 = \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = 16$

مثال (٢٩)

خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠م يخرج منه الماء بمعدل ٢م٣/د فجد سرعة انخفاض الماء في الخزان؟



ع = حجم الماء

$\frac{دع}{دن} = -2$

المطلوب $\frac{دع}{دن}$

$ع = \pi نصف^2 ع$

$ع \pi 225 = ع^2 (15) \pi$

$\frac{دع}{دن} = \frac{دع}{دن} \times \pi 225$

$-2 = \frac{دع}{دن} \times \pi 225$

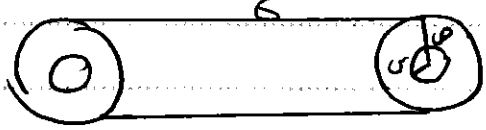
$\frac{دع}{دن} = \frac{-2}{\pi 225}$

مكتبة الإسلام
WWW.ISLAMSAM.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٠)

ماسورة من الحديد مجوفة طولها ثابت ونصفا قطريها الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم الحديد ثابت، فاذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/ن، اوجد معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٦ سم والخارجي ٨ سم.

الحل



ع، ع ثوابت

$\frac{د س}{د ن} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{د ص}{د ن} = ؟$ $\quad س = ٦$ $\quad ص = ٨$

حجم الحديد ح = الخارجي − الداخلي

$ح = \pi ص^٢ ع - \pi س^٢ ع$

$= \pi ع (ص^٢ - س^٢)$

$\frac{ح}{\pi ع} = ص^٢ - س^٢$

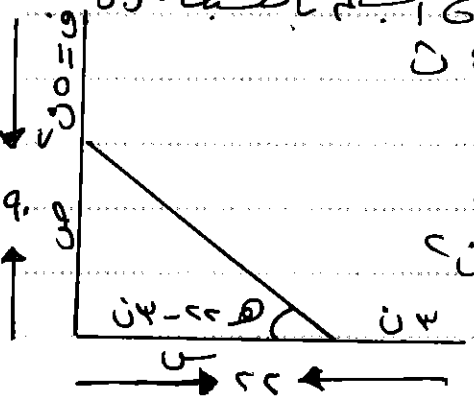
$صفر = ٢ ص \frac{د ص}{د ن} - ٢ س \frac{د س}{د ن}$

$= ٢ \times ٨ \times \frac{د ص}{د ن} - ٢ \times ٦ \times \frac{1}{2}$

$٦ = ١٦ \times \frac{د ص}{د ن} \leftarrow \frac{د ص}{د ن} = \frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$

مثال (٣١)

سقط جسم عند لحظة ما رأسياً من أعلى برج ارتفاعه ٩٠ م، بحيث كانت المسافة التي يقطعها ف = ٥ ن^٢ وفي نفس اللحظة يتحرك رجل يبعد ٢٢ م عن قاعدة البرج نحوه بسرعة منتظمة ٣ م/ن، اوجد معدل تغير زاوية ارتفاع الجسم بالنسبة للرجل عندما ن = ٤ ث



الحل

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

$ص = ٩٠ - ٥ ن^٢$

$س = ٢٢ - ٣ ن$

ظا هـ = $\frac{٩٠ - ٥ ن^٢}{٢٢ - ٣ ن}$

قا^٢ هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{(٢٢ - ٣ ن)(-١٠ ن) - (٩٠ - ٥ ن^٢)(-٣)}{(٢٢ - ٣ ن)^٢}$

لايجاد ظا هـ عندما ن = ٤

ظا هـ = $\frac{٩٠ - ٥(٤)^٢}{٢٢ - ٣ \times ٤} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

قا^٢ هـ = ١ + ظا^٢ هـ = ١ + ١ = ٢

بالتعويض ← يتبع الحل

مكتبة الأنيسام ANNESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$\frac{ده}{دس} \times ٢ = \frac{(٤٣-٢٢)\times ٧١٠-٤ (٤٣-٢٢)^{٢} - (٩٠-٤ب)}{(٤٣-٢٢)^{٢}}$

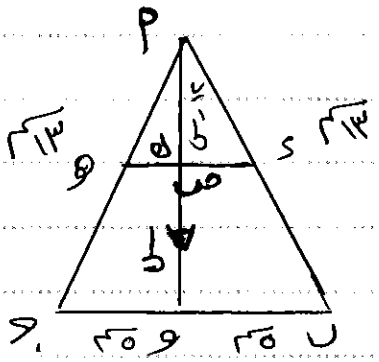
$\frac{ده}{دس} \times ٢ = \frac{٧١٠-٤٠-١٠\times ٣-}{١٠}$

$= \frac{٣٧٠-}{١٠}$

$\frac{ده}{دس} = -\frac{٣٧٠}{٢٠} = -\frac{٢٧}{٢}$

مثال (٣٤)

الشكل المجاور ∆ أ ب جـ مثلث فيه أب = أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠ سم والمستقيم ده يوازي ب جـ ، فإذا تحرك المستقيم ده رأسياً لأسفل موازياً لنفسه بسرعة $\frac{١}{٢}$ سم/ث فجد معدل تناقص مساحة المنطقة ب جـ ده عندما ده يمر بمنتصف أ ب ، أ جـ



ملاحظة: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها = نصف طول الضلع

ده = ٥ عندما يمر ده بمنتصف أ ب ، أ جـ

س : بعد ده عن ب جـ

ص : طول ده

م : مساحة المنطقة ب جـ ده

$\frac{دس}{دن} = -\frac{١}{٢}$ سم/ث

المطلوب $\left|\frac{دم}{دن}\right|_{ص=٥}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢}(ده + ب جـ) \times ل و$

$= \frac{١}{٢}(ص + ١٠) \times س$

ونجعل العلاقة بدلالة متغير واحد

المثلث أ ب و ← فيثاغورس

$(أب)^{٢} = (ب و)^{٢} + (أ و)^{٢}$

$(١٣)^{٢} = (٥)^{٢} + (أ و)^{٢}$

$١٦٩ = ٢٥ + (أ و)^{٢}$

$أ و = \sqrt{١٤٤} = ١٢$ سم

المثلثان أ ب جـ ، أ د هـ متشابهان

$\frac{أ و}{أ ل} = \frac{ب جـ}{ده}$ ⇐

$\frac{١٢-س}{ص} = \frac{١٠}{٥}$

$\frac{١٢-س}{ص} = \frac{٦}{٥}$ ⇐ $٦ ص = ٥(١٢-س)$

$ص = \frac{٦٠}{٦} - \frac{٥س}{٦}$ ⇐ بتفاضل

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow ص = ١٠ - \frac{٥}{٦}س$ بالتعويض في م

$م = \frac{١}{٢}(ص + ١٠) \times س$

$= \frac{١}{٢}(١٠ - \frac{٥}{٦}س + ١٠) \times س$

$م = ١٠س - \frac{٥}{١٢}س^{٢}$

$\frac{دم}{دن} = ١٠ \times \frac{دس}{دس} - \frac{٥}{١٢} \times ٢ \times س \times \frac{دس}{دن}$

عندما $ص = ٥ \Leftarrow ٥ = ١٠ - \frac{٥}{٦}س$

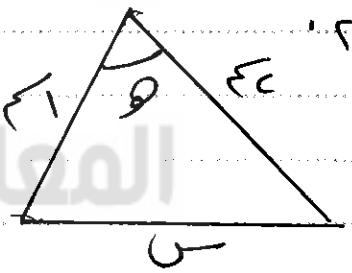
$\Leftarrow \frac{٥}{٦}س = ٥ \Leftarrow س = ٦$

$\frac{دم}{دن} = ١٠ \times ١ - \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٦} \times ٢ \times ٦ \times \frac{-١}{٢}$

$= -٥ + ٥ = ٠$ سم/ث

مثال ٢٣

مثلث فيه ضلعين اطوالهما ٤ سم، ١ سم يتغير طول الضلع الثالث بحيث ان معدل تزايد الزاوية بين الضلعين الباقيين $\frac{\pi}{٦}$ راديان/د، جد معدل تغير طول الضلع الثالث عندما يكون طوله $\sqrt{٣}$ سم.



الحل

س: طول الضلع الثالث

θ: الزاوية المحصورة بين الضلعين

$\frac{دθ}{دن} = \frac{\pi}{٦}$ د، المطلوب $\frac{دس}{دن}$ | $س = \sqrt{٣}$ سم

بتطبيق قانون جيب التمام

$س^{٢} = (١)^{٢} + (٤)^{٢} - ٢ \times ١ \times ٤ \times$ جتاθ

$س = \sqrt{٥ - ٤}$ جتاθ

$\frac{دس}{دن} = \frac{-٤ \times$ جاθ $\times \frac{دθ}{دن}}{٢\sqrt{٥ - ٤}$ جتاθ$}$

$= \frac{٤$ جاθ $\times \frac{دθ}{دن}}{\sqrt{٥ - ٤}$ جتاθ$}$

نستخدم الملاحظة لايجاد جاθ، جتاθ عندما $س = \sqrt{٣}$

$\Leftarrow \sqrt{٣} = \sqrt{٥ - ٤}$ جتاθ بالتربيع

$٣ = ٥ - ٤$ جتاθ $\Leftarrow$ جتاθ $= \frac{١}{٢}$

$θ = ٦٠°$

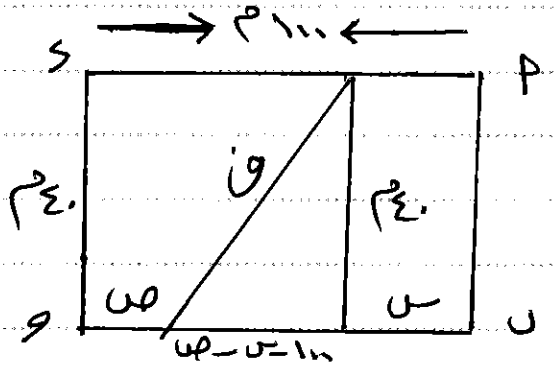
$\frac{دس}{دن} = \frac{٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٦}}{\sqrt{٥ - ٤ \times \frac{١}{٢}}}$

$= \frac{\sqrt{٣} \times \frac{\pi}{٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{٦}$ سم/د

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٤)

ملعب كرة قدم طولة ١٠٠ م وعرضه ٤٠ م بدأ لاعبان بالحركة معًا احدهما على خط التماس وفق النقطة م وباتجاه (س) بسرعة ٦ م/ث، وبدأ الآخر الحركة على خط التماس من النقطة ج باتجاه (ب) بسرعة ٥ م/ث (انظر الشكل) أوجد معدل التغير في المسافة بين اللاعبين بعد مرور ٣ ثوانٍ على حركتهما



الحل

$\frac{ds}{dt} = 6$ ، $\frac{df}{dt} = ?$ ، $t = 3$

حسب فيثاغورس ⇐

$$(100 - س - ص)^2 + (40)^2 = ف^2$$

$$س = 6 \times 3 = 18 \text{ م}$$

$$ص = 5 \times 3 = 15 \text{ م}$$

$$ف = \sqrt{(100 - س - ص)^2 + 40^2}$$

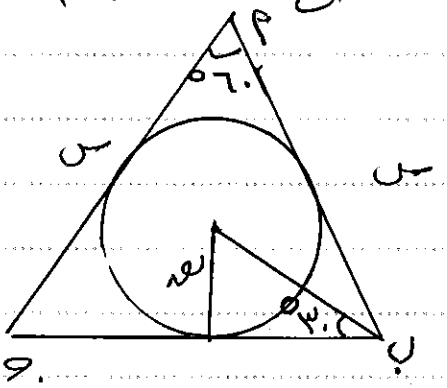
$$\frac{df}{dt} = \frac{(100 - س - ص)(-\frac{ds}{dt} - \frac{dص}{dt})}{\sqrt{(100 - س - ص)^2 + 1600}}$$

$$= \frac{(100 - 18 - 15)(-6 - 5)}{\sqrt{(100 - 18 - 15)^2 + 1600}}$$

$$= \frac{-67 \times 11}{\sqrt{6089}} = \frac{-737}{\sqrt{6089}}$$

مثال (٣٥)

تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٤ سم/د، رُسمت دائرة داخل المثلث تمس اضلاعه وأخذت تتمدد مع المثلث، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم



$\frac{ds}{dt} = 2$

$\frac{dم}{dt} = ?$ ، $س = 2$

م = مساحة المثلث - مساحة الدائرة

$$= \frac{1}{2} \times س \times س \sin 60 - \pi نق^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - \pi نق^2$$

ظا ٣٠ = $\frac{نق}{ب ء} = \frac{نق}{\frac{1}{2} س}$ ⇐ $نق = \frac{س}{2\sqrt{3}}$

$$\Leftarrow نق^2 = \frac{س^2}{12}$$

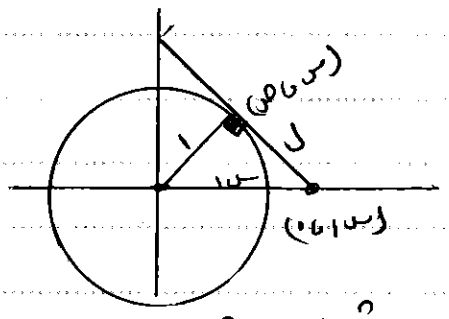
$$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - \pi \times \frac{س^2}{12}$$

$$\frac{dم}{dt} = (\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2س) - \pi \times 2نق \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dم}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} س - \frac{\pi}{6} س = \frac{6\sqrt{3} - \pi 4}{6} س$$

مثال (٣٦)

جسيم يتحرك في المستوى بحيث يبقى ملامساً للدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = 1$ في نقطة في الربع الأول، فإذا كان معدل ازدياد الاحداثي السيني لنقطة التماس المتحركة يساوي ٣ وحدات/ث جد معدل التغير في الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات عندما يكون الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع السينات وحدتين



الحل

Δ المثلث قائم الزاوية

$س^2 = ل^2 + 1 \Leftarrow ل^2 = س^2 - 1$

ل = بعد نقطة عن نقطة

$ل^2 = (ص - ٠)^2 + (س - س_1)^2$

$= ص^2 + (س - س_1)^2$

$= ص^2 + س^2 - 2س_1 س + س_1^2$

$= 1 - 2س_1 س + س_1^2$

$= 1 - 1 - 2س_1 س$

$-2س_1 س = -2$

$س_1 = \frac{-2}{-2س} = \frac{1}{س}$

نشتق

$\frac{د س_1}{د ن} = \frac{-1}{س^2} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما $س_1 = 2$ فإن $س = \frac{1}{2}$

$\frac{د س_1}{د ن} = -12$

حل آخر

ميل المماس = ميل المماس

$\frac{ص - ٠}{س - س_1} = -\frac{س}{ص}$ (المشتقة)

$\Leftarrow ص^2 = -س^2 + س_1 س$

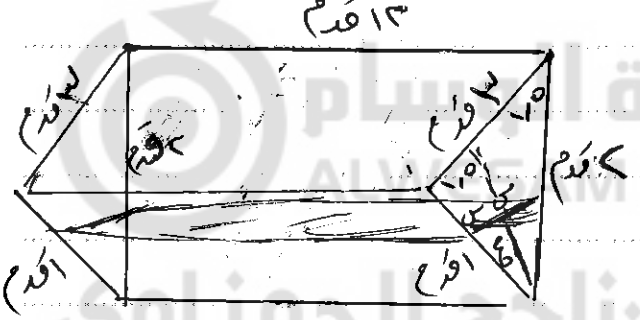
$\Leftarrow ص^2 + س^2 = س_1 س$

$\Leftarrow 1 = س_1 س$

$\Leftarrow س_1 = \frac{1}{س}$

مثال (٣٧)

في الشكل المجاور غسيل حوض ماء اذا كان الماء ينزل في الحوض بمعدل ٢ قدم^3/د اوجد سرعة ارتفاع سطح الماء في الحوض عندما يكون عمق الماء ١ قدم



← يتبع الحل

مكتبة الأسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

حجم الهرم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times$ س ص × ع × ١٢

$= ١٢$ س ص ع

من التشابه $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{١٫٥}{٣}$

$\Leftarrow ٣$ س $= ١٫٥$ ع $\Leftarrow$ س $= \frac{١٫٥}{٣}$ ع

$\Leftarrow$ س $= \frac{1}{2}$ ع

$\therefore$ ح $= ١٢ \times \frac{1}{2}$ ع $\times$ ع $\times$ ع $= ٦$ ع^٣

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٨$ ع^٢ $\times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٨ \times ٤$ ع^٣ $\times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

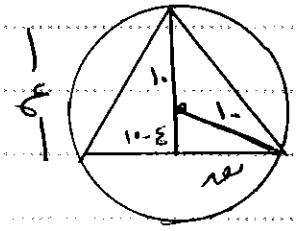
ح $= ٧٢$ ع^٣ $\times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ح}}{١٢} = \frac{1}{6}$

مثال (٣٨)

كرة نصف قطرها ثابت = ١٠ سم وضع داخلها مخروط قائم متغير ابعاده وارتفاعه ع بحيث ان رأسه ومحيط قاعدته يلامس جزء سطح الكرة اذا كان ارتفاع المخروط يزايد بمعدل $\frac{1}{3\pi}$ سم/د ، اوجد معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه ٨ سم

الحل



ح $= \frac{1}{3} \pi$ نق^٢ ع

لكن (ع - ١٠)^٢ + نق^٢ = (١٠)^٢

ع^٢ - ٢٠ ع + ١٠٠ + نق^٢ = ١٠٠

نق^٢ = ٢٠ ع - ع^٢

$\Leftarrow$ ح $= \frac{1}{3} \pi$ (٢٠ ع - ع^٢) × ع

$= \frac{1}{3} \pi$ (٢٠ ع^٢ - ع^٣)

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{1}{3} \pi$ (٤٠ ع - ٣ ع^٢) × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$= \frac{\pi}{3}$ (٤٠ × ٨ - ٣ × ٨^٢) × $\frac{1}{3\pi}$

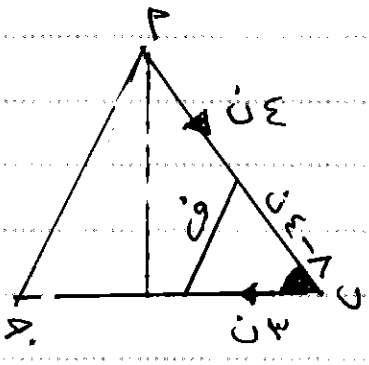
$= \frac{\pi}{3} \times$ ١٦٠ × $\frac{1}{2\pi} = \frac{٤\pi}{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٩)

ب ا ج مثلث متساوي الساقين فيه ب ا = ب ج = ٨ سم ، ق(∠ ا ب ج) = ٦٠° تحركت نقطة ا باتجاه ب بسرعة ٤ سم/ث وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من ب باتجاه ج بسرعة ٣ سم/ث اوجد معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة.

الحل



حا٦٠ = جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$ف^2 = (8-4ن)^2 + (3ن)^2 - 2(8-4ن)(3ن) \times$ جتا٣٠

$ف^2 = 64 - 64ن + 16ن^2 + 9ن^2 - 2 \times 24ن \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

لاحظ ان جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$ف^2 = 64 - 64ن + 16ن^2 + 9ن^2 - 36ن + 18ن^2$

$ف^2 = 64 - 100ن + 43ن^2$

$ف = \sqrt{64 - 100ن + 43ن^2}$

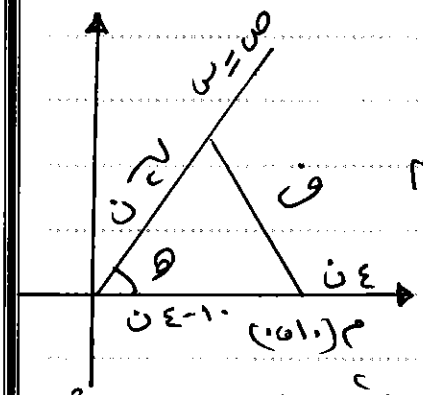
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{-100 + 86ن}{2\sqrt{64 - 100ن + 43ن^2}}$

عند ن = ١ ثانية $\frac{د ف}{د ن} = \frac{-100 + 86}{2\sqrt{64 - 100 + 43}} = \frac{-14}{\sqrt{7}}$

مثال (٤٠)

اذا كانت م(١٠ ، ٠) بدأت نقطة الحركة من م على محور السينات بسرعة ٤ وحدات في الثانية باتجاه نقطة الاصل وفي نفس الوقت تحركت نقطة أخرى من نقطة الاصل على المنحنى ص = س، في الربع الأول بسرعة ٧٢ وحدة في الثانية اوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين

الحل



زاوية ميل المستقيم = ٤٥° ∴ ن

∴ ظا θ = ص = ١

$ف^2 = (10-4ن)^2 + (4\sqrt{2}ن)^2 - 2(10-4ن)(4\sqrt{2}ن)$ ص ا ص ع

$ف^2 = (10-4ن)^2 + (4\sqrt{2}ن)^2 - 2(10-4ن)(4\sqrt{2}ن) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ ح ا ح

$ف^2 = 100 - 80ن + 16ن^2 + 32ن^2 - 80ن + 16ن^2$

$ف^2 = 100 - 160ن + 64ن^2$

$ف = \sqrt{100 - 160ن + 64ن^2}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{-160 + 128ن}{2\sqrt{100 - 160ن + 64ن^2}}$

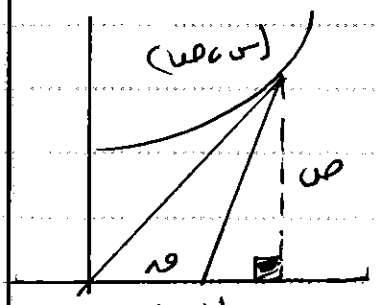
$= \frac{-160 + 128}{2\sqrt{100 - 160 + 64}}$

$= \frac{-32}{2 \times 8} = -2$ وحدة في الثانية

مكتبة الوسام AWSAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال (٤١)

يتحرك نقطة على منحنى $ص = \sqrt{س^2 + 9}$ بحيث ان الاحداثي السيني لها يزداد بمعدل ٥ وحدات في الثانية ما معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه (٠،٠)، (٠،١) والنقطة المتحركة عندما يكون الاحداثي السيني للنقطة المتحركة ٤ وحدات.



الحل

القاعدة $قـ$

$= ١ - ٠ = ١$

$م = \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times ١ \times ص = \frac{1}{2} ص$

بما ان $ص = \sqrt{س^2 + 9}$

$م = \frac{1}{2} (\sqrt{س^2 + 9})$

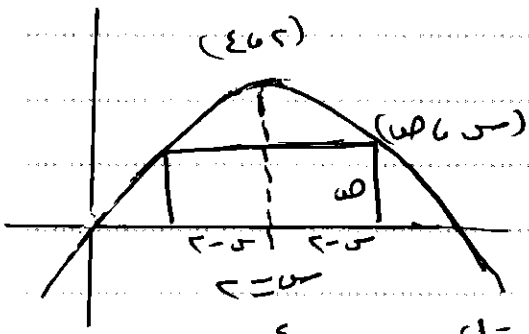
$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2} \times \frac{2س}{2\sqrt{س^2 + 9}} \times \frac{دس}{دن}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{16 + 9}} \times ٥$

$= \frac{10}{5} = ٢$

مثال (٤٢)

ارسم مستطيل تحت منحنى $ص = ٤س - س^2$ بحيث يقع راسان من رؤوسه على منحنى ص ويقع راساه الآخران على محور السينات، اذا كان ضلعه الذي على محور السينات يتناقص بمعدل ٢سم/ن ما معدل تغير مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه الموجود على محور السينات يساوي ٤سم



نجد ان $س = \frac{ل}{ع} = \frac{٤}{٢} = ٢$

طول الضلع الذي على محور السينات

$ل = ٢(س - ٢) = ٢س - ٤$

$\frac{دل}{دن} = ٢ \times \frac{دس}{دن} \leftarrow -١ = ٢ \times \frac{دس}{دن}$

$\leftarrow \frac{دس}{دن} = -\frac{1}{2}$ وعندما $ل = ٢$ فان $٢ = ٢س - ٤ \leftarrow س = ٣$

$م = ٢(س - ٢)(ص) = ٢(س - ٢)(٤س - س^2)$

$م = ٨س^2 - ٢س^3 - ١٦س + ٤س^2$

$= ١٢س^2 - ٢س^3 - ١٦س$

$\frac{دم}{دن} = (٢٤ - ٦س - ١٦) \times \frac{دس}{دن}$

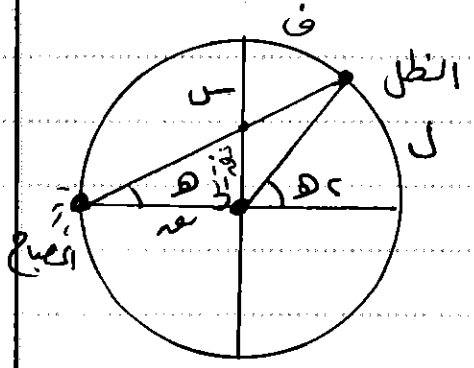
$= (٢٤ \times ٣ - ٦ \times ٣ - ١٦) \times -\frac{1}{2}$

$= ٢ \times -\frac{1}{2} = -١$

مكتبة الإسكندرية ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٤٣)

مصباح ساقه دائري يوجد على طرف قطره صود ، انظله حصان من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول مقتربًا من المركز بسرعة ٤ كم/د ، بسرعة تغير ظل الحصان على المصباح عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز



س : المسافة التي قطعها الحصان باتجاه المركز

ف : الظل على المصباح

$\frac{د س}{د ن} = ٤$ كم/ن

المطلوب ايجاد $\frac{د ف}{د ن}$ عندما $س = \frac{١}{٢}$ نق

$\frac{١}{٤}$ المحيط $= ل + ف$

$= ف + ٢$ نق هـ

صفر $= \frac{د ف}{د ن} + ٢$ نق $\times \frac{د هـ}{د ن}$ ①

لكن ظاهـ $= \frac{س}{نق}$

ظاهـ $= ١ - \frac{١}{نق} س$

بالاشتقاق

قا^{٢}هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما $س = \frac{١}{٢}$ نق

$\leftarrow$ ظاهـ $= ١ - \frac{١}{نق} \times \frac{نق}{٢} = \frac{١}{٢}$

ظا^{٢}هـ $+ ١ =$ قا^{٢}هـ

$\frac{١}{٤} + ١ =$ قا^{٢}هـ $\leftarrow$ قا^{٢}هـ $= \frac{٥}{٤}$

قا^{٢}هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{٥}{٤} \times \frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times ٤$

$\frac{د هـ}{د ن} = -\frac{٤}{نق} \times \frac{٤}{٥} = -\frac{١٦}{٥ نق}$

نعوض في ①

صفر $= \frac{د ف}{د ن} + ٢$ نق $\times \frac{د هـ}{د ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = -٢$ نق $\times \frac{د هـ}{د ن}$

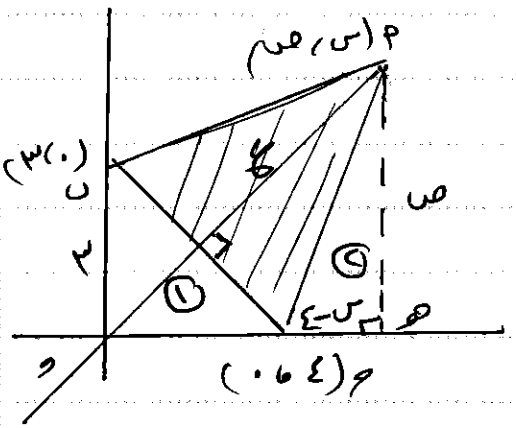
$= -٢$ نق $\times -\frac{١٦}{٥ نق}$

$= \frac{٣٢}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٤)

تتحرك نقطة على المستقيم ص = س من نقطة الاصل في الربع الأول بسرعة ٦ سم/ث صد معدل تغير مساحة المثلث المكون من النقطة المتحركة م(س، ص) و النقطتين الثابتتين ل (٠، ٣) ، ح (٤، ٠) بعد ٣ ثوان من بدء الحركة:



الحل

مساحة المثلث = مساحة شبه المنحرف م ل د ح
- مساحة المثلثين ① ، ③

$$م = \frac{1}{2}(ص + 3) \times س - (\frac{1}{2} \times 4 \times ص) - (\frac{1}{2} \times (4-س) \times ص)$$

$$= \frac{1}{2}(ص + 3) \times 2س - (6 + \frac{1}{2}(س - 4) \times ص)$$

$$= \frac{1}{2}(س + 3) \times س - (6 + \frac{1}{2}(س - 4) \times س)$$

$$= \frac{1}{2}(3س + س^2) - (6 + \frac{1}{2}(س^2 - 4س))$$

$$= \frac{3}{2}س + \frac{1}{2}س^2 - 6 - \frac{1}{2}س^2 + 2س$$

$$م = \frac{7}{2}س - 6$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{7}{2} \frac{دس}{دن}$$

نطبقه حيثما كان س م ، و

$$ع^2 = س^2 + ص^2 = س^2 + س^2 = 2س^2$$

$$ع = \sqrt{2}\, س \Leftarrow$$

$$\frac{دع}{دن} = \sqrt{2} \times \frac{دس}{دن}$$

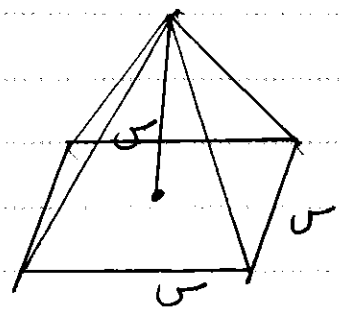
$$6 = \sqrt{2} \times \frac{دس}{دن} \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{7}{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{21}{\sqrt{2}}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٥)

لتكن هرم رباعي منتظم معدل ارتفاعه يساوي طول ضلع قاعدته يزداد حجمه بمعدل ١ سم^3/ث اذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوي ٠,١ سم/ث فاوجد طول ضلع قاعدته



حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times س^2 \times س$

$ح = \frac{1}{3} س^3$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{1}{3} \times 3 س^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$1 = س^2 \times 0,1$

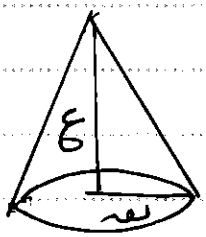
$س^2 = 10 \Leftarrow س = \sqrt{10}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

① تدريب ④ ص ١٧٠

سباق الرمل مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم على الارض معدل ٠٫٤٣٢ م٣/ن فاذا كان الرمل الساقط يشكل كومة ارتفاعها دائماً يساوي ربع طول قطرها (قطر قاعدتها) ، فجد سرعة ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها ٢ م فقط ؟



الحل

نق : نصف قطر الرمل

ع : ارتفاع الرمل

ح : حجم الرمل

$\frac{دح}{دن} = ٠٫٤٣٢$ م٣/ن اوجد $\frac{دع}{دن}$ | ع = ٢ م

$ع = \frac{١}{٤} \times ٢ \Leftarrow نق = \frac{١}{٢} ع \Leftarrow$

$\Leftarrow نق = ٢ ع$

ح الرمل $= \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع = \frac{\pi}{٣} ع (٢ع)^٢$

$= \frac{\pi}{٣} ٤ ع^٣$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{٣} \times ٣ \times ٤ \times ع^٢ \times \frac{دع}{دن}$

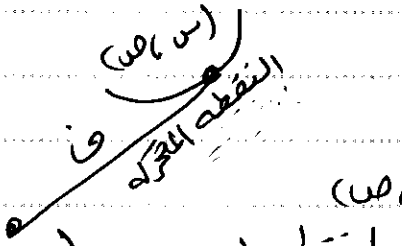
$٠٫٤٣٢ = \pi ٤ \times (١٫٢)^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{٤٣٢}{\pi ٥٫٧٦}$

② تدريب ③ ص ١٧١

تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ص = $س^٢ + ٢$ ، وفي لحظة ما كان معدل تغير احداثيها السيني ٠٫٢٥ سم/ن وكان معدل التغير في احداثيها الصادي ٠٫٤٣ سم/ن ، جد بعد النقطة المتحركة على المنحنى عندئذ عن النقطة (٠، ٢)

الحل



النقطة (س، ص)

ف : البعد بين النقطة (س، ص) والنقطة (٠، ٢)

$\frac{دس}{دن} = ٠٫٢٥$ ، $\frac{دص}{دن} = ٠٫٤٣$

المطلوب ف

$ف = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٢)^٢}$

نجد س، ص من العلاقة $ص = س^٢ + ٢$

$\frac{دص}{دن} = ٢س \times \frac{دس}{دن}$

$٠٫٤٣ = ٢س \times ٠٫٢٥ \Leftarrow ٢س = \frac{٠٫٤٣}{٠٫٢٥}$

$\Leftarrow س = ٠٫٨٦$

$ص = س^٢ + ٢ = (٠٫٨٦)^٢ + ٢$

$= ٢٫٧٤$

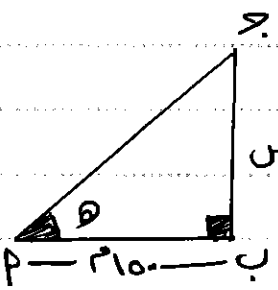
$ف = \sqrt{(٠٫٨٦ - ٠)^٢ + (٢٫٧٤ - ٢)^٢}$

$= \sqrt{١٫٢٩٧}$

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٣) تدريب (٤) ص ١٧٢

يرتفع بالون راسياً إلى اعلى بمعدل ثابت قدرة ٢٤م/د ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض يبعد ١٥٠م من موقع البالون على الارض فجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد (هـ) للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الارض.



الحل

س: بعد البالون عن الارض

$\frac{د س}{د ن} = ٢٤$م/د

المطلوب $\frac{د هـ}{د ن}$ | $س = ١٥٠$م

$ظا هـ = \frac{س}{١٥٠}$ ← $\frac{د هـ}{د ن}$ فأه $= \frac{١}{١٥٠} \frac{د س}{د ن}$

نريد ايجاد فأه نستخدم اللحظة

عندما $س = ١٥٠$ ← $ظا هـ = \frac{١٥٠}{١٥٠} = ١$

$هـ = ٤٥°$ ← $جتا هـ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

← فأه $= \sqrt{٢}$ فأه $= ٢$

$\frac{د هـ}{د ن} = ٢ \times \frac{١}{١٥٠} \times ٢٤$

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{٢٤}{١٥٠} = \frac{٧}{٥٠}$ راديان/د

مكتبة الوسام ALWESAM
التعليم: ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل الكتاب

ص ١٧٤

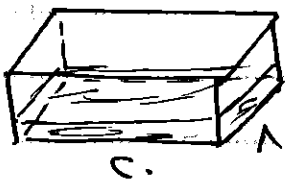
السؤال الأول

الحل في الدوسيه ص ٨٥
مثال ①

السؤال الثاني

حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بُعداً قاعدته ٢٠م، ٨م وعمقه ٢م، اذا ضخ الماء في الحوض بمعدل ٥م٣/د فجد سرعة ارتفاع الماء فيه

الحل



طول الماء = طول البركة
= ٢٠م ثابت
عرض الماء = عرض البركة = ٨م (ثابت)
ع : عمق الماء (متغير)
$\frac{د ح}{د ن}$ = ٥م٣/د المطلوب $\frac{د ع}{د ن}$

ح الماء = الطول × العرض × الارتفاع
= ٢٠ × ٨ × ع = ١٦٠ ع

$\frac{د ح}{د ن} = ١٦٠ \times \frac{د ع}{د ن}$

$٥ = ١٦٠ \times \frac{د ع}{د ن} \leftarrow \frac{د ع}{د ن} = \frac{٥}{١٦٠} = \frac{١}{٣٢}$

السؤال الثالث

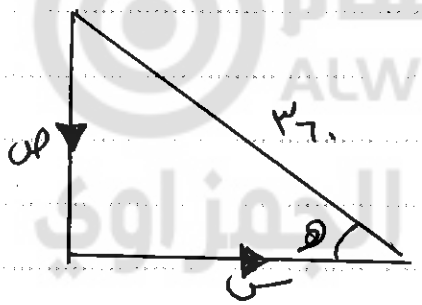
سلّم طولة ٣٦٠سم يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على الارض، اذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩٠ سم/ث وفي لحظة ما كان الطرف السفلي للسلّم على بعد ١٨٠سم من الحائط اوجد عند هذه اللحظة

ⓐ سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلّم

ⓑ معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السلّم والارض والحائط

ⓒ سرعة تغير الزاوية بين السلّم والارض

الحل



مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الحل

(أ) $س^2 + ص^2 = (٣٦٠)^2$

$$س ٢ س \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \frac{د ص}{د ن} = ٠$$

عند $ص \leftarrow (١٨٠)^2 + ص^2 = (٣٦٠)^2$

$ص^2 = ١٢٩٦٠٠ - ٤٠٠٠٠ = ٩٧٢٠٠$

$ص = \sqrt{٩٧٢٠٠} = ٣١٨٠ \sqrt{٣}$

$$٩٠ \times ١٨٠ \times ٢ + ٣١٨٠ \sqrt{٣} \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$$

$$٩٠ \times ١٨٠ \times ٢ - = ٣١٨٠ \sqrt{٣} \times \frac{د ص}{د ن}$$

$$\frac{د ص}{د ن} = \frac{-٩٠}{٣١٨٠ \sqrt{٣}}$$

(ب) م = $\frac{١}{٢}$ × س × ص حاصة المثلث

$$\frac{د م}{د ن} = \frac{١}{٢}(س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن})$$

$$= \frac{١}{٢}(١٨٠ \times \frac{-٩٠}{٣١٨٠ \sqrt{٣}} + ٩٠ \times ٣١٨٠ \sqrt{٣})$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١٨٠ \times ٩٠ \times \frac{٢}{٣١٨٠ \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{٩٠ \times ١٨٠}{٣١٨٠ \sqrt{٣}}$$

(ج) جتاهـ = $\frac{س}{٣٦٠}$

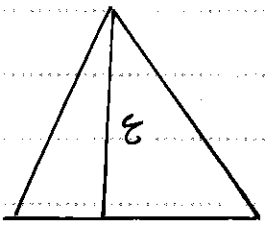
$$-جاهـ \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٣٦٠} \times \frac{د س}{د ن}$$

$$-\frac{٣١٨٠ \sqrt{٣}}{٣٦٠} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٣٦٠} \times ٩٠$$

$$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{-٩٠}{٣١٨٠ \sqrt{٣}} = \frac{-١}{٣٦ \sqrt{٣}}$$

السؤال الرابع

صفيحة معدنية مثلثة الشكل ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها وتتمدد بالحرارة فتزداد مساحتها بمعدل ٠٫٠٥ سم^2/ث، أجد معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما يصبح طولها ١٠ سم.



الحل

ع = $\frac{١}{٢}$ س

$$\frac{د م}{د ن} = ٠٫٠٥$$

س = ١٠

م = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times س \times ع$

$= \frac{١}{٢} \times س \times \frac{١}{٢} س = \frac{١}{٤} س^2$

$$\frac{د م}{د ن} = \frac{١}{٤} \times ٢ س \times \frac{د س}{د ن}$$

$$٠٫٠٥ = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times \frac{د س}{د ن}$$

$$٠٫٠٥ = ٥ \frac{د س}{د ن}$$

$$\frac{د س}{د ن} = \frac{٠٫٠٥}{٥} = \frac{٥}{٥٠٠} = \frac{١}{١٠٠}$$

= ٠٫٠١

مكتبة الوسام ACTESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

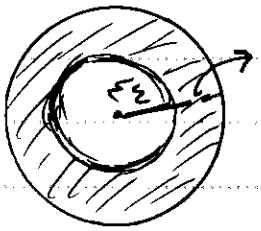
السؤال الخامس

كرة حديدية قطرها ٨سم مغطاة بطبقة من الجليد، فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل ١٠سم٣/د فجد

(أ) سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢سم

(ب) سرعة تناقص مساحة السطح الخارجي للجليد عند تلك اللحظة

الحل



نصف = ٤

$\frac{ح ع}{ح ن} = -١٠$

عندما س = ٢

(أ) حجم الجليد = حجم الكرة الجليدية − حجم كرة الحديد

$ح = \frac{٤}{٣}\pi (٤+س)^{٣} - \frac{٤}{٣}\pi (٤)^{٣}$

$\frac{ح ع}{ح ن} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ (٤+س)^{٢} \times \frac{ح س}{ح ن}$ — بفرض

$-١٠ = ٤\pi (٤+٢)^{٢} \times \frac{ح س}{ح ن}$

$\frac{ح س}{ح ن} = \frac{-١٠}{١٤٤\pi}$

(ب) م: مساحة سطح الكرة

مساحة سطح الجليد = م

$م = ٤\pi (٤+س)^{٢}$

$\frac{ح م}{ح ن} = ٨\pi (٤+س) \times \frac{ح س}{ح ن}$

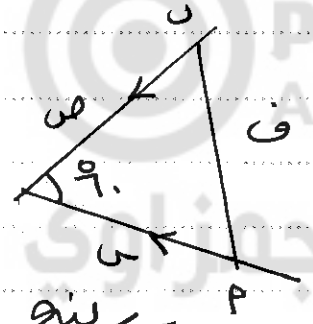
$= ٨\pi (٤+٢) \times \frac{-١٠}{١٤٤\pi}$

$= \frac{-١٠}{٣}$

السؤال السادس (٣٥ علامة) مراجعة

خطان حديديان يميل احدهما على الآخر بزاوية قياسها ٦٠°، ويلتقيان في النقطة (م) يسير القطار (أ) على احدهما بسرعة ٨٠كم/س مقتربًا من النقطة (م)، ويسير القطار (ب) على الخط الآخر بسرعة ٥٠كم/س مقتربًا من (م) عند الساعة ٩ صباحًا اذا كان القطاران أ، ب على بعد ١٠كم، ١٨٠كم على الترتيب من النقطة م، فجد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحًا

الحل



$\frac{ح س}{ح ن} = -٨٠$

$\frac{ح ص}{ح ن} = -٥٠$

المطلوب $\frac{ح ف}{ح ن}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص جتا ٦٠

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} − س ص

ف = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}-\text{س ص}}$

عندما ن = ٢

س = ١٠ ق − ٨٠ × ٢ = ٥٠

ص = ١٨٠ − ٥٠ × ٢ = ٨٠

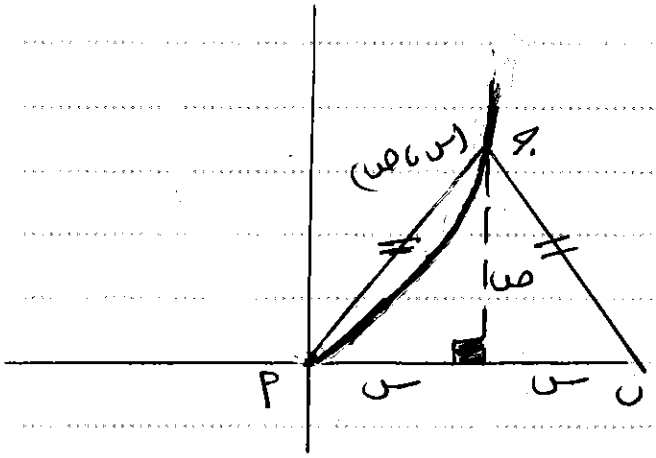
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - \left(\text{س}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right) + \text{ص}\left(\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right)\right)}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}-\text{س ص}}}$$

$$\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن}=٢} = \frac{٢\times٥٠\times٨٠ + ٨٠\times٥٠ - ٢\times(٥٠\times٨٠ + ٨٠\times٥٠)}{٢\sqrt{٥٠^{٢}+٨٠^{٢}-٥٠\times٨٠}}$$

$$= -\frac{٣٥٥}{٧}$$

السؤال السابع

بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معًا من نقطة الاصل (م) بحيث تتحرك النقطة (ب) على محور السينات في الجهة الموجبة بسرعة ٤ وحدات/ث ، وتتحرك النقطة جـ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} بحيث يبقى داعًا طول م جـ = ل جـ ، جد معدل التغير في مساحة المثلث م ل جـ بعد ثانيتين من بدء الحركة



$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$$

م : مساحة المثلث المطلوب $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن}=٢}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ × س × ص

م = س ص بما أن ص = س^{٢}

م = س × س^{٢} = س^{٣}

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣\text{س}^{٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

عندما ن = ٢ بعد ثانيتين

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤ \Leftarrow \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢ \times ٢$

س = ٢ × ٢ = ٤

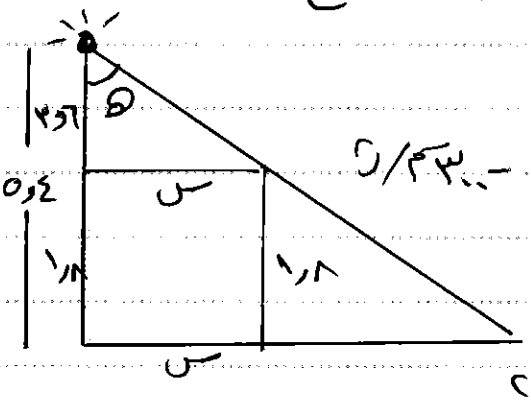
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣(٤)^{٢} \times ٢ = ٩٦ \text{ م}^{٢}/\text{ث}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
التعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

رجل طوله ١٨٠ سم، يقف امام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الارض مقدار ٥٤٠ سم، اذا أخذ الرجل في الاقتراب من المصباح بمعدل ٣٠٠ سم/ث، فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح وشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠ سم من قاعدة المصباح.

الحل



$\frac{ds}{dt} = -٣٠٠$ سم/ث

$\frac{d\theta}{dt} = ؟؟$

$س = ١٨٠$ سم

$\tan\theta = \frac{س}{٣٦٠}$ سم $\Leftarrow$ $\theta = \tan^{-1}\frac{س}{٣٦٠}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{1}{٣٦٠} \times -٣٠٠$

عندما $س = ١٨٠$ فان $\tan\theta = \frac{١٨٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٢}$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

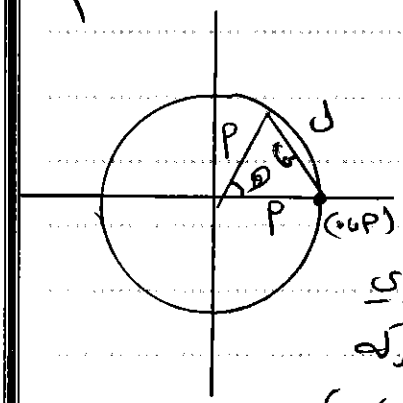
$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ بالتعويض

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{٣٦٠} \times -٣٠٠ = -\frac{2}{3}$

السؤال التاسع

ابتدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الاصل من النقطة $(P, ٠)$ بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه في اثناء حركتها بمعدل ٨ سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة $(P, ٠)$ عندما تقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$

الحل



نفرض θ: الزاوية المركزية بالتقدير الدائري

ف: بعد النقطة المتحركة عن النقطة $(P, ٠)$

ل: طول قوس الدائرة

$\frac{dل}{dt} = ٨$ سم/ث و المطلوب $\frac{df}{dt}$ | $\theta = \frac{\pi}{3}$

حسب قانون جيب التمام

$ف^2 = P^2 + P^2 - 2 \times P \times P \times$ جتا θ

$ف = \sqrt{2P^2 - 2P^2}$ جتا θ

$\frac{df}{dt} = \frac{-2P^2 \times -\text{جا}\theta \times \frac{d\theta}{dt}}{2\sqrt{2P^2 - 2P^2}\text{ جتا}\theta}$

← يتبع الحل

ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

لكن ل = نق هـ = ٢ هـ

$\frac{دل}{دن} = ٢ \times \frac{دهـ}{دن} \leftarrow \frac{دهـ}{دن} \times ٢ = ٨$

$\leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{٨}{٢}$ راديان/ث

$\leftarrow \frac{دف}{دن} = \frac{\frac{٣\sqrt{}}{٤} \times \frac{٨}{٢} \times ٢^{٢}}{\frac{١}{٤} \times ٢\sqrt{٢^{٢} - ٢^{٢}}}$

$= \frac{٤ \times ٣\sqrt{} \times ٢}{٣\sqrt{}} = ٣٢\sqrt{٤}$

م = مساحة المربع − مساحة الدائرة

$= س^{٢} - \pi$ نق^{٢}

لكن نق $= \frac{١}{٢}$ س

$\Rightarrow$ م $= س^{٢} - \pi (\frac{١}{٢} س)^{٢}$

$= س^{٢} - \frac{\pi}{٤} س^{٢}$

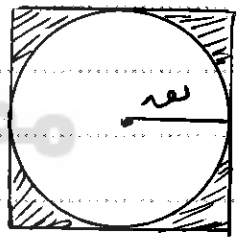
$\frac{دم}{دن} = (٢ \times \frac{\pi}{٤} - ٢) \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} |_{س = ٢٠} = ٤ \times (٢٠ \times \frac{\pi}{٤} - ٢٠ \times ٢)$

$= ١٦٠ - ٤٠ \pi$

السؤال الخامس

مربع تتمدد اضلاعه بمعدل ٤سم/د رسمت دائرة داخل المربع، واخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠سم.



الحل

س: طول ضلع المربع

$\frac{دس}{دن} = ٤$ سم/د

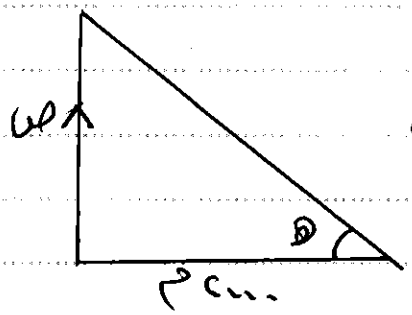
م: مساحة المنطقة المحصورة (المظللة)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

اختبار ذاتي ص ١١٥ ع

السؤال الثالث

انطلق صاروخ رأسيًا الى الأعلى حيث تم رصده بواسطة رادار على سطح الارض يبعد ٢ كم عن قاعدة اطلاق الصاروخ ف فاذا كانت سرعة الصاروخ ٥٤٠ م/ث فجد معدل التغير في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ظاهرًا على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٢٠٠ متر عن سطح الارض



الحل

$\frac{د ص}{د ن} = ٥٤٠$

ص = ١٢٠٠

$ظا هـ = \frac{ص}{٢٠٠٠}$

$ظا^٢ هـ \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٢٠٠٠} \times \frac{د ص}{د ن}$

$ظا هـ = \frac{ص}{٢٠٠٠} = \frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{٣}{٥}$

$قا^٢ هـ = ١ + ظا^٢ هـ = ١ + \frac{٩}{٢٥} = \frac{٣٤}{٢٥}$

بالتعويض

$\frac{٣٤}{٢٥} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٢٠٠٠} \times ٥٤٠$

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{٥٤٠}{٢٠٠٠} \times \frac{٢٥}{٣٤} = \frac{٢٧}{١٣٦}$

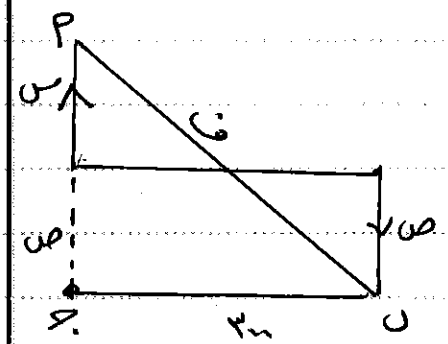
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

انطلق شخص من النقطة (م) متجهًا شمالاً - الباً داخل هوائية في سيارة ٦ م/ث ، وبعد ٣٠ ثانية ومن النقطة (ن) الواقعة على بعد (٣٠٠) متر شرق النقطة م انطلق شخص ثان متجهًا جنوبًا - الباً داخل هوائية في سيارة ٥ م/ث

جد معدل تغير المسافة بين الدراجتين بعد (٢٠) ثانية من انطلاق الدراجة الثانية



الحل

$\frac{د ص}{د ن} = ٥$

$\frac{د س}{د ن} = ٦$

س: المسافة التي يقطعها م

= السرعة × الزمن = ٦ × ٥٠ = ٣٠٠

ص: المسافة التي يقطعها ن

= ٥ × ٢٠ = ١٠٠

في المثلث م ن جـ

$ف^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (س + ص)^{٢}$

$ف = \sqrt{(٣٠٠)^{٢} + (س+ص)^{٢}}$

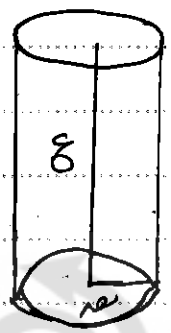
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ (س+ص) \times (\frac{د س}{د ن} + \frac{د ص}{د ن})}{٢ \sqrt{٣٠٠^{٢} + (س+ص)^{٢}}}$

$= \frac{(٣٠٠ + ١٠٠)(٦ + ٥)}{\sqrt{(٣٠٠)^{٢} + (٣٠٠+١٠٠)^{٢}}}$

$= \frac{٤٠٠ \times ١١}{\sqrt{٩٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠٠}} = \frac{٤٤}{٥}$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

أسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها داخلاً فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠,١ سم/ث فجد معدل التغير في حجم هذه الأسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم.



الحل

$ع = \frac{٧}{٦} \times ٢ \times$ نصف

$= \frac{٧}{٣}$ نصف

$\frac{د ع}{د ن} = ٠,١$

$ح = \frac{٣}{٧} ع$ نصف$^{٢} = \frac{٩}{٤٩} ع^{٣}$

وعند نصف = ٦ فإن $ع = ٦ \times \frac{٧}{٣} = ١٤$

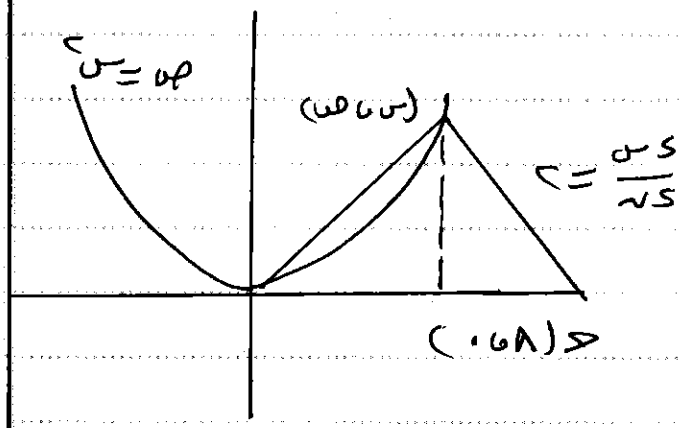
$ح = \pi$ نصف$^{٢} ع = \pi \times \frac{٩}{٤٩} ع^{٢} \times ع$

$= \frac{٩ \pi}{٤٩} ع^{٢}$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٩ \pi}{٤٩} \times ٣ ع^{٢} \times \frac{د ع}{د ن} = \frac{٩ \pi}{٤٩} \times ٣ \times ١٤^{٢} \times ٠,١ = ١٨,٠ \pi$

③ وزارة (٢٠١٠) شتوية

تتحرك نقطة مادية ب على منحنى الاقتران ص = س^{٢} في الربع الأول بادئة من نقطة الاصل P ، فاذا كان الاحداثي السيني للنقطة ب يتزايد بمعدل ٢ وحدة/ث ، وكانت جـ نقطة ثابتة احداثياتها (٠٫٨ ، ٠) ، جد معدل تغير مساحة المثلث P ب جـ بعد ٢ ثانية من بدء حركة النقطة ب



$م = \frac{١}{٢} \times ٠٫٨ \times ص = ٠٫٤ ص$

$= ٠٫٤ \times س^{٢} = ٠٫٤ س^{٢}$

$\frac{دم}{دن} = ٠٫٨ س \times \frac{دس}{دن}$

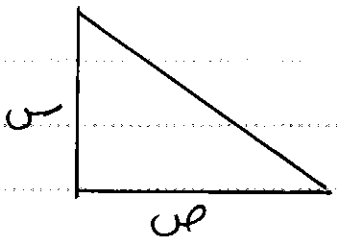
س بعد ٢ ثانية = ٢ × ٢ = ٤

$\frac{دم}{دن} = ٠٫٨ \times ٤ \times ٢ = ٦٫٤$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ١٢ سم ، ١٦ سم فاذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل ٢ سم/ث ، وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل ١ سم/ث بحيث ان المثلث يبقى محافظا على شكله ، جد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ثانية من تلك اللحظة .

الحل



$\frac{دس}{دن} = ٢$

$\frac{دص}{دن} = -١$

$م = \frac{١}{٢} س ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} (س \times \frac{دص}{دس} + ص \times \frac{دس}{دن})$

بعد ٢ ثانية

$س = ١٢ + ٢ \times ٢ = ١٦$

$ص = ١٦ - ٢ \times ١ = ١٤$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} (١٦ \times -١ + ١٤ \times ٢)$

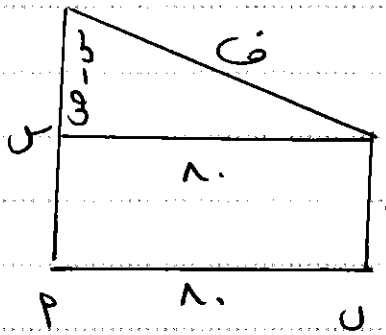
$= \frac{١}{٢} (-١٦ + ٢٨)$

$= \frac{١٢}{٢} = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

◎ وزارة (٢٠١٠) صيفية

جاريان أ، ب المسافة الأفقية بينهما ٨٠م، بدأ الجارب (أ) بالحركة بسرعة ٣٠م/ث، وبعد ثانيتين بدأ الجارب (ب) بالحركة في خط مواز للجارب (أ) وبنفس الاتجاه بسرعة ١٠م/ث. جد معدل التغير في المسافة بين الجاريين بعد ٤ ثواني من انطلاق الجارب (أ)



الحل

س بعد ٤ ثواني = ٣٠ × ٤ = ١٢٠م

ص بعد ٤ ثواني = ١٠ × ٢ = ٤٠م

$ف^2 = (س - ص)^2 + 80^2$

$ف = \sqrt{(س - ص)^2 + (80)^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{(س - ص)\left(\frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن}\right)}{\sqrt{(80)^2 + (40 - 80)^2}}$

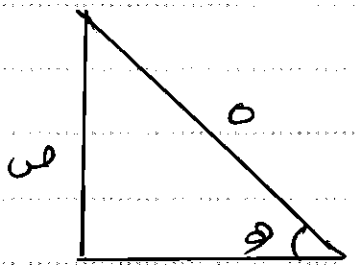
$\frac{دف}{دن} = \frac{(80 - 40)(30 - 10)}{\sqrt{80^2 + 60^2}}$

$= \frac{60 \times 10}{100} = 6$

وزارة (٢٠١١) شتوية

سلم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، وطرفه السفلي على أرض افقية، إذا انزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣م/د، فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م من الحائط

الحل



عندما س = ٣

تكون

$س^2 + ص^2 = 25$

$9 + ص^2 = 25$

$ص^2 = 16$ ⟸

$ص = 4$

$جا هـ = \frac{س}{5}$

$-جا هـ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{5} \times \frac{دس}{دن}$

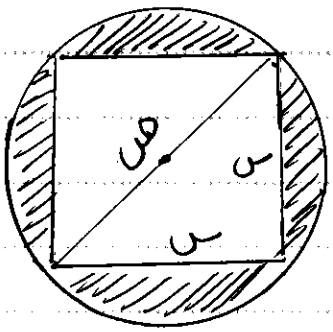
$-\frac{4}{5} \times \frac{دهـ}{دن} = 2 \times \frac{1}{5}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{-4} = -\frac{1}{2}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) صيفية

تتمدد دائرة بحيث يزداد طول قطرها بمعدل (٦) سم/د ، رسم مربع داخل الدائرة وأخذ يتمدد معها بحيث تبقى رؤوسه ملامسة لها ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة ١٠ سم .



الحل

نفرض طول قطر الدائرة = ص

وطول ضلع المربع = س

$\frac{د ص}{د ن} = ٦$ ، ص = ١٠

مساحة المنطقة المحصورة

= مساحة الدائرة − مساحة المربع

$= \pi (\frac{ص}{٢})^{٢} - س^{٢}$

$= \frac{\pi}{٤} ص^{٢} - س^{٢}$

لكن $س^{٢} + س^{٢} = ص^{٢}$

$٢ س^{٢} = ص^{٢} \leftarrow س^{٢} = \frac{ص^{٢}}{٢}$

$م = \frac{\pi}{٤} ص^{٢} - \frac{ص^{٢}}{٢}$

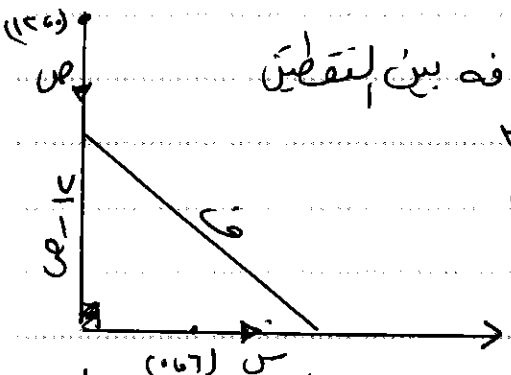
$\frac{د م}{د ن} = (\frac{\pi}{٤} \times ٢ ص - \frac{٢ ص}{٢}) \times \frac{د ص}{د ن}$

$= ٣٠ \pi - ٦٠$

⑧ وزارة (٢٠١٢) شتوية

بدأت نقطة ماديه الحركة من النقطة ب (٠٦، ١٢) على محور الصادات بسرعة ٣ سم/ث وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة أ (٠٦، ٠١) على محور السينات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث ، جد معدل تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين عندما تكون النقطة المتحركة على محور الصادات على بعد ٨ سم من نقطة الأصل .

الحل



ف : المسافة بين النقطتين

$\frac{د س}{د ن} = ٣$

$\frac{د ص}{د ن} = ٢$

س المسافة بين قطعتها النقطة الأولى

س = ٣ن ، ص = ٢ن

$ف^{٢} = (٦ + ٣ن)^{٢} + (١٢ - ٢ن)^{٢}$

$= ٣٦ + ٣٦ن + ٩ن^{٢} + ١٤٤ - ٤٨ن + ٤ن^{٢}$

$ف^{٢} = ١٣ن^{٢} - ١٢ن + ١٨٠$

$٢ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٢٦ن - ١٢$

← يتبع

مكتبة الجمزاوي ALMEZAWI
المعلم ناجح الجمزاوي

$\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{١٣ن - ٦}{ف}$

تكون النقطة إشارية على بعد ٨ سم من نقطة الاصل $\Leftarrow$ ن = ٨ - ١٢ = -٤

$\Leftarrow$ ن = ٢

ف عندما ن = ٢

$ف^{٢} = ١٣ \times ٤ - ٢ \times ١٢ + ١٨٠$

$= ١٨٠ + ٤٨ = ٢٢٨$

$\sqrt{٤ \times ٣٢} = ٢\sqrt{٣٢}$

$\left| \frac{ك ف}{ك ن} \right|_{ن=٢} = \frac{١٣ \times ٢ - ٦}{٢\sqrt{٣٢}} = \frac{٢٠}{٢\sqrt{٣٢}}$

$= \frac{٥}{\sqrt{٣٢}}$

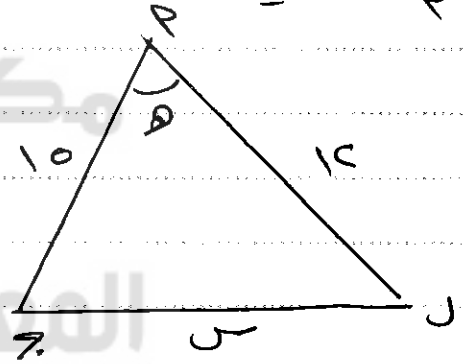
---

⑨ وزارة (٢٠١٢) صيفية

ب ج ء مثلث فيه ب ج = ١٢ سم

ج ء = ١٥ سم يزداد قياس الزاوية ب ج ء بمعدل $\frac{\pi}{٩٠}$ راديان/ث

جد معدل تغير طول الضلع ب ء عندما يكون قياس الزاوية ب ج ء يساوي $\frac{\pi}{٣}$ راديان



$\frac{ك هـ}{ك ن} = \frac{\pi}{٩٠}$ $\quad هـ = \frac{\pi}{٣}$

$س^{٢} = (١٢)^{٢} + (١٥)^{٢} - ٢ \times ١٢ \times ١٥ \times ق(هـ)$

$س^{٢} = ٣٦٩ - ٣٦٠ ق(هـ)$

$س = \sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ ق(هـ)}$

$\frac{ك س}{ك ن} = \frac{-٣٦٠ \times -ا(هـ) \times \frac{ك هـ}{ك ن}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ ق(هـ)}}$

$= \frac{\frac{\pi}{٩٠} \times \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} \times ٣٦٠}{\frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ ق(\frac{\pi}{٣})}}$

$= \frac{٨\pi\sqrt{٣}}{٢\sqrt{١٨٩}} = \frac{٨\pi\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٩ \times ٢١}} = \frac{٨\pi\sqrt{٣}}{٦\sqrt{٢١}}$

---

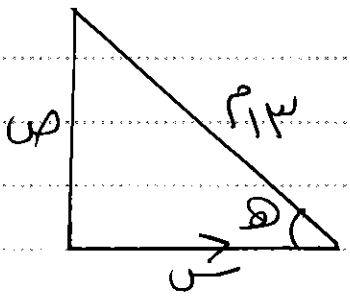
⑩ وزارة (٢٠١٣) شتوية

سلم طوله (١٣) م يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي وطرفه السفلي على ارض افقية، اذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل (١,٥) م/ث فما معدل التغير في قياس الزاوية المحصورة بين الطرف السفلي للسلم وسطح الارض في اللحظة التي يكون فيها طرفه العلوي على ارتفاع ١٢ م عن سطح الارض

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة العلم ACVESAM
العلم ناجح الجمزاوي

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ١ و٠$

ص = ١٢

جتا هـ = $\frac{س}{١٣}$

$-$ جا هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{١٣} \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{-١٢}{١٣} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{١٣} \times ١ و٠$

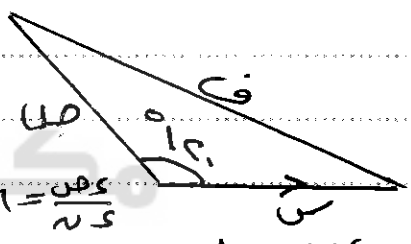
$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{١ و٠}{-١٢} = \frac{-١}{١٢٠}$

---

(١١) وزارة (٢٠١٣) صيفية

انطلق قاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما ١٢٠°، اذا كانت سرعة الأول ٨ كم/س، وسرعة الثاني (٦) كم/س، فجد معدل تغير المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعة من انطلاقهما.

الحل



قانون جيب التمام

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} $-$ ٢ س ص جتا ١٢٠

$= س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص \times -\frac{١}{٢}$

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + س ص

ف = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + س ص}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن} + (س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن})}{٢\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + س ص}}$

بعد نصف ساعة

س = ٨ $\times \frac{١}{٢}$ = ٤ ، ص = ٦ $\times \frac{١}{٢}$ = ٣

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ \times ٤ \times ٨ + ٢ \times ٣ \times ٦ + (٤ \times ٦ + ٣ \times ٨)}{٢\sqrt{١٦ + ٩ + ١٢}}$

$= \frac{١٤٨}{٢\sqrt{٣٧}}$

---

(١٢) وزارة (٢٠١٤) شتوية

يقف رجل طوله (١٫٨) متراً امام مصباح كهربائي مثبت على عمود ارتفاعه عن سطح الارض (٤٫٥) متراً، اذا اخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل ٢ م/ث، فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد (١٫٨) متراً من قاعدة العمود

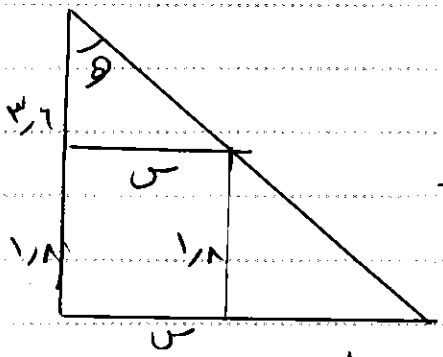
← يتبع الحل

ACADEMY
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

$\frac{ص}{ع} = -\frac{٢}{٤}$

$ظاهـ = \frac{س}{٣,٦}$



$قاهـ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣,٦} \times \frac{دص}{دن}$

لايجاد قاهـ ظاهـ $= \frac{س}{٣,٦} = \frac{١,٨}{٣,٦} = \frac{١}{٢}$

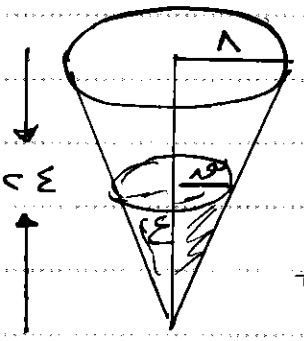
$قاهـ = ١ + ظا^٢هـ = ١ + \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٤}$

بالتعويض

$\frac{٥}{٤} \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣,٦} \times -٢$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢}{٣,٦} \times \frac{٤}{٥} = \frac{-٨}{١٨} = \frac{-٤}{٩}$

الحل



$\frac{دع}{دن} = ١٢$

$ع = ١٢ن$

$ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

$\frac{٨}{نهـ} = \frac{٤ع}{ع} \leftarrow نهـ = \frac{ع}{٣}$

$ح = \frac{١}{٣} \pi \times (\frac{ع}{٣})^٢ \times ع$

$= \frac{\pi}{٢٧} \times ع^٣$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{٢٧} \times ٣ع^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$١٢ = \frac{\pi}{٩} \times (١٥)^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{١٢}{\pi ١٦} = \frac{٣}{\pi ٤}$

(١٣) وزارة صيفية (٢٠١٤)

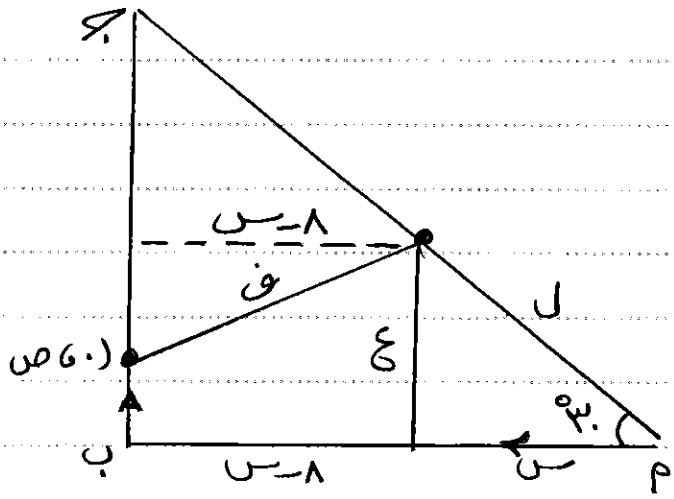
إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وقاعدته افقيه، يسكب فيه الماء بمعدل (١٢) سم٣/ث فاذا كان قطر قاعدته (١٦) سم وارتفاعه (٢٤) سم، جد معدل تغير ارتفاع الماء في الاناء عندما يصبح ارتفاع الماء فيه (١٢) سم

(١٤) وزارة (٢٠١٥) شتوية

الشكل المجاور يمثل المثلث OPQ حيث رؤوسه في المستوى حيث P(٠,٨) و Q(٠,٦) قياس الزاوية POQ = ٣٠° بدأت نقطة تحركة من P على الضلع PO باتجاه O وبسرعة مقدارها (٢) سم/ث، وبنفس اللحظة بدأت نقطة اخرى بالحركة من Q على الضلع QO باتجاه O وبسرعة مقدارها (٣) سم/ث جد معدل تغير البعد بين النقطتين المتحركتين عند مضي ثانية واحدة منذ بدء حركتهما

← يتبع الحل

ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي



$\frac{دل}{دن} = ٢$ ، $\frac{دص}{دن} = ٣$ ،

$\frac{دف}{دن}$ = ؟

$ظا ٣٠° = \frac{ع}{ل} = \frac{١}{٢} \leftarrow ل = ٢ع$

$\frac{دل}{دن} = ٢ \times \frac{دع}{دن}$

$٢ = ٢ \times \frac{دع}{دن} \leftarrow \frac{دع}{دن} = ١$

$ضا ٣٠° = \frac{س}{ل} = \frac{٣\sqrt{}}{٢} \leftarrow س = \frac{٣\sqrt{}}{٢} ل$

$\frac{دس}{دن} = \frac{٣\sqrt{}}{٢} \times \frac{دل}{دن} = \frac{٣\sqrt{}}{٢} \times ٢ = ٣\sqrt{}$

$ف^٢ = (٨-س)^٢ + (ع-ص)^٢$

$٢ف \times \frac{دف}{دن} = ٢(٨-س) \times -\frac{دس}{دن} + ٢(ع-ص)(\frac{دع}{دن} - \frac{دص}{دن})$

$ل = ٢ع \quad ٢ = ١ \times ٢ \quad س = ٣\sqrt{} \times ١ = ٣\sqrt{}$

$ع = ١ \times ١$

$ف = \sqrt{(٨-٣\sqrt{})^٢ + (١-٣)^٢}$

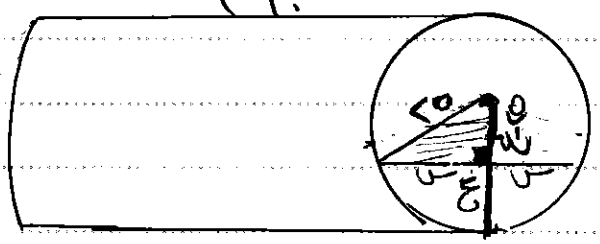
$\frac{دف}{دن} = \frac{-٢(٨-٣\sqrt{}) \times ٣\sqrt{} + ٢(١-٣)(١-٣)}{٢\sqrt{(٨-٣\sqrt{})^٢ + ٤}}$

$= \frac{٣\sqrt{٨} - ٧}{\sqrt{(٨-٣\sqrt{})^٢ + ٤}}$

---

(١٥) وزارة (٢٠١٥) صيفية

يجري الماء في انبوب افقي اسطواني الشكل طوله (١٠) م ، وطول نصف قطره يساوي (٢٥) سم ، فاذا كان عمق الماء في الانبوب يتناقص بمعدل ٣ سم/د ، فجد معدل التغير في مساحة سطح الماء العلوي في الانبوب عندما يكون عمق الماء ١٨ سم



مساحة السطح المتصل

م = الطول × العرض

$= ٢س \times ١٠٠ سم = ٢٠٠ س$

$\frac{دم}{دن} = ٢٠٠ \times \frac{دس}{دن}$

$س^٢ + (٢٥-ع)^٢ = (٢٥)^٢$ من المثلث

$٢س \times \frac{دس}{دن} + ٢(٢٥-ع) \times -\frac{دع}{دن} = صفر$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نجد س حيث ع = ١٨

$س^2 + (٢٥ - ١٨)^2 = (٢٥)^2$

$س^2 = ٦٢٥ - ٤٩ = ٥٧٦$

$س = ٢٤$

$\frac{د م}{د ن} = ٣(١٨ - ٢٥)^2 + \frac{د س}{د ن} \times ٢٤ \times ٢$

$\frac{د م}{د ن} = \frac{٣ \times ٧ \times ٢-}{٤٨} = \frac{٧-}{٨}$

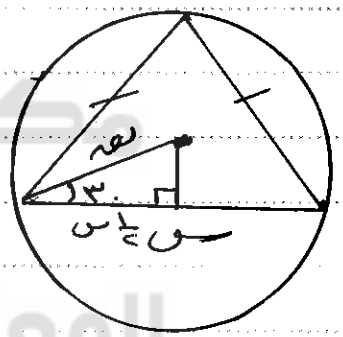
$\frac{د م}{د ن} = ٢٠ \times \frac{٧}{٨} = \frac{٢٥-}{٢}$

---

(١٦) وزارة (٢٠١٦) شتوية

رسم مثلث متساوي الاضلاع داخل دائرة حيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة ، بدأ كل من الدائرة والمثلث بالتمدد محافظتين على شكلهما ووضعهما حيث يتمدد نصف قطر الدائرة بمعدل (٣) سم/د ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائرة (٩) سم

الحل



$\frac{د نق}{د ن} = ٣$

$\frac{د م}{د ن} \Big| _{نق = ٩}$

م = مساحة الدائرة - مساحة المثلث

$= \pi نق^2 - \frac{1}{2} \times س \times س \times جا ٦٠°$

$= \pi نق^2 - \frac{1}{2} س^2 \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \pi نق^2 - \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^2$ ---- (١)

لكن من المثلث

$\frac{س/٢}{نق} = جا ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{س/٢}{نق} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\Leftarrow س = \sqrt{٣}$ نق

$س^2 = ٣ نق^2$ بتعويضها في (١)

$م = \pi نق^2 - \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٣ نق^2$

$= \pi نق^2 - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} نق^2$

$\frac{د م}{د ن} = (\pi \times ٢ نق) - \frac{٦\sqrt{٣}}{٤} نق) \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} \Big| _{نق = ٩} = ٣ \times (٩ \times ٢\pi - \frac{٩ \times ٣\sqrt{٣}}{٢})$

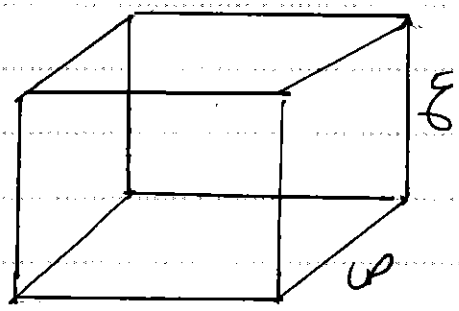
$= ٥٤\pi - \frac{٨١\sqrt{٣}}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) صيفية

صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات طوله مثلي عرضه وارتفاعه (٣) امثال عرضه لقدر الحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل $(٧٢)\ سم^٣/ث$ فجد معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله (٣٦) سم.

الحل



$س = ٢ص$ عندما $س = ٣٦$ فان $ص = ١٨$

$ع = ٣ص$

$\frac{دع}{دن} = ٧$

المطلوب $\frac{دم}{دن}$

$س = ٣٦$

مساحة السطح الكلية $= م$

$م = ٢س ص + ٢ع ص + ٢ع س$

$= ص ٢ × ص ٣ × ٢ + ص ٢ × ص ٢ × ٢$

$+ ص ٢ × ص ٣ × ٢$

$= ٤ص^٢ + ٦ص^٢ + ١٢ص^٢$

$م = ٢٢ص^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٤٤ص × \frac{دص}{دن}$ ---(١)

لكن

$ح = س ص ع$

$= ٢ص × ص ٣$

$= ٦ص^٣$

$\frac{دح}{دن} = ١٨ص^٢ × \frac{دص}{دن}$

$٧٢ = ١٨(١٨)^٢ × \frac{دص}{دن}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٤}{(١٨)^٢}$ بتعويضها في (١)

$\frac{دم}{دن} = ٤٤ × ١٨ × \frac{٤}{(١٨)^٢}$

$= \frac{٨٨}{١٨} = \frac{٤٤}{٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

المعدلات المرتبطة بالزمن

السؤال الأول

(P) انطلقت سيارتان في نفس الوقت من الميناء P ، فسارت الأولى نحو الميناء ب بسرعة ٦٠ كم/س وسارت الثانية نحو الميناء ج بسرعة ٨٠ كم/س اوجد معدل تغير بعدها عن بعضهما بعد ساعتين من الابحار علماً بان الزاوية بPج قائمة

الجواب = (١٠٠ كم/س)

(ن) مخروط دائري قائم رأسه إلى اسفل يخرج منه الماء بمعدل ٢ سم٣/ث ، وكانت حنفية تصب في المخروط بمعدل ٦ سم٣/ث وفي لحظة معينة كان ارتفاع الماء في المخروط = ٨ سم احسب

(أ) معدل التغير في ارتفاع الماء .

(ب) معدل التغير في نصف قطر الماء العلوي

(ج) معدل التغير في مساحة سطح الماء

علماً بان ارتفاع المخروط ٤٠ سم ونصف قطره ٣٠ سم

(ع) تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $f(س) = \sqrt{س^2 + ٥}$ ، بحيث يزداد احداثيها السيني بمعدل ٠.٧٣ اوجد معدل تغير بعدها عن النقطة (١، ٠) عندما س = ٢

الجواب = ٩ سم/ث

(ك) بPجـ مثلث قائم الزاوية في ب اذا علمت ان هذا المثلث يتغير في المستوى بحيث

اولاً : يبقى الرأس P في نقطة الاصل

ثانياً : يتحرك الرأس ج بحيث يقع دائماً على منحنى $f(س) = 1 + \frac{س^2}{٣٦}$

ثالثاً الرأس ب بدأ الحركة من (١، ٠) بسرعة ٤ سم/ث

اوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٣ ثواني من حركة ب

الجواب = $\frac{٦١}{١٢}$

السؤال الثاني

(أ) قضيب طوله ١٠ م يتحرك بحيث يبقى طرفاه أ، ب على محوري السينات والصادات، فإذا كان الطرف أ يتحرك مبتعداً عن نقطة الأصل بسرعة ٢ م/ث، أوجد سرعة الطرف ب على محور الصادات وكذلك معدل التغير في مساحة المثلث المكون من القضيب والمحورين عندما يكون الطرف أ على بعد ٨ م من نقطة الأصل

الجواب = $\frac{-١٤}{٣}$

(ب) تتحرك نقطة على منحنى $ص = س^{٣} + ٥س^{٢}$، فإذا كان الإحداثي السيني يزداد بمعدل ٢ سم/ث أوجد

(١) معدل التغير في الإحداثي الصادي

الجواب = ٦٤ سم/ث

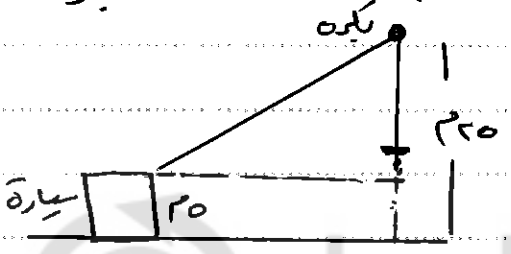
(٢) معدل التغير في ميل المماس عندما $س = ٢$

الجواب = ٤٤

(ج) يقع مصباح كهربائي في قمة عمود ارتفاعه ٣ م، قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من نقطة على الأرض تبعد ٢٠ م من قاعدة العمود حسب العلاقة $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$ أوجد سرعة ظل الكرة على الأرض في اللحظة التي تكون فيها الكرة قد قطعت مسافة ١٥ م وهي صاعدة للأعلى

الجواب = $\frac{٨٠}{٣}$

(د) حبل طوله ٤٥ م يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ٢٥ م مربوط بطرفه الأقل والطرف الآخر مربوط في سيارة على ارتفاع ٥ م، فإذا كانت السيارة تسير بسرعة ٦ م/ث أوجد معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة مسافة ١٥ م من أسفل البكرة

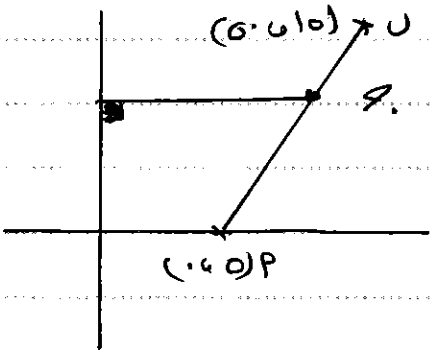


الجواب = $\frac{١٨}{٥}$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

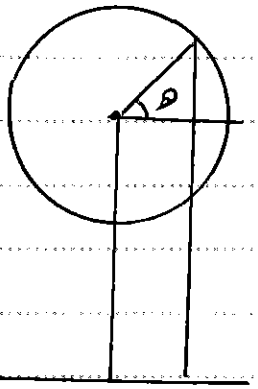
(أ) $\overline{AB}$ قطعة مستقيمة فيها $A(0,0)$ ، $B(5,15)$ تتحرك $جـ$ على القطعة المستقيمة بحيث يزداد الاحداثي السيني لها بمعدل 0.4 م/ث فما هو معدل تغير مساحة شبه المنحرف المكون من $Aجـ$ ومحور السينات ومحور الصادات والعمود النازل من $جـ$ على محور الصادات وذلك عندما يكون الاحداثي الصادي للنقطة $جـ$ يساوي 3.



الجواب = 1.1

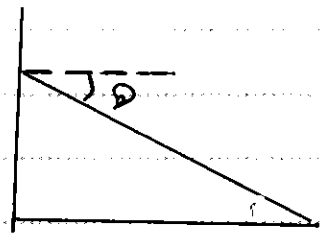
(ب) دولاب في مدينة الملاهي نصف قطره 60 قدم ، وارتفاع مركزه عن الارض 64 قدم ، يدور دورة كل دقيقتين ، اوجد السرعة التي يتحرك بها راكب وهو على ارتفاع 94 قدم وما سرعة ارتفاع الراكب عندئذ

← تابع



الجواب = 0.3π

(جـ) طائرة عمودية على ارتفاع 300 م فوق طريق افقي مستقيم شاهد الطيار سيارة تبعد عن مسقط الطائرة على الشارع مسافة 150 م وتسير متبعدة عنه مسقط الطائرة بسرعة 25 م/د ، فاذا بدأت الطائرة بالهبوط بمعدل 50 م/د ، اوجد معدل تغير زاوية الانخفاض بين الطائرة والسيارة بعد مرور دقيقتين



الجواب = $\frac{-3}{16}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

(أ) مئذنة ارتفاعها ٢٠م تحرك كرة في خط مستقيم مبتعده عن قاعدة المئذنة بسرعة ٤ م/ث اوجد

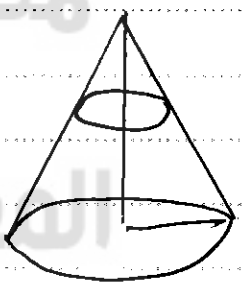
(ب) سرعة تغير زاوية انخفاض خط نظر شخص في قمة المئذنة وينظر الى الكرة عندما تكون الكرة على بعد ١٥م من قاعدة المئذنة

الجواب = $\frac{-١٦}{١٢٥}$

(ج) معدل تغير المسافه بين الكره والمئذنه

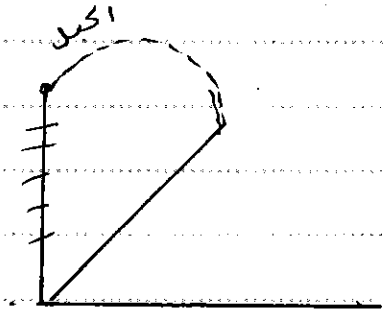
الجواب = $\frac{١٢}{٥}$

(أ) مصباح معلق فوقه مركز مخروط دائري قائم ارتفاعه عن الارض ٩٠ سم ونصف قطرها ٣٠ سم تحرك المصباح رأسيا لأسفل فوق المخروط بسرعة ٦ سم/ث اوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل المخروط على الارض عندما يكون ارتفاع المصباح عن المخروط ٦٠ سم



الجواب = ٣

(د) الشكل يمثل بناية ارتفاعها ١٢م ، ب سلم طوله ١٣م ، والطرف أ ثابت ويسحب الطرف ب بسرعة ٢م/ث بعيدا عن قمة البناية اوجد معدل التغير في ارتفاع الطرف ب عن الارض عندما يكون الطرف ب على ارتفاع ٦م عن الارض



الجواب = $\frac{٧}{٣}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

الدرس الرابع

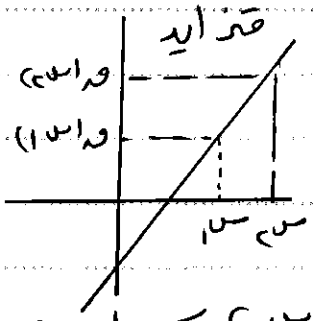
التزايد والتناقص

أولاً
تعريف التزايد والتناقص

اذا كان ق(س) معرف على [م ، ب] وكان س١ ، س٢ ∈ [م ، ب] فإنه

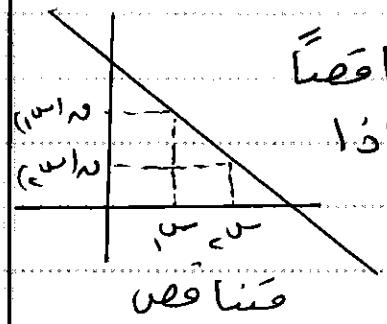
① يكون ق(س) متزايد على [م ، ب] اذا كان

س٢ > س١ ⇐ ق(س٢) > ق(س١)



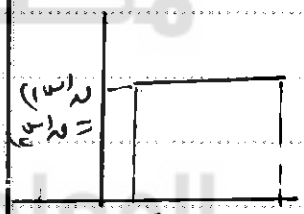
② يكون ق(س) متناقصاً في [م ، ب] اذا كان

س٢ > س١ ⇐ ق(س٢) < ق(س١)



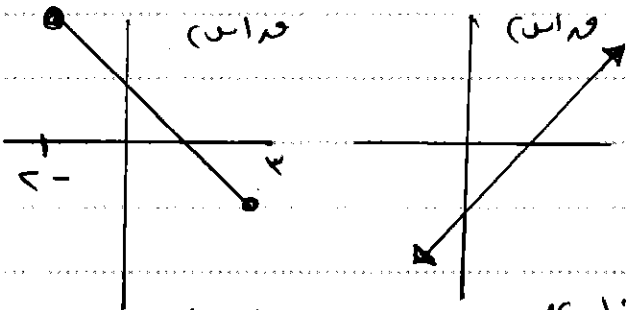
③ يكون ق(س) ثابتاً في [م ، ب] اذا كان

س٢ > س١ ⇐ ق(س٢) = ق(س١)



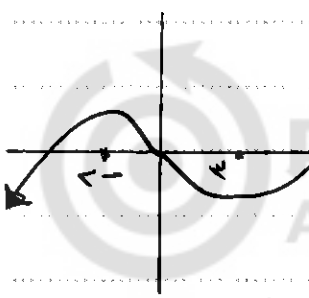
ثانياً :- التزايد والتناقص عن رسمة ق(س)

اذا كانت الرسمة تمثل منحنى ق(س) واردنا ايجاد فترات (مجالات) التزايد والتناقص للاقتران ق(س) فاننا ننظر للاقتران من جهة اليسار الى جهة اليمين فاذا كان صاعد للأعلى يكون متزايد واذا كان هابط للأسفل يكون متناقص.

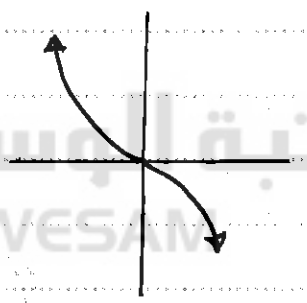


متناقص على [-٢ ، ٣]

متزايد على (-∞ ، ∞)



متزايد (-∞ ، -٢]
متناقص [-٣ ، ٣]
متزايد [٣ ، ∞)

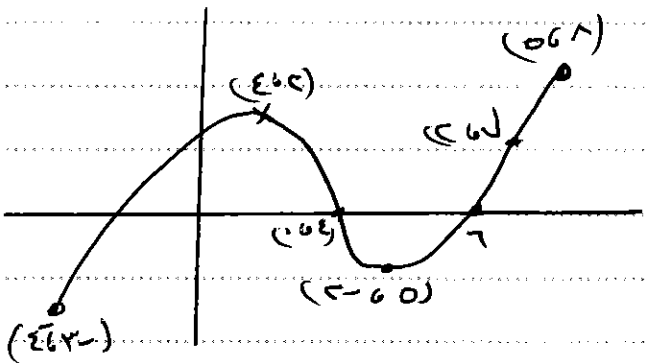


متناقص على ح

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ①

الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص



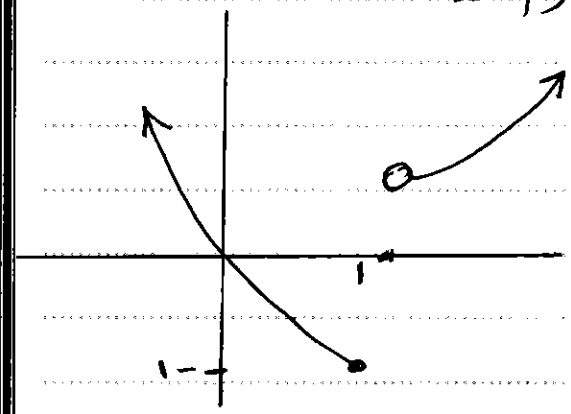
الحل

متزايد $[-٣،٢] \cup [٥،٨]$

متناقص $[٢،٥]$

مثال ②

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى د(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.

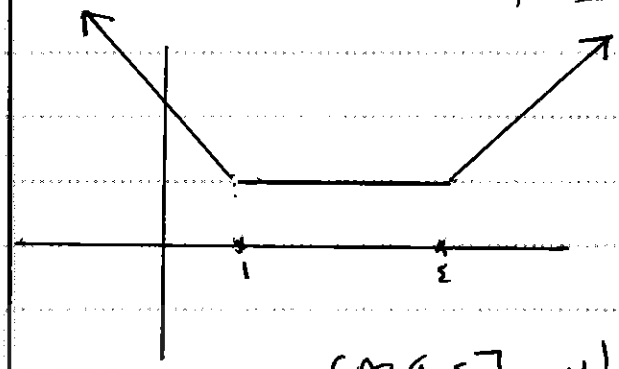


متناقص $(-\infty، ١]$

متزايد $[١، \infty)$

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى د(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.



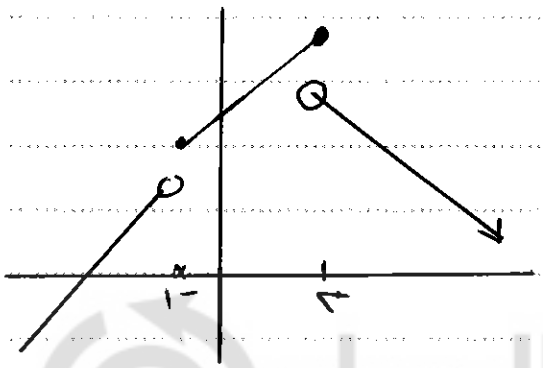
متزايد $[٤، \infty)$

متناقص $(-\infty، ١]$

ثابت $[١، ٤]$

مثال ④

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى د(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.



متزايد $(-\infty، -١] \cup [٢، ١]$

متناقص $(١، ٢)$

مكتبة الهدف AL-HEDAF
المعلم: ناجح الجمزاوي

ثالثاً

النقطة الحرجة

تعريف

اذا كانت النقطة ح في مجال الاقتران هـ فان النقطة (ح ، هـ(ح)) تسمى نقطة حرجة للاقتران هـ اذا كانت هـ'(ح) = صفر او هـ'(ح) غير موجودة

ملاحظة

يجب ان تقع النقطة الحرجة في المجال ، ودائماً اطراف اقترانات المغلقة [م ، ن] نقط حرجة لأن هـ(م) ، هـ(ن) غير موجودة

ملاحظة

في الاقترانات الكسرية عندما تكون هـ(س) اقتران كسري فاننا

① نضع البسط = صفر ← المقام = صفر

② نضع المقام = صفر

← المشتقة غير موجودة

مثال ①

اوجد النقط الحرجة للاقتران هـ(س) = $س^2 - 4س + 3$

الحل

هـ'(س) = $2س - 4 = 0$

$س = 2 \in$ المجال

(٢ ، هـ(٢)) = (٢ ، -١)

نقطة حرجة

مثال ②

هـ(س) = $س^3 + س^2 - 5س + 3$

$س \in [-3 ، 1]$ اوجد قيم س الحرجة

الحل

هـ'(س) = $3س^2 + 2س - 5 =$ صفر

$(3س + 5)(س - 1) =$ صفر

$س = -\frac{5}{3}$ ، $س = 1$

قيم س الحرجة = $\{-3 ، -\frac{5}{3} ، 1\}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

$f(س) = س^{\frac{2}{3}}$ ، $س \in [-٨، ٨]$

الحل

$f'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

اصفار المقام $س = ٠ \notin$ المجال

النقط الحرجة

$(٠، ٠)$ ، $(-٨، ٤)$ ، $(٨، ٤)$

مثال ④

اوجد مجموعة النقاط الحرجة لاقتران

$f(س) = \sqrt{س^٢ - ١٦س}$

الحل

اولاً نجد المجال

$س^٢ - ١٦س = ٠$

$س(س - ١٦) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ١٦$

$+++++$ ، $----$ ، $+++++$

٠ ، ١٦

$f'(س) = \frac{٢س - ١٦}{٢\sqrt{س^٢ - ١٦س}}$

البسط = صفر

$٢س - ١٦ = ٠ \Leftarrow س = ٨$

$\notin$ المجال

نهمل

المقام = ٠

$س^٢ - ١٦س = ٠$

$س(س - ١٦) = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ١٦$

$\in$ المجال

قيم س الحرجة هي $\{٠، ١٦\}$

مثال ⑤

$f(س) = \frac{س^٢ + ٧}{س - ٣}$ اوجد قيم س الحرجة

الحل

مجال $f = ح - \{٣\}$

$f'(س) = \frac{(س-٣)(٢س) - (س^٢+٧)(١)}{(س-٣)^٢}$

$= \frac{٢س^٢ - ٦س - س^٢ - ٧}{(س-٣)^٢}$

$= \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{(س-٣)^٢}$

البسط = صفر ، $س^٢ - ٦س - ٧ = ٠$

$(س - ٧)(س + ١) = ٠$

$س = ٧ ، -١ \in$ المجال

المقام = صفر $س - ٣ = ٠$

$س = ٣ \notin$ المجال

$(-١، -٢)$ ، $(٧، ٤٦)$ نقط حرجة

مكتبة السام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

① مجموعة قيم س الحرجة للاقتران الثابت هي كامل الفترة المعطاة

② مجموعة قيم س الحرجة للاقتران أكبر عدد صحيح (الوحدة) هي كامل الفترة المعطاة.

مثال ⑥

ق(س) = ٣ ، س ∈ [١، ٥]

جد قيم س الحرجة

الحل

ق(س) = صفر ∈ (١، ٥)

ق(١) غير موجودة ، ق(٥) غير موجودة

قيم س الحرجة هي س ∈ [١، ٥]

مثال ⑦

ق(س) = [$\frac{١}{٣}$ س + ١] معرفة على الفترة [-٣، ٣] فاوجد قيم س الحرجة.

الحل

قيم س الحرجة جميع الفترة

[-٣، ٣]

مثال ⑧

اذا كان ق(س) = م س^{٣} - ٩ س^{٢} حيث م عدد ثابت وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ فما قيمة م ؟

الحل

ق'(س) = ٣ م س^{٢} - ١٨ س

ق'(٢) = ١٢ م - ٣٦ = ٠

⇐ م = ٣

مثال ⑨

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٦ & -١ \le س < ٠ \\ -س^{٣} + ٤س & ٠ \le س < ٣ \\ ٥ & ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$$

اوجد قيم س الحرجة

الحل

عند س = -١ ، ٦ نقط حرجة اطراف فترة

① عند س = ٠ نبحث الاتصال

ق(٠) = ٠ ، $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = صفر ، $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = ٠

متصل عند س = ٠

ق'(٠) = ٠ ، ق'(٠) = ٤

ق'(٠) غير موجودة ⇐ س = ٠ حرجة

② عند س = ٣

ق(٣) = ٥ ، $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) = ٦٦

⇐ لا تتبع

مكتبة الوسام AlwesamLib
المعلم ناجح الجمزاوي

ق(س) غير متصل عند س=٣
← ق'(٣) غير موجود
س=٣ حرجة

$$ق(س) = \begin{cases} ٦س & ، س < ٣ \\ ٣س^{٢}+٤ & ، س > ٣ \\ صفر & ، س = ٣ \end{cases}$$

٦س=٠ ← س=٠ ∈ فترة حرجة
٣س^٢+٤ لا تكون

ق(س) = صفر م (٢،٦)
قيم س الحرجة هي

{-١، ٠، ٦، ٣٦} ∪ (٢،٦)
أو [٢،٦] ∪ {-١، ٠}

مثال (١٠)

جد قيم كل من الثابتين أ، ب
التي تجعل للاقتران
ق(س) = س^٣ + أس^٢ + بس نقطتان
حرجتان عند س=-١، س=٢

الحل

ق'(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب
ق'(-١) = ٣(-١)^٢ + ٢أ(-١) + ب = ٠
٣ - ٢أ + ب = ٠ ---- (١)
ق'(٢) = ٣(٢)^٢ + ٢أ(٢) + ب = ٠
١٢ + ٤أ + ب = ٠ ---- (٢)
معادلة (١) - (٢)
-٩ = -٦أ ← ٩ = ٦أ
أ = ٩/٦ = ٣/٢
بالتعويض ← ب = -٦

مثال (١١)

اذا كان للاقتران
ق(س) = أس^٢ - بس + ٥
نقطة حرجة هي (١، ٤)
فجد أ، ب؟

الحل

ق(١) = ٤
← أ(١)^٢ - ب(١) + ٥ = ٤
أ - ب = -١ ---- (١)
ق'(س) = ٢أس - ب
ق'(١) = صفر لنقطة حرجة
٢أ(١) - ب = ٠
٢أ - ب = ٠ ---- (٢)
معادلة (١) - معادلة (٢)
-أ = -١ ← أ = ١
١ - ب = -١ ← ب = ٢

مكتبة الوسام ALWESAM
الاعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

اذا كان هـ ، و قابلين للاشتقاق على ح فاذا كان كل منهما نقطة حرجة عند س = P فاثبت ان للاقترانين (هـ × و) نقطة حرجة عند س = P

الحل

هـ' (P) = صفر و' (P) = صفر

لأن P نقطة حرجة لكل من هـ ، و

(هـ × و)' (P) = هـ(P) × و'(P) + و(P) × هـ'(P)

= هـ(P) × ٠ + و(P) × ٠

= صفر

∴ P نقطة حرجة للاقتران هـ × و

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

رابعاً

التزايد والتناقص
اختبار المشتقة الأولى

نظرية

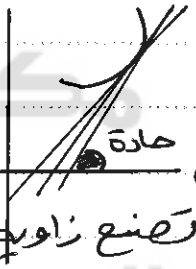
اذا كان ه(س) متصل على [أ ، ب]
وقابل للاشتقاق على (أ ، ب)

① اذا كانت ه'(س) > صفر (موجبة)
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ه
متزايد على [أ ، ب]

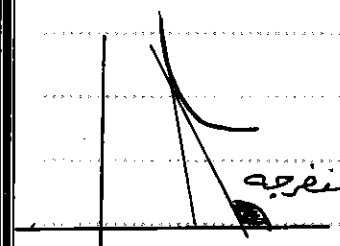
② اذا كانت ه'(س) < صفر (سالبة)
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ه
متناقص على [أ ، ب]

③ اذا كانت ه'(س) = صفر
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ه
ثابت على [أ ، ب]

ملاحظة



① اذا رسمت مماسات لمنحنى
ه(س) نجد جميع المماسات تصنع زاوية
حادة
ظاهو ∠ ، ← ه'(س) > ٠ ، ← ه(س) متزايد



② اذا رسمت مماسات
لمنحنى ه(س) نجد
جميع المماسات تصنع زاوية منفرجة
ظاهو ∠ ، ← ه'(س) < ٠ ، ← ه(س)
متناقص

ملاحظة

خطوات ايجاد اشارة ه'(س)
(مجالات التزايد والتناقص)

① نحدد مجال الاقتران ه(س)

② نجد ه'(س)

③ نجد قيم س الحرجة للاقتران ه

④ نضع قيم س الحرجة على خط
الاعداد بالاضافة لمجال الاقتران

⑤ نختبر اشارة ه'(س)

⑥ نطبق النظرية السابقة

AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان $ق(س) = س^3 + س^2 - 5س + 1$
$س \in [-2, 2]$ اوجد مجالات التزايد والتناقص

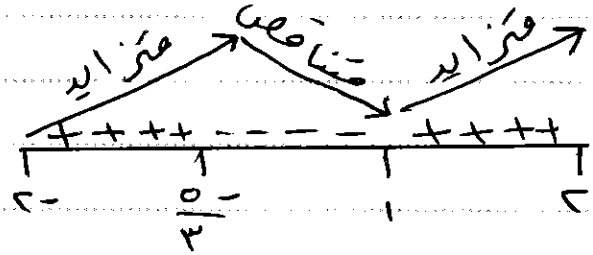
الحل

$ق(س)$ متصل على $[-2, 2]$ وقابل للاشتقاق على $(-2, 2)$ لأنه كثير حدود

$ق'(س) = 3س^2 + 2س - 5 = 0$

$(3س + 5)(س - 1) = 0$

$س = -\frac{5}{3}$ $\quad س = 1$



$ق(س)$ متزايد $[-2, -\frac{5}{3}]$ ، $[1, 2]$

$ق(س)$ متناقص $[-\frac{5}{3}, 1]$

مثال ②

اذا كان $ق(س) = -2س^3 + 9س^2 + 24س + 5$
اوجد مجالات التزايد والتناقص

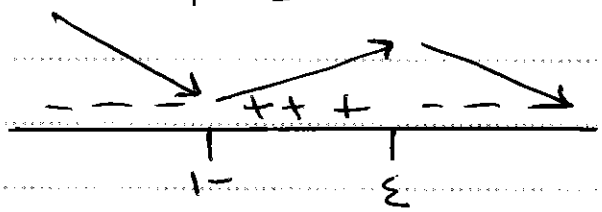
الحل

$ق'(س) = -6س^2 + 18س + 24 = 0$
بالقسمة على -6

$س^2 - 3س - 4 = 0$

$(س - 4)(س + 1) = 0$

$س = 4 \quad س = -1$



$ق(س)$ متزايد $[-1, 4]$

$ق(س)$ متناقص $(-\infty, -1]$ ، $[4, \infty)$

ملاحظة هامة

اشارة $ق'(س)$ على خط الاعداد هي اشارة $ق(س)$ بعد الاشتقاق مباشرة (بدون تعديل) ($ق$ الاصلية)

مثال ③

اوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = س^4 - 8س^2 + 16$

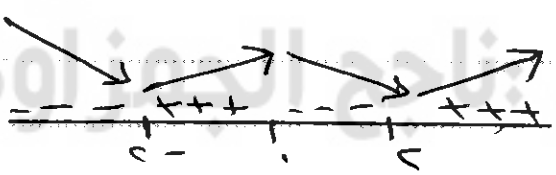
الحل

$ق'(س) = 4س^3 - 16س = 0$

$4س(س^2 - 4) = 0$

$4س(س - 2)(س + 2) = 0$

$س = 0 \quad س = 2 \quad س = -2$



ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ④

اوجد مجالات التزايد والتناقص

$$ق(س) = س + \frac{1}{س}$$

الحل

المجال $= ح - \{0\}$

$$ق'(س) = 1 - \frac{1}{س^2} = \frac{س^2 - 1}{س^2}$$

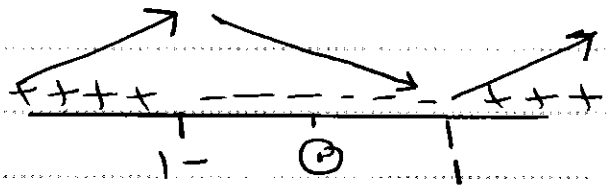
البسط = صفر $\leftarrow س^2 - 1 = 0$

$(س - 1)(س + 1) = 0$

$س = 1 \quad س = -1 \in$ المجال

المقام $= 0 \leftarrow س^2 = 0 \leftarrow س = 0$

$س = 0 \notin$ المجال



متزايد $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

متناقص $[-1, 1] - \{0\}$

مثال ⑤

$$ق(س) = \frac{س - 1}{س^2 + 3}$$ اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

المجال $= ح$ لانه لا يوجد اصفار للمقام

$$ق'(س) = \frac{(س^2 + 3) \times 1 - (س - 1) \times 2س}{(س^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{س^2 + 3 - 2س^2 + 2س}{(س^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{-س^2 + 2س + 3}{(س^2 + 3)^2}$$

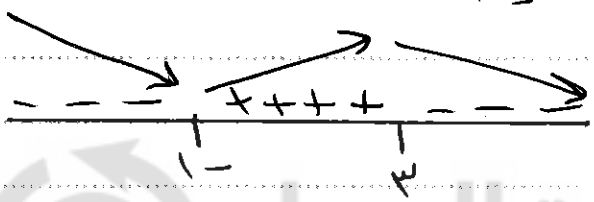
البسط = صفر

$-س^2 + 2س + 3 = 0$

$س^2 - 2س - 3 = 0$

$(س - 3)(س + 1) = 0$

$س = 3 \quad ، \quad س = -1$



متزايد $[-1, 3]$

متناقص $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$f(س) = جتا^{٢} س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

جد قيم س الحرجة ومجالات التزايد والتناقص

الحل

$f(س)$ متصل (اقتران جيب التمام)

$[٠ ، ٢\pi]$

$f'(س) = -٢ جا س$

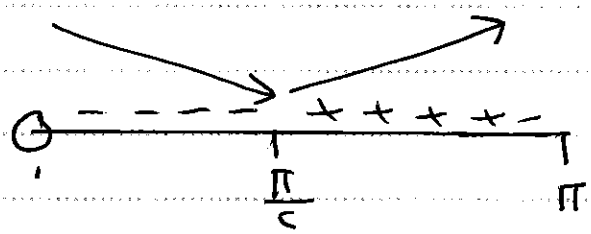
$جا س = ٠ \leftarrow ٢س = ٠$

$س = ٠ \notin (٠ ، ٢\pi)$

$٢س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \in$ المجال

$٢س = ٢\pi \leftarrow س = \pi \in$ المجال

قيم س الحرجة هي $\{٠ ، \frac{\pi}{٢} ، \pi\}$



متناقص على $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

متزايد على $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$

مثال ⑦

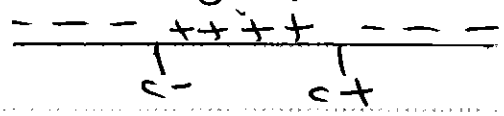
$f(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ أوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

المجال $٤ - س^{٢} \geq ٠$

$س = \pm ٢$

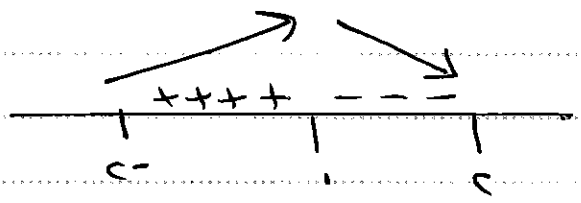
المجال



$f'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$

البسط = صفر $\leftarrow س = ٠ \in$ المجال

المقام $= ٠ \Leftarrow س = \pm ٢ \in$ المجال



متزايد $[-٢ ، ٠]$

متناقص $[٠ ، ٢]$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

$ق(س) = ٣س^{\frac{١}{٣}} - س$

حدد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = ٣ \times \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} - ١$

$= \frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}} - ١$

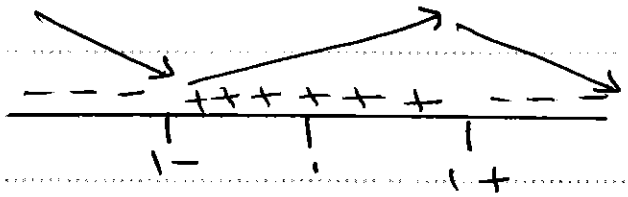
$= \frac{١ - س^{\frac{٢}{٣}}}{س^{\frac{٢}{٣}}}$

البسط = صفر ← $١ - س^{\frac{٢}{٣}} = ٠$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ← $س^٢ = ١$

$س = \pm ١ \in$ المجال

المقام = صفر ← $س = ٠ \in$ المجال



ق متزايد $[-١، ٠] ، [١، \infty)$

ق متناقص $(-\infty، -١] ، [٠، ١]$

مثال (٩)

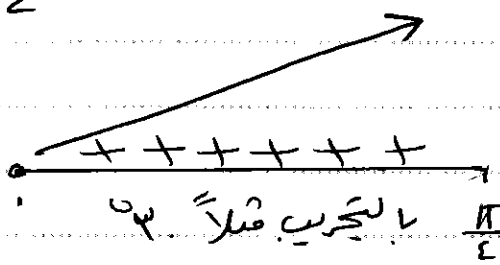
اثبت ان $ق(س) = جتاس + جاس$ اقترانا متزايدا في الفترة $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

الحل

ق(س) متصل على $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

$ق'(س) = -جاس + جتاس = ٠$

$جتاس = جاس$ ← $س = \frac{\pi}{٤}$



ق متزايد $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

مثال (١٠)

اذا كان $هـ، ط$ كثيري حدود موجبان في الفترة $[١، ٤]$ وكان $هـ$ متزايدا في $[١، ٤]$ و $ط$ متناقص في $[١، ٤]$ اثبت ان

$ل(س) = \frac{هـ(س)}{ط(س)}$ متزايد على الفترة $[١، ٤]$

الحل

$ل'(س)$ متزايد على $[١، ٤]$ ← يتبع

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

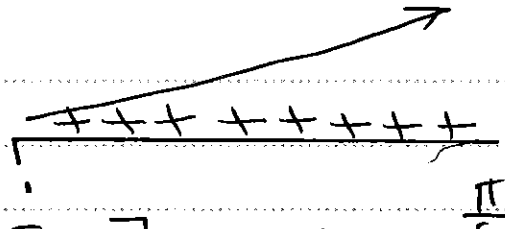
ه متزايد في [٠، ٤/π]
⇐ ه'(س) > صفر في (٠، ٤/π)
هـ متناقص في [٠، ٤/π]
⇐ هـ'(س) < صفر في (٠، ٤/π)

ايضاً ه(س) ، هـ(س) موجبان
⇐ ه(س) > ٠ ، هـ(س) > ٠

ل'(س) = [هـ(س) ه'(س) − ه(س) هـ'(س)] / (هـ(س))^٢
= [موجب × موجب − موجب × سالب] / (موجب)^٢
= [موجب + موجب] / موجب > ٠
⇐ ل'(س) موجب على (٠، ٤/π)
⇐ ل(س) متزايد على [٠، ٤/π]

مثال (١١)
جد فترات التزايد والتناقص
ه(س) = س + جاس حيث
س ∈ [٠، ٤/π]

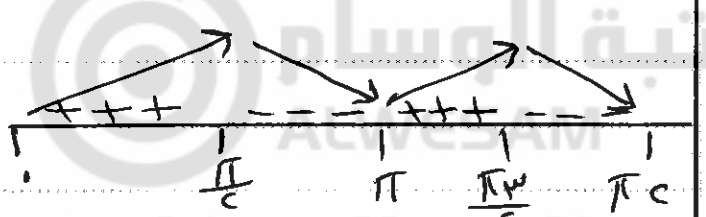
الحل
ه(س) متصل وقابل للاشتقاق
ه'(س) = ١ + جتاس
⇐ س = π ∈ أ.ح



ه(س) متزايد على [٠، ٤/π]

مثال (١٢)
ه(س) = جاس ، س ∈ [٠، ٢π]
اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل
ه(س) متصل على [٠، ٢π]
ه(س) قابل للاشتقاق على (٠، ٢π)
ه'(س) = ٢ جاس جتاس = جا٢س
جا٢س = ٠
⇐ ٢س = ٠ + ن π أو ٢س = π − ٢ن π
⇐ س = ن π أو س = ٤/π − ن π
ن = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ، س = ٤/π ∈
ن = ١ ⇒ س = π ∈ ، س = ٤/٣π ∈
ن = ٢ ⇐ ٢س = ٢π ∉ ⇐ س = π − ٤/π ∈



الاشارة بالتجريب

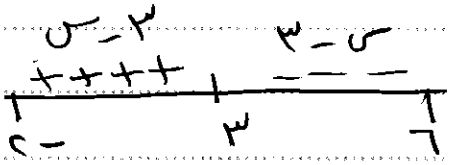
مكتبة الوسام ACTIVE SAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$ق(س) = س - |٣ - س|$ حيث $س \in [-٢، ٦]$ اوجد فترات التزايد والتناقص ؟

الحل

$|٣ - س|$: $٣ - س$ (س ≤ ٣)، $س - ٣$ (س ≥ ٣)

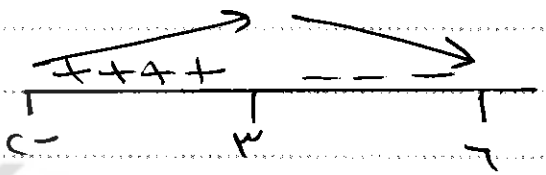


$ق(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & -٢ \le س \le ٣ \\ ٣ & ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

$ق(٣) = ٣$ ، $ق'(س) = ٢ - ٠ = ٢$ عند $س = ٣^+$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢ & -٢ < س < ٣ \\ \text{صفر} & ٣ < س < ٦ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$

القيم الحرجة $\{-٢\} \cup [٣، ٦]$



$ق(س)$ متزايد على $[-٢، ٣]$

$ق(س)$ ثابت على $[٣، ٦]$

مثال (١٤)

$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س < ١ \\ ٢س - ١ & ١ \le س \le ٣ \\ ٥ & ٣ < س < ٥ \end{cases}$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق(١) = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٢$

$\therefore$ ق غير موصولة عند $س = ١$

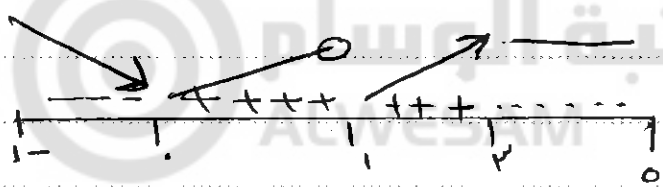
$ق(٣) = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٥$

$\therefore$ ق متصل عند $س = ٣$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < ١ \\ ٢ & ١ < س < ٣ \\ \text{صفر} & ٣ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & س = ١، ٣ \end{cases}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in$ المجال



ق متزايد $[٠، ١] \cup [٣، ٥]$

متناقص $[-١، ٠]$

ثابت $[١، ٢] \cup [٢، ٣]$

مكتبة الإسلام ACTVESLAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ١٥

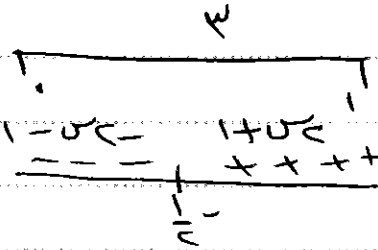
$$هـ(س) = \begin{cases} (س+٢)^{٢} - ٢ & س \leq ٠ \\ [س+٣] & ٠ < س < ١ \\ |س+١| & س \geq ١ \end{cases}$$

اوجد مجالات التزايد والتناقص في الفترة $[-٣، ٢]$

الحل

نعيد تعريف الاقتران

$[س+٣]$



$$هـ(س) = \begin{cases} (س+٢)^{٢} - ٢ & س \leq ٠ \\ ٣ & ٠ < س < ١ \\ س+١ & س \geq ١ \end{cases}$$

هـ متصل عند $س = ١$

هـ غير متصل عند $س = ٠$

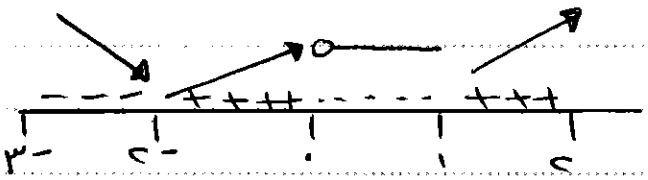
$$هـ'(س) = \begin{cases} ٢(س+٢) & س < ٠ \\ \text{صفر} & ٠ < س < ١ \\ ٢ & س > ١ \end{cases}$$

اصفار المشتقة $٢(س+٢) = ٠$

$\leftarrow س = -٢$

قيم س الحرجة هي

$\{٠، ١، -٣، -٢\} \cap (١، ٠)$



متناقص $[-٣، -٢]$

متزايد $[-٢، ٠] \cup [١، ٢]$

ثابت $(٠، ١)$

مثال ١٦

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{\frac{٤}{٥}} & س < ١ \\ س + \frac{٤}{س} & س \geq ١ \end{cases}$$

الحل

$هـ(١) = ٥$، $\lim_{س \to ١^{+}} (س + \frac{٤}{س}) = ٥$

$\lim_{س \to ١^{-}} س^{\frac{٤}{٥}} = ١$ غير متصل عند $س = ١$

$$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{٤}{٥} س^{-\frac{١}{٥}} & س < ١ \\ ١ - \frac{٤}{س^{٢}} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١، ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{٤}{٥ \sqrt[٥]{س^{٤}}} & س < ١ \\ \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢}} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١، ٠ \end{cases}$$

$\leftarrow$ تابع الحل

مكتبة الوسام AGHESAM
المعلم: ناجح الحسن الجمزاوي

$\therefore$ ا س^{٣} = ٠ ⟹ س = ٠ ∈ المجال

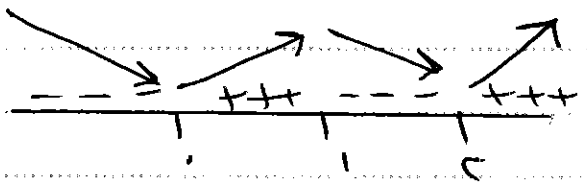
س^{٢} − ٤ = ٠ ⟹ س = ٢ ∈

س = −٢ ∉

س^{٢} = ٠ ⟹ س = ٠ نستبعد من

س ≠ ١

حيث س الحرجة هي ٠ ، ١ ، ٢



د متناقص على [−∞ ، ٠] ، [١ ، ٢]

د متزايد [٠ ، ١] ، [٢ ، ∞)

مثال (١٧)

د(س) = ٩س − جتاس

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

د متصل على ح ⟹ د′(س) = ٩ + جاس

٩ + جاس = ٠ ⟹ جاس ≠ −٩

مستحيل

لأن −١ ≤ جاس ≤ ١

−١ + ٩ ≤ ٩ + جاس ≤ ١ + ٩

٨ ≤ ٩ + جاس ≤ ١٠

د′(س) > ٠

د متزايد على ح

مثال (١٨)

د(س) = −٤س + جاس

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

د متصل وقابل للاشتقاق على ح

د′(س) = −٤ + جتاس = ٠

جتاس = ٤ مستحيل

−١ ≤ جتاس ≤ ١

−٤ −٤ −٤

−٥ ≤ د − ٤ + جتاس ≤ −٣ سالبة

متناقص على ح

مثال (١٩)

اذا كان د(س) = س^{٤} − ٦س^{٢} حيث س ∈ [−٢ ، ٢] اوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران د′(س)

الحل

د′(س) = ٤س^{٣} − ١٢س

د″(س) = ١٢س^{٢} − ١٢ = ٠

١٢(س^{٢} − ١) = ٠

س = ± ١

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٠)

اذا كان هـ(س) = هـ(س) لكل س ∈ ح فاثبت ان
هـ(س) - هـ(س) = ثابت

البرهان

نفرض ل(س) = هـ(س) - هـ(س)
بالاشتقاق
ل'(س) = هـ'(س) - هـ'(س)
وبما أن هـ'(س) = هـ'(س)
⇐ ل'(س) = صفر
⇐ هـ(س) - هـ(س) = ثابت

مثال (٢١)

اذا كان هـ، هـ اقترانين متصلين على [أ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ، ب) وكان كل من هـ، هـ متزايد على [أ، ب] وكان
ل(س) = هـ(س) + هـ(س)
فاثبت ان ل(س) متزايد على [أ، ب]

البرهان

ل(س) = هـ(س) + هـ(س)
ل'(س) = هـ'(س) + هـ'(س)
بما ان هـ متزايد ⇐ هـ'(س) > ٠

هـ متزايد ⇐ هـ'(س) > ٠
ل'(س) = هـ'(س) + هـ'(س)
⇐ ل'(س) > صفر على (أ، ب)
⇐ ل(س) متزايد على [أ، ب]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الخامس

القيم القصوى

نقصد بالقيم القصوى هي القيم الصغرى أو العظمى للاقتران

القيم القصوى ← عظمى ← محليه / مطلقه
القيم القصوى ← صغرى ← محليه / مطلقه

تعريف

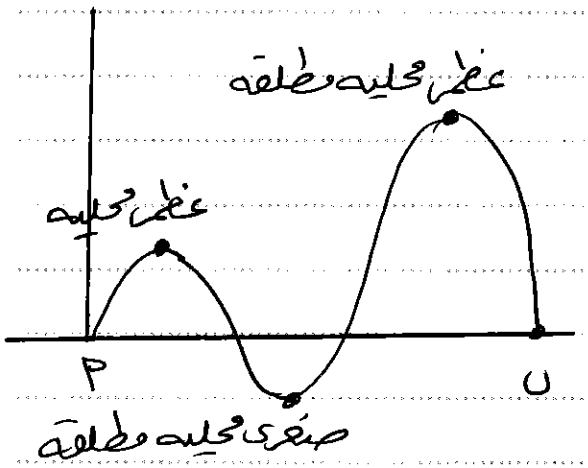
اذا كان f معرفاً على $[a, b]$ وكانت $s_1 \in [a, b]$

(١) نسمى $(s_1, f(s_1))$ نقطة عظمى محليه للاقتران $f(s)$، اذا امكن ايجاد فترة مفتوحة مثل $ف$ تحوي العدد s_1 بحيث ان $f(s_1) \geq f(s)$ لكل $s \in ف$

(٢) نسمى $(s_1, f(s_1))$ نقطة صغرى محليه للاقتران $f(s)$ اذا امكن ايجاد فترة مفتوحة مثل $ف$ تحوي العدد s_1 بحيث ان $f(s_1) \leq f(s)$ لكل $s \in ف$

(٣) نسمى $(s_1, f(s_1))$ نقطة عظمى مطلقه للاقتران $f(s)$ اذا كانت $f(s_1) \geq f(s)$ لكل $s \in [a, b]$

(٤) نسمى $(s_1, f(s_1))$ نقطة صغرى مطلقه للاقتران $f(s)$ اذا كانت $f(s_1) \leq f(s)$ لكل $s \in [a, b]$



القيمة العظمى المحليه المطلقه هي أكبر القيم العظميات المحليه

القيمة الصغرى المحليه المطلقه هي اصغر القيم الصغريات المحليه

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظات هامة

① عظمى محليه : هي اعلى نقطه بالنسبه لما حولها (قمة)

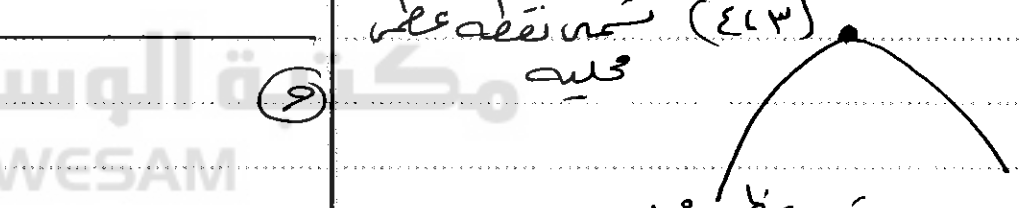
② صغرى محليه : هي اصغر نقطه بالنسبه لما حولها (قاع)

③ عظمى مطلقه : هي اعلى نقطه على الاقتران في الفتره $[a, b]$

④ صغرى مطلقه : هي اقل نقطه على الاقتران $[a, b]$

⑤ الاطراف ممكن ان تكون محليه ولكن احتمال ان تكون مطلقه

⑥ كل قصوى مطلقه هي محليه وليس كل قصوى محليه مطلقه باستثناء الاطراف

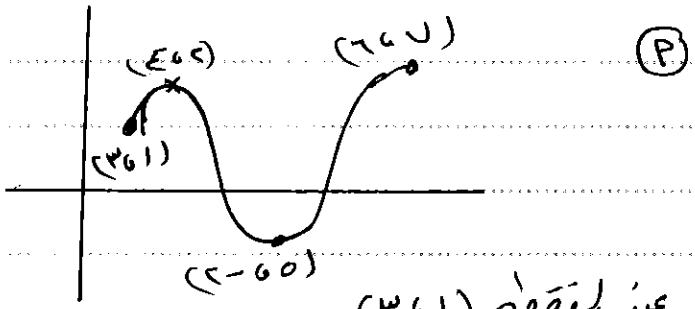


تسمى نقطه عظمى محليه

٤ : قيمه عظمى محليه
٣ : الاحداث التي للنقطه العظمى المحليه

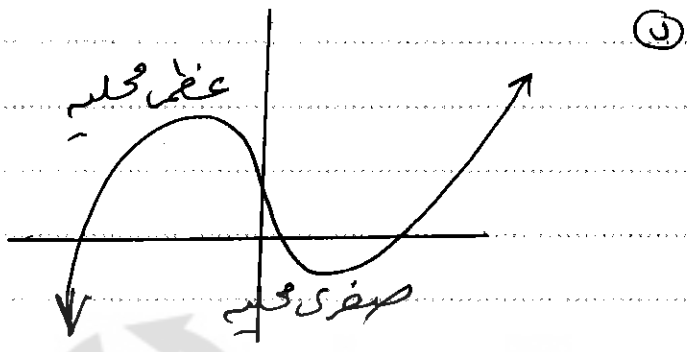
مثال ①
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ حدد القيم القصوى وبين نوعها :

(P)

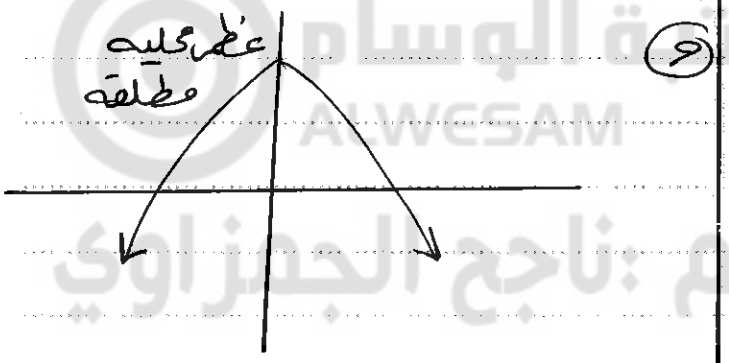


عند النقطه (٣،١)
قيمه صغرى محليه وقيمتها = ٣
عند النقطه (٤،٢) عظمى محليه = ٤
عند النقطه (٥٥،٢-) صغرى محليه ومطلقه
وتساوي = ٢-
عند النقطه (٧،٦) عظمى مطلقه
وقيمتها = ٦

(ب)

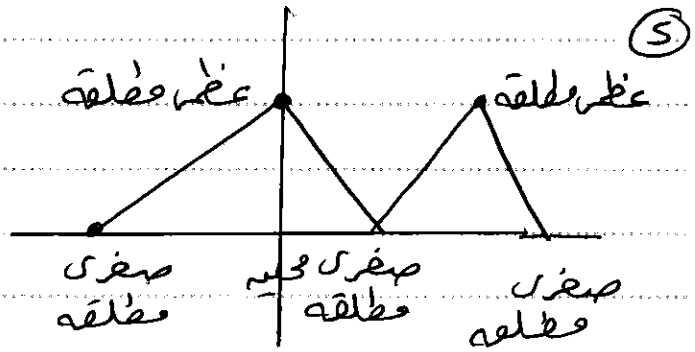


(ج)

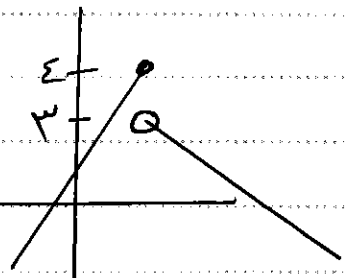


مكتبة الوسام ALWESAM
الاعلام: ناجح الجمزاوي

(ك)

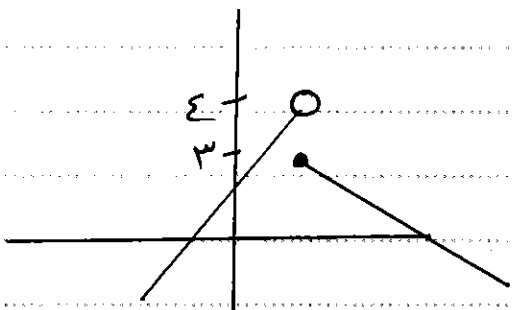


(هـ)



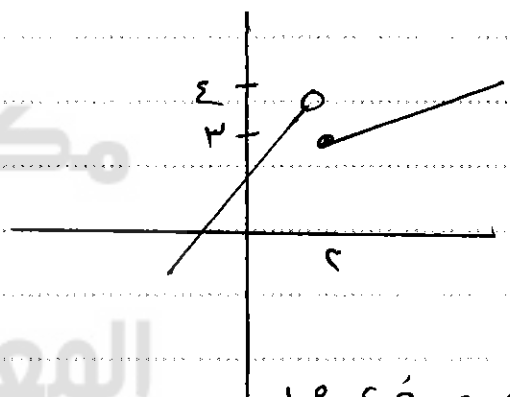
(٤،٣) نقطة عظمى محلية مطلقة

(و)



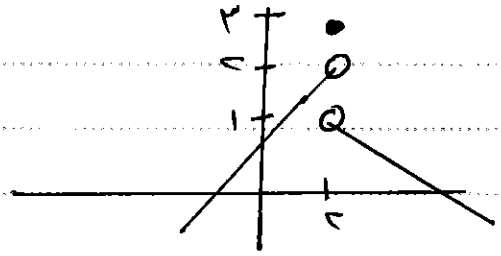
لا يوجد قيم قصوى

(ز)



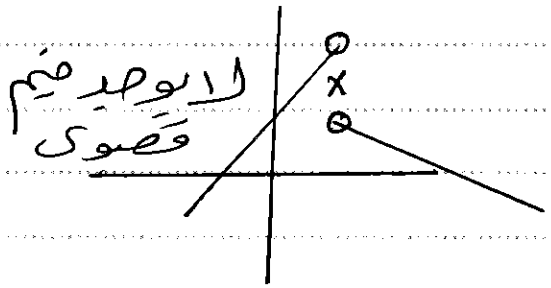
(٣،٢) صغرى محلية

(ع)

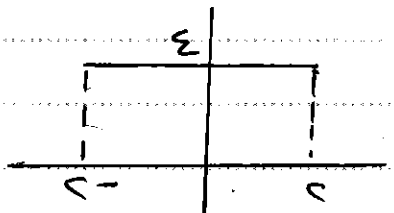


(٣،٢) عظمى محلية مطلقة

(ل)

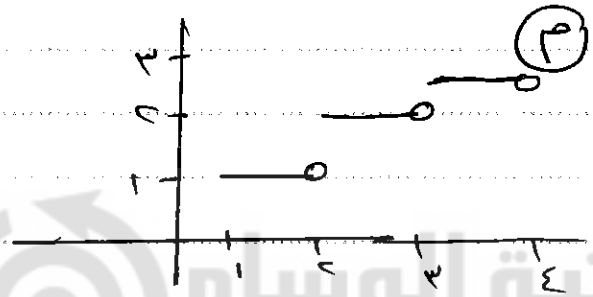


(ط)



٤ قيمة قصوى محلية مطلقة
د(س١) = د(س٢) لكل س ∈ ف

(م)



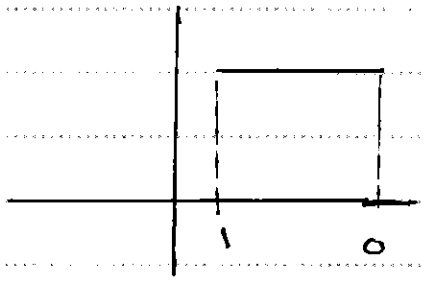
٣ : قيمة عظمى مطلقة
١ : قيمة صغرى مطلقة
١،٢،٣ قيم صغرى محلية

مكتبة البوسام
Alwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

الرسم في كل مما يلي يمثل ق(س) حد الاحداثي السيني للقيم القصوى

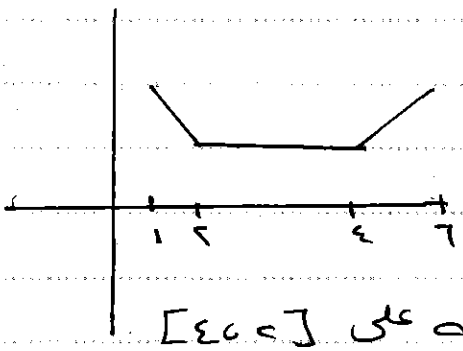
①



عظمى محليه وصغرى محليه لكل س ∈ (١، ٥)

عظمى مطلقه وصغرى مطلقه لكل س ∈ [١، ٥]

②

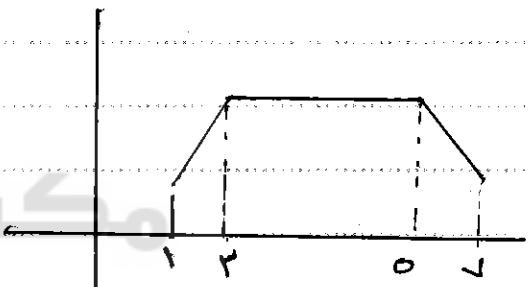


صغرى محليه على [٢، ٤]

وعظمى مطلقه عند س = ١، ٦

صغرى مطلقه على [٢، ٤]

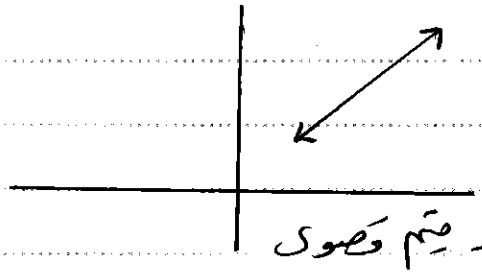
③



عظمى محليه ومطلقه على [٣، ٥]

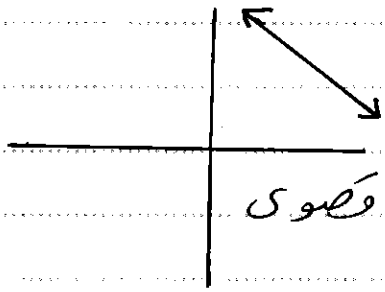
صغرى مطلقه عند س = ١، ٧

④



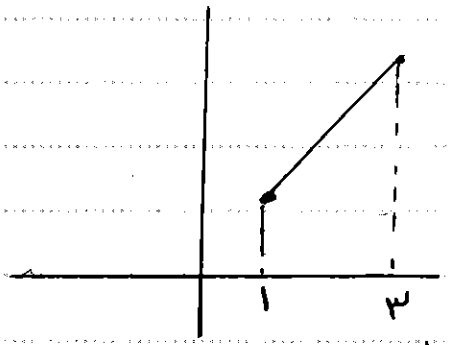
لا يوجد قيم قصوى

⑤



لا يوجد قيم قصوى

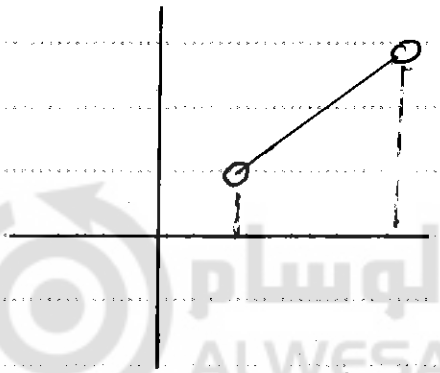
⑥



صغرى مطلقه عند س = ١

عظمى مطلقه عند س = ٣

⑦



لا يوجد قيم قصوى

مكتبة الوسام ALWESAM
الاعلام: ناجح الجمزاوي

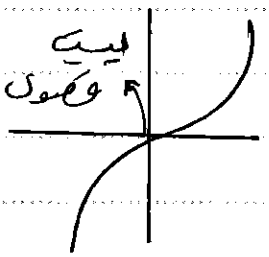
نظرية

اذا كانت (ح، ه(ح)) نقطة قصوى فان
هـ(ح) = صفر أو هـ(ح) غير موجودة

عكس النظرية

اذا كانت هـ(ح) = صفر أو
هـ(ح) غير موجودة فليس
بالضرورة ان تكون النقطة
(ح، هـ(ح)) قصوى

مثال



هـ(س) = س٣
هـ(س) = ٣س٢ = ٠
هـ(٠) = ٠
ولكن (٠، ٠) ليست قصوى

ملاحظة

النقط القصوى توجد عند
① القمم والقيعان
② الأطراف
③ نقط الانفصال
④ الرؤوس المدببة
وتعريفها عندها المشتقة = صفر
أو غير موجودة

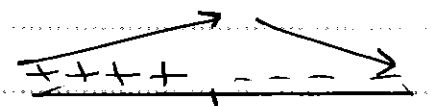
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

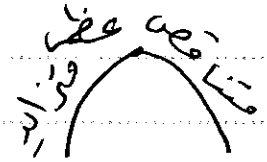
اختبار المشتقة الأولى لمعرفة القيم القصوى

نظرية

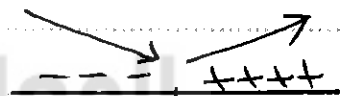
اذا كان ق(س) متصلاً على [م، ب] وقابل للاشتقاق على (م، ب) وكانت (س١، ق(س١)) نقطة حرجة فان

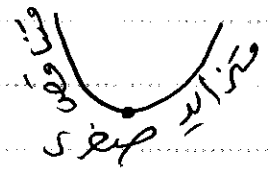
① اذا كانت ق'(س) ≥ ٠ لكل س < س١ وكانت ق'(س) ≤ ٠ لكل س > س١ فان ق(س١) قيمة عظمى محلية للاقتران





② اذا كان ق'(س) ≤ صفر لكل س < س١ وكان ق'(س) ≥ صفر لكل س > س١ فان ق(س١) قيمة صغرى محلية لـ ق





ملاحظات هامة حول القيم القصوى

① كل نقطة قيمة قصوى مطلقة تكون محلية لكن ليس كل محلية مطلقة

② كل نقطة قيمة قصوى تكون نقطة حرجة لكن ليس كل حرجة قصوى

③ اذا كان ق(س) متصلاً على [م، ب]

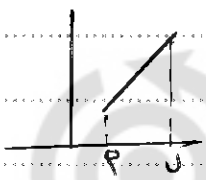
④ عند بداية فترة التزايد أو نهاية فترة التناقص يوجد نقطة قيم صغرى محلية

⑤ عند بداية فترة التناقص أو نهاية فترة التزايد يوجد نقطة قيم عظمى محلية

④ اذا كان ق(س) متزايد على [م، ب]

① (م، ق(م)) صغرى مطلقة

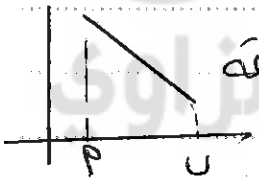
② (ب، ق(ب)) عظمى مطلقة



⑤ اذا كان ق(س) متناقص على [م، ب]

① (م، ق(م)) عظمى مطلقة

② (ب، ق(ب)) صغرى مطلقة



مكتبة الوسام
Alwesam
الوسام الناجح الجمزاوي

⑥ عند نقط القيم القصوى تكون المشتقه صفر أو غير موجودة

⑦ في حالة وجود أكثر من نقطة عظمى فان الاحداثي الصادي الأكبر هو الذي يقرر العظمى المطلقه

⑧ في حالة وجود أكثر من نقطة صغرى فان الاحداثي الصادي الأصغر هو الذي يقرر الصغرى المطلقه

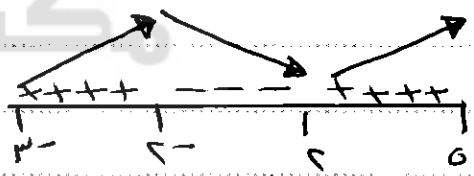
مثال ①

$ق(س) = س^3 - ٢س + ٢$ حيث $س \in [-٣، ٥]$ اوجد قيم س المرجه ثم اختبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحليه والمطلقه

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢ = ٠$

$٣(س^2 - ٤) = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$



عند $س = -٢$ قيمة عظمى محليه $= ١٨$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى محليه

$ق(٢) = -١٢$

عند $س = -٣$

$ق(-٣) = ١١$ نشطب لانه نهاية القمره لاتكون إلا مطلقه

عند $س = ٥$

$ق(٥) = ٦٧$ عظمى مطلقه

ملاحظه

نلاحظ في المثال السابق انه عند $س = -٣$ توجد قيمة صغرى محليه وهذا لايجوز الأطراف تكون عندها مطلقه فقط لذلك نشطب.

مثال ②

$ق(س) = ٣س - س^3$ على $[-٣، ٣]$ جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ وحدد نوعها ان وجدت.

الحل

$ق$ متصل $[-٣، ٣]$ وقابل للاشتقاق على $(-٣، ٣)$

$ق'(س) = ٣ - ٣س^2 = ٠$

$٣(١ - س^2) = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$

$ق(-٣) = ٨$ قيمة عظمى مطلقه طرف فتره

$ق(١) = ٢$ قيمة عظمى محليه

$ق(-١) = -٢$ قيمة صغرى محليه

$ق(٣) = -١٨$ صغرى مطلقه طرف فتره

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

$f(س) = ٥$ جد قيم س الحرجة وجد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

الحل

$f'(س) =$ صفر ..... غير معرف

ثابت

$-\infty$ ، $+\infty$

قيم س الحرجة هي ح.

القيمة المطلقة للاقتران هي ٥ عند اي نقطة في ح

اصغر قيمة للاقتران هي ٥ عند اي نقطة في ح

ح : مجموعة من القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة للاقتران f

مثال (٤)

$f(س) = -٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣٦س + ١$

الحل

$f'(س) = -٦س^{٢} - ٦س + ٣٦$

بالقسمة على -٦

$س^{٢} + س - ٦ = ٠$

$(س+٣)(س-٢) = ٠$ ، $س = -٣$ ، $س = ٢$

$f(-٣)$ صغرى محلية

$f(٢) = ٥٤$ عظمى محلية

مثال (٥)

اذا كان $f(س) = س(٤ - س)^{٣}$ ، $س \in [-١، ٤]$ فجد فترات التزايد والقيم القصوى

الحل

f متصل وقابل للاشتقاق

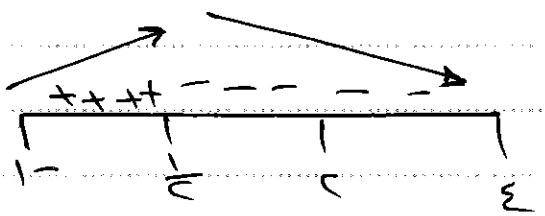
$f'(س) = س \times ٣(٤-س)^{٢} \times -١ + (٤-س)^{٣} \times ١$

$-٣س(٤-س)^{٢} + (٤-س)^{٣} = ٠$

$(٤-س)^{٢}(-٣س + ٤ - س) = ٠$

$س = ٤$ ، $-٤س + ٤ = ٠$

$س = \frac{١}{٤}$



$f(س)$ متزايد على $[-١، \frac{١}{٤}]$

عند $س = \frac{١}{٤}$ قيمة عظمى مطلقة

وهي $f(\frac{١}{٤}) = \frac{٢٧}{١٦}$

$f(-١) = -٧ <$ لا يوجد

$f(٤) = -٢٠٤$ قيمة صغرى مطلقة

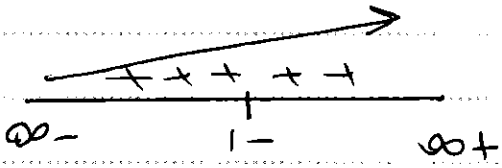
مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$ه(س) = (س+1)^3$ جد القيم القصوى المحلية.

الحل

$ه'(س) = 3(س+1)^2 \leftarrow س = -1$



لا يوجد قيم قصوى
$ه$ متزايدة على $ح$.
$س = -1$ نقطة حرجة لكنه لا يوجد عندها قيمة قصوى.

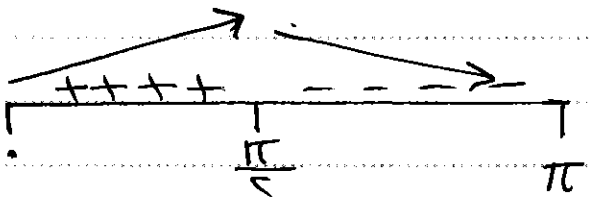
مثال ⑦

جد نقط القيم القصوى المحلية لاقتران $ه(س)$ وحدد نوعها
$ه(س) = \sqrt{جاس}$ $\quad س \in [0, 2\pi]$

الحل

$ه'(س) = \frac{جتاس}{2\sqrt{جاس}}$

البسط = صفر $\leftarrow$ جتاس = ٠
$س = \frac{\pi}{2} \notin$ $\quad س = \frac{3\pi}{2} \notin$
المقام = صفر
جاس = ٠ $\quad س = 0 \in \pi \in$
$\notin \pi <$



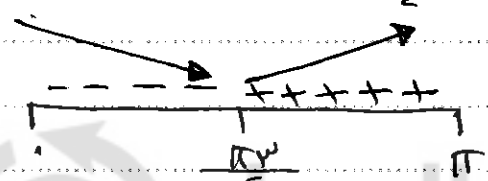
$ه(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{جا\frac{\pi}{2}} = 1$
قيمة عظمى مطلقة
$ه(0) = 0$ قيمة صغرى مطلقة
$ه(\pi) = 0$ قيمة صغرى مطلقة

مثال ⑧

$ه(س) = جتاس - جاس$
$س \in [0, 2\pi]$ أوجد القيم القصوى

الحل

$ه(س)$ متصل $[0, 2\pi]$، قابل للاشتقاق على $(0, 2\pi)$
$ه'(س) = -جاس - جتاس = 0$
$\leftarrow -جاس = جتاس$ بالقسمة على جتاس
$-ظاس = 1 \leftarrow ظاس = -1$
$س = \frac{3\pi}{4}$ أو $\frac{7\pi}{4}$ مرفوض



$(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2})$ صغرى محلية مطلقة
$(1, 0)$ عظمى مطلقة
عند $س = \pi$ لا يوجد

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

$ق(س) = س^3 - ١٢س - ٢$

جد أكبر واصغر قيمة للاقتران ق على الفترات التالية

① ح ② $[-٣، ٣]$

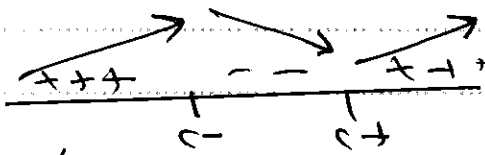
③ $[٠، ٤]$ ④ $(٣، ٤)$

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢$

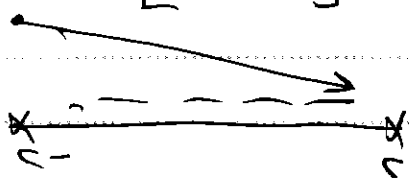
$٣(س^2 - ٤) = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$

① على ح



لا يوجد مطلقاً ؛ لا يوجد أكبر أو اصغر قيمة

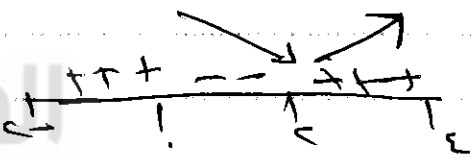
② على $[-٣، ٣]$



أكبر قيمة عند $س = -٣$ وهي $ق(-٣) = ١٤$

اصغر قيمة عند $س = ٣$ وهي $ق(٣) = -١٨$

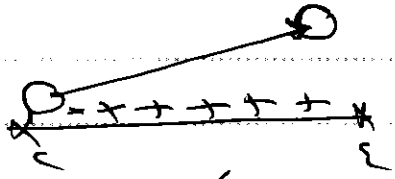
③ على $[٠، ٤)$



اصغر قيمة $ق(٢) = -١٨$

لا يوجد أكبر قيمة

④ $(٣، ٤)$



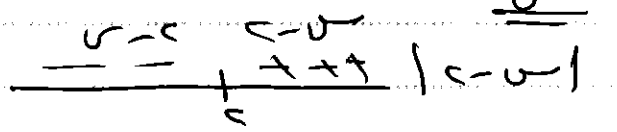
لا يوجد أكبر قيمة أو اصغر قيمة

$ق(س) = |س^2 - ٤| \quad س \in ح$

اوجد نقط ايجاد القصوى المحلية للاقتران.

الحل

$|س^2 - ٤| = \begin{cases} س^2 - ٤ & س \le -٢ \text{ أو } س \ge ٢ \\ -س^2 + ٤ & -٢ < س < ٢ \end{cases}$



$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < -٢ \text{ أو } س > ٢ \\ -٢س & -٢ < س < ٢ \end{cases}$

$ق'(-٢) = ٠$ لأن $ق'(-٢^-) = -٤$ ، $ق'(-٢^+) = ٤$

$ق'(٢) = ٠$ لأن $ق'(٢^-) = -٤$ ، $ق'(٢^+) = ٤$

متصل

$ق'(س) = \begin{cases} ٤س - ٣س^2 & س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ ٣س^2 - ٤س & س > ٠ \end{cases}$

$٤س - ٣س^2 = ٠$

$س(٤ - ٣س) = ٠$

$س = ٠ \in ح \quad ، \quad س = \frac{٤}{٣} \in ح$

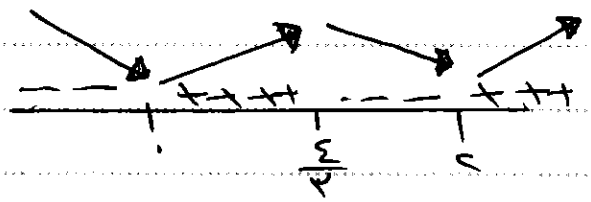
يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$٣س^{٢} - ٤س = ٠$

$س(٣س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \in$ المجال $\quad س = \frac{٤}{٣} \in$ المجال



$ق(\frac{٤}{٣}) = -\frac{٣٢}{٢٧}$ عظمى محلية

$ق(٠) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

$ق(٤) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

مثال (١١)

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤س + ٤ & س < ٣ \\ \frac{١٥}{س} & س \geq ٣ \end{cases}$$

الحل

$ق(٣) = \frac{١٥}{٣} = ٥$

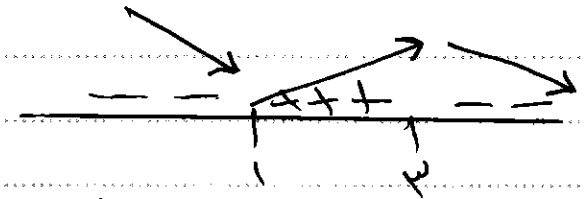
$\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{١٥}{س} = ٥$ ، $\lim_{س \to ٣^{-}} س^{٢} - ٤س + ٤ = ق(٣) = ٥$

متصل عند $س = ٣$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & س < ٣ \\ -\frac{١٥}{س^{٢}} & س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$$

$٢س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢ \in$ المجال

$-\frac{١٥}{س^{٢}} \neq ٠$ لا يوجد $\notin$ المجال



$ق(١) = ١$ صغرى محلية $(١، ١)$

$ق(٣) = ٥$ عظمى محلية $(٥، ٣)$

مثال (١٢)

أوجد نقط القيم القصوى للاقترانات

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & س < ٢ \\ ٥ - ٧س & س \geq ٢ \end{cases}$$

$ق(٢) = -٩$

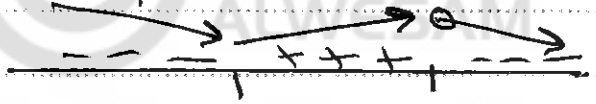
$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = -٩ \Leftarrow$ حتى $س \to ٢$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٥ \Leftarrow$ حتى $س \to ٢^{+}$

غير متصل $\Leftarrow ق(٢)$ غير موجودة

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ -٧ & س > ٢ \\ \text{غير موجودة} & س = ٢ \end{cases}$$

$٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in$ المجال



$ق(٠) = ١ \Leftarrow (٠، ١)$ صغرى محلية

$س = ٢ \Leftarrow ق(٢) = -٩$ لا يوجد

مثال (١٣)

اوجد القيم القصوى للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٥ & -٢ \le س \le ٣ \\ ١٠ - ٢س & ٣ < س \le ٧ \end{cases}$$

الحل

$ق(٣) = ١٤$

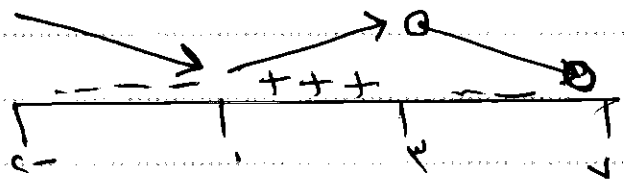
$ق(س) = ١٤$ عندما $س = ٣$

$ق(س) = ٤$ عندما $س \to ٣^+$

$ق$ غير متصل عند $س = ٣$

$ق$ غير موجودة عند $س = ٣$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & -٢ < س < ٣ \\ -٢ & ٣ < س < ٧ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$$



$س = ٠ \in$ المجال

$ق(٢) = ١٤$ $(١٤، ٢)$ عظمى محلية ومطلقة

$ق(-٢) = ٩$

عندما $س = ٠$ يوجد صغرى محلية

وبما أنها تقل عندما $س = ٠$ هي صغرى مطلقة

لمعرفة ذلك نقارنها مع ٧

$ق(٧) = -٤$ ، $ق(٠) = ٥$

$(٠، ٥)$ صغرى محلية فقط

مثال (١٤)

باستخدام المشتقة بين ان

$-١٥ \le س^3 - ٣س^2 + ٥ \le ٥$

$س \in [-٢، ٣]$

الحل

نفرض ان $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ٥$

ونريد اثبات ان (٥) قيمة عظمى مطلقة وان (-١٥) قيمة صغرى مطلقة

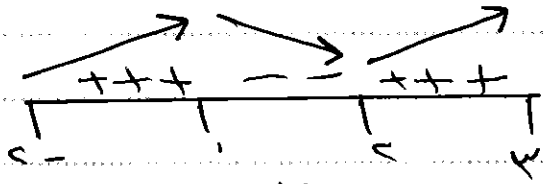
$ق(س)$ متصل على $[-٢، ٣]$

$ق$ قابل للاشتقاق على $(-٢، ٣)$

$ق'(س) = ٣س^2 - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$



$ق(٠) = ٥$ عظمى مطلقة

$ق(٣) = ٥$ (-١٥) قيمة صغرى مطلقة

$ق(-٢) = -١٥$

$ق(٢) = ١$

$-١٥ \le ق(س) \le ٥$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة

اذا كانت (أ ، ب) نقطة قصوى فان

① ق'(أ) = ب

② ق'(أ) = صفر أو غير موجودة

وعندما يكون ق(س) كثير حدود فان ق'(أ) = صفر

مثال (١٥)

اذا كان ق(س) = ٣أ س^٣ − ١٢ س

وكان له قيمة صغرى محلية عند س = ١ اوجد قيمة أ

الحل

ق'(س) = ٣أ س^٢ − ١٢

ق'(١) = ٠

٣أ − ١٢ = ٠ ← أ = ٤

مثال (١٦)

اذا كان للاقتران

ق(س) = أ س^٢ − ب س + ٥

نقطة قصوى محلية هي (١ ، ٢)

اوجد أ ، ب

الحل

ق'(س) = ٢أ س − ب

ق'(١) = ٠ ← ٢أ − ب = ٠ ... ①

ق(١) = ٢ ← أ − ب + ٥ = ٢

أ − ب = −٣ ... ②

بطرح ① − ② ← أ = ٣

بالتعويض ٣ − ب = −٣ ← ب = ٦

مثال (١٧)

اذا كان ص^٣ = س^٤ ، س ∈ [−١ ، ٢]

اوجد القيم القصوى

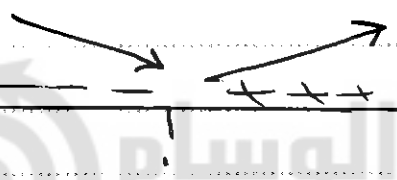
الحل

ص^٣ = س^٤ ⇐ ص = ∛(س^٤)

ص = س^(٤/٣)

ص' = (٤/٣) س^(١/٣)

ص' = ٠ ← س = ٠



ص(٠) = ٠ : صغرى محلية مطلقة

ص(٢) = ∛١٦ = عظمى مطلقة

ص(−١) = ١ لا يوجد

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

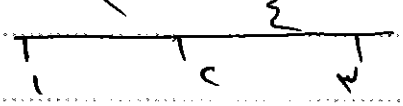
مثال (١٨)

$$ق(س) = \begin{cases} [س+٢] & اذا\ س < ٣ \\ |س-١٥| & س \geq ٣ \end{cases}$$

جد قيم س الحرجة، فترات التزايد والتناقص القيم القصوى المحلية والمطلقة.

الحل

$[س+٢]$



$|س-١٥|$ $\quad س-٥ \quad | \quad ٥-س$

٥

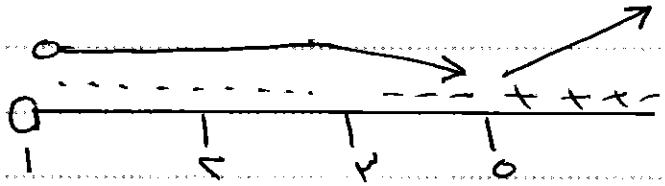
$$ق(س) = \begin{cases} ١ & س \in]-\infty, ٢[\\ ٢ & س \in]٢, ٣[\\ ٣ & س \in]٣, ٥[\\ ٥-س & س \in]٥, ١٥[\\ س-٥ & س \geq ١٥ \end{cases}$$

ق(س) غير متصل عند س = ٣، ٥

$$ق(س) = \begin{cases} صفر & اذا\ س < ٢ \\ صفر & ٢ < س < ٣ \\ -١ & ٣ < س < ٥ \\ ١ & س > ٥ \\ عند\ وجودة & س = ٥، ١٥ \end{cases}$$

قيم س الحرجة

$\{٢، ٣، ٥، ١٥\}$



ق(س) ثابت في الفترات

$]-\infty، ٢[$ ، $]٢، ٣[$

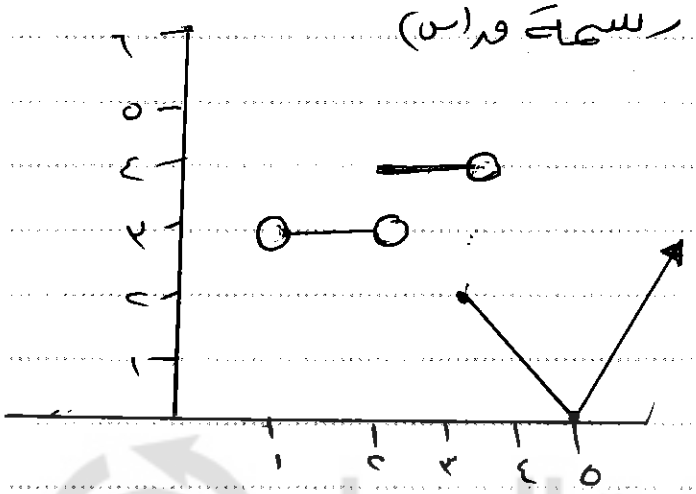
ق(س) متناقص في $]٣، ٥[$

ق(س) متزايد في $]٥، \infty[$

القيم $]-\infty، ٢[$ ، $]٢، ٣[$ محصورة بين القيم العظمى والصغرى

$ق(٢) = ق(٣) = ٣$ ليست قيم عظمى محلية أو صغرى

رسم ق(س)



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٩)

$ق(س) = [\frac{س}{٣} - ١]$ ، $س \in [-١، ٩]$

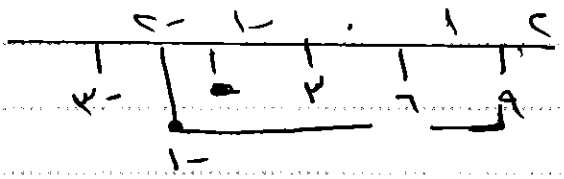
جد قيم س الحرجة والقيم القصوى

الحل

طول المدرجة $= ٣$ ، $\frac{س}{٣} - ١ = ٠$

$\frac{س}{٣} = ١$

$س = ٣$



$ق(س) = \begin{cases} -٢ & -١ \le س < ٠ \\ -١ & ٠ \le س < ٣ \\ صفر & ٣ \le س < ٦ \\ ١ & ٣ \le س < ٩ \\ ٢ & س = ٩ \end{cases}$

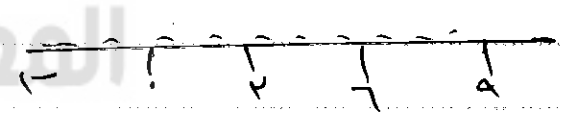
$ق'(س) = \begin{cases} صفر & -١ < س < ٠ \\ صفر & ٠ < س < ٣ \\ صفر & ٣ < س < ٦ \\ صفر & ٦ < س < ٩ \end{cases}$

$ق(س)$ غير متصل عند $س = ٠، ٣، ٦$

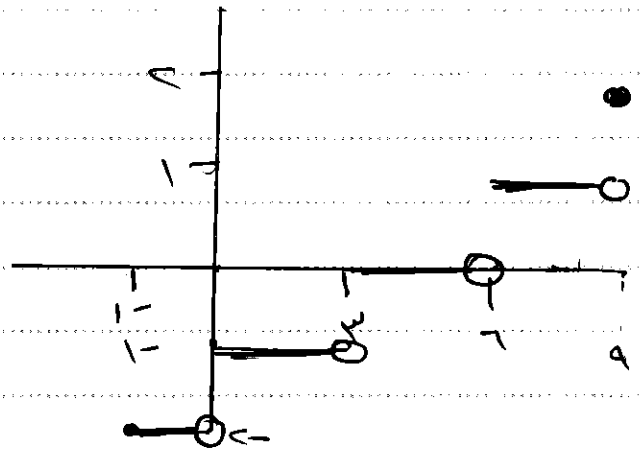
$ق'(س)$ غير موجودة عند

$س = -١، ٠، ٣، ٦، ٩$

قيم س الحرجة هي $[-١، ٩]$



لا نستطيع الحكم حتى اختبار المشتقة الأولى لذلك نرسم الاقترانات



عليه اختبار كل فترة جزئية تحوي قيم عظمى أو صغرى محلية والقيم هي

$ق(-١) = ٠، ق(٠) = ١، ق(٦) = ٠، ق(٩) = ٢$

أما المطلقان فالفترة $[-١، ٠)$ تحوي مجموعة من القيم الصغرى المحلية والمطلقة وهي -٢

وعند $س = ٩$ توجد قيمة عظمى مطلقة $= ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٠)

$ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

جد قيم س الحرجة ، مجالات التزايد والتناقص القيم القصوى

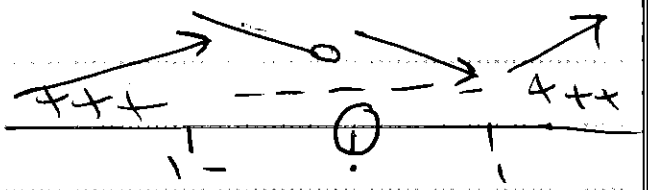
الحل

ق(س) متصل على ح - {٠}
وقابل للاشتقاق عليه

$ق'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{س^{٢}} = ١$

$\Leftarrow س^{٢} = ١ \leftarrow س = \pm ١$

قيم س الحرجة {١ ، -١}



ق(س) متزايد $(-\infty ، -١] ، [١ ، \infty)$
متناقص $[-١ ، ٠) ، (٠ ، ١]$

$(-١ ، ق(-١))$ قيمة عظمى محلية
$= (-١ ، -٢)$

$(١ ، ق(١)) = (١ ، ٢)$ صغرى محلية
لا يوجد قيم قصوى مطلقة

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم :ناجح الجمزاوي

إيجاد التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة من الرسم

① اذا كانت الرسمة للأقتران ه(س)

② اذا كان الأقتران صاعد يكون متزايد ، واذا كان الأقتران هابط (نازل) يكون الأقتران متناقص

③ تكون النقط الحرجة للأقتران ه(س) عند الرؤوس المدببة اطراف القترات ، نقاط الانفصال التي ∈ المجال ، القيم والقيعان وكذلك القيم القصوى .

مثال

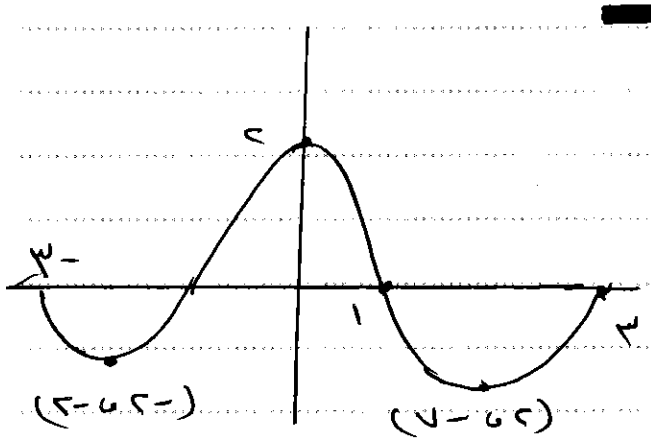
اذا كان الشكل المجاور لمنحنى ه(س) المعرف على [-٣ ، ٣] اوجد

① مجالات التزايد والتناقص

② القيم القصوى

③ النقط الحرجة

④ ه(٠) ، ه(٢) ، ه(-٢) ، ه(٣)



الحل

① ه متزايد على [-٢ ، ٠٦-٢] ، [٢ ، ٣]
ه متناقص [-٣ ، ٠٦-٢] [٠٦٢ ، ٣]

② (-٢ ، ٠٦-٢) صغرى محلية
(٢ ، ٠٦٢) عظمى محلية مطلقة
(٠٦-٢ ، ٠٧) صغرى محلية مطلقة

③ النقط الحرجة
(-٣ ، ٠٦٣) ، (-٢ ، ٠٦-٢) ، (٢ ، ٠٦٢)
(٠٦-٢ ، ٠٧) (٠٦٣ ، ٣)

④ ه(٠) = ٠
ه(٢) = ٠ مماسات افقية
ه(-٢) = ٠
ه(٢) غير موجودة طرف فترة

مكتبة نسيم AlwesAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

② اذا كانت الرسمة تمثل ق'(س)

لايجاد مجالات التزايد والتناقص من خلال رسمة ق'(س) نتبع الخطوات التاليه

① نجد النقط الحرجه : وهي اطراف الفترات ، نقاط الانفصال نقاط تقاطع ق'(س) مع محور السينات

② نرسم خط الاعداد ونضع عليه النقط الحرجه

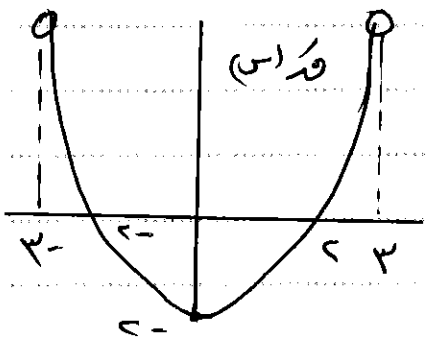
③ نعين اشارة ق'(س) على خط الاعداد وذلك
ⓐ نوعه محور السينات - ق' موجبه

ⓑ تحت محور السينات ق' سالبه

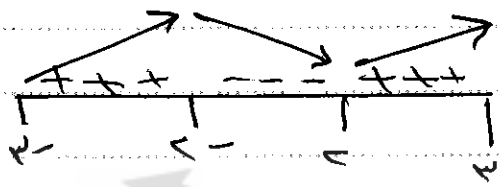
④ نجد المطلوب

مثال ①

الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) حيث ق'(س) معرف على [-٣، ٣] اوجد
① مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)
② القيم القصوى
③ النقط الحرجه
④ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق'(س)
⑤ النقط القصوى المحليه للاقتران ق(س)



الحل



ق'

① ق متزايدة على [-٣، -٢]، [٢، ٣]
ق متناقصة على [-٢، ٢]

② ق(-٢) قيمة عظمى محلية
ق(٢) قيمة صغرى محلية

← يتبع الحل

مكتبة نيوسام NEWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

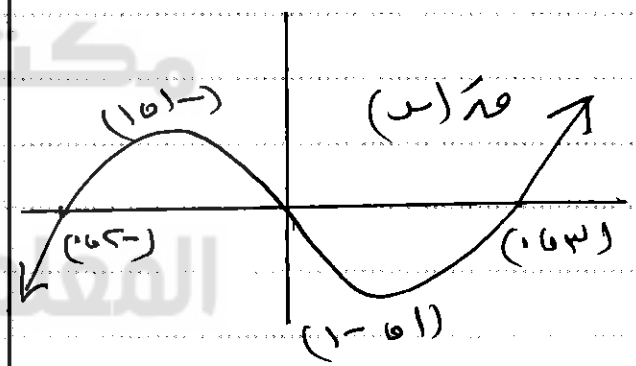
③ $(-٣، ق(-١))$ ، $(-٢، ق(-٢))$
$(٢، ق(١))$ ، $(٣، ق(٣))$
نقط حرجه

④ نتعامل مع الرسم كما لو كانت
$ق = ق(س)$ لـ $ق(س)$
$ق(س)$ متزايد $[٠، ٢]$
$ق(س)$ متناقص $[-٣، ٠]$
$[٢، \infty)$ نقطه صغرى محليه
مطلقه لـ $ق(س)$

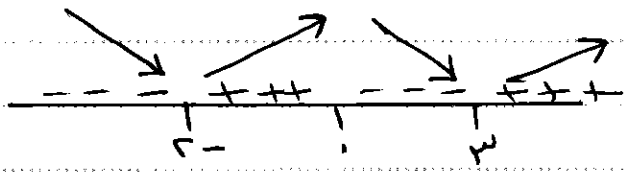
مثال ④

الشكل المجاور يمثل منحنى إشتقاقه الأول للأقتران $ق(س)$ المعرف على ع حيث مايلي

① مجالات التزايد والتناقص لـ $ق$
② النقط القصوى المحليه لـ $ق(س)$
③ قيم س الحرجه لـ $ق(س)$
④ مجالات التزايد والتناقص لـ $ق(س)$
⑤ النقط القصوى المحليه لـ $ق(س)$



الحل



① $ق(س)$ متناقص $[-\infty، -٢]$ ، $[٢، ٠]$
$ق(س)$ متزايد $[-٢، ١]$ ، $[٣، \infty)$

② $(-٢، ق(-٢))$ ، $(٢، ق(٣))$
نقط صغرى محليه
$(١، ق(١))$ نقطة عظمى محليه

③ قيم س الحرجه $\{-٢، ١، ٢، ٣\}$

④ $ق(س)$ متزايد $(-\infty، -١]$
$[١، \infty)$
$ق(س)$ متناقص $[-١، ١]$

⑤ $(-١، ق(-١))$ قيمه عظمى محليه لـ $ق(س)$
$(١، ق(١))$ قيمه صغرى محليه لـ $ق$

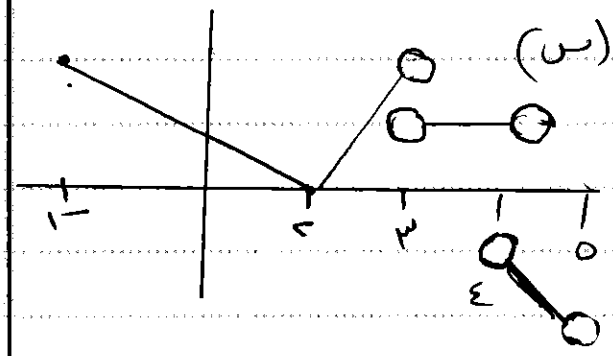
مكتبة الوسام ALWESAM
التعليم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

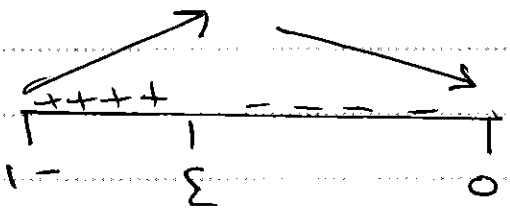
الشكل الجانبي يمثل منحنى $هـ(س)$ المعرف على $[-١، ٥]$ اوجد

① فترات التزايد والتناقص لـ $هـ$

② قيم س الحرجة لـ $هـ$



الحل



$هـ$ متزايد على $[-١، ٤]$

$هـ$ متناقص على $[٤، ٥]$

قيم س الحرجة هي

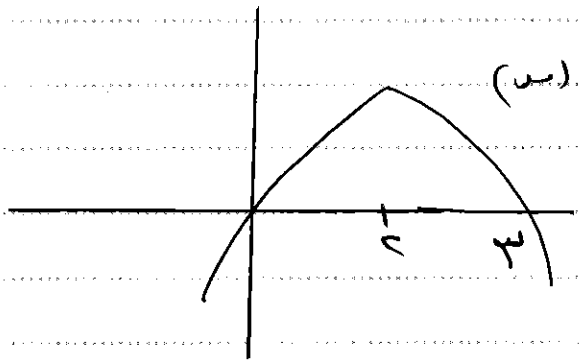
$\{-١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$

مثال ④

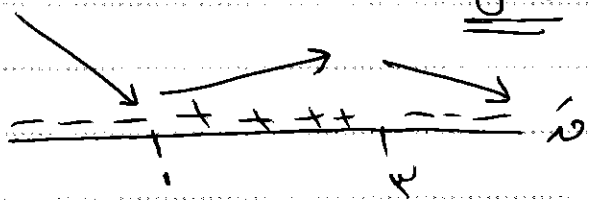
بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $هـ(س)$ اوجد مايلي

① فترات التزايد والتناقص لـ $هـ(س)$

② قيم س التي يكون عندها $هـ'(س)$ قيم قصوى محلية



الحل



$هـ$ متناقص على $(-∞، ١]$ و $[٣، ∞)$

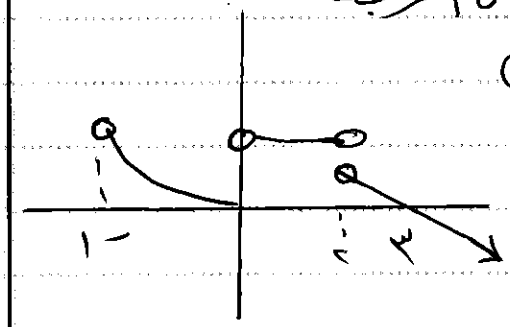
$هـ$ متزايد على $[١، ٣]$

$(١، هـ(١))$ تمثل صغرى محلية

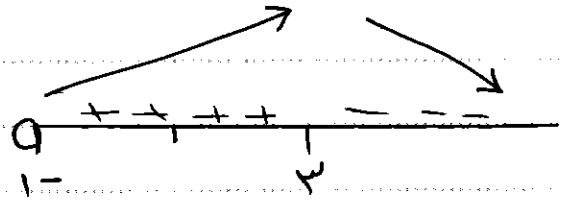
$(٣، هـ(٣))$ تمثل عظمى محلية

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤
عمل الشكل المجاور لمنحنى المشتقة الأولى لاقتران $f(x)$ أوجد
① مجالات التزايد والتناقص
② القيم القصوى
③ نقط الحرجة
$f(x)$



الحل



① متزايد $(-1, 3]$
متناقص $[3, \infty)$

② عند $(3, f(3))$ قيمة عظمى محلية

③ النقط الحرجة
$س = \{-1, 3\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

التزايد والتناقص

① تدريب ① ص ١٧٨

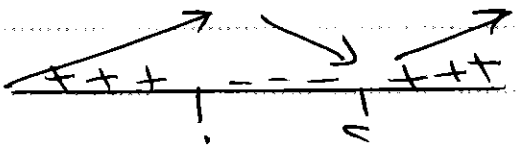
صدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س٣ - ٣س٢ + ١

الحل

ق'(س) = ٣س٢ - ٦س = ٠

٣س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢ ← ح



تزايد (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

متناقص [٠ ، ٢]

---

② تدريب ② ص ١٧٩

صدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = جتا٢س

س ∈ [٠ ، ٢π]

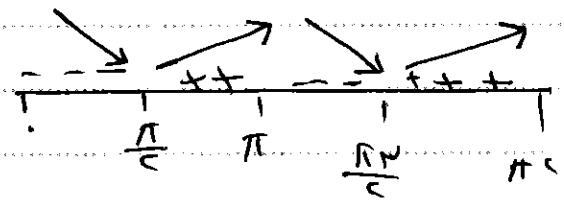
الحل

ق'(س) = -٢ جا٢س = ٠

جا٢س = ٠

٢س = π ، ٢π ، ٣π

س = π/٢ ، π ، ٣π/٢



متناقص [٠ ، π/٢] ، [π ، ٣π/٢]

تزايد [π/٢ ، π] ، [٣π/٢ ، ٢π]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

السؤال الأول

جد فترات التزايد والتناقص لكل من الاقترانات التالية

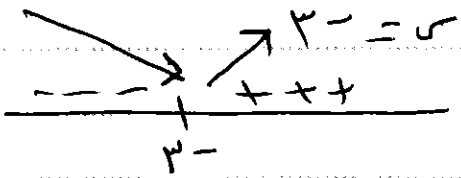
(أ) $ق(س) = س^٣ + ٦س^٢ - ١$

الحل

$ق'(س) = ٣س^٢ + ١٢س = ٠$

$٣س(س + ٤) = ٠$

$س = ٠ ، -٤$



ق متزايد $[-\infty ، -٤) \cup (٠ ، \infty)$

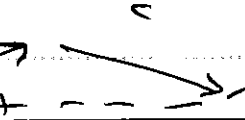
ق متناقص $[-٤ ، ٠]$

(ب) $ق(س) = |س - ٣| - س$

$س \in [-٢ ، ٦]$

الحل

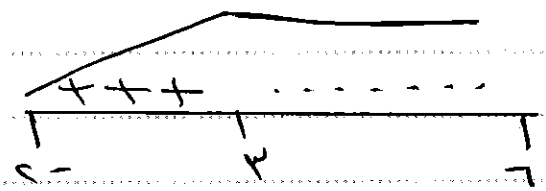
$|س - ٣| = \begin{cases} س - ٣ & س \geq ٣ \\ -(س - ٣) & س < ٣ \end{cases}$



$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣س + ٣ & -٢ \leq س < ٣ \\ س - (س - ٣) & ٣ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^٢ - ٣س + ٣ & -٢ \leq س < ٣ \\ ٣ & ٣ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & -٢ < س < ٣ \\ ٠ & ٣ < س < ٦ \end{cases}$



ق متزايد $[-٢ ، ٣]$

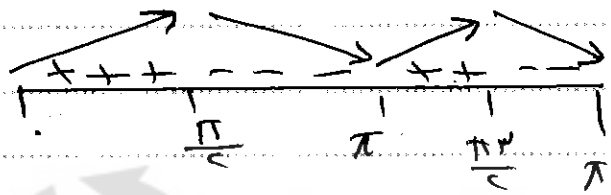
ق ثابت $[٣ ، ٦]$

(ج) $ق(س) = جا^٢ س$ $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$ق'(س) = ٢جا س جتا س = جا ٢س = ٠$

$س = ٠ ، \frac{\pi}{٢} ، \pi ، \frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi$



ق متزايد $[٠ ، \frac{\pi}{٢}] ، [\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

ق متناقص $[\frac{\pi}{٢} ، \pi] ، [\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi]$

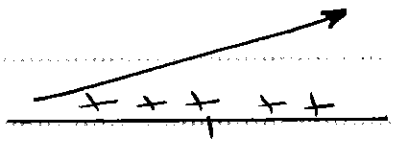
مكتبة السلام AWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(ي) $ق(س) = (س-١)^{٣}$

الحل

$ق'(س) = ٣(س-١)^{٢} \times ١$

$س-١ = ٠ \Leftarrow س = ١$



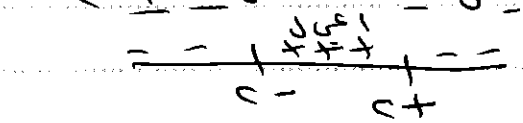
متزايد على ح

(ك) $ق(س) = \sqrt{٤-س^{٢}}$ $س \in [-٢, ٢]$

الحل

نحدد المجال

$٤-س^{٢} = ٠ \quad س = \pm ٢$

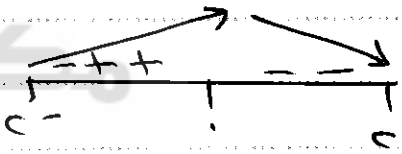


$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤-س^{٢}}} = ٠$

البسط = صفر $\Leftarrow س = ٠ \in$ المجال

المقام = $٠ \quad ٤-س^{٢} = ٠$

$س = \pm ٢ \in$ المجال



متزايد $[-٢, ٠]$

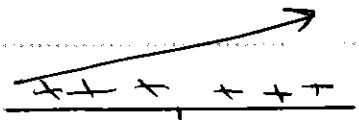
متناقص $[٠, ٢]$

(ل) $ق(س) = س^{\frac{٢}{٥}}$

الحل

$ق'(س) = \frac{٢}{٥} س^{-\frac{٣}{٥}} = \frac{٢}{٥\sqrt[٥]{س^{٣}}}$

المقام = $٠ \quad س = ٠ \notin$ المجال



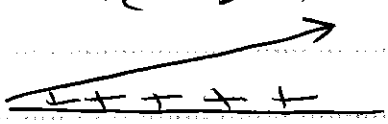
متزايد على ح

(ن) $ق(س) = س + جاس$ $[٠, \frac{\pi}{٢}]$

الحل

$ق'(س) = ١ + جتاس = ٠ \quad جتاس = -١$

$س = \pi \notin [٠, \frac{\pi}{٢}]$



متزايد على $[٠, \frac{\pi}{٢}]$

(م) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & س < ٠ \\ ١ & ٠ \le س \le ٢ \\ \sqrt{س-٢} & س > ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow$ بتبع الحل

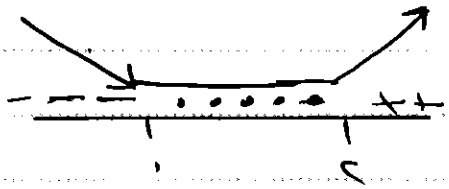
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

← تابع اكمل

$$\text{مـ}(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ \frac{١}{\sqrt{٢س-٢}} & س > ٢ \end{cases}$$

$\text{مـ}'(س) = ٢س$ ، $س = ٠$

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$



متناقص $(-\infty, ٠]$
متزايد $[٢, \infty)$
ثابت $[٠, ٢]$

(b) $\text{مـ}(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ + ٩}$

اكمل

$$\text{مـ}'(س) = \frac{(س^٢+٩) - (س-٣) \times ٢س}{(س^٢+٩)^٢}$$

$$= \frac{س^٢ + ٩ - ٢س^٢ + ٦س}{(س^٢+٩)^٢}$$

$$= \frac{-س^٢ + ٦س + ٩}{(س^٢+٩)^٢}$$

$\Leftarrow -س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$

$س^٢ - ٦س - ٩ = ٠$

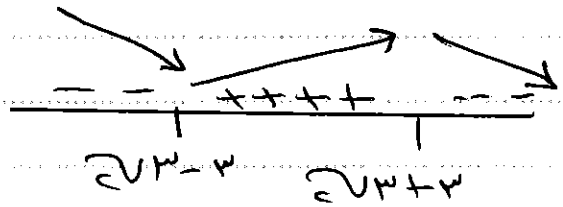
المميز $د = ٣٦ - ٤ \times ١ \times -٩ = ١٣٦$

$= ٣٦ + ٣٦ = ٧٢$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أ ج}}{٢أ}$$

$$= \frac{٦ \pm \sqrt{١٣٦}}{٢} = \frac{٦ \pm ٦\sqrt{٢}}{٢}$$

$= ٣ \pm ٣\sqrt{٢}$



متزايد $[-\infty, -٣\sqrt{٢}] \cup [٣\sqrt{٢}, \infty)$
متناقص $[-٣\sqrt{٢}, ٣\sqrt{٢}]$
$[٣\sqrt{٢} + ٢, \infty)$

(c) $\text{مـ}(س) = \begin{cases} ١ - ٤س & س \leq -٢ \\ |٢س - ٤| & -٢ < س < ٤ \\ ٢س - ٤ & س \geq ٤ \end{cases}$

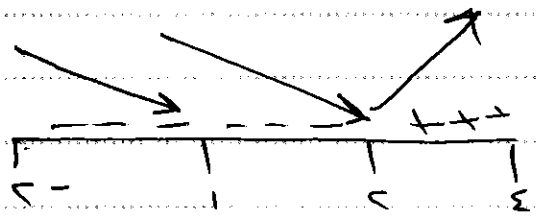
$$\text{مـ}(س) = \begin{cases} -٤ & س \leq -٢ \\ ٤ - ٢س & -٢ < س < ٤ \\ ٢ & س \geq ٤ \end{cases}$$

← تابع اكمل

ه غير متصل عند س = ١
ومتصل عند س = ٢

$$ه(س) = \begin{cases} -٢ & -٢ \le س < ١ \\ -س & ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$$

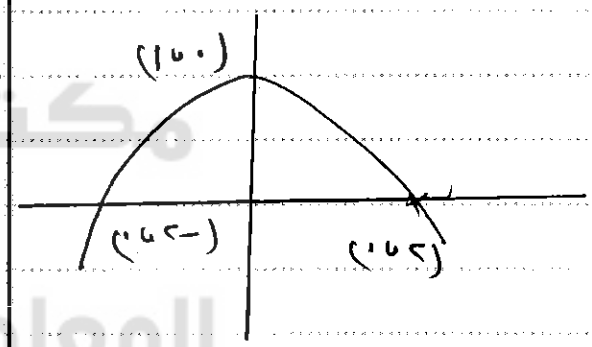
ه غير موجودة عند س = -٢، ١، ٢، ٤

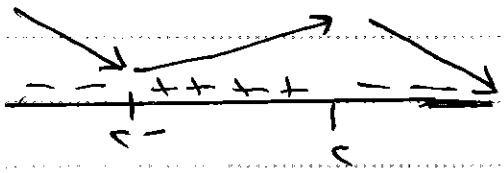


ه متناقص $[-٢، ١] \cup [٢، ١]$
متزايد $[٢، ٤]$

السؤال الثاني

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى اقتران المشتقة الأولى لاقتران ه كثير الحدود من الدرجة الثالثة جد فترات التزايد والتناقص لاقتران ه





متزايد على $[-٢، ٢]$
متناقص $(-\infty، -٢] \cup [٢، \infty)$

السؤال الثالث

اذا كان ه(س) = هـ(س) لكل س ∈ ح، فاثبت ان ل(س) = ه(س) - هـ(س) = ثابت لكل

نفرض ل(س) = ه(س) - هـ(س)
ل'(س) = ه'(س) - هـ'(س)
لكن ه'(س) = هـ'(س)
⟸ ل'(س) = صفر ∴ ل(س) ثابت

السؤال الرابع: اذا كان ه، هـ اقترانين متصلين $[م، ن]$، وقابلين للاشتقاق على $(م، ن)$ وكان كل من ه'(س)، هـ'(س) متزايد على $[م، ن]$، وكان ل(س) = ه(س) + هـ(س) اثبت ان ل(س) متزايد على $[م، ن]$

لكل

ه'(س) > ٠ لأنه ه(س) متزايد
هـ'(س) > ٠ لأنه هـ(س) متزايد
ل(س) = ه(س) + هـ(س)
ل'(س) = ه'(س) + هـ'(س) > ٠
∴ ل(س) متزايد

AOWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

القيم القصوى

تدريب ① ص ١٨٥

جد النقط الحرجة والقيم القصوى ان وجدت للاقترانات

ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س

س ∈ [−١، ٥]

الحل

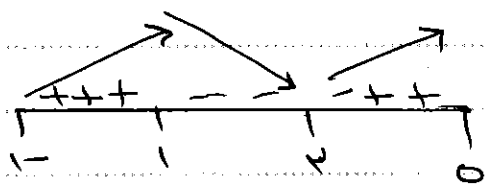
ق'(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

بالقسمة على ٣

س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٢ ، س = ١



النقاط الحرجة (−١، ١٦) ، (١، ٤)
(٣، ٠) ، (٥، ٠)

ق(−١) = −١٦ صغرى مطلقة
ق(١) = ٤ عظمى محلية
ق(٣) = ٠ صغرى محلية
ق(٥) = ٠ عظمى مطلقة

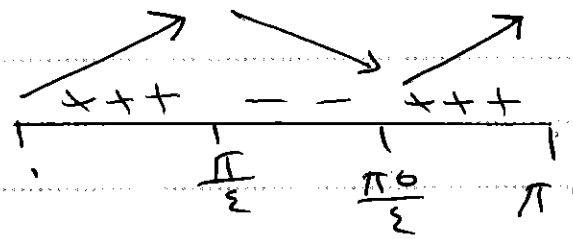
تدريب ② ص ١٨٧

جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) للاقتران ق(س) = جتاس + جاس
س ∈ [٠، ٢π]

الحل

ق'(س) = −جاس + جتاس = ٠
جتاس = جاس ، ظاس = ١
بالقسمة على جتاس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$



ق($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$
قيمة عظمى محلية

ق($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$
قيمة صغرى محلية

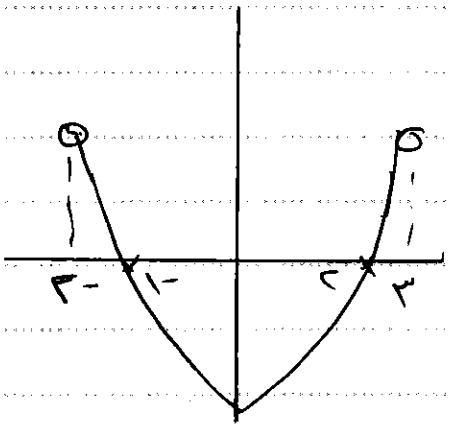
ق(٠) = ١ لا يوجد
ق(٢π) = ١ لا يوجد

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

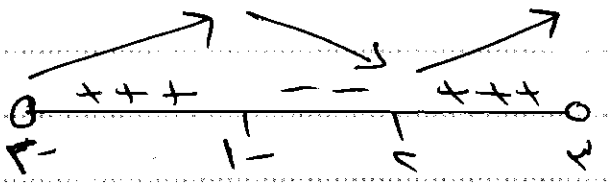
(٢) تدريب (٣) ص ١٨٨

الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقترانات كثيرة الحدود د(س) المعرف على الفترة [-٣، ٣] اعتمد على ذلك في تعيين

(١) النقط الحرجة لـ د
(٢) القيم القصوى لـ د
(٣) مجالات التزايد والتناقص لـ د



الحل



(١) النقط الحرجة عندما س =
{-٣، -١، ٢، ٣}

(٢) د له عظمى محلية عندما س = -١
د له صغرى محلية عندما س = ٢

(٣) د متزايد [-٣، -١] ، [٢، ٣]

د متناقص [-١، ٢]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل "القيم القصوى"

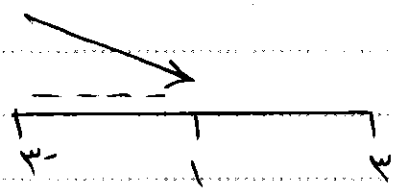
ص ١٨٩ الكتاب

السؤال الأول

جد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية "أن وجدت" وبين المطلقة منها لكل من الاقترانات الآتية

(أ) $ق(س) = س^٣ - ٦س + ٥$
$س \in [-٣، ١٦]$

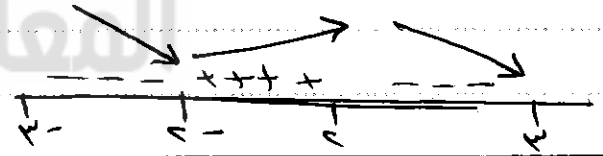
الحل
$ق'(س) = ٣س^٢ - ٦ = ٠$
$س = ٢ \notin$ المجال



$ق(-٣) = ٣ + ٦ = ٩$ قيمة عظمى مطلقة
$ق(١) =$ صفر قيمة صغرى مطلقة

(ب) $ق(س) = ١٢س - س^٣$ $[-٣، ٣\frac{١}{٢}]$

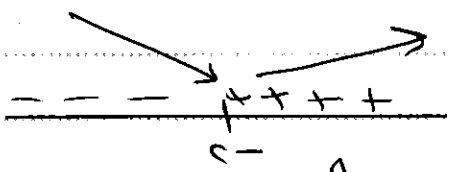
$ق'(س) = ١٢ - ٣س^٢ = ٠$
$٣(٤ - س^٢) = ٠$ $\Rightarrow س = \pm ٢ \in$



$ق(-٢) = -١٦$ لا يوجد
$ق(٢) = ١٦$ عظمى محلية مطلقة
$ق(-٣) = -٩$ لا يوجد
$ق(٣) = ٩$ صغرى محلية ومطلقة

(ج) $ق(س) = س^٢ + ٤س - ٥$ $س \in ح$

الحل
$ق'(س) = ٢س + ٤ = ٠ \Rightarrow س = -٢$



$ق(-٢) = -٩$
صغرى محلية مطلقة

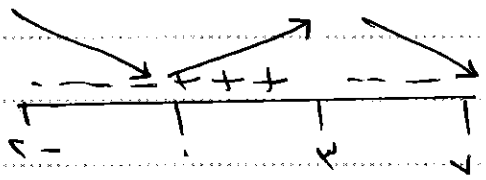
(د)
$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \le -٢ \\ ١٠ - ٢س & -٢ < س < ٣ \\ ٣س & س \ge ٣ \end{cases}$

$ق$ غير متصل عند $س = ٢$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < -٢ \\ -٢ & -٢ < س < ٣ \\ ٣ & س > ٣ \end{cases}$

$س = ٠ \Rightarrow ٢س = ٠$
$ق(٠)$ غير موجودة $\Rightarrow$ ينتج

مكتبة الوسام AUWSAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي



$د(-٢) = ٩$

وعلما ان $\lim_{س \to -٣} د(س) = ١٤ > ٩$

∴ لا يوجد فيه عظمى مطلقه

$د(٠) = ٥$ صغرى محليه

$د(٧) = -٤$ ليس موجود ٥

لا يوجد صغرى مطلقه

(هـ) $د(س) = س^{٢} |س - ٢|$ $س \in ح$

الحل

$|س - ٢| \quad \begin{cases} -(س-٢) & س < ٢ \\ س - ٢ & س \geq ٢ \end{cases}$

$د(س) = س^{٢} \times \begin{cases} ٢ - س & س < ٢ \\ س - ٢ & س \geq ٢ \end{cases}$

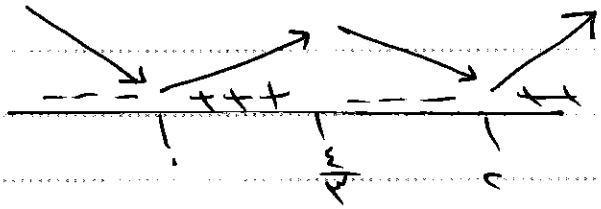
$= \begin{cases} ٢س^{٢} - س^{٣} & س < ٢ \\ س^{٣} - ٢س^{٢} & س \geq ٢ \end{cases}$

$د'(س) = \begin{cases} ٤س - ٣س^{٢} & س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ٤س & س > ٢ \end{cases}$

$٤س - ٣س^{٢} = ٠$

$س(٤ - ٣س) = ٠ \quad س = ٠ ، \frac{٤}{٣}$

$د$ غير موجود عند $س = ٢$



$د(٠) = ٠$ صغرى محليه مطلقه

$د(٢) = ٠$ صغرى محليه مطلقه

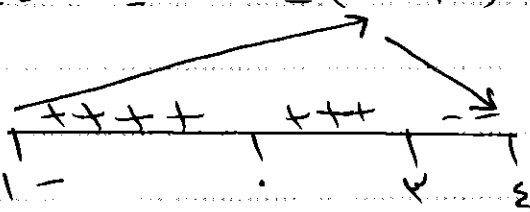
$د(\frac{٤}{٣}) = \frac{٢٧}{٢٧}$ عظمى محليه

(و) $د(س) = س^{٣} - \frac{س^{٤}}{٤}$ $[-١ ، ٤]$

الحل

$د'(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} = ٠$

$س^{٢}(٣ - س) = ٠ \quad س = ٠ ، س = ٣$



$د(-١) = -\frac{٥}{٤}$ صغرى مطلقه

$د(٣) = \frac{٢٧}{٤}$ فيه عظمى محليه ومطلقه

(ز) $د(س) = ١ - جتا س$ $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$د'(س) = \frac{جا س}{٢ - جتا س}$

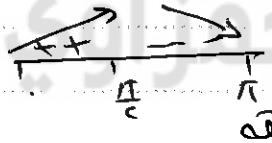
المقام $\neq ٠$ ∴ جا س $= ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

المقام $= ٠ \leftarrow$ جتا س $= ١ \quad س = ٠ ، ٢\pi$

$د(٠) = ٠$ صغرى مطلقه

$د(\frac{\pi}{٢}) = ١$ عظمى محليه ومطلقه

$د(٢\pi) = ٠$ صغرى مطلقه



ⓒ $\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{(س^2-4س)^2}\, د س$

الحل

$ق(س) = (س^2-4س)^{\frac{2}{3}}$

$ق'(س) = \frac{2}{3}(س^2-4س)^{-\frac{1}{3}} \times (2س-4)$

$= \frac{2(2س-4)}{3\sqrt[3]{س^2-4س}}$

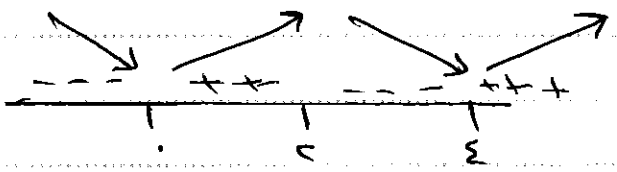
البسط = ٠

$2س-4 = 0 \Leftarrow س = 2$ ∈ ح

المقام = ٠

$س^2-4س = 0 \Leftarrow س(س-4) = 0$

$س = 0 \Leftarrow س = 4$ ∈ ح



ق(٠) = $\sqrt[3]{16}$ عظمى محلية

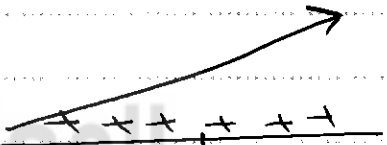
ق(2) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

ق(4) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

ⓓ $ق(س) = س^3+1$ ، $س \in [-2, 2]$

$ق'(س) = 3س^2 = 0$

$س = 0$



لا توجد قيم قصوى

السؤال الثاني

جد قيم كل من الثابتين $ب$ ، $ج$ التي تجعل للاقتران $ق(س) = س^3+ب س^2+ج س$ نقطتين حرجتين عندما $س = -1$ ، $س = 2$

الحل

$ق(س) = 3س^2+2ب س+ج$

$ق(-1) = 3-2ب+ج = 0$ ... ①

$ق(2) = 12+4ب+ج = 0$ ... ②

① − ② ⇐

$-9-6ب = 0$

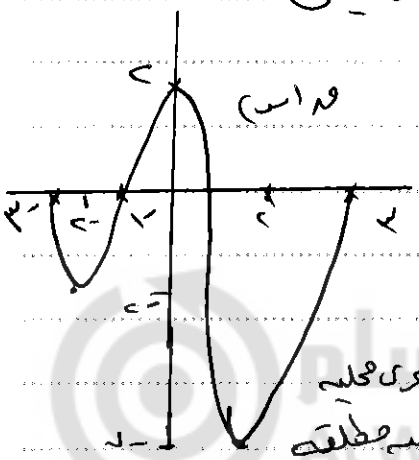
$ب = \frac{9}{-6} = \frac{-3}{2}$

بالتعويض ⇐ $ج = -6$

السؤال الثالث

الشكل المجاور يمثل منحنى كثير الحدود $ق(س)$ المعرف على $[-3, 3]$

اعتمد على ذلك في تعيين



① النقط الحرجة

$(-1, 0.3)$ $(-2, 0.3)$

$(2, 0.5)$ $(2, 0.7)$

$(0, 0.3)$

① $ق(-2) = -2$ صغرى محلية

$ق(1) = 2$ عظمى محلية مطلقة

$ق(2) = -1$ صغرى محلية مطلقة

② فترات $[-2, 0.3]$ $[2, 3]$

متناقص $[-3, -2]$ $[0.3, 2]$

تمارين مراجعة ص ١٣٤

السؤال الرابع

إذا كان $د(س) = \sqrt[3]{س^3 - 9س}$

س ∈ ح

(أ) جد س التي يكون عندها للاقتران د نقط حرجة

(ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران د

(ج) جد س التي يكون عندها للاقتران د قيم قصوى محلية نوعها.

الحل

$د(س) = (س^2 - 9س)^{\frac{1}{3}}$

$د'(س) = \frac{1}{3}(س^2 - 9س)^{-\frac{2}{3}}(2س - 9)$

$= \frac{2س - 9}{3\sqrt[3]{(س^2 - 9س)^2}}$

$= \frac{2س - 9}{3\sqrt[3]{س(س - 9)^2}}$

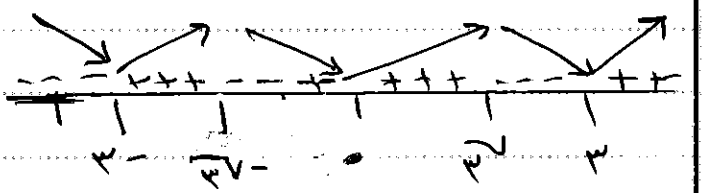
البسط = صفر $\Leftarrow 2س - 9 = 0$

$س = \frac{9}{2}$

المقام = ٠ $\Leftarrow س^3 - 9س = 0$

$س(س^2 - 9) = 0$

$س = 0 \quad س = \pm 3$



(ب) النقط الحرجة $\{0, 3\sqrt{7}, -3, -3\sqrt{7}\}$

(أ) متزايد $[-3, -3\sqrt{7}] \quad [3\sqrt{7}, 0]$

$[2, 5)$

متناقص $(-5, -3], [0, 3\sqrt{7}]$

$[3\sqrt{7}, 3]$

(ج) $د(-2)$ = صغرى محلية مطلقة

$د(0) = 0$ صغرى محلية مطلقة

$د(2) = 0$ صغرى محلية مطلقة

$د(-3) = 6$ عظمى محلية مطلقة

$د(-3\sqrt{7})$ = عظمى محلية مطلقة

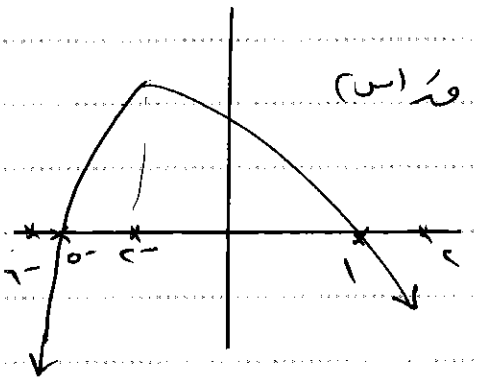
$د(3\sqrt{7}) = 6$ عظمى محلية مطلقة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

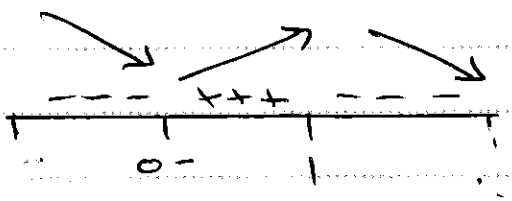
السؤال الخامس مراجعة
ص ١٤٢

الشكل يمثل منحنى هـ(س) حيث هـ(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة

جـ
(أ) فترات التزايد والتناقص لـ هـ
(ب) القيم القصوى



الحل



(أ)
تزايد [-٥، ١]
تناقص (-∞، -٥] ، [١، ∞)

(ب) هـ(-٥) قيمة صغرى محلية
هـ(١) قيمة عظمى محلية

اختبار ذاتي ص ١٤٣

السؤال الأول

(١) اذا كان هـ(س) = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥ وكان للاقتران هـ نقطة حرجة عند س = ١ فأوجد قيمة الثابت أ

الحل

هـ(س) = ٦س^٢ + أ
هـ(١) = ٦ + أ = ٠
أ = -٦ ⇐

(٢) اذا كان للاقتران
هـ(س) = أس^٣ - ٣س^٢ قيمة صغرى محلية عند س = ١ فأوجد قيمة أ

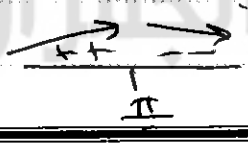
الحل

هـ(س) = ٣أس^٢ - ٦س
هـ(١) = ٣أ - ٦ = ٠
أ = ٢

(٣) اذا كان هـ(س) = جتا س على (٠، ٢π) فأوجد الاحداثي السيني لنقطة القيمة العظمى المطلقة

الحل

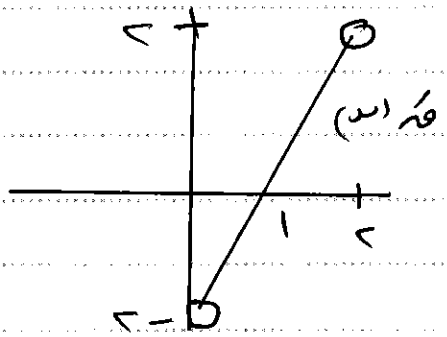
هـ(س) = -جتا س = ٠
س = π/٢



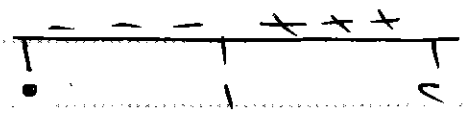
مكتبة الرياضيات
ALRIYADIAT.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني اختبار ذاتي ص٢١٧

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) اوجد فترات التزايد والتناقص



الحل

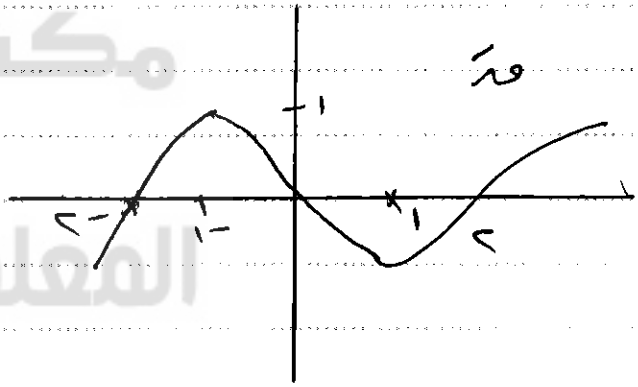


ق تتزايد $[-\infty, 1]$ و $[2, \infty)$
تتناقص $[1, 2]$

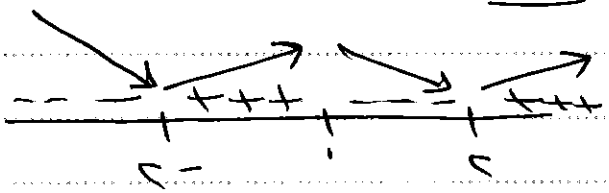
السؤال الرابع ص٢١٨

يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) اوجد

(أ) فترات التزايد والتناقص



الحل



متزايد $[-2, 0]$ و $[2, \infty)$
متناقص $(-\infty, -2]$ و $[0, 2]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

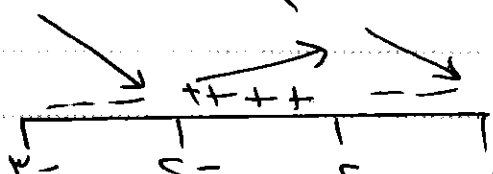
أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) صيفية
اذا كان $ق(س) = ٤س - \frac{١}{٣}س^{٣}$
$س \in [-٣، ٣]$ جد ما يلي

أ) الفترة (الفترات) التي يكون ق متزايدًا

ب) القيم القصوى المطلقة للاقتران ق وبين نوعها.

الحل
$ق(س) = ٤ - س^{٢} = ٠$
$س = \pm ٢$

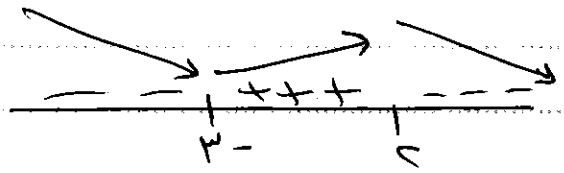


أ) متزايد $[-٢، ٢]$

ب) $ق(-٣) = -٣$ لا يوجد
$ق(-٢) = -\frac{١٦}{٣}$ صغرى مطلقة
$ق(٢) = ٣$ لا يوجد
$ق(٣) = \frac{١٦}{٣}$ عظمى مطلقة

② وزارة (٢٠١٨) شتوية
اذا كان $ق(س) = -٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣٦س + ١٠$
جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق وبين نوعها.

الحل
$ق(س) = -١٢س^{٢} - ٦س + ٣٦$
بالقسمة على -٦
$س^{٢} + س - ٦ = ٠$
$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$
$س = -٣ \quad س = ٢$



$ق(-٣) = -١٨١$ صغرى محلية
$ق(٢) = ٥٤$ عظمى محلية

---

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية
$ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$
$س \in [٠، ٤]$ جد

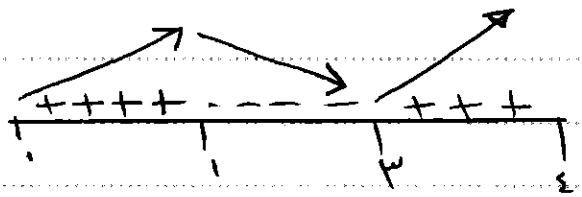
أ) الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايدًا

ب) القيم القصوى المطلقة لـ ق وبين نوعها.

الحل
$ق(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠ \div ٣$
$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$
$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(س-٣)(س-١) = ٠
س = ٣ ، س = ١



د متزايدة على [٠، ١] ، [٣، ٤]
د(١) = ٦
د(٤) = ٦ ← العظمى المطلقة هي ٦

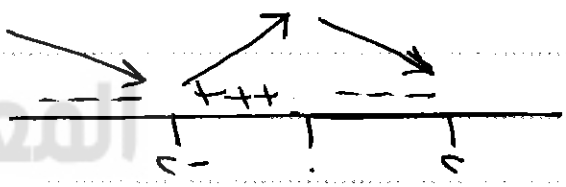
د(٠) = ٢
د(٣) = ٢ ← الصغرى المطلقة = ٢

---

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية

اذا كان د(س) = $\frac{1}{4}$ س^{٤} - ٢س^{٢} + ٣
حيث س ∈ [-٢، ٣] فجد مايلي
① فترات التناقص
② القيم القصوى

الحل
د(س) = س^{٣} - ٤س = ٠
س(س^{٢} - ٤) = ٠
س = ٠ ، س = ±٢



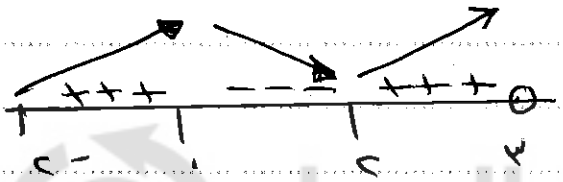
د متناقصة في [-٢، ٠] وفي [٠، ٢]
الدالة عظمى مطلقة هنا د(س) = -١ ، س ← -٢
د(-٢) = -١ صغرى مطلقة
د(٠) = عظمى محلية

---

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان د(س) = $\frac{1}{3}$ س^{٣} - س^{٢} + ٢
حيث س ∈ [-٢، ٣] فجد مايلي
① فترات التزايد
② القيم القصوى

الحل
د(س) = س^{٢} - ٢س = ٠
س(س - ٢) = ٠
س = ٠ ، س = ٢



① د(س) متزايدة [-٢، ٠] ، [٢، ٣]
② د(-٢) = -٢ $\frac{٢}{٣}$ صغرى مطلقة
د(٢) = -٢ $\frac{٢}{٣}$
د(٠) = ٢ هنا د(س) = ٢ ← ٣
القيمة العظمى المطلقة هي د(٠) = ٢

مكتبة الإسلام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

$ق(س) = س^3 (٤ - س)$ ، $س \in [-١، ٥]$ حيث

① فترات التناقص

② القيم القصوى.

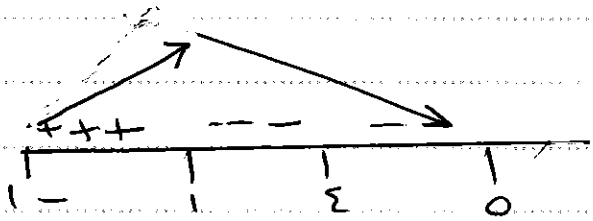
الحل

$ق'(س) = س \times ٣(٤-س)^2 \times -١ + (٤-س)^3 \times ١$

$= (٤-س)^2 [-٣س + ٤ - س]$

$= (٤-س)^2 (٤ - ٤س) = ٠$

$س = ٤ ، ١$



ق متناقص $[-١، ١] \cup [٤، ٥]$

$ق(١) = ١ \times ٢٧ = ٢٧$ قيمة عظمى مطلقة

$ق(-١) = -٥ \times ١ = -٥$ قيمة صغرى مطلقة

$ق(٥) = -٥$ لاستيا

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $ق(س) = ٦س^2 - ٤س^3$

$س \in [٠، ٤٫٥]$ حيث

① فترات التناقص

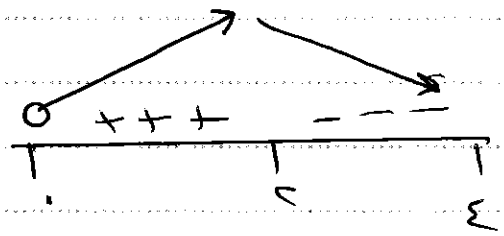
② القيم القصوى وبين نوعها

الحل

$ق'(س) = ١٢س - ٦س^2 = ٠$

$٦س(٢ - س) = ٠$

$س = ٠ ، ٢$



① ق متناقص $[٢، ٤٫٥]$

② $ق(٢) = ٨$ قيمة عظمى محلية وطلقة

حيث $ق(س) = ٠ \Leftarrow ق(٤) = -٣٢$

$س \leftarrow ٠$

∴ قيمة صغرى مطلقة عند $س = ٤$

هي $ق(٤) = -٣٢$

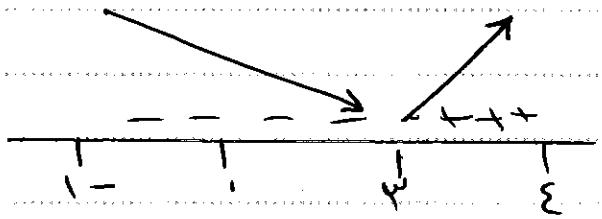
مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^4 - ٤س^3$
$س \in [-١، ٤]$ جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ وبين نوعها

الحل

$ق'(س) = ٤س^3 - ١٢س^2$
$٤س^2(س - ٣)$
$س = ٠ \quad س = ٣$



$ق(٣) = -٢٧$ قيمة صغرى محلية مطلقة
$ق(-١) = ٥ ، ق(٤) = ٠$ صفر
$ق(-١)$ قيمة عظمى مطلقة

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

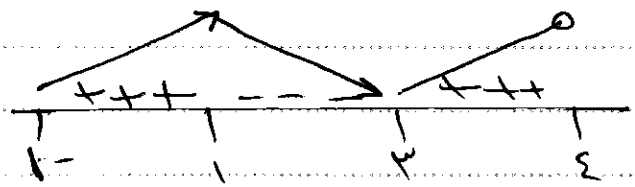
اذا كان $ق(س) = س(س-٣)^2$
$س \in [-١، ٤]$ جد ما يلي

① فترات التزايد

② القيم القصوى وبين نوعها

الحل

$ق(س) = س(س^2 - ٦س + ٩)$
$= س^3 - ٦س^2 + ٩س$
$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢س + ٩ \div ٣$
$س^2 - ٤س + ٣ = ٠$
$(س - ٣)(س - ١) = ٠$
$س = ١ ، ٣$



$ق$ متزايد $[-١، ١] \quad [٣، ٤)$

$ق(-١) = -١٨$ فيه صغرى مطلقة
$ق(١) = ٤$ فيه عظمى محلية مطلقة
$ق(٣) = ٠$ فيه صغرى محلية
بما $ق(س) \to ٤$
$س \to ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٠) وزارة (٢٠١٤) صيفية

$ق(س) = س + \frac{9}{س+2}$ ، $س \in [-1, 4]$

مجموعة مايلي

(١) فترات التزايد والتناقص

(٢) القيم القصوى المحلية والمطلقة

الحل

$ق(س)$ متصل على $[-1, 4]$ وقابل للاشتقاق على $(-1, 4)$

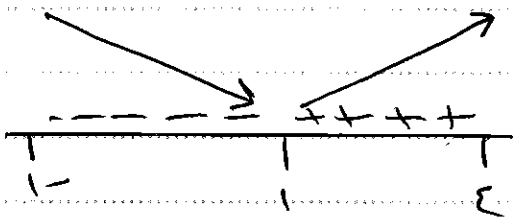
$ق'(س) = 1 - \frac{9}{(س+2)^2} = 0$

$\frac{9}{(س+2)^2} = 1 \Leftarrow (س+2)^2 = 9$

$\leftarrow س+2 = \pm 3$

$\leftarrow س = -5$ (خارج المجموعة)

أو $س = 1$



$ق$ متناقص $[-1, 1]$

$ق$ متزايد $[1, 4]$

$ق(1) = 1 + 2 = 3$ قيمة صغرى محلية ومطلقة

$ق(-1) = -1 + 9 = 8$

$ق(4) = 4\frac{1}{2}$

$ق(-1) = 8$ قيمة عظمى مطلقة

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

إذا كان $ق(س) = س^2 - \frac{1}{4}س^4$

$س \in [-3, 3]$ صـ

(١) فترات التزايد والتناقص

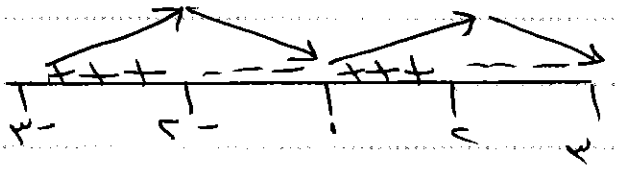
(٢) القيم القصوى

الحل

$ق'(س) = 2س - س^3 = 0$

$س(2 - س^2) = 0$

$س = 0$ ، $س = \pm 2$



$ق$ متزايد $[-3, -2] \cup [0, 2]$

متناقص $[-2, 0] \cup [2, 3]$

$ق(0) = 0$ قيمة صغرى محلية

$ق(2) = 4$ قيمة عظمى محلية

$ق(-2) = 4$ قيمة عظمى محلية

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٣ ج) صيفية

$ق(س) = س + \frac{٢٥}{س}$

س ∈ [-٨، ٨] - {٠}

① فترات التزايد والتناقص

② القيم القصوى المحلية

الحل

$ق'(س) = ١ - \frac{٢٥}{س^٢}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow \frac{٢٥}{س^٢} = ١ \Leftarrow س^٢ = ٢٥$

$س = \pm ٥$

① متزايد [-٨، -٥] ، [٥، ٨]

متناقص [-٥، ٠) ، (٠، ٥]

② $ق(-٥) = -١٠$ عظمى محلية

$ق(٥) = ١٠$ صغرى محلية

(١٣) وزارة (٢٠١٤ ج) شتوية

اذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٢ + ٢س}$

حيث س ∈ ح فجد القيم القصوى المحلية إن وجدت

الحل

$ق(س) = (س^٢ + ٢س)^{\frac{١}{٣}}$

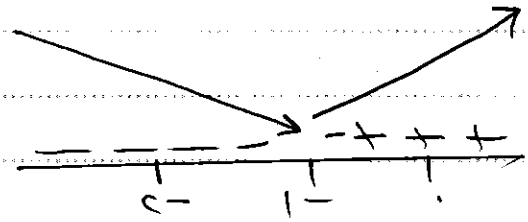
$ق'(س) = \frac{١}{٣}(س^٢ + ٢س)^{-\frac{٢}{٣}}(٢س + ٢)$

$= \frac{٢س + ٢}{٣(س^٢ + ٢س)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٢س + ٢}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ + ٢س)^٢}}$

البسط = ٠ ⇒ $٢س + ٢ = ٠$ ⇒ $س = -١$

المقام = ٠ ⇒ $س^٢ + ٢س = ٠$

$س(س + ٢) = ٠$ ⇒ $س = ٠$ ، $س = -٢$



$ق(-١) = \sqrt[٣]{١ - ٢} = -١$ صغرى محلية

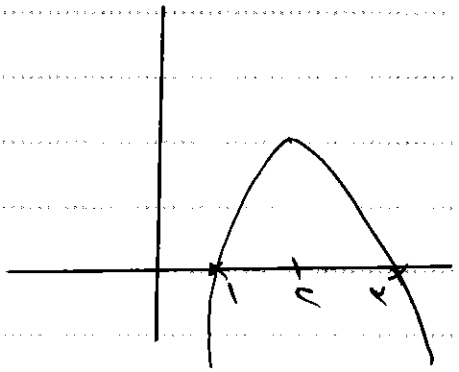
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

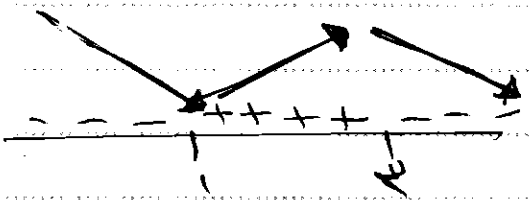
(١٤) وزارة (٢٠١٤ ، د) صيفية

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قا(س) ، حيث قا(س) كثير حدود حدها الأول

(أ) قترات التزايد والتناقص لـ قا

(ب) قيم س التي يكون عندها للاقتران قا(س) قيم قصوى محلية





قا متزايد على [١ ، ٣]

متناقص (-∞ ، ١] ، [٣ ، ∞)

صغرى محلية عند س = ١

عظمى محلية عند س = ٣

(١٥) وزارة (٢٠١٥ ، د) شتوية

قا(س) = س - جتا٢س [٠ ، ٢π]

(أ) مجالات التزايد والتناقص لـ قا

(ب) القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للاقتران قا

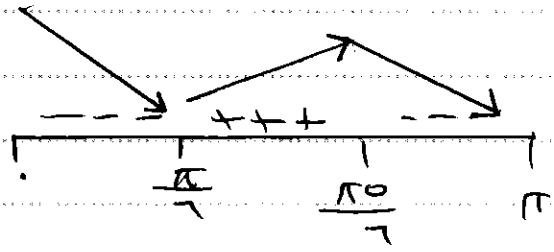
الحل

قا(س) = ١ - ٢ جتا٢س = ٠

جتا٢س = $\frac{١}{٢}$

٢س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$



(أ) قا متزايد $[\frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦}]$

متناقص $[٠ ، \frac{\pi}{٦}]$ ، $[\frac{٥\pi}{٦} ، \pi]$

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ صغرى محلية قا($\frac{\pi}{٦}$)

= $\frac{\pi}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$ عظمى محلية وهي

قا($\frac{٥\pi}{٦}$) = $\frac{٥\pi}{٦} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑯ وزارة (٢٠١٥) صيفية

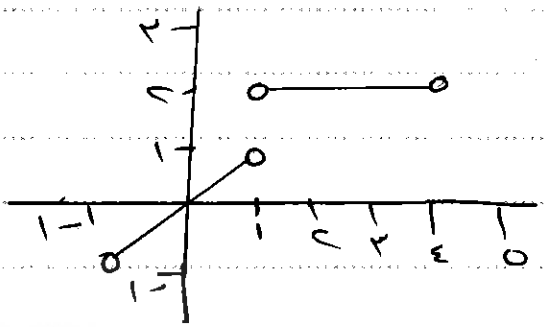
اذا كان الاقتران $هـ(س)$ متصل على الفترة $[-١، ٤]$

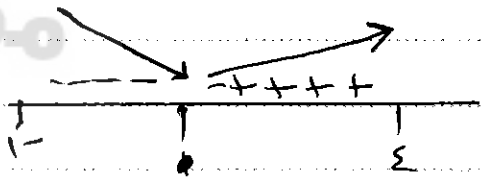
$$هـ(س) = \begin{cases} جـس^٢ + دس + هـ & -١ \le س < ١ \\ ١س + ب & ١ \le س \le ٤ \end{cases}$$

ومثل منحنى المشتقة الأولى $هـ'(س)$ في الشكل المجاور

① النقط الحرجة
② فترات التزايد والتناقص
③ قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

④ قيم $أ، ب، جـ، د، هـ$ علماً $هـ(-١) = جـ$ ، $هـ(٤) = ٨$





هـ متزايد $[٠، ٤]$
متناقص $[-١، ٠]$

النقط الحرجة $س \in \{-١، ٠، ١، ٤\}$

صغرى محلية عند $س = ٠$

④ $$هـ(س) = \begin{cases} جـس^٢ + دس + هـ & -١ \le س < ١ \\ ١ & ١ \le س \le ٤ \end{cases}$$

$هـ(١) = ٠$ من الشكل

$هـ'(١) = ٠ \Leftarrow ٠ = د + ٠ \Leftarrow د = ٠$

من الشكل $هـ'(١) = جـ \Leftarrow جـ = ٢$

$هـ(٤) = ٨$

$١٦جـ + ٤د + هـ = ٨ \Leftarrow هـ = ٠$

$هـ(١) = ١$

$جـ + د + هـ = ١ \Leftarrow جـ = \frac{١}{٢}$

$هـ(-١) = ٢$

$\frac{١}{٢} - د + هـ = ٢ \Leftarrow هـ = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) د(س) = $\sqrt[3]{س^3 - 27س}$ ، س ∈ (-١٠ ، ١٠) جد مايلي

أ) مجالا = التزايد والتناقص

ب) القيم العظمى والصغرى المحلية

الحل

$د(س) = (س^3 - 27س)^{\frac{1}{3}}$

$د'(س) = \frac{1}{3}(س^3 - 27س)^{-\frac{2}{3}} (3س^2 - 27)$

$= \frac{3س^2 - 27}{3\sqrt[3]{(س^3 - 27س)^2}}$

البسط = صفر ⇒ $3س^2 = 27$

$س^2 = 9$ ⇒ $س = \pm 3$

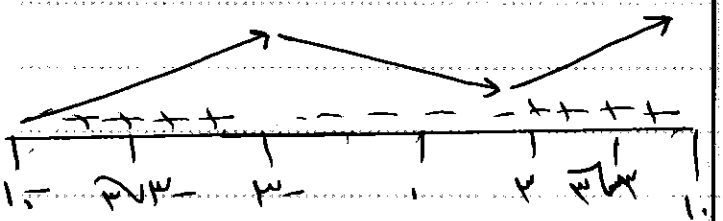
المقام = صفر

$س^3 - 27س = 0$

$س(س^2 - 27) = 0$

$س = 0$ ، $س = \pm\sqrt{27} = \pm\sqrt{9 \times 3}$

$= \pm 3\sqrt{3}$



عند س = -٣ يوجد عظمى محلية

وهي د(-٣) = $\sqrt[3]{54}$

عند س = ٣ يوجد صغرى محلية وهي

د(٣) = $-\sqrt[3]{54}$

ج) د(س) متزايد (-١٠ ، -٣] ∪ [٣ ، ١٠)

متناقص [-٣ ، ٣]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^{\frac{1}{3}}(س-٢)^{\frac{1}{3}}$

$س \in [-١، ٥]$ جد

① فترات التزايد والتناقص

② القيم القصوى

الحل

$ق(س) = (س(س-٢))^{\frac{1}{3}}$

$= (س^٢ - ٢س)^{\frac{1}{3}}$

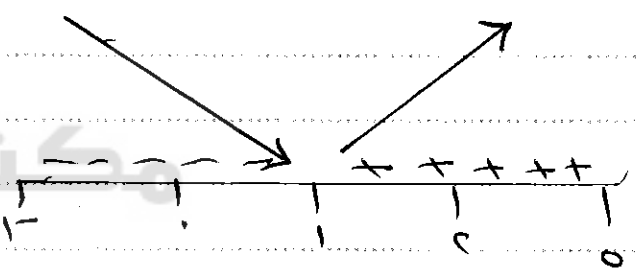
$ق'(س) = \frac{1}{3}(س^٢-٢س)^{-\frac{2}{3}}(٢س-٢)$

$= \frac{٢س-٢}{\sqrt[3]{(س^٢-٢س)^٢}}$

البسط = ٠ : $٢س-٢ = ٠$: $س = ١$

المقام = ٠ : $س^٢-٢س = ٠$

$س(س-٢) = ٠$: $س = ٠ ، ٢$



$ق(س)$ متزايد $[١، ٥]$

متناقص $[-١، ١]$

عند $س = ١$ يوجد قيمة عظمى محلية مطلقة

وقيمتها $= -١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس السادس

تطبيقات القيم القصوى

مقدمة

خطوات حل المسألة

① تحديد عبارة أكبر ما يمكن أو اصغر ما يمكن على ماذا تعود فتكون هي العلاقة المطلوبة

② تحديد الثوابت والمتغيرات برموز والربط بينهما بالعلاقة المطلوبة

③ جعل العلاقة بمتغير واحد من خلال علاقة جانبية (مساعدة)

④ الرسم التوضيحي اذا لزم الأمر

⑤ ايجاد المشتقة الأولى ومساواته بالصفر وايجاد اصفار المشتقة

⑥ اختبار هذه الاصفار من حيث أنها عظمى أو صغرى حسب اختبار المشتقة الأولى

كلمة أكبر ما يمكن ← قيمة عظمى
كلمة اصغر ما يمكن ← قيمة صغرى

مثال ①

عددان موجبان مجموعهما ٩٠ أوجد العددين اذا كان حاصل ضرب احدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

الحل

نفرض ان احد العددين = س
فيكون العدد ص ←

$س + ص = ٩٠ \leftarrow ص = ٩٠ - س$

$ع = س \times ص^2$

$= س(٩٠ - س)^2 = ٨١٠٠ س - ١٨٠ س^2 + س^3$

$ع' = ٨١٠٠ - ٣٦٠ س + ٣ س^2 = ٠$

$(س - ٦٠)(س - ٣٠) = ٠ \quad س = ٣٠ \quad س = ٦٠$

	٣٠		٦٠	
ع'	+	٠	−	٠
	↗	قيمة عظمى	↘	

العدد الأول = ٦٠
العدد الثاني = $٩٠ - ٦٠ = ٣٠$

مثال ②

اوجد عددين موجبين مجموعهما ٤٠ بحيث يكون مجموع مربعيهما أقل ما يمكن

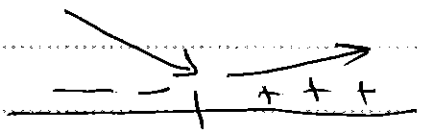
الحل

نفرض احد العددين = س
والعدد الآخر = ص
س + ص = ٤٠ ⇐ ص = ٤٠ − س

اعادة

ع = س² + ص²
= س² + (٤٠ − س)²

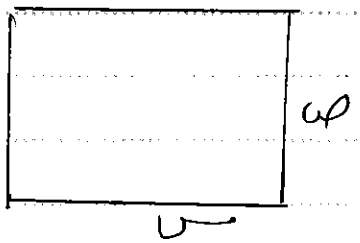
ع′ = ٢س + ٢(٤٠ − س)(−١)
= ٢س + ٨٠ − ٢س
= ٤س − ٨٠
٤س − ٨٠ = ٠
س = ٢٠



أقل ما يمكن
العدد الثاني = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

مثال ③

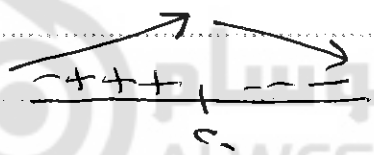
يريد رجل اقامة سياج حول منطقة مستطيلة الشكل من حديقته فاذا كان عنده ٨٠ م من الاسلاك فما ابعاد أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن احاطته بهذا السياج



أكبر مساحة ممكنة هي العلاقة المطلوبة
المساحة = الطول × العرض
م = س × ص

المحيط = ٢ل + ٢س = ٨٠ ÷ ٢
ص + س = ٤٠ ⇐ ص = ٤٠ − س
م = س(٤٠ − س) = ٤٠س − س²

م′ = ٤٠ − ٢س = ٠
س = ٢٠



س = ٢٠
ص = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤)

اثبت انه أكبر مساحة للمستطيل الذي محيطه ل تحدث عندما يكون مربعًا

الحل

الطول = س ، العرض = ص

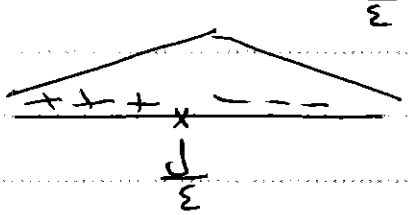
م = س × ص العلاقة الرئيسية

ل = ٢س + ٢ص ⇐ ص = $\frac{ل}{٢}$ − س

∴ م = س($\frac{ل}{٢}$ − س) = $\frac{ل}{٢}$ س − س^{٢}

م′ = $\frac{ل}{٢}$ − ٢س = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{ل}{٢}$

س = $\frac{ل}{٤}$



ص = $\frac{ل}{٢}$ − $\frac{ل}{٤}$ = $\frac{٢ل}{٤}$ − $\frac{ل}{٤}$

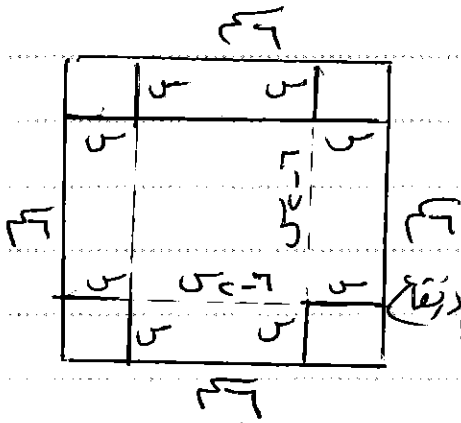
= $\frac{ل}{٤}$

⇐ س = ص = $\frac{ل}{٤}$

∴ مربع

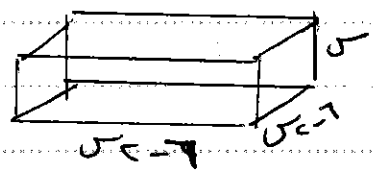
مثال (٥)

يراد صنع صندوق مفتوح من الاعلى من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وذلك بقطع ٤ مربعات متساوية من اطرافها الاربعة ثم طي الاجزاء البارزة لأعلى أوجد أكبر حجم يمكن تكوينه بهذه الطريقة



الحل

ع = الطول × العرض × الارتفاع



ع = (٦ − ٢س)(٦ − ٢س) × س

ع = (٣٦ − ٢٤س + ٤س^{٢}) × س

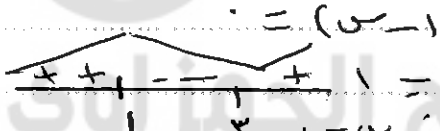
ع = ٣٦س − ٢٤س^{٢} + ٤س^{٣}

ع′ = ٣٦ − ٤٨س + ١٢س^{٢} = ٠ (÷ ١٢)

س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٣ ، س = ١

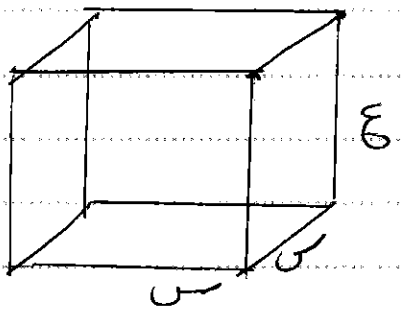


أكبر ما يمكن عند س = ١

ع = (٦ − ٢×١)(٦ − ٢×١)×١ = ١٦ سم^{٣}

مثال ⑥

نريد صنع صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه ٣٢ سم٣ اوجد ابعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعة أقل ما يمكن



الحل

كمية المادة اللازمة =
مادة القاعدة + مادة الجوانب

$ك = س^2 + 4 س ع$

لكن $ح = ٣٢ = س \times س \times ع$

$\Leftarrow ٣٢ = س^2 ع \leftarrow ع = \frac{٣٢}{س^2}$

$\Leftarrow ك = س^2 + 4 س \times \frac{٣٢}{س^2}$

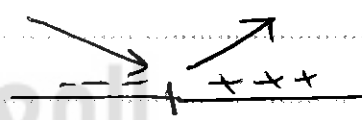
$= س^2 + \frac{١٢٨}{س}$

$ك' = ٢س - \frac{١٢٨}{س^2} = ٠$

$٢س^3 = ١٢٨ \leftarrow س^3 = ٦٤$

$س = ٤$

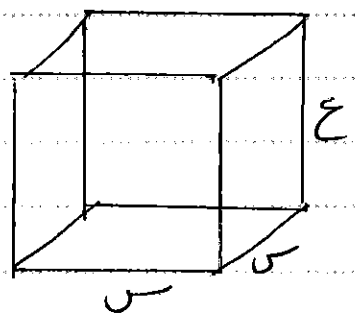
العرض = ٤:



الارتفاع $ع = \frac{٣٢}{١٦} = ٢$

مثال ⑦

صفيحة معدنية مساحتها ١٢٠٠ سم٢ نريد صنع صندوق منها قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من أعلى اوجد أكبر حجم ممكن تكوينه



الحل

$ح = س^2 \times ع$

المساحة = ١٢٠٠ = مساحة القاعدة + مساحة الجوانب

$١٢٠٠ = س^2 + 4 س ع$

$١٢٠٠ - س^2 = 4 س ع$

$\Leftarrow ع = \frac{١٢٠٠ - س^2}{4 س} = \frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{4}$

$\Leftarrow ح = س^2 (\frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{4})$

$= ٣٠٠ س - \frac{س^3}{4}$

$ح' = ٣٠٠ - \frac{٣}{4} س^2 = ٠ \leftarrow \frac{٣}{4} س^2 = ٣٠٠$

$\leftarrow س^2 = \frac{٤ \times ٣٠٠}{٣} = ٤٠٠ \leftarrow س = \pm ٢٠$

$س = ٢٠$

$ح = ٣٠٠ \times ٢٠ - \frac{(٢٠)^3}{4} = ٤٠٠٠ سم^3$

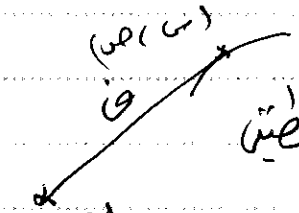
مكتبة العلم
ALILSAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

جد النقطة على منحنى $ص = \sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(٤، ٢٧)$ ؟

الحل

نفرض ان النقطة هي $(س، ص)$



ف : البعد بين النقطتين $(س، ص)$ ، $(٤، ٢٧)$

$$ف = \sqrt{(س - ٤)^٢ + (ص - ٢٧)^٢}$$

$$= \sqrt{(س - ٤)^٢ + (ص - ٢٧)^٢}$$

لكن $ص = \sqrt{٨س}$ قاعدة

$$ف = \sqrt{(س - ٤)^٢ + (\sqrt{٨س} - ٢٧)^٢}$$

$$ف' = \frac{٢(س - ٤) + ٢(\sqrt{٨س} - ٢٧) \times \frac{٨}{٢\sqrt{٨س}}}{٢\sqrt{(س - ٤)^٢ + (\sqrt{٨س} - ٢٧)^٢}}$$

البسط = صفر

$$٢(س - ٤) + \frac{٨(\sqrt{٨س} - ٢٧)}{\sqrt{٨س}} = ٠$$

وبضرب المعادلة في $\sqrt{٨س}$

$$٢\sqrt{٨س}(س - ٤) + ٨(\sqrt{٨س} - ٢٧) = ٠$$

$$٢\sqrt{٨س^٣} - ٨س + ٨\sqrt{٨س} - ١٦ = ٠$$

$$٢\sqrt{٨س^٣} + ٨\sqrt{٨س} = ٨س + ١٦$$

$$\sqrt{٨س}(٢س + ٨) = ٨س + ١٦$$

بتربيع الطرفين

$$٨س(٢س + ٨)^٢ = (٨س + ١٦)^٢$$

$$٨س(٤س^٢ + ٣٢س + ٦٤) = ٦٤س^٢ + ٢٥٦س + ٢٥٦$$

$$٣٢س^٣ + ٢٥٦س^٢ + ٥١٢س = ٦٤س^٢ + ٢٥٦س + ٢٥٦$$

$$٣٢س^٣ + ١٩٢س^٢ + ٢٥٦س - ٢٥٦ = ٠$$

$$٨س^٣ + ٤٨س^٢ + ٦٤س - ٦٤ = ٠$$

$$٨(س^٣ - ١) + ٤٨س(س - ١) = ٠$$

$$٨(س - ١)(س^٢ + س + ١) + ٤٨س(س - ١) = ٠$$

$$(س - ١)[٨(س^٢ + س + ١) + ٤٨س] = ٠$$

$$(س - ١)(٨س^٢ + ٥٦س + ٨) = ٠$$

$$٨(س - ١)(س + ٧ + \sqrt{٤٥})(س + ٧ - \sqrt{٤٥}) = ٠$$

$س = ١$ ، $س = -٧ - \sqrt{٤٥}$ ، $س = -٧ + \sqrt{٤٥}$

$$ف'(س) = ٨س(س - ١)(س + ٧ + \sqrt{٤٥})(س + ٧ - \sqrt{٤٥})$$

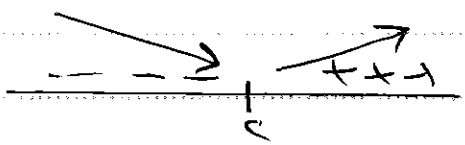
$$= ٨س^٤ + ٥٦س^٣ + ٨س^٢ - ٨س^٣ - ٥٦س^٢ - ٨س$$

$$= ٨س^٤ + ٤٨س^٣ - ٤٨س^٢ - ٨س$$

$$= ٨س(س^٣ + ٦س^٢ - ٦س - ١)$$

$$= ٨س(س - ١)(س^٢ + ٧س + ١)$$

$$= ٨س(س - ١)(س + ٧ + \sqrt{٤٥})(س + ٧ - \sqrt{٤٥})$$



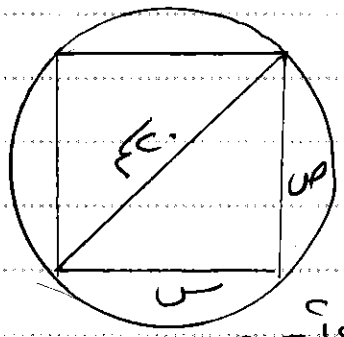
عند $س = ٤$ تكون أقرب ما يمكن

$ص = \sqrt{٨ \times ٤} = \sqrt{٣٢} = ٤$

النقطة هي $(٤، ٤)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨
اوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٢٠ سم



الحل

م = س × ص

لكن $س^2 + ص^2 = (٤٠)^2 = ١٦٠٠$

$ص^2 = ١٦٠٠ - س^2$

$ص = \sqrt{١٦٠٠ - س^2}$

$م = س \times \sqrt{١٦٠٠ - س^2}$

$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٦٠٠ - س^2} \times ١ = ٠$

$= \frac{-س^2}{\sqrt{١٦٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٦٠٠ - س^2} = ٠$

$\sqrt{١٦٠٠ - س^2} = \frac{س^2}{\sqrt{١٦٠٠ - س^2}}$ ضرب تبادلي

$١٦٠٠ - س^2 = س^2 \Leftarrow ١٦٠٠ = ٢س^2$

$ص^2 = ٨٠٠ \Leftarrow س = \sqrt{٨٠٠}$

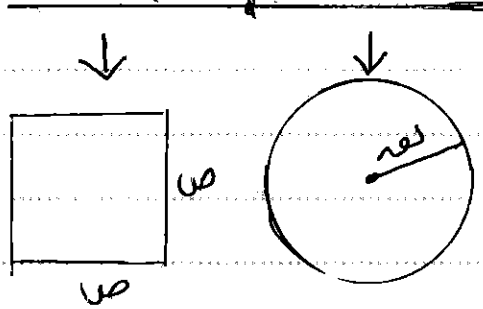
$ص = \sqrt{١٦٠٠ - ٨٠٠} = \sqrt{٨٠٠}$

$م = ٢٠٠ \times ٢ = ٤٠٠$ سم

$م' = +++|---$ عند $\sqrt{٨٠٠}$ عظمى

مثال ⑩
سلك طوله ٦٠ سم يريد قطعة إلى جزئين تكون احدهما مربع وفي الآخر دائرة فاين يقطع السلك بحيث يكون مجموع المساحة
① أقل ما يمكن
② أكبر ما يمكن

الحل



مساحة الدائرة $= \pi نق^2$

محيط الدائرة $= ٢\pi نق = س$

$نق = \frac{س}{٢\pi}$

مساحة الدائرة $= \pi (\frac{س}{٢\pi})^2$

$= \frac{\pi س^2}{٤\pi^2} = \frac{س^2}{٤\pi}$

مساحة المربع $= ص^2$

محيط المربع $= ٤ص = ٦٠ - س$

$ص = \frac{٦٠}{٤} - \frac{س}{٤} = ١٥ - \frac{س}{٤}$

مساحة المربع $= (١٥ - \frac{س}{٤})^2$

يتبع الحل

مكتبة الهدى ELHODA
المعلم: ناجح الجمزاوي

المساحة الكلية = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$م = \frac{س^2}{4\pi} + (10 - \frac{س}{4})^2$

$م' = \frac{2س}{8\pi} + 2(10 - \frac{س}{4}) \times -\frac{1}{4} = 0$

$\frac{س}{4\pi} = (10 - \frac{س}{4}) \times \frac{1}{2} = 5 - \frac{س}{8}$

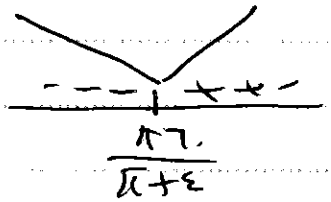
$(\pi 8 \times)$

$\leftarrow$

$4س = 60\pi - \pi س$

$4س + \pi س = 60\pi$

$س(4 + \pi) = 60\pi \leftarrow ص = \frac{60\pi}{4+\pi}$



(أ) تحدث عندما لا يقطع السلك فيكون الشكل إما دائرة فقط أو مربع فقط

أولاً الدائرة — 60

$م = \pi نق^2$

لكن $2\pi نق = 60$

$\therefore نق = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$

$\therefore م = \pi(\frac{30}{\pi})^2 = \pi \times \frac{900}{4\pi^2} = \frac{900}{4\pi}$

ثانياً مربع — 60

$م = ص^2$

لكن $4ص = 60 \leftarrow ص = 15$

$\therefore م = (15)^2 = 225$

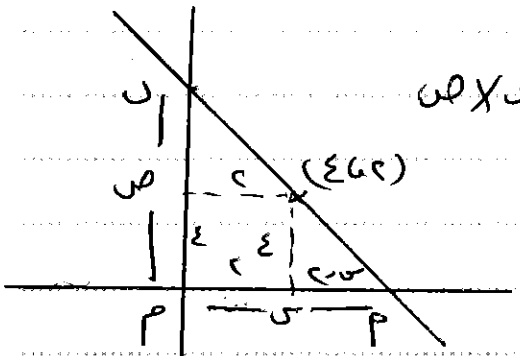
$\frac{900}{4\pi} < 225 \leftarrow$ الشكل دائرة

مثال (11)

مر مستقيم بالنقطة $(4, 2)$ قطع محوري الإحداثيات الموجبين في $أ$ و $ب$ أوجد أقل مساحة للمثلث $أ م ب$ حيث $م$ نقطة الأصل.

الحل

$م = \frac{1}{2} س \times ص$



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

من التشابه $\frac{ص}{س} = \frac{4}{س - 2}$

$\Rightarrow ص = \frac{4س}{س - 2}$

$\Rightarrow م = \frac{1}{2} س \times \frac{4س}{س - 2} = \frac{2س^2}{س - 2}$

$م' = \frac{(س - 2) \times 4س - 2س^2 \times 1}{(س - 2)^2}$

$\leftarrow$ تتبع الحل

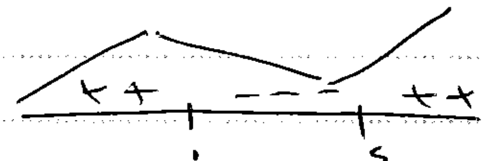
مكتبة السحاب ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$م' = \frac{٤س^2 - ٨س - ٢س^2}{(س-٢)^2}$

$= \frac{٢س^2 - ٨س}{(س-٢)^2} = صفر$

$٢س^2 - ٨س = ٠$

$٢س(س-٤) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٤$



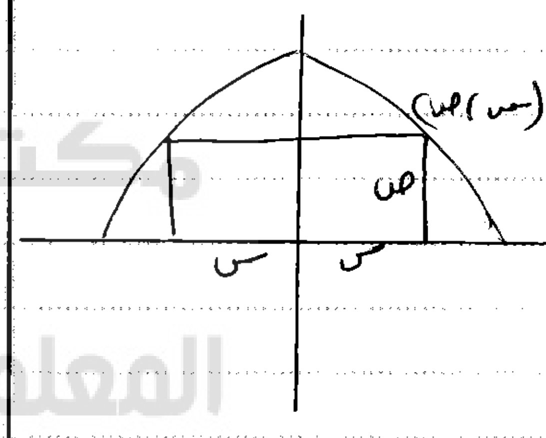
قيمة صغرى

$س = ٤ \Leftarrow ص = \frac{٢ \times ٤}{٤ - ٢} = ٨$

$م = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٨ = ١٦$

مثال (١٢)

اوجد مساحة أكبر مستطيل على رقعة مولفة محور السينات بحيث يقع احد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على المنحنى $ص = ١٢ - س^2$



مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢س \times ص$

لكن $ص = ١٢ - س^2$

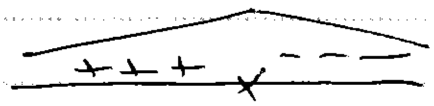
$م = ٢س(١٢ - س^2)$

$= ٢٤س - ٢س^3$

$م' = ٢٤ - ٦س^2 = ٠$

$٦(٤ - س^2) = ٠$

$س = \pm ٢$



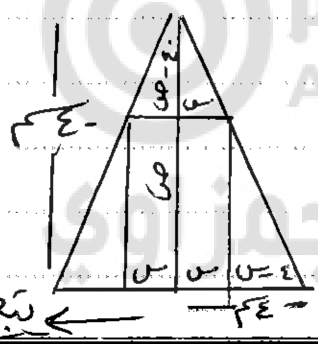
عظمى

$ص = ١٢ - ٢^2 = ٨$

$م = ٢ \times ٢ \times ٨ = ٣٢$

مثال (١٣)

مثلث ارتفاعه ٤٠سم وقاعدته ٨سم ، نريد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقي المثلث أوجد أكبر مستطيل من حيث مساحته



الحل

م = الطول × العرض

$= ٢س \times ص$

يتبع ←

← تابع الحل

من التشابه $\frac{٤٠ - ص}{س} = \frac{٤٠}{٤}$

← $\frac{٤٠ - ص}{س} = ١٠$

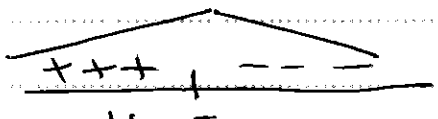
$٤٠ - ص = ١٠ س$ ← $ص = ٤٠ - ١٠ س$

$م = ٢ س (٤٠ - ١٠ س)$

$= ٨٠ س - ١٠ س^٢$

$م' = ٨٠ - ٢٠ س = ٠$

$س = ٢$



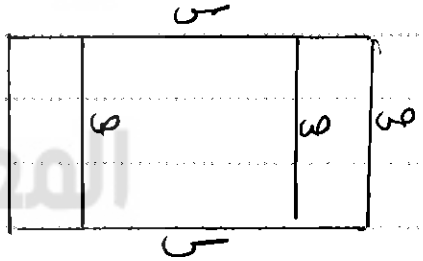
$ص = ٤٠ - ١٠ \times ٢ = ٢٠$

$م = ٢ \times ٢٠ = ٨٠ م^٢$

مثال (١٤)

لدى رجل حقل مستطيل يريد سياجه ثم قسمته الى ثلاثة اقسام بسياج من الداخل يوازيان احد اضلاعه فاذا كان عنده ١٠٠٠ م من السياج أوجد أكبر مساحة يمكن سياجها

الحل



$م = س \times ص$

كمية السياج $= ١٠٠٠ م$

$١٠٠٠ = ٢ س + ٤ ص$ (÷٢)

$٥٠٠ = س + ٢ ص$

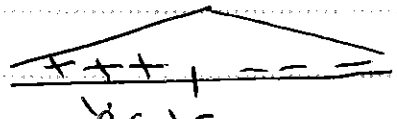
← $س = ٥٠٠ - ٢ ص$

$م = ص (٥٠٠ - ٢ ص) \times ص$

$= ٥٠٠ ص - ٢ ص^٢$

$م' = ٥٠٠ - ٤ ص = ٠$

← $ص = \frac{٥٠٠}{٤} = ١٢٥$



$س = ٥٠٠ - ٢ \times ١٢٥ = ٥٠٠ - ٢٥٠$

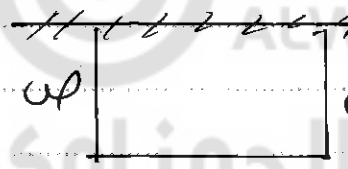
$= ٢٥٠$

$م = ٢٥٠ \times ١٢٥ = ٣١٢٥٠ م^٢$

مثال (١٥)

يريد رجل اقامة سياج حول قطعة مستطيلة الشكل تقع على ضفة نهر مستقيم فاذا لم يسيج طرف النهر أوجد ابعاد القطعة ليكون طول السياج أقل ما يمكن علما بان مساحة القطعة ٨٠٠ م^٢

الحل



طول السياج

$ل = س + ٢ ص$

← نتبع

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

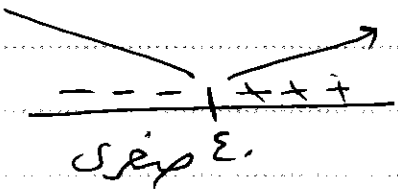
$س \times ص = ٨٠٠ \leftarrow ص = \frac{٨٠٠}{س}$

$ل = س + ٢ص = س + \frac{١٦٠٠}{س}$

$ل' = ١ - \frac{١٦٠٠}{س^٢} = ٠$

$١ = \frac{١٦٠٠}{س^٢} \Leftarrow س^٢ = ١٦٠٠$

$س = \pm\sqrt{١٦٠٠} = \pm ٤٠$

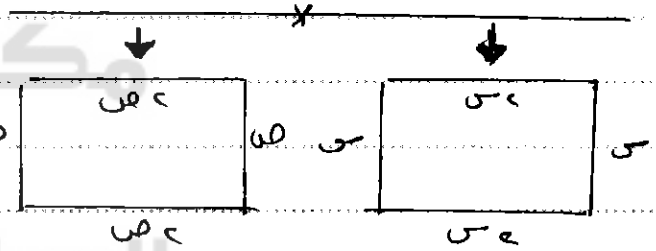


$ص = \frac{٨٠٠}{٤٠} = ٢٠$

مثال (١٦)

سلك طوله ٦٠ سم قطع إلى جزئين متكون من كل جزء مستطيل طوله مثلى عرضه أوجد أقل مساحة ممكنة للمستطيلين

الحل



$م = ٢س \times س + ٢ص \times ص$

$= ٢س^٢ + ٢ص^٢$

مجموع المستطيلين = محيط المستطيل ① + محيط المستطيل ② = طول السلك

$٦س + ٦ص = ٦٠$ (÷ ٦)

$س + ص = ١٠$

$ص = (١٠ - س)$

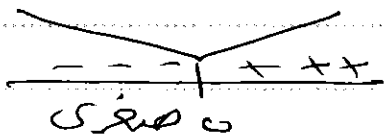
$\Leftarrow م = ٢س^٢ + ٢(١٠ - س)^٢$

$م' = ٤س + ٤(١٠ - س) \times -١$

$= ٤س - ٤٠ + ٤س$

$= ٨س - ٤٠ = ٠$

$س = \frac{٤٠}{٨} = ٥$



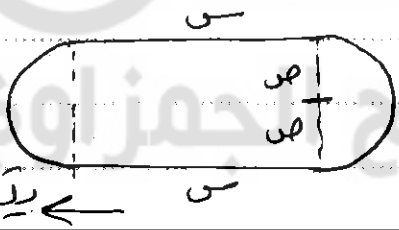
$ص = ١٠ - ٥$

$م = ٢(٥)^٢ + ٢(٥)^٢ = ١٠٠ سم^٢$

مثال (١٧)

ملعب على شكل مستطيل يتوجه بنصف دائرة فاذا كان محيط الملعب ٤٠٠ م اوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن

الحل



مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

المساحة (م) = مساحة المستطيل + مساحة الدائرة

$م = س \times ص + \pi ص^2$

$م = ٢٠ س ص + \pi ص^2$

المحيط $= ٤٠$ سم

$٢س + ٢ص\pi = ٤٠$ سم

$٢س = ٤٠ - ٢ص\pi$

$س = ٢٠ - \pi ص$ المساحة

$م = (٢٠ - \pi ص) ٢ ص + \pi ص^2$

$م = ٤٠ ص - ٢\pi ص^2 + \pi ص^2$

$م = ٤٠ ص - \pi ص^2$

$م' = ٤٠ - ٢\pi ص = ٠$

$٢\pi ص = ٤٠ \leftarrow ص = \frac{٤٠}{٢\pi}$

$ص = \frac{٢٠}{\pi}$

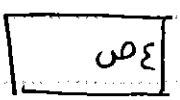
	$\frac{٢٠}{\pi}$	
$م'$	+	−
$م$	عظمى	

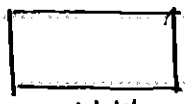
$ص = \frac{٢٠}{\pi}$ نصف قطر الدائرة

مثال (١٨)

مجموع محيطي مستطيلين ٩٩ سم والنسبة بين بعدي المستطيل الأول ٢ : ١ والنسبة بين بعدي المستطيل الثاني ٣ : ٤ أوجد أصغر مجموع لمساحتي المستطيلين

الحل





$م = ٦ س^2 + ١٢ ص^2$

محيط الأول + محيط الثاني = ٩٩

$١٠ س + ١٤ ص = ٩٩$

$س = \frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠}$

$م = ٦ (\frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠})^2 + ١٢ ص^2$

$م' = ١٢ (\frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠}) \times \frac{-١٤}{١٠} + ٢٤ ص = ٠$

$ص = ٣,٥$ وبالتعويض $س = ٥$

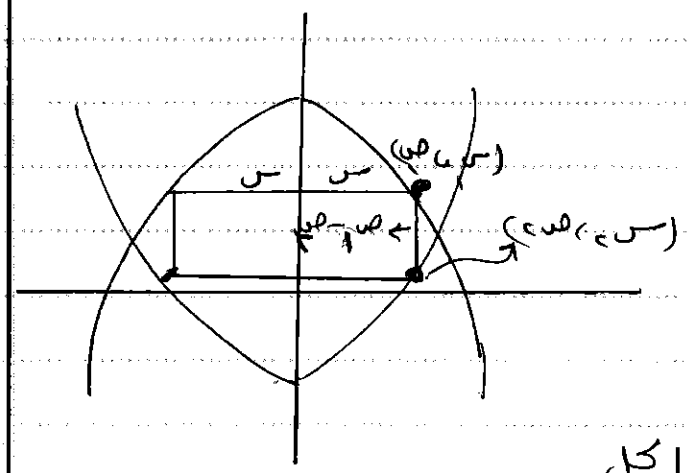
	$٣,٥$	
$م'$	−	+
$م$		

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٩)

اوجد مساحة اكبر مستطيل يقع رؤوسه على المنحنى $ص = ١٠ - س^{٢}$ ومحور السينات حيث $س > ٠$

الحل



$م = ٢س \times ص$

$م = ٢س (ص - ٠)$

$= ٢س (١٠ - س^{٢} - (س^{٢} - ٨))$

$= ٢س (١٠ - س^{٢} - س^{٢} + ٨)$

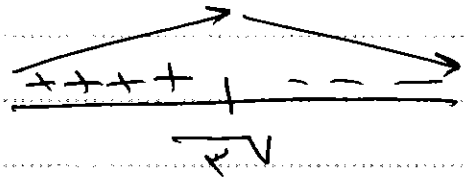
$= ٢س (١٨ - ٢س^{٢})$

$= ٣٦س - ٤س^{٣}$

$م' = ٣٦ - ١٢س^{٢} = ٠$

$س^{٢} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٣}$

$س = \sqrt{٣}$



$ص_{١} = ١٠ - (\sqrt{٣})^{٢} = ٧$

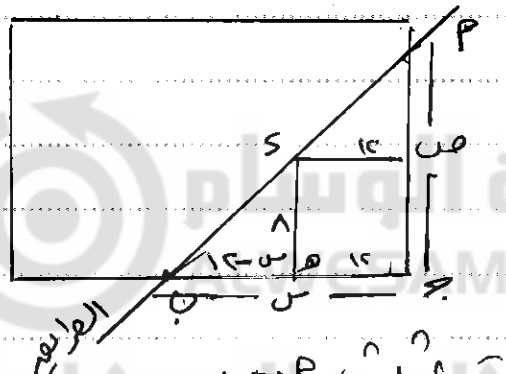
$ص_{٢} = ٨ - (\sqrt{٣})^{٢} = ٥$

$م = ٢ \times \sqrt{٣} \times ٢ \times (٧ - ٥) = ٤ \times ٢\sqrt{٣}$

مثال (٢٠)

ارض مستطيلة الشكل توجد فيها شجرة بالقرب من احدى زواياها اذا كانت الشجرة تبعد عن الحافتين اللتين تحدان الزاوية ١٢م، ٨م واردنا ان نعمل طريقاً مستقيماً يقطع جزء من الارض ويمر بجانب الشجرة فما هي مساحة اصغر مثلث من الارض يمكن اقتطاعه

الحل



مساحة المثلث $م ب ب$

$= \frac{١}{٢} \times س \times ص$ ← المطلوب

من تشابه Δ ABC ، ADE

يكون $\frac{ص}{س} = \frac{٨}{س-١٢}$ ←

$ص = \frac{٨س}{س-١٢}$

$م = \frac{١}{٢} \times س \times \frac{٨س}{س-١٢} = \frac{٤س^{٢}}{س-١٢}$

$م' = \frac{(س-١٢)(١٦س) - ٤س^{٢}(١)}{(س-١٢)^{٢}}$

$= \frac{١٦س^{٢} - ١٩٢س - ٤س^{٢}}{(س-١٢)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٢} - ١٩٢س}{(س-١٢)^{٢}}$

$٤س^{٢} - ١٩٢س = ٠ \leftarrow ٤س(س-٤٨) = ٠$

$س = ٠ ، ٤٨$

	٠		٤٨	
$م'$	−	٠	+	
		صغرى		

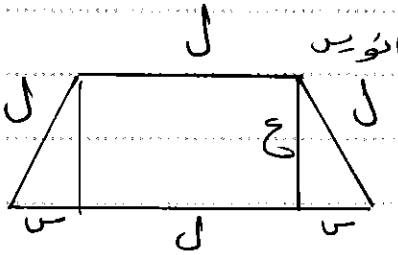
$ص = \frac{٨ \times ٤٨}{٤٨-١٢} = ١٦$

$م = \frac{١}{٢} \times ٤٨ \times ١٦ = ٣٨٤$

مثال (٢١)

اذا كانت اطوال ثلاثة اضلاع لشبه منحرف متساوية، اثبت ان مساحة شبه المنحرف تكون أكبر ما يمكن عندما يكون طول الضلع الرابع ضعف طول اي ضلع من الاضلاع الثلاث الأخرى.

الحل



الارتفاع = ع حيث ع موجبة

$ل^{٢} = س^{٢} + ع^{٢}$

$ع^{٢} = ل^{٢} - س^{٢}$

$ع = \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢}(ل + ل + س + س) \times \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$= \frac{١}{٢}(٢ل + ٢س) \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$= (ل + س)\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$م' = (ل+س) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}} + \sqrt{ل^{٢}-س^{٢}} \times ١$

$= \frac{-س(ل+س)}{\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}} + \frac{\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}}{١} \times \frac{\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}}{\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}}$

$= \frac{-س(ل+س) + ل^{٢} - س^{٢}}{\sqrt{ل^{٢}-س^{٢}}}$

$-س(ل+س) = ل^{٢} - س^{٢}$

$-سل - س^{٢} = ل^{٢} - س^{٢}$

$-٢س^{٢} - لس - ل^{٢} = ٠$

$(-٢س + ل)(س + ل) = ٠$

$س = \frac{١}{٢}ل$ ، $س = -ل$ (مرفوض)

	$-ل$		$\frac{١}{٢}ل$	
$م'$	−	٠	+	
			عظمى	

طول الضلع الثالث $= ل + \frac{١}{٢}ل + ل$

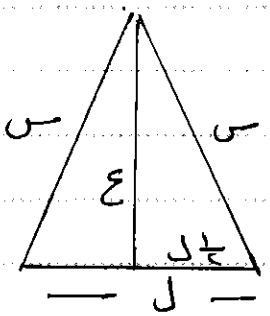
$= ٢ل$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٢٢)

مثلث متساوي الساقين محيطه ٣٦ سم أوجد أكبر مساحة ممكنة له

الحل



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ل \times ع$

لكن $س + س + ل = ٣٦$

$\therefore ٢س = ٣٦ - ل \Leftarrow \boxed{س = ١٨ - \frac{ل}{٢}}$

بتطبيق نظرية فيثاغورس

$ع^٢ + (\frac{ل}{٢})^٢ = س^٢ \Leftarrow ع^٢ + \frac{ل^٢}{٤} = س^٢$

$ع^٢ + \frac{ل^٢}{٤} = (١٨ - \frac{ل}{٢})^٢$

$ع^٢ + \frac{ل^٢}{٤} = ٣٢٤ - ٩ل + \frac{ل^٢}{٤}$

$٩ل = ٣٢٤ - ع^٢$

$ل = \frac{١}{٩}(٣٢٤ - ع^٢)$

$م = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٩}(٣٢٤ - ع^٢) \times ع$

$= \frac{١}{١٨}(٣٢٤ع - ع^٣)$

$م' = \frac{١}{١٨}(٣٢٤ - ٣ع^٢) = ٠$

$٣٢٤ - ٣ع^٢ = ٠ \Leftarrow ع^٢ = ١٠٨$

$ع = \sqrt{١٠٨}$

$= \sqrt{٣ \times ٣ \times ٦ \times ٣}$

$= ٦\sqrt{٣}$ عظمى

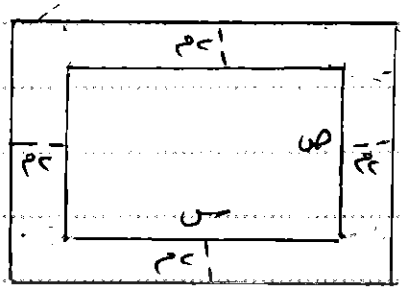
$ل = \frac{١}{٩}(٣٢٤ - ع^٢) = \frac{١}{٩}(٣٢٤ - ١٠٨)$

$= ٢٤$

$م = \frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ٦\sqrt{٣} = ٧٢\sqrt{٣}$ سم^٢

مثال (٢٣)

يراد انشاء حديقه مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠ م^٢ واحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي فتنظم عرضه ٢ م ، أوجد ابعاد الحديقة التي تجعل المساحه الكليه للحديقه والطريق اقل ما يمكن.



مساحة الحديقة $= م$

$م = (س + ٤)(ص + ٤)$

$س \times ص = ٩٠٠ \Leftarrow ص = \frac{٩٠٠}{س}$

$م = (س + ٤)(\frac{٩٠٠}{س} + ٤)$

$= ٩٠٠ + ٤س + \frac{٤ \times ٩٠٠}{س} + ١٦$

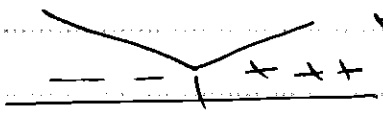
$= ٩١٦ + ٤س + \frac{٣٦٠٠}{س}$

يتبع ←

$م' = ٤ - \frac{٣٦٠٠}{س^٢}$ ← $٤ = \frac{٣٦٠٠}{س^٢}$

$٤س^٢ = ٣٦٠٠$ ← $س^٢ = ٩٠٠$

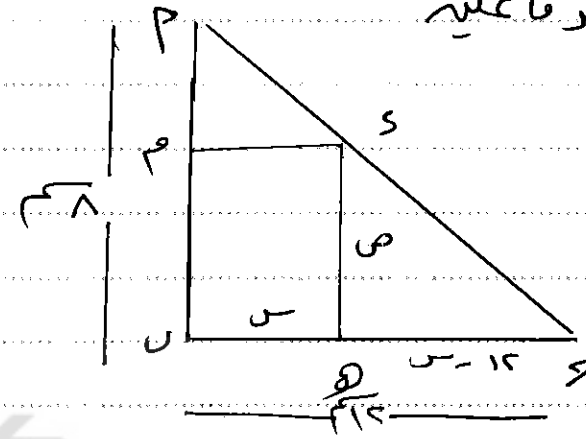
$س = ٣٠$



$ص = \frac{٩٠٠}{٣٠} = ٣٠$

مثال (٤)

$ا ب ح$ مثلث قائم الزاوية في ب بحيث $ا ب = ٨$ سم، $ب ح = ١٢$ سم، اخذت النقطة $د$ على الوتر $ا ح$، وأنزل منها العمودان $د هـ$، $د م$ على الضلعين $ب ح$، $ا ب$ على الترتيب اوجد طولي هذين العموديين للذين يجعلان مساحة المستطيل $د هـ ب م$ أكبر ما يمكن



من التشابه $\frac{ص}{١٢ - س} = \frac{٨}{١٢}$

$١٢ص = ٩٦ - ٨س$ (÷ ١٢)

$ص = ٨ - \frac{٢}{٣}س$

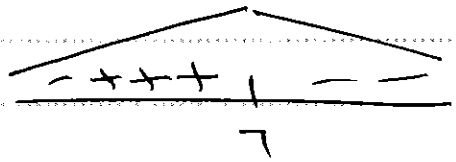
$م = س ص$

$م = س(٨ - \frac{٢}{٣}س)$

$= ٨س - \frac{٢}{٣}س^٢$

$م' = ٨ - \frac{٤}{٣}س = ٠$

$٨ = \frac{٤}{٣}س$ ← $س = \frac{٢٤}{٤} = ٦$



$ص = ٨ - \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤$

$م = ٦ \times ٤ = ٢٤$ سم^٢

مثال (٥)

قطعة ارض على شكل مستطيل يريد ان يسيجها فاذا كانت تكلفة المتر الواحد من جانبين متوازيين هي ٣ دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين فاوجد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن تسييجها بمبلغ ٦٠٠ دينار

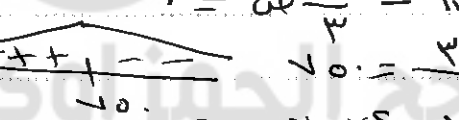
الحل

$م = س ص$ ، $٦٠٠ = ٣ \times ٢س + ٢ \times ٢ص$

$٦٠٠ = ٤ص + ٦س$ ← $س = ١٠٠ - \frac{٢}{٣}ص$

$م = (١٠٠ - \frac{٢}{٣}ص)ص = ١٠٠ص - \frac{٢}{٣}ص^٢$

$م' = ١٠٠ - \frac{٤}{٣}ص = ٠$



$ص = \frac{٣٠٠}{٤} = ٧٥٠$

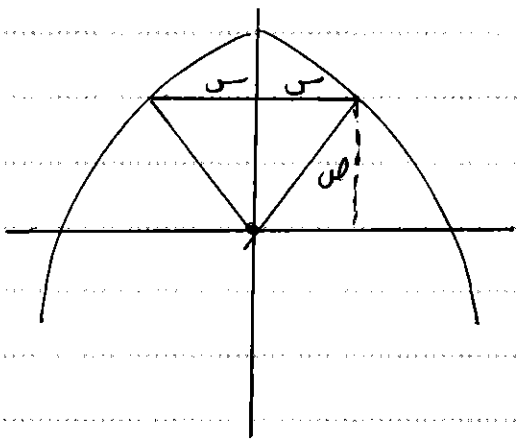
$س = ١٠٠ - \frac{٢}{٣} \times ٧٥٠ = ٥٠٠$

$م = ٧٥٠ \times ٥٠٠ = ٣٧٥٠٠$ م^٢

مكتبة السام ACADEMY SAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٦)

مثلث متساوي الساقين مرسوماً فوقه محور السينات بحيث يقع رأسه المحصور بين ضلعيه بمتساويين في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتران ص = ٨ - س² هي أكبر مساحة لهذا المثلث



الحل

م = ½ × القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٢س × ص = س ص

لكن ص = ٨ - س²

م = س (٨ - س²)

= ٨س - س³

م' = ٨ - ٣س² = ٠

س² = ٩ ⇐ س = ٣

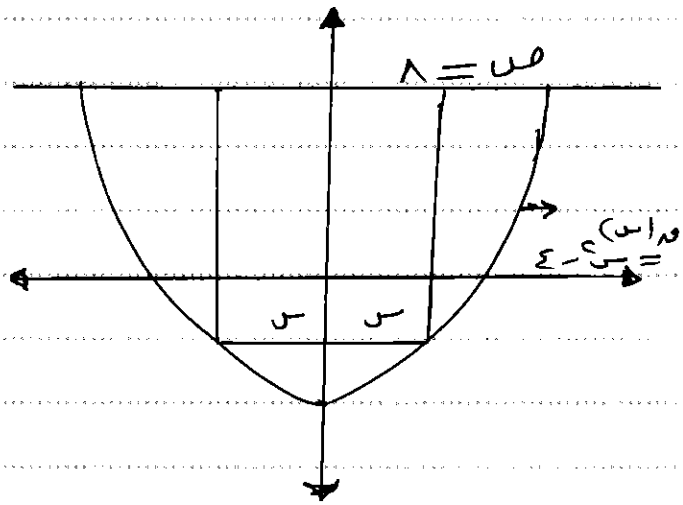
+	+	+	0	−	−
			٣		

ص = ٨ - ٩ = ١٨

م = ٢ × ١٨ = ٥٤

مثال (٧)

في الشكل المجاور أوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.



الحل

م = س × ص (الارتفاع)

= ٢س × ص (العلوي - السفلي)

= س (٨ - (س² - ٤))

= س (٨ - س² + ٤)

= س (١٢ - س²)

= ١٢س - س³

م' = ١٢ - ٣س² = ٠

س² = ٤ ⇐ س = ٢

+	+	+	0	−	−
			٢		

عظمى

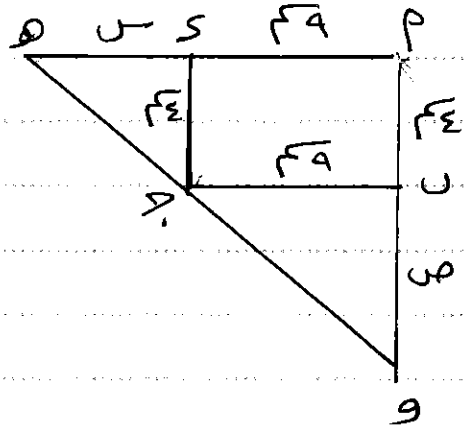
م = ٢س × س = ٢س² = ٢(١٢ - ٤) = ٨ × ٤

= ٣٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

P ∪ ح قطعة مستقيمة فيه P ∪ = ٤ سم
∪ ح = ٩ سم، رسم مستقيم يمر بالنقطة ح ويقطع امتداد P ح في هـ وامتداد P ∪ في و، جد أصغر مساحة ممكنة للمثلث P هـ و



مساحة المثلث = ½ القاعدة × الارتفاع

$م = \frac{1}{2}(٩+س)(٤+ص)$

من تشابه المثلثان ن و ح، ح ك هـ

$\frac{٤}{س} = \frac{ص}{٩} \leftarrow ص = \frac{٣٦}{س}$

$م = \frac{1}{2}(٩+س)(٤+\frac{٣٦}{س})$

$= \frac{1}{2}(٣٦ + \frac{٣٢٤}{س} + ٤س + ٣٦)$

$م' = \frac{1}{2}(-\frac{٣٢٤}{س^٢} + ٤) = ٠$

$\frac{٣٢٤}{س^٢} = ٤ \leftarrow ٤س^٢ = ٣٢٤$

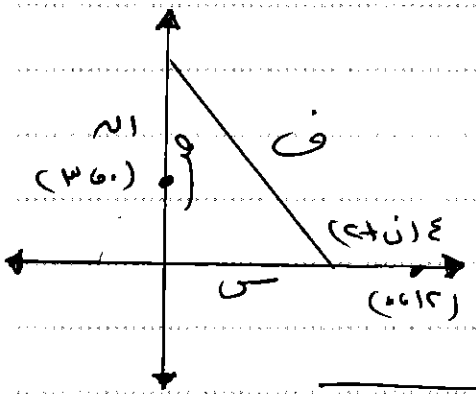
$س^٢ = ٨١ \quad س = ٩$

$ص = \frac{٣٦}{٩} = ٤$

	س = ٩	
م'	−	+
	صغرى	

مثال (٩)

بدأت النقطة م الحركة من النقطة (٠، ١٢) على محور الصادات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤ سم/ث وبعد ثانيتين بدأت النقطة ب الحركة من النقطة (٣٦٠، ٠) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٣ سم/ث، متى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن



$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$س = ١٢ - ٤(ن+٢) = ٤ - ٤ن$

$ص = ٣ + ٨١ = ٣ + ن$

$ف = \sqrt{(٤-٤ن)^٢ + (٣+ن)^٢}$

$ف' = \frac{٢(٤-٤ن)(-٤) + ٢(٣+ن)}{٢\sqrt{(٤-٤ن)^٢ + (٣+ن)^٢}}$

$٢(٤-٤ن)(-٤) + ٢(٣+ن) = ٠$

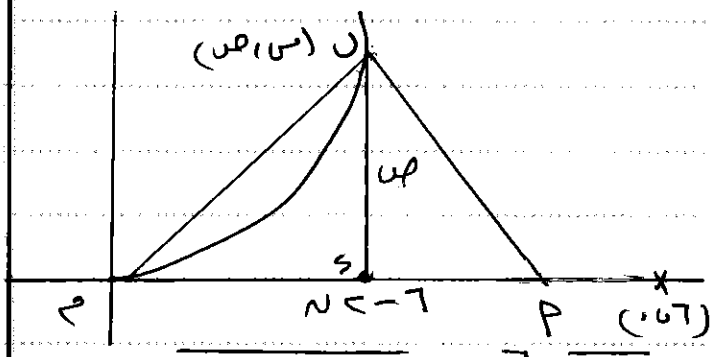
$ن = \frac{٢٦}{٣٤}$ ص تحرك المسافة

	ن = $\frac{٢٦}{٣٤}$	
ف'	−	+
	صغرى	

مكتبة الأوائل ALWEL.COM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٠)

جسم P بدأ الحركة من النقطة (٠، ٦) بسرعة ٣ سم/ث باتجاه نقطة الأصل وفي نفس اللحظة بدأ جسم ب الحركة من م على منحنى $ص = س^2$ في الربع الأول بحيث ان معدل ازدياد الاحداثي السيني للنقطة ب يساوي ٤ سم/ث أوجد متى تكون مساحة المثلث م P ب أكبر ما يمكن.



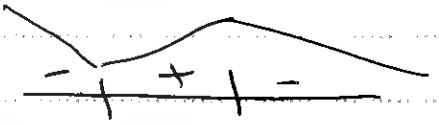
$م = \frac{1}{2} \times م P \times ب ي$

$= \frac{1}{2} \times (٦ - ن) \times ن^2$

$= ٣ن^2 - ن^3$

$م' = ٦ن - ٣ن^2 = ٠$

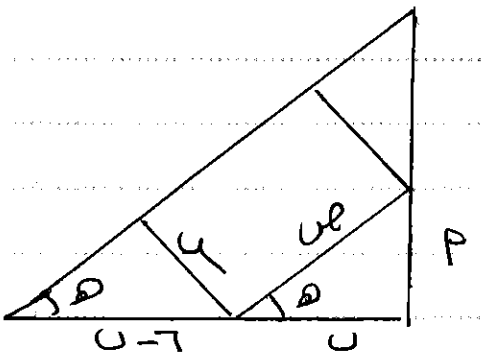
$٣ن(٢ - ن) = ٠ \Leftarrow ن = ٠ ، ن = ٢$



ن = ٢ عظمى

مثال (٣١)

مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم وارتفاعة ٨ سم وطول قاعدته ٦ سم أراد رسم مستطيل بداخله بحيث يقع رأسان من رؤوس المستطيل على وتر المثلث ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة أوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل



الحل

$م = س \times ص$ لكن $\frac{ص}{P} = \frac{٦ - ب}{٦}$

$\Leftarrow م = س \times ص = P \times (٦ - ب)$

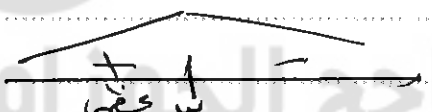
ومن التشابه $\frac{P}{ب} = \frac{٨}{٦}$

$\Leftarrow P = \frac{٤}{٣} ب$

$\Leftarrow م = \frac{٤}{٣} ب \times (٦ - ب)$

$م = \frac{٤}{٣}(٦ب - ب^2)$

$م' = \frac{٤}{٣}(٦ - ٢ب) = ٠ \Leftarrow ب = ٣ ، ب = ٠ \Leftarrow ٦ - ٢ب = ٠$



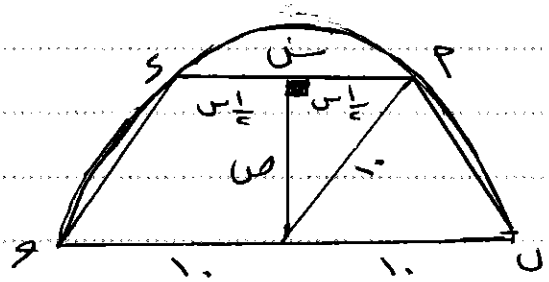
$م = \frac{٤}{٣} \times ٣(٦ - ٣) = ١٢$

مركز العباسيين ALABBASSIN
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٥)

دائرة نصف قطرها ١٠ سم ، أوجد مساحة أكبر شبه منحرف مرسوم داخلها بحيث يقع الرأسان ب ، د على إحدى نهايتي قطر في الدائرة ، والرأسان م ، ك على محيط الدائرة

الحل



$م = \frac{1}{2}(٢٠ + س) \times ص$

$= (١٠ + \frac{س}{2}) \times ص$

لكن $ص^2 + \frac{1}{4}س^2 = ١٠٠$ (المثلث قائم الزاوية)

$ص = \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

$م = (١٠ + \frac{س}{2}) \times \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

$م' = (١٠ + \frac{س}{2}) \times \frac{-\frac{1}{2}س}{2\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}} + \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\frac{1}{2}س(١٠ + \frac{س}{2})}{2\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

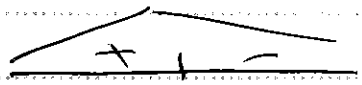
$\leftarrow ١٠٠ - \frac{1}{4}س^2 = ٥س + \frac{1}{4}س^2$

$\leftarrow -\frac{1}{2}س^2 - ٥س + ١٠٠ = ٠$ (×-٢)

$\leftarrow س^2 + ١٠س - ٢٠٠ = ٠$

$(س + ٢٠)(س - ١٠) = ٠$

$\leftarrow س = -٢٠ ، ١٠$



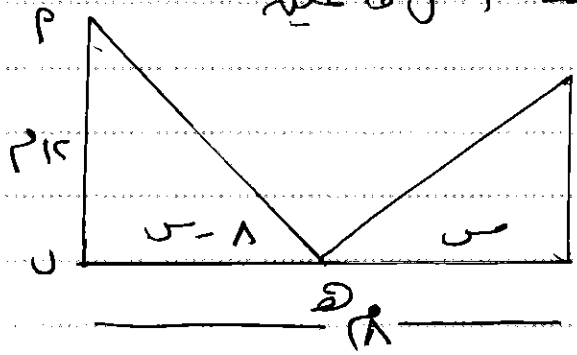
$ص = \sqrt{١٠٠ - ٢٥} = \sqrt{٧٥}$

$م = \frac{1}{2}(٢٠ + ١٠)\sqrt{٧٥}$

$= ١٥\sqrt{٧٥}$

مثال (٣٦)

عمودان كهربائيان أطوالهما ١٠ م ، ١٢ م على أرض شارع فيصل والبعد بينهما ٨ م ، حدد نقطة بينهما على أرض الشارع بحيث يكون مجموع مربعي طولي العمودين عندها أقل ما يمكن



الحل

نفرض م = مجموع مربعي طولي العمودين عند النقطة هـ

حسب فيثاغورس :

$(ك هـ)^2 = س^2 + ١٠٠$

$(م هـ)^2 = (٨ - س)^2 + ١٤٤$

$\leftarrow$ يتبع

مكتبة الوسام A.Wesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

←

م = (ك هـ)^{2} + (ل هـ)^{2}

= س^{2} + ١١٠ + (٨ − س)^{2} + ١٤٤

م = س^{2} + ١١٠ + ٦٤ − ١٦س + س^{2} + ١٤٤

م = ٢س^{2} − ١٦س + ٣١٠

م′ = ٤س − ١٦ = ٠

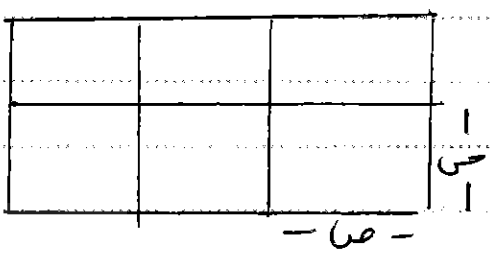
س = ٤

−	+	+
	٤ صغرى	

س = ٤

مثال (٣٤)

صاحب مزرعة اغنام لديه ٣٦٠ م من السلك الشائك، يريد عمل ٦ حظائر متطابقة الشكل ومتساوية المساحة كما في الشكل المجاور أكبر مساحة للحظائر عندما



الحل

م مساحة الحظائر ، ل اطوال السلك

م = الطول × العرض

= ٣ص × ٢س

ل = ٣ص × ٢ + ٤س × ٢

٣٦٠ = ٨س + ٩ص

ص = (٣٦٠ − ٨س) / ٩

م = ٣ص × ٢س = ٣ (٣٦٠ − ٨س)/٩ × ٢س

= ٢/٣ (٣٦٠س − ٨س^{2})

م′ = ٢/٣ (٣٦٠ − ١٦س)

١٦س = ٣٦٠ ← س = ٣٦٠/١٦ = ٤٥/٢

+	+	−
	٤٥/٢ أكبر ما يمكن	

عند س = ٤٥/٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

أكبر مساحة =

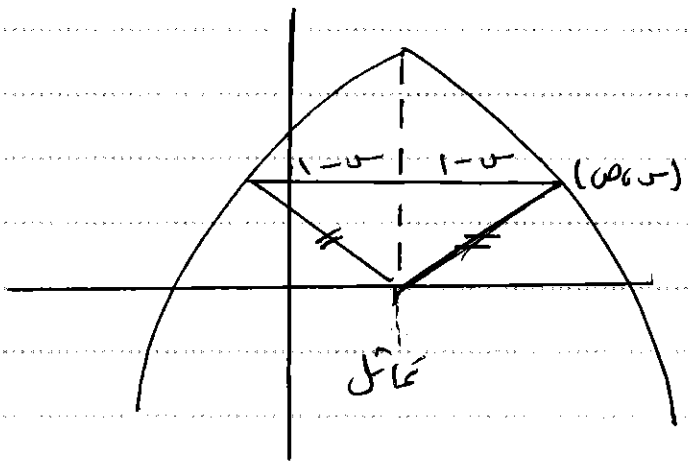
٢ × ٤٥/٢ (٣٦٠ − ٨ × ٤٥/٢)/٣

= ٧٢٠ م^{2}

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٥)

مثلث متساوي الساقين رأسه عند النقطة (١، ١٠) والرأسان الآخران على منحنى $ص = ٤س - س^٢ + ١١$ ، وقاعده محور السينات حيث ان القاعدة توازي محور السينات أوجد أكبر مساحة ممكنه للمثلث.



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

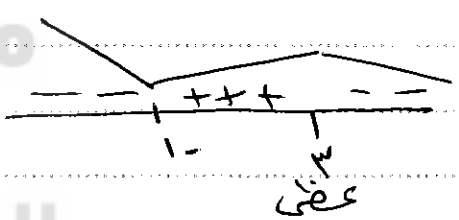
$م = \frac{١}{٢} \times ٤ \times (س - ١) \times ص$

$= (س - ١)(٤س - س^٢ + ١١)$

$= -٣س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$ (÷ -٣)

$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

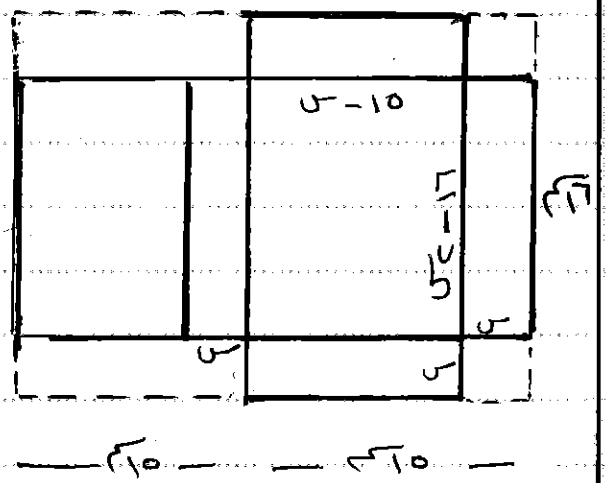
$(س - ٣)(س + ١) = ٠$ ⟹ $س = ٣$ ، -١



عند $س = ٣$ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن

مثال (٣٦)

اعتمد على الشكل لايجاد حجم أكبر صندوق ممكن.



الحل

ح : حجم الصندوق

طول الصندوق = $١٦ - ٢س$

عرض الصندوق = $١٥ - س$

ارتفاع الصندوق = $س$

$ح = (١٦ - ٢س)(١٥ - س) \times س$

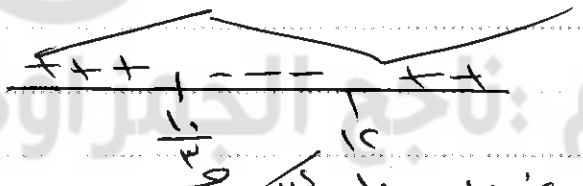
$= ٢٤٠س - ١٦س^٢ - ٣٠س^٢ + ٢س^٣$

$= ٢س^٣ - ٤٦س^٢ + ٢٤٠س$

$ح' = ٦س^٢ - ٩٢س + ٢٤٠ = ٠$ (÷ ٢)

$٣س^٢ - ٤٦س + ١٢٠ = ٠$

$(٣س - ١٠)(س - ١٢) = ٠$



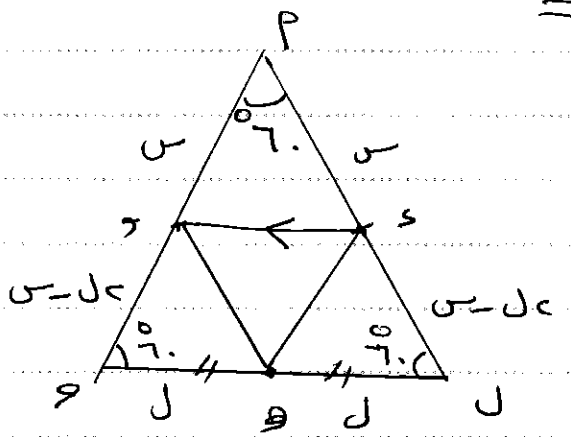
عند $س = \frac{١٠}{٣}$ أكبر حجم

مكتبة الوسام AL-WESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٧)

$\triangle PUV$ مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $= l$ ، D, H, O ثلاثة نقاط على $\overline{PU}, \overline{UV}, \overline{VP}$ بحيث $\overline{DO} \parallel \overline{UV}$ ، H منتصف $\overline{VO}$ اثبت ان اكبر مساحة للمثلث $DHO = \frac{1}{4}$ مساحة المثلث PUV

الحل



مساحة المثلث DHO

$=$ مساحة المثلث PUV $-$ (مساحة $\triangle PDO$ + مساحة $\triangle OHV$ + مساحة المثلث DHO)

$م = \frac{1}{2} \times د و \times$ جا $٦٠° \times$

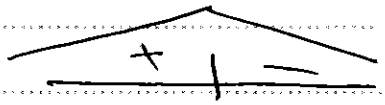
$\left(\frac{1}{2} \times د و \times$ جا $٦٠° + \frac{1}{2} (ل - د و) \times$ جا $٦٠° + \frac{1}{2} \times (ل - س) \times$ جا $٦٠° \right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} ل^2 - \left[\frac{\sqrt{3}}{4} س^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} (ل - س) س \right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} ل^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} س^2 + ل س - س^2 \right]$

$م' = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} [س - ل]$

$س - ل = 0 \leftarrow س = ل$



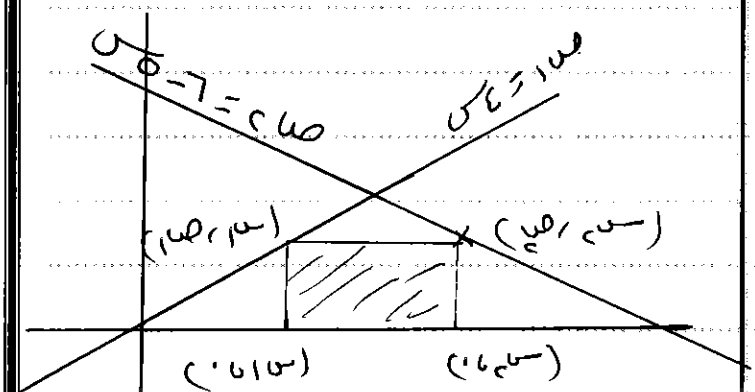
$م = \frac{\sqrt{3}}{2} ل^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} ل^2 + ل^2 - ل^2 \right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} ل^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} ل^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} ل^2 = \frac{1}{4}$ مساحة المثلث PUV

مثال (٣٨)

اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن ان يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات الموجب ويقع الرأسان الآخران على المستقيم $ص = ٤س$ ، $ص = ٦ - ٥س$



الحل

مساحة المستطيل $=$ الطول $\times$ العرض

$= (س - س) \times ص$

$\because$ ان $ص = ص \leftarrow ٤س = ٦ - ٥س$

$\leftarrow س = \frac{٦}{٩}$

$\leftarrow$ يتبع

$م = \left(\frac{٦-١٣٤}{٥} = ١٥\right) \times ٤س^{١٥}$

توحيد مقام

$م = \frac{٦-١٣٩}{٥} \times ٤س^{١٥}$

$= \frac{١}{٥}(٤٢س^{١٥} - ٢٦س^{٢٤})$

$م' = \frac{١}{٥}(٤٢س^{١٤} - ٢٦س^{٢٣}) = صفر$

$٤٢س^{١٤} - ٢٦س^{٢٣} = ٠$

$س = \frac{١}{٣}$

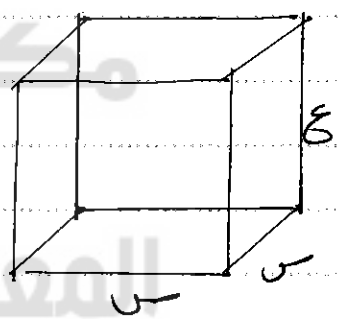
+	+	+	+		−	−	−

$\frac{١}{٣}$ عظمى

$م = \frac{١}{٥}(٤٢ \times \frac{١}{٣} - ٢٦ \times (\frac{١}{٣})^{٢٤}) = \frac{٤}{٥}$

مثال (٣٩)

صندوق خشبي على شكل منشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يراد تقوية ارتباط أوجهه الستة وذلك بتثبيت شريط على طول أحرفه فاذا كان الطول الكلي للشريط المستخدم ٣٠ قدماً



الحل

$ح = س \times س \times ع = س^{٢}ع$

لكن $٣٠ = ٨س + ٤ع \leftarrow ٤ع = ٣٠ - ٨س$

$ع = \frac{٣٠ - ٨س}{٤} = \frac{١٥ - ٤س}{٢}$

$ح = \frac{١}{٢}(١٥ - ٤س) \times س^{٢}$

$= \frac{١}{٢}(١٥س^{٢} - ٤س^{٣})$

$ح' = \frac{١}{٢}(٣٠س - ١٢س^{٢}) = ٠$

$٣س - ١٢س^{٢} = ٠$

$٦س(٥ - ٢س) = ٠ \Rightarrow س = ٠ ، س = \frac{٥}{٢}$

+	+		−

$\frac{٥}{٢}$ عظمى

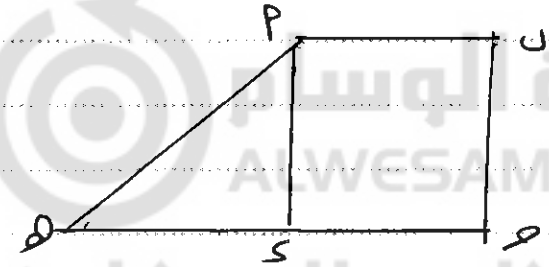
$ع = \frac{٣٠ - ٨ \times \frac{٥}{٢}}{٤} = \frac{٣٠ - ١٥}{٤}$

$= \frac{٥}{٢}$

مثال (٤٠)

اذا أنشئ سلك طول ٧٢ سم كما في الشكل المجاور حيث ان $ا ه = ٤$ سم، $د ح = ا ب = ٥$ سم، $د ه = ٣$ سم

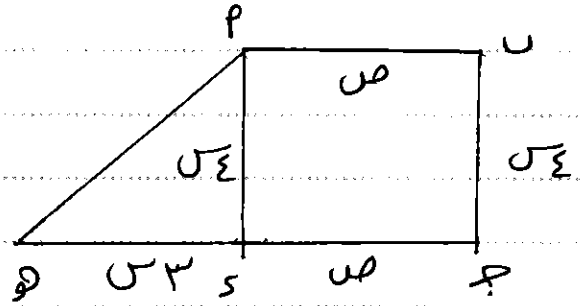
اوجد أكبر مساحة ممكنة للشكل ا ب ح ه



← يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل



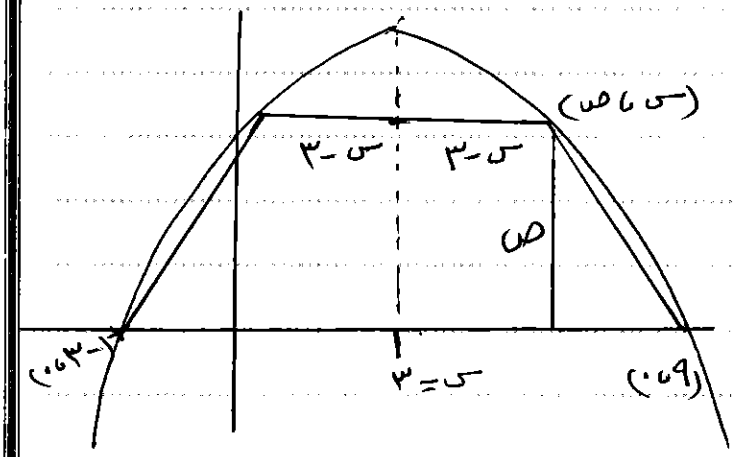
مساحة الشكل أ ب جـ هـ =
= مساحة أ ب د هـ + مساحة أ د جـ
م = ص × ٤س + ½ × ٣س × ٤س
= ٤س ص + ٦ س²
لإيجاد أ هـ ⇐
(أ هـ)² = (٤س)² + (٣س)²
أ = ٥س

محيط الشكل = ص + ٢جـ = ٢٧
ص = ٣٦ − ٦س
م = ٤س(٣٦ − ٦س) + ٦س²
= ١٤٤س − ٢٤س² + ٦س²
= ١٤٤س − ١٨س²
م′ = ١٤٤ − ٣٦س = ٠
س = ٤

ص = ٣٦ − ٦ × ٤ = ١٢
م = ٤ × ٤ × ١٢ + ٦ × (٤)²
= ١٩٢ + ٩٦ = ٢٨٨

مثال (٤١)

أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف المرسوم فوق محور السينات والذي قاعدته هي محور السينات وزاوياه الأخريان على المنحنى ص = −س² + ٦س + ٢٧

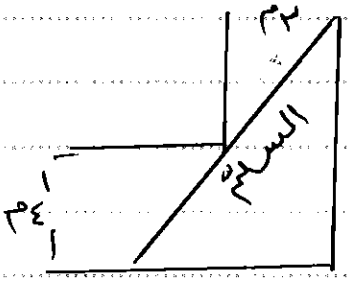


يقطع المنحنى محور السينات عندما
−س² + ٦س + ٢٧ = ٠ ⇐ س² − ٦س − ٢٧ = ٠
(س − ٩)(س + ٣) = ٠
س = ٩ ، س = −٣
طول القاعدة السفلى = ٩ − (−٣) = ١٢
م = ½ (١٢ + ٢(س − ٣)) × ص
= ½ (١٢ + ٢س − ٦) × (−س² + ٦س + ٢٧)
= ½ (٢س + ٦) × ٢ (−س² + ٦س + ٢٧)
= (س + ٣) × (−س² + ٦س + ٢٧)
م′ = (س + ٣) × (−٢س + ٦) + (−س² + ٦س + ٢٧) × ١
= −٢س² + ٦س − ٦س + ١٨ − س² + ٦س + ٢٧
= −٣س² + ٦س + ٤٥ = ٠
(س − ٥)(س + ٣) ⇐ س = ٥ ، −٣

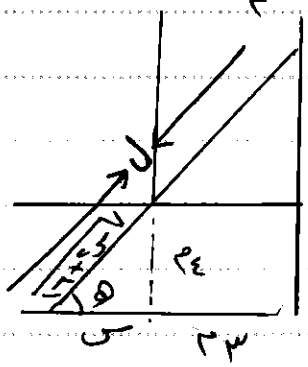
عظمى عند س = ٥
م = (٥ + ٣)(−٢٥ + ٣٠ + ٢٧) = ٥٦

مثال (٤٢)

الشكل المجاور يمثل ممران متعامدان اوجد طول اطول سلم يمكن ان يمر عبرهما بالكامل



الحل : ل: طول السلم



$$\text{ضاهـ} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+16}}$$

$$\text{ضاهـ} = \frac{\text{س}+3}{\text{ل}}$$

$$\frac{\text{س}+3}{\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+16}}$$

$$\text{ل س} = (\text{س}+3)\sqrt{\text{س}^2+16}$$

$$\text{ل} = \left(\frac{\text{س}+3}{\text{س}}\right)\sqrt{\text{س}^2+16}$$

$$= \left(1+\frac{3}{\text{س}}\right)\sqrt{\text{س}^2+16}$$

$$\text{ل}' = \left(1+\frac{3}{\text{س}}\right)\times\frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2+16}} + \sqrt{\text{س}^2+16}\times\frac{-3}{\text{س}^2}$$

$$= 0$$

$$\frac{\text{س}+3}{\sqrt{\text{س}^2+16}} = \frac{3}{\text{س}^2}\sqrt{\text{س}^2+16}$$

$$\text{س}^3+3\text{س}^2 = 3(\text{س}^2+16)$$

$$\text{س}^3+3\text{س}^2 = 3\text{س}^2+48$$

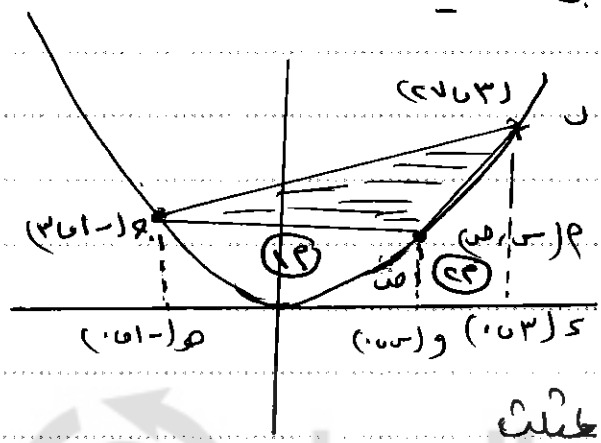
$$\text{س}^2 = 48 \leftarrow \text{س} = \sqrt{48}$$

عظمى عندما $\text{س} = \sqrt{48}$

$$\text{ل} = \left(1+\frac{3}{\sqrt{48}}\right)\sqrt{(\sqrt{48})^2+16}$$

مثال (٤٣)

اذا كانت ل (٣، ٧٦٤) ، هـ (-١، ٣٦) نقطتان على منحنى ص = ٣س^2 ، النقطة م (س، ص) نقطة على المنحنى بينهما اوجد الاحداثي السيني للنقطة م بحيث تكون مساحة المثلث م ل هـ أكبر ما يمكن .



مساحة المثلث

= مساحة شبه المنحرف ل ك و هـ

− [مساحة شبه المنحرف ل ك و م + مساحة شبه المنحرف م و هـ]

← يتبع الحل

مكتبة العلم Academy
المعلم: ناجح الجمزاوي

$م = \frac{1}{2} \times (٣+٢ك) \times ٤$

$- \left[\frac{1}{2} \times (ص+٢ك) \times (٣-س) + \frac{1}{2} (ص+٣)(س+١) \right]$

لكن $ص = ٣-س^٢$

$م = ٦٠ - \left[\frac{1}{2} (٣-س^٢+٢ك)(٣-س) + \frac{1}{2} (٣-س^٢+٣)(س+١) \right]$

$= ٦٠ - \left[\frac{1}{2} (٩-٦س^٢+س^٤+٢ك) - \frac{1}{2} (٣س^٢-س^٣+٣+س) \right]$

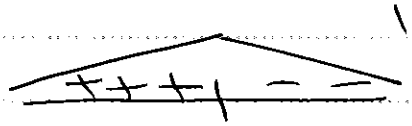
$= ٦٠ - \frac{1}{2} (٩-٦س^٢+س^٤+٢ك - ٣س^٢+س^٣-٣-س)$

$= ٦٠ - \frac{1}{2} (س^٤+س^٣-٩س^٢-س+٢ك+٦)$

$م' = ٠ - \frac{1}{2} (٤س^٣+٣س^٢-١٨س-١) = ٠$

$٤س^٣+٣س^٢-١٨س-١ = ٠$

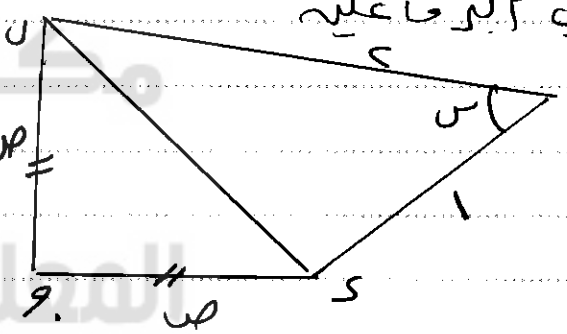
$س = ١$



عظمى عندما $س = ١$

مثال (٤٤)

حدد قيمة س التي تجعل مساحة المثلث الكلي أكبر ما يمكن



الحل

مساحة المثلث الكلي = مساحة المثلث م ب ك + مساحة المثلث ب ك ك

$م = \frac{1}{2} \times ١ \times ك \times جا س + \frac{1}{2} \times ص \times ك$

$م = جا س + \frac{1}{2} ص^٢$

نشتق بالنسبة لـ س

$م' = ك \times ١ \times ك \times جتا س - ٢ \times \frac{1}{2} \times ص \times ص'$

$= ٥ - ٤ جتا س$

وأيضاً $(ص')^٢ = ص^٢ + ٤^٢ = ك^٢$

$\Leftarrow ص^٢ = ٥ - ٤ جتا س$ (÷ ٤)

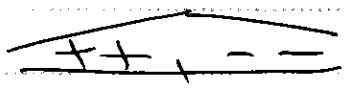
$\frac{1}{2} ص^٢ = \frac{٥}{٤} - جتا س$ نعوضها في م

$م = جا س + \frac{٥}{٤} - جتا س$

$م' = جتا س + جا س = ٠$

$جتا س = - جا س$

$س = ١٣٥°$



عندما $س = ١٣٥°$ أو $\frac{٣\pi}{٤}$ عظمى

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٥)

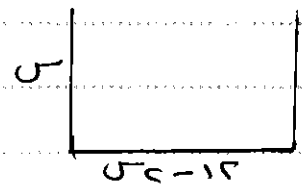
لوحة مستطيلة عرضها ١٢م ثبتت من اركانها بين جدارين لتصبح قناة ماء اوجد طول الجدار حتى تكون سعة القناة أكبر ما يمكن في كل من:

(أ) اذا كان الجدار عمودي على القاعدة

(ب) اذا كان الجدار يميل بزاوية ٦٠° على الافقي

الحل

(أ)

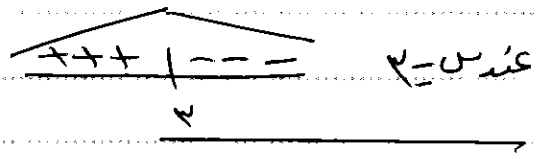


مساحة المقطع = م = (١٢-٢س) × س

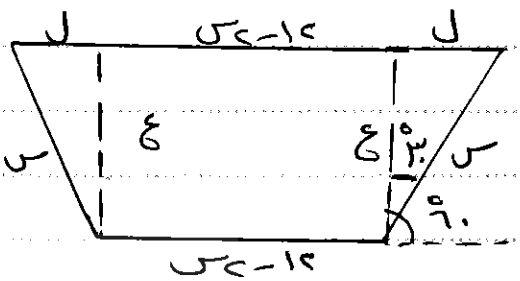
= ١٢س - ٢س٢

م' = ١٢ - ٤س = ٠ ← س = ٣

عظمى عند س = ٣



(ب)



م = $\frac{1}{2}$ × (١٢-٢س+ل+ل) × ع

= $\frac{1}{2}$ (٢٤ - ٤س + ٢ل) × ع

= ٤ × (ل + ١٢ - ٢س)

لكن جا٣٠ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{ل}{س}$

← ل = $\frac{1}{2}$ س

جتا٣٠ = $\frac{ع}{س}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← ع = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س

← م = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س × ($\frac{1}{2}$ س + ١٢ - ٢س)

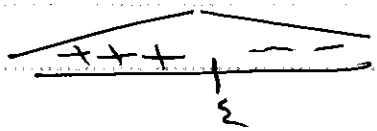
= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س (١٢ - $\frac{3}{2}$ س)

= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (١٢س - $\frac{3}{2}$ س٢)

م' = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (١٢ - ٣س) = ٠

١٢ - ٣س = ٠ ← س = ٤

عظمى عند س = ٤



مثال (٤٦)

أ ب ج د شبه منحرف قائم الزاوية في ب

ق(أ) = ٦٠° ، ق(د) = ٣٠° ، ر نقطة داخله

حيث ر أ = ٢ ، ر ب = ٤ ، ر ج = ٦

المطلوب إيجاد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل

الحل

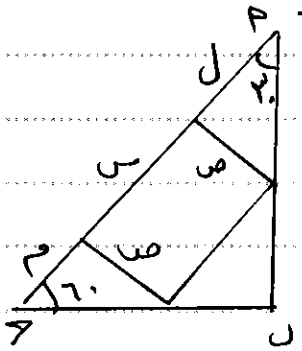
← يتبع

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

العامة م = س × ص

ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{ل}$



$\Leftarrow$ ل = $\sqrt{٣}$ ص

ظا ٦٠° = $\frac{ص}{م} = \sqrt{٣}$

$\Leftarrow$ م = $\frac{ص}{\sqrt{٣}}$

لكن ل + س + م = ١٠

$\sqrt{٣}$ ص + س + $\frac{ص}{\sqrt{٣}}$ = ١٠ ... (×$\sqrt{٣}$)

٣ص + $\sqrt{٣}$ س + ص = ١٠$\sqrt{٣}$

٤ص = ١٠$\sqrt{٣}$ − $\sqrt{٣}$ س

ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠ − س)

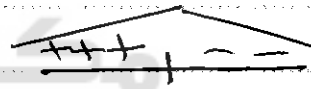
م = س × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠ − س)

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠س − س٢)

م′ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠ − ٢س) = ٠

١٠ − ٢س = ٠ ← س = ٥

عظمى عند س = ٥

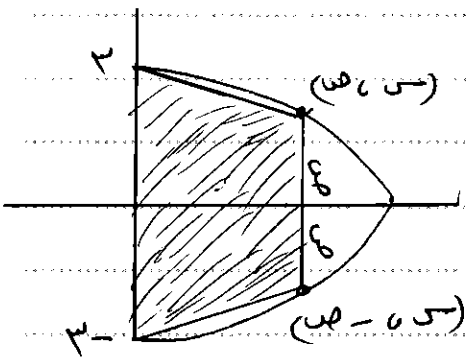


ص = ١٠ $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠ − ٥) = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$

م = $\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٤} = \frac{٢٥\sqrt{٣}}{٤}$

مثال (٤٧)

محمدًا على الشكل المجاور أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف حيث س = ٩ − ص٢



الحل

٩ − ص٢ = ٠ ← ص = ± ٣

القاعدة السفلى = ٢ + ٣

القاعدة العليا = ٢ ص

م = $\frac{١}{٢}$ (٢ص + ٦) × س = (ص + ٣)(٩ − ص٢)

م′ = (ص + ٣)(−٢ص) + (٩ − ص٢) × ١

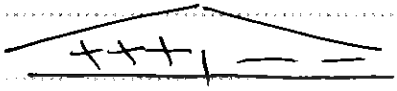
= −٢ص٢ − ٦ص + ٩ − ص٢

= −٣ص٢ − ٦ص + ٩ = ٠ ÷ −٣

ص٢ + ٢ص − ٣ = ٠

(ص + ٣)(ص − ١) = ٠

ص = ١



عظمى عند ص = ١

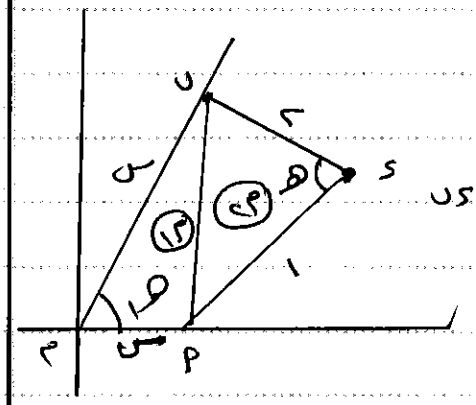
م = (١ + ٣)(٩ − ١) = ٤ × ٨ = ٣٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٨)

بدأت النقطتان P، ن تتحركان من نقطة الأصل م بحيث تحركت P على محور السينات الموجب بينما تحركت ن على المستقيم ص = √٣ س في الربع الأول وكان بعد كل منهما عن نقطة الأصل متساوي دائماً وكانت النقطة د تتحرك في الربع الأول بحيث يبقى بعدها عن P يساوي ٤ سم وعن ن يساوي ٣ سم حاسبا من الزاوية P د ن التي تجعل مساحة المثلث الرباعي م P د ن أكبر ما يمكن.

الحل



مساحة الشكل م P د ن = (١٣) + (٣٣)

ص = √٣ س

ه = ٦٠°

(١٣) = ½ × س × س × جا ٦٠° = ½ س² × √٣/٢

= √٣/٤ س²

(٣٣) = ½ × ١ × ٢ × جا ه = جا ه

لكن (ن P)² = ١² + ٢² − ٢ × ١ × ٢ جتا ه

= ٥ − ٤ جتا ه

وأيضاً

(ن P)² = س² + س² − ٢ × س × س جتا ٦٠°

= ٢ س² − ٢ س² × ½ = ٢ س² − س²

= س²

⇐ س² = ٥ − ٤ جتا ه

م = (١٣) + (٣٣)

= √٣/٤ س² + جا ه

= √٣/٤ (٥ − ٤ جتا ه) + جا ه

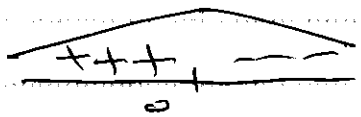
م′ = √٣/٤ × ٤ جا ه + جتا ه = ٠

√٣ جا ه = − جتا ه بالقسمة على جتا ه

√٣ ظا ه = − ١

ظا ه = −١/√٣

ه = ١٥٠°



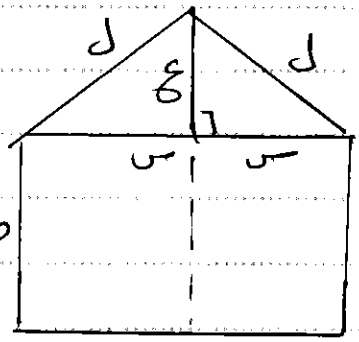
عظمى عند ه = ١٥٠°

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٩)

نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين ارتفاعه $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ، اذا كان محيط النافذة ٩ أمتار اجب ابعادها بحيث تسمح بادخال أكبر كمية من الضوء .

الحل



$ع = \frac{٣}{٨} \times ٢س = \frac{٣}{٤} س$

نفرض ان معامل نفاذية الضوء P

كمية الضوء = مساحة × معامل النفاذية

$= P \times$ مساحة المستطيل $+ P \times$ مساحة المثلث

$= P \times ٢س \times ص + \frac{١}{٢} \times ع \times ٢س \times P$

$= ٢ P س ص + P س ع$

$ك = ٢ P س ص + P س \frac{٣}{٤} س$

$= ٢ P س ص + \frac{٣}{٤} P س^{٢}$

محيط النافذة $= ٩$

$٢ل + ٢س + ص = ٩$

مثلث قائم الزاوية

$ل = \sqrt{س^{٢} + ع^{٢}}$

$= \sqrt{س^{٢} + \frac{٩}{١٦} س^{٢}} = \sqrt{\frac{٢٥}{١٦} س^{٢}}$

$\Leftarrow ل = \frac{٥}{٤} س$ بالتعويض في

المحيط

$٢ \times \frac{٥}{٤} س + ٢س + ص = ٩$

$\frac{٩}{٢} س + ص = ٩$

$ص = ٩ - \frac{٩}{٢} س$

$ص = \frac{١}{٢} (٩ - \frac{٩}{٢} س)$

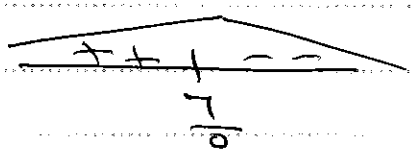
$ك = ٢ P س \times \frac{١}{٢} (٩ - \frac{٩}{٢} س) + \frac{٣}{٤} P س^{٢}$

$ك = P (٩ س - \frac{٩}{٢} س^{٢} + \frac{٣}{٤} س^{٢})$

$ك' = P (٩ - ٩ س + \frac{٣}{٢} س) = ٠$

$٩ - \frac{١٥}{٢} س = ٠$

$\Leftarrow س = \frac{١٨}{١٥} = \frac{٦}{٥}$



أكبر كمية عندما $س = \frac{٦}{٥}$

$ص = \frac{١}{٢} (٩ - \frac{٩}{٢} \times \frac{٦}{٥})$

$= \frac{١}{٢} (٩ - \frac{٢٧}{٥})$

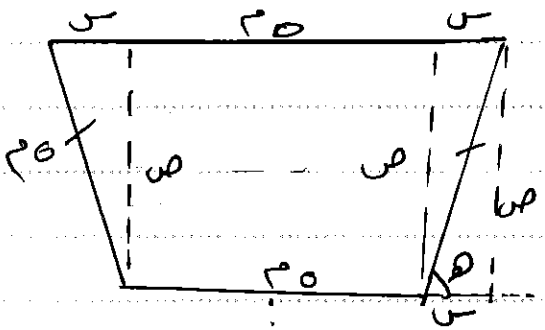
$= \frac{٤٥ - ٢٧}{١٠} = \frac{١٨}{١٠} = \frac{٩}{٥}$

$ع = \frac{٣}{٤} \times \frac{٦}{٥} = \frac{٩}{١٠}$

مكتبة الوسام AL WSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٥٠)

سد مياه مقطعة العرضي على شكل شبه منحرف طول قاعدته السفلى ٥م وطول كل من الجانبين المائلين ٥م انظر الشكل، جد زاوية ميل الضلعين الجانبين بحيث تكون مساحة شبه المنحرف (المقطع العرضي) أكبر ما يمكن



م = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ (٥ + ٥ + ٥جتا هـ) × ص

= $\frac{1}{2}$ (١٠ + ٥جتا هـ) × ٥جا هـ

= (٥ + ٥جتا هـ) × ٥جا هـ

لكن

جا هـ = $\frac{ص}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{س}{٥}$

← ص = ٥ جا هـ ، س = ٥ جتا هـ

م = (٥ + ٥ جتا هـ) × ٥ جا هـ

= ٢٥ جا هـ + ٢٥ جا هـ جتا هـ

= ٢٥ (جا هـ + جا هـ جتا هـ)

م = ٢٥ (جا هـ + $\frac{1}{2}$ جا ٢هـ)

م' = ٢٥ (جتا هـ + جتا ٢هـ) = ٠

$\frac{\pi}{3}$ ← جتا هـ = جتا ٢هـ

جتا هـ = جتا (π − هـ)

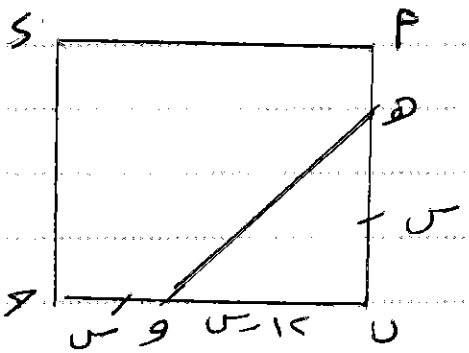
← هـ = π − هـ ← ٢هـ = π ← هـ = $\frac{\pi}{3}$

هـ	٠		$\frac{\pi}{3}$		π
م'	+	٠	−		
م	↗		↘		

م في أعظم

مثال (٥١)

أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٢ سم أخذت النقطتان هـ ، و على أ ب ، ب ج على الترتيب بحيث كان هـ ب = و ب = ٢ × طول كل من هـ ب ، ب و بحيث تكون مساحة المنطقة أ د و هـ أصغر ما يمكن



الحل

لتكون مساحة الشكل أ هـ و د أصغر ما يمكن يجب أن تكون مساحة المثلث أ ب و أكبر ما يمكن

م = $\frac{1}{2}$ × (١٢ − س) × س

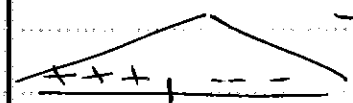
= ٦س − $\frac{س^2}{2}$ = ٦س − $\frac{1}{2}$ س

← يتبع الحل

م = ٦س − س²/٢

م' = ٦ − س = ٠

س = ٦

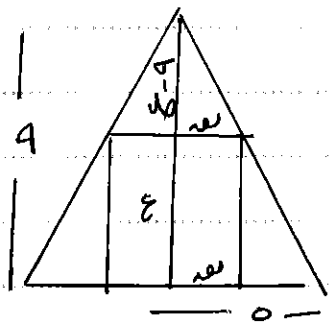


أكبر ما يكون عند س = ٦

مثال (٥٢)

صف ارتفاع الاسطوانة ذات أكبر حجم والتي يمكن وضعها داخل مخروط نصف قطره ٥ سم وارتفاعه ٩ سم

الحل



حجم الاسطوانة = π نق² ع

من التشابه

(٩ − ع)/نق = ٩/٥ ⇐ ٥(٩ − ع) = ٩ نق

← نق = (٥/٩)(٩ − ع)

ح = π (٥/٩)² (٩ − ع)² × ع

= (٢٥π/٨١) (٨١ع − ١٨ع² + ع³)

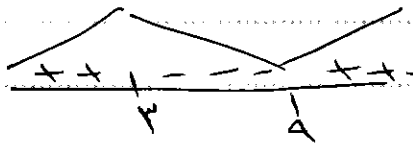
ح' = (٢٥π/٨١) (٨١ − ٣٦ع + ٣ع²)

٣ع² − ٣٦ع + ٨١ = ٠

٣(ع² − ١٢ع + ٢٧) = ٠

٣(ع − ٩)(ع − ٣) = ٠

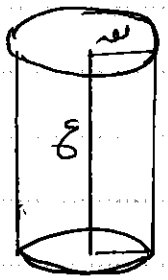
ع = ٩ ، ٣



عظمى عند ع = ٣

مثال (٥٣)

يراد عمل وعاء اسطواني الشكل سعته ٤ ٦ سم³ ومفتوح من أعلى جد ابعاد الوعاء لتكون مساحة المعدن المستعمل اقل ما يمكن.



الحل

مساحة المعدن = مساحة الجانب + مساحة القاعدة

م = ٢π نق ع + π نق²

لكن ح = ٦٤ = π نق² ع

ع = ٦٤/(π نق²)

م = π نق² + ٢π نق × ٦٤/(π نق²)

= π نق² + ١٢٨/نق

م' = ٢π نق + (−١٢٨/نق²) = ٠

نق = ٤/(π√٣)

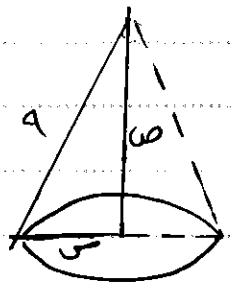
ع = ٤/(π√٣)

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٥٤)

مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ويساوي ٩ سم وطول ضلعي القائمة س، ص فاذا دار المثلث حول احد ضلعي القائمة فكون مخروط احجم أكبر حجم ممكن للمخروط.

الحل



$ح = \frac{1}{3}\pi نق^2 ع$

$ح = \frac{1}{3}\pi س^2 ص$

بكده

$س^2 + ص^2 = 81$

$\Leftarrow س^2 = 81 - ص^2$

$ح = \frac{\pi}{3}(81 - ص^2) \times ص$

$= \frac{\pi}{3}(81ص - ص^3)$

$ح' = \frac{\pi}{3}(81 - 3ص^2) = 0$

$81 - 3ص^2 = 0 \leftarrow ص^2 = \frac{81}{3} = 27$

$ص = \sqrt{27}$

	$\sqrt{27}$	
$ح'$	+	−
$ح$	عظمى	

$س^2 = 81 - 27$

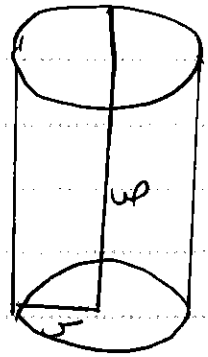
$= 54$

$ح = \frac{\pi}{3} \times 54 \times \sqrt{27}$

مثال (٥٥)

قطعة سلك محيطها ٣٦ سم دار حول احد اضلاعه فكون اسطوانه احجم أكبر حجم ممكن للأسطوانة

الحل



$ح = \pi نق^2 ع$

$= \pi س^2 ص$

بكده

$س + ص + س = 36$

$س + ص = 18 \Leftarrow ص = 18 - س$

$ح = \pi س^2 (18 - س)$

$= \pi (18س^2 - س^3)$

$ح' = \pi (36س - 3س^2) = 0$

$36س - 3س^2 = 0$

$3س(12 - س) = 0 \Leftarrow س = 0, 12$

	12	
$ص'$	+	−
$ص$	عظمى	

$ص = 18 - س$

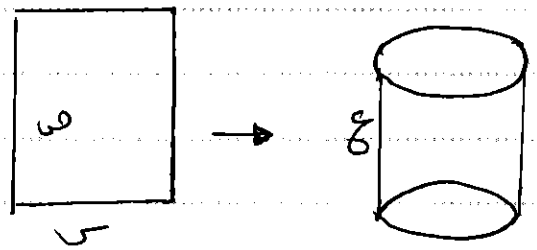
$= 18 - 12 = 6$

$ح = \pi \times 12 \times 12 \times 6 = 864\pi$ سم^3

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٥٦)

قطعة محيطها ٣٦ سم ثني ليكون اسطوانة أوجد أكبر حجم ممكن للاسطوانة



الحل

$ح = \pi نق^2 ع$

$ع = ص$

محيط القاعدة $= 2\pi نق = س$

$\leftarrow نق = \frac{س}{2\pi}$

$ح = \pi \times (\frac{س}{2\pi})^2 \times ص$

$= \frac{\pi س^2}{4\pi^2} \times ص = \frac{1}{4\pi} \times س^2 \times ص$

لكن $2س + 2ص = 36$

$س + ص = 18 \leftarrow ص = 18 - س$

$\Leftarrow ح = \frac{1}{4\pi} \times س^2 (18 - س)$

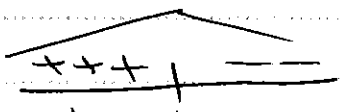
$= \frac{1}{4\pi} (18س^2 - س^3)$

$ح' = \frac{1}{4\pi} (36س - 3س^2) = 0$

$\Leftarrow 36س - 3س^2 = 0$

$3س(12 - س) = 0$

$س = 0 \quad ، \quad 12$



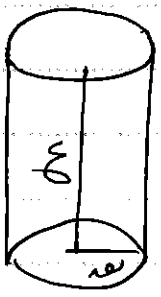
$س = 12 \Leftarrow ص = 18 - 12 = 6$

$ح = \frac{1}{4\pi} \times 12 \times 12 \times 6 = \frac{864}{\pi}$

مثال (٥٧)

وعاء اسطواني زجاجي ذو غطاء معدني فاذا كانت تكلفة وحدة مساحة سطح المعدن ثلاثة امثال تكلفة الزجاج فاثبت ان النسبة بين نصفي قطر الوعاء ($نق$ ، $ع$) الأقل تكلفة والذي يسع حجماً ثابتاً هي $1 : 2$

الحل



نفرض تكلفة وحدة زجاج $= P$

فتكون تكلفة وحدة المعدن $= 3P$

$م = 2\pi نق ع + \pi نق^2$

التكاليف

$ت = P \times 2\pi نق ع + 3P \times \pi نق^2$

زجاج — المعدن

لكن $ح = \pi نق^2 ع \Leftarrow ع = \frac{ح}{\pi نق^2}$

ح ثابت

$\leftarrow$ لتسع

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$ت = ٢\pi ٢ نق^{٢} + \frac{ع}{نق \pi} \times ٢\pi ٢ نق$

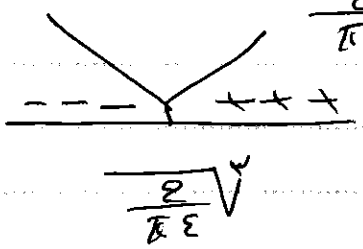
$= ٤\pi ٢ نق^{٢} + \frac{٢ع}{نق}$

$ت' = ٤\pi ٢ نق - \frac{٢ع}{نق^{٢}}$

$٤\pi ٢ نق = \frac{٢ع}{نق^{٢}}$

$نق^{٣} = \frac{ع}{٤\pi}$

$نق = \sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}$



$\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}$

$ع = \pi (\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}})^{٢} \times نق$

$\frac{نق}{ع} = \frac{\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}}{\pi (\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}})^{٢}}$

$= \frac{ع}{\pi (\frac{ع}{٤\pi})^{\frac{٢}{٣}}}$

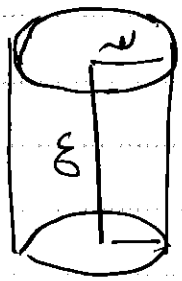
$= \frac{ع}{\pi} \times (\frac{ع}{٤\pi})^{-\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{١}{٤}$ ∴ ١ : ٤

مثال (٥٨)

يراد صنع وعاء اسطواني الشكل قاعدته دائرية ومفتوح من الأعلى ليكون سعته ٤٥π سم^{٣} فاذا كانت تكاليف صنع سم^{٢} من الجوانب قرشين ومن القاعدة ٤ قروش تجد ابعاد هذا الوعاء لكي تكون تكلفة صناعته أقل ما يمكن.

الحل



مساحة وجه الوعاء الاسطواني = م

$= ٢\pi نق ع + \pi نق^{٢}$ وعليه تكون تكاليف صناعته

$ت = ٢\pi ٤ نق ع + ٤\pi نق^{٢}$

لكن $نق^{٢} \pi ع = ٤٥\pi$

$ع = \frac{٤٥\pi}{\pi نق^{٢}} = \frac{٤٥}{نق^{٢}}$

$ت = ٤\pi نق \times \frac{٤٥}{نق^{٢}} + ٤\pi نق^{٢}$

$= \frac{١٦٢\pi}{نق} + ٤\pi نق^{٢}$

$ت' = -\frac{١٦٢\pi}{نق^{٢}} + ٨\pi نق$

يتبع ←

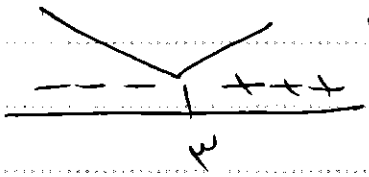
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\frac{\pi ٢١٦}{نق^{٢}} = \pi ٨$ نهـ

$نق^{٢} \times \pi ٨ = \pi ٢١٦$ نهـ

$نق^{٢} = \frac{\pi ٢١٦}{\pi ٨} = \frac{٢١٦}{٨} = ٢٧$

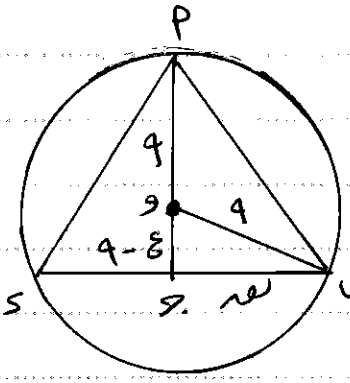
نهـ $= ٣$



$ع = \frac{٥٤}{٩} = ٦$ سم

مثال (٥٩)

اوجد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم حجمه أكبر ما يمكن مرسوم داخل كرة نصف قطرها ٩ سم



الحل

ع ارتفاع المخروط

نهـ : نصف قطر قاعدته

حجم المخروط $= \frac{\pi}{٣}$ $نق^{٢}$ ع

حسب فيثاغورس على Δ ب و و

$٨١ = نق^{٢} + (ع - ٩)^{٢}$

$٨١ = نق^{٢} + ع^{٢} - ١٨ع + ٨١$

$نق^{٢} = ١٨ع - ع^{٢}$ صاعدة

$ح = \frac{\pi}{٣} (١٨ع - ع^{٢}) \times ع$

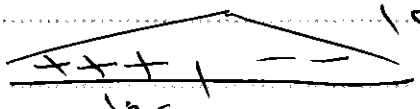
$ح = \frac{\pi}{٣} (١٨ع^{٢} - ع^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٣} (٣٦ع - ٣ع^{٢}) = ٠$

$٣٦ع - ٣ع^{٢} = ٠$

$٣ع (١٢ - ع) = ٠$

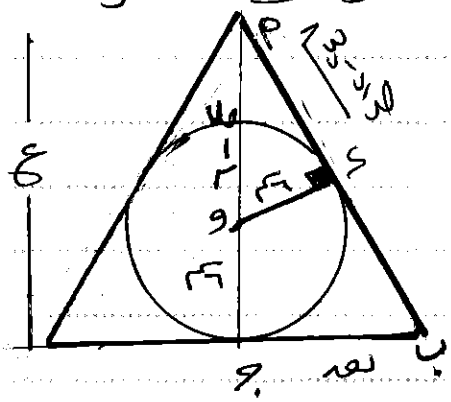
$ع = ١٢$



نهـ $= \sqrt{١٨ \times ١٢ - ١٢^{٢}} = \sqrt{٧٢} = ٦\sqrt{٢}$ سم

مثال (٦٠)

اصغر حجم مخروط دائري قائم رسم بداخله كرة نصف قطرها ٦ سم.



الحل

حسب نظرية فيثاغورس Δ P د و

$(ع - ٦)^{٢} = (P د)^{٢} + ٦^{٢}$

$ع^{٢} - ١٢ع + ٣٦ = (P د)^{٢} + ٣٦$

$(P د)^{٢} = ع^{٢} - ١٢ع$

P د $= \sqrt{ع^{٢} - ١٢ع}$

← يتبع الحل

مكتبة الإسكندرية ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وهن تشابه لمثلثات

$\frac{ع}{نق} = \frac{\sqrt{ع^2 - ١٢ع}}{٦}$ وبالتربيع

$\frac{ع^2}{نق^2} = \frac{ع^2 - ١٢ع}{٣٦}$

$نق^2 (ع^2 - ١٢ع) = ٣٦ ع^2$

$نق^2 = \frac{٣٦ ع^2}{ع^2 - ١٢ع}$ نعوضها في ح

$ح = \frac{\pi}{٣} \times \frac{٣٦ ع^2}{ع^2 - ١٢ع} \times ع$

$= \frac{\pi ١٢ ع^3}{(ع - ١٢) ع}$

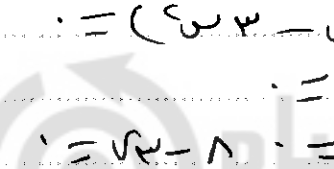
$= \pi ١٢ \left(\frac{ع^2}{ع - ١٢}\right)$

$ح' = \pi ١٢ \frac{(ع - ١٢)(٢ع^2 - ٢٤ع) - ع^2(ع - ١٢)}{(ع - ١٢)^2}$

$= \pi ١٢ \frac{(ع^2 - ٢٤ع - ع^2 + ١٢ع)}{(ع - ١٢)^2}$

$ع^2 - ١٢ع = ٠$

$ع(ع - ١٢) = ٠ \quad ع = ١٢$

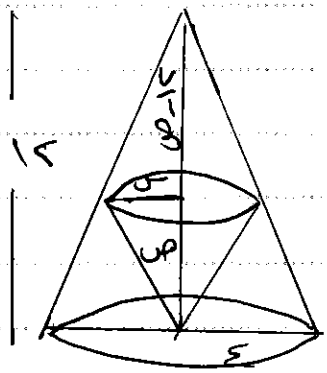


ع = ١٢ صغرى

اصغر حجم $= \frac{\pi ١٢ (١٢)^2}{٣} = ٧٦٨ \pi$

مثال (٦١)

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم عليه كرة داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.



الحل

$ح = \frac{\pi}{٣} \pi س^2 ص$

$\frac{س}{١٢ - ص} = \frac{ع}{٤} \Leftarrow ٣س = ١٢ - ص$

$ص = ١٢ - ٣س = ٣(٤ - س)$

$ح = \frac{\pi}{٣} س^2 (٣(٤ - س))$

$= ٤\pi س^2 - \pi س^3$

$= \pi (٤س^2 - س^3)$

$ح' = \pi (٨س - ٣س^2) = ٠$

$٨س - ٣س^2 = ٠$

$س(٨ - ٣س) = ٠ \quad ٨ - ٣س = ٠$

$س = \frac{٨}{٣}$

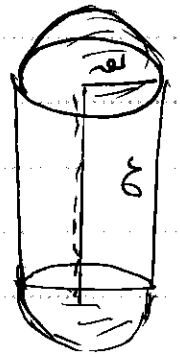
$ح = \frac{١}{٣} \pi (\frac{٨}{٣})^2 \times ٤$

$= \frac{٢٥٦ \pi}{٢٧}$

مثال (٦٤)

نريد صنع كبسولة على شكل اسطوانة تنتهي بنصفي كرة حجمها ٣٠ π سم٣ فاذا كانت تكلفة وحدة المساحات من الاسطوانة ، ٢ وحدة نقدية لكل سم٢ من الكرة تعادل مرة ونصف تكلفة المساحات من الاسطوانة ، اوجد نصف قطر الكرة لتكون التكاليف اقل ما يمكن .

الحل



التكاليف =
تكاليف الكرة + تكاليف الاسطوانة

ت = ١٫٥ × ٤ π نق٢ + ٢ × ٢ π نق ع
= ٦ π نق٢ + ٤ π نق ع

ح = حجم الكرة + حجم الاسطوانة
$٣٠\pi = \frac{٤}{٣}\pi$ نق٣ + π نق٢ ع
π نق٢ ع = $٣٠\pi - \frac{٤}{٣}\pi$ نق٣ = ٢π
$ع = \frac{٣٠\pi}{\pi نق^{٢}} - \frac{\frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}}{\pi نق^{٢}}$
$= \frac{٣٠}{نق^{٢}} - \frac{٤}{٣}$ نق

$ت = ٦\pi نق^{٢} + ٤\pi نق\left(\frac{٣٠}{نق^{٢}} - \frac{٤}{٣}نق\right)$

$= ٦\pi نق^{٢} + \frac{١٢٠\pi}{نق} - \frac{١٦\pi نق^{٢}}{٣}$

$ت' = ١٢\pi نق - \frac{١٢٠\pi}{نق^{٢}} - \frac{١٦\pi نق}{٣}$

$\frac{١٢٠\pi}{نق^{٢}} = \frac{١٦\pi نق}{٣} - ١٢\pi نق$

$\frac{١٢٠\pi}{نق^{٢}} = \frac{٢٠\pi نق}{٣}$

$نق^{٣} = \frac{١٨٠\pi}{٢٠\pi} = ٩$

$نق = \sqrt[٣]{٩}$

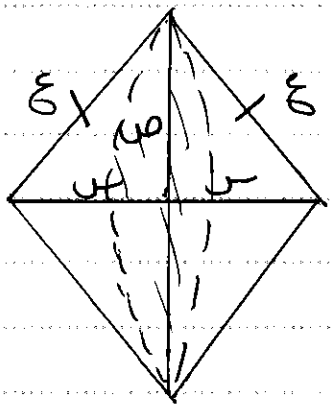
	$\sqrt[٣]{٩}$	
ت'	−	+

صغرى عندما
$نق = \sqrt[٣]{٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (٦٣)

اذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها فما أكبر حجم محكمة للجسم الناتج عن الدوران



الحل

ح = π نق² × مجم المخروط الواحد.

= π نق² × $\frac{1}{3}$ π ص² × س

المحيط = س + ع + ع = ٤٠

س + ع = ٢٠ ← ع = ٢٠ − س

وحسب فيثاغورس

ع² = س² + ص²

(٢٠ − س)² = س² + ص²

ص² = (٢٠ − س)² − س²

= ٤٠٠ − ٤٠ س + س² − س²

= ٤٠٠ − ٤٠ س سنعوضها

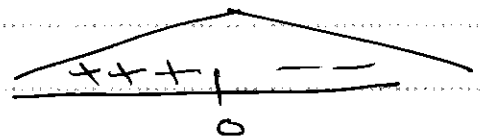
ح = π نق² × $\frac{1}{3}$ (٤٠٠ − ٤٠ س) س

= $\frac{\pi}{3}$ (٤٠٠ س − ٤٠ س²)

ح′ = π نق² (٤٠٠ − ٨٠ س) = ٠

٤٠٠ − ٨٠ س = ٠

٨٠ س = ٤٠٠ ⇐ س = $\frac{٤٠٠}{٨٠}$ = ٥



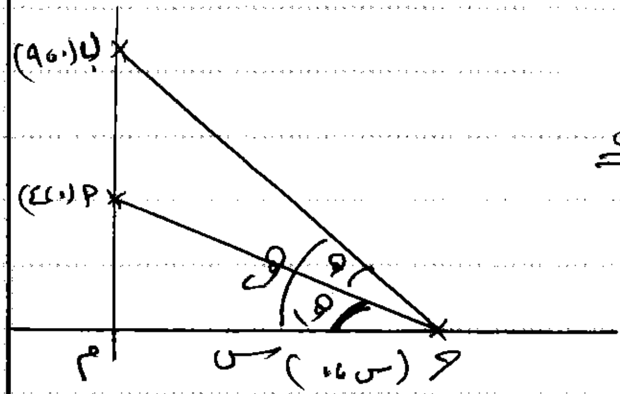
عندما س = ٥

ح = π $\frac{٥٠٠٠}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٦٤)

أ(٠،٤) ، ب(٠،٩) نقطتان ثابتتان على محور السينات الموجب جد الاحداثي السيني للنقطة المتحركة جـ الذي يجعل قياس الزاوية أجـب أكبر ما يمكن



الحل

نفرض أن

∠أجـب = هـ ، ∠أجـم = هـ١

∠بجـم = هـ٢

هـ = هـ٢ − هـ١

ظا هـ = ظا(هـ٢ − هـ١)

$= \frac{\text{ظا هـ}_2 - \text{ظا هـ}_1}{1 + \text{ظا هـ}_2 \times \text{ظا هـ}_1}$

ظا هـ١ = ٤/س ، ظا هـ٢ = ٩/س

$\text{ظا هـ} = \frac{\frac{9}{س} - \frac{4}{س}}{1 + \frac{9}{س} \times \frac{4}{س}} = \frac{\frac{5}{س}}{1 + \frac{36}{س^2}}$

$= \frac{\frac{5}{س}}{\frac{س^2 + 36}{س^2}} = \frac{5}{س} \times \frac{س^2}{س^2 + 36}$

$\text{ظا هـ} = \frac{5س}{س^2 + 36}$

$\text{قا}^2\text{هـ} \times \text{هـ}' = \frac{5(س^2+36) - 5س \times 2س}{(س^2+36)^2}$

$\text{هـ}' = \frac{5س^2 + 180 - 10س^2}{(س^2+36)^2 \ \text{قا}^2\text{هـ}}$

$5س^2 + 180 - 10س^2 = 0$

$180 - 5س^2 = 0$

$5س^2 = 180 \Leftarrow س^2 = 36$

$س = \pm 6$

+ + + + | − − − (عند ٦)

عند س = ٦ يكون قياس الزاوية أجـب أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص٤٠٦

اذا كان مجموع عددين ثلاثة امثال عدد آخر يساوي ٦٠ فجد العددين حيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

الحل

العدد الأول = س ، الثاني = ص

$س + ٣ص = ٦٠$

$س = ٦٠ - ٣ص$ المعادلة

$م = س \times ص$

$= (٦٠ - ٣ص) \times ص$

$= ٦٠ص - ٣ص^{٢}$

$م' = ٦٠ - ٦ص = ٠$

$٦٠ - ٦ص = ٠$

$ص = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$

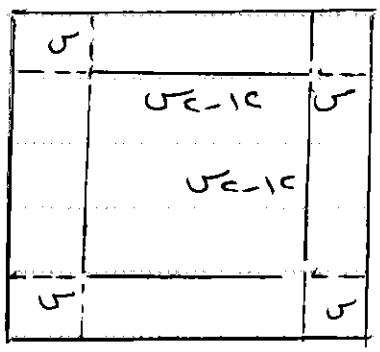
عظمى

$س = ٦٠ - ٣٠$

$= ٣٠$

تدريب ② ص٤٠٦

صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢سم ، قص من زواياها الاربع اربعة مربعات متساوية طول كل منها س ، ثم طويت الجوانب بحيث اصبحت الصفيحة تشكل علبة مفتوحة من الاعلى فجد قيمة س لتكون حجم العلبة أكبر ما يمكن



$ح = س(١٢ - ٢س)(١٢ - ٢س)$

$= ٤س^{٣} - ٤٨س^{٢} + ١٤٤س$

$ح' = ١٢س^{٢} - ٩٦س + ١٤٤ = ٠ \div ١٢$

$س^{٢} - ٨س + ١٢ = ٠$

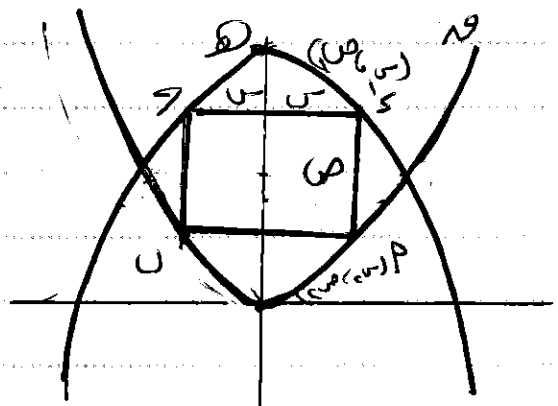
$(س - ٦)(س - ٢) = ٠$

عظمى عند $س = ٢$

مكتبة البسام AlWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب (٣) ص٢٠٤

م ب ء د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) = ٦ - س٢ ، هـ(س) = س٢ - ٣ حيث يقع أساه م ، ب على منحنى هـ ، وراساه ء ، د يقعان على منحنى ق ، احسب بعدي المستطيل م ب ء د لتكون مساحته أكبر ما يمكن



م = ٢س (ص٢ - ص١)
= ٢س (٦ - س٢ - س٢ + ٣)
م = ١٢س - ٦ س٣
م' = ١٢ - ١٨ س٢ = ٠
١٨ س٢ = ١٢ ، س٢ = ٤/٣
س = ٢/√٣
عظمى عند س = ٢/√٣

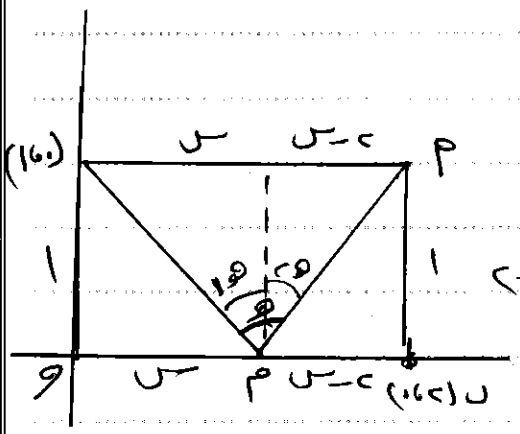
بعدا المستطيل هما
٢س = ٢ × ٢/√٣ = ٤/√٣
ص٢ - ص١ = (٦ - ٣) - (٤/٣ - ٣) = ٨/٣

= ٤٢/√٣

تدريب (٤) ص٢٠٦

عين الشكل المستطيل م ب ء د حيث ب (١، ٢) ، ء (١، ١٥) اذا فرضت النقطة م على الضلع ب ء وعلى بعد س كم من نقطة الاصل ج ، ووصل م م ، م د فتكونت الزاوية المتغيرة هـ ، احسب قيمة ظا هـ التي يصل هـ في نهايتها العظمى

الحل



هـ = هـ١ + هـ٢

ظا هـ = ظا (هـ١ + هـ٢)

= (ظا هـ١ + ظا هـ٢) / (١ - ظا هـ١ ظا هـ٢)

ظا هـ١ = س/١ ، ظا هـ٢ = (٢ - س)/١

ظا هـ = (س/١ + (٢ - س)/١) / (١ - س(٢ - س)/١) = ٢ / (س٢ - ٢س + ١)

= ٢ / (س - ١)٢ تشتقه

ق' هـ × هـ' = -٢ × ٢(س - ١) / (س - ١)٤

= -٤ / (س - ١)٣

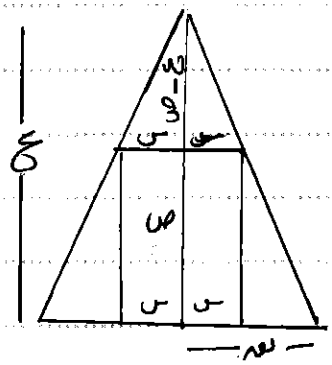
هـ غير موجودة عند س = ١

هـ أكبر ما يمكن س = ١

مكتبة البيان
ALBAYAN
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريب ⑤ ص ٢٠٧

برهن ان اكبر حجم لاسطوانه دائريه قائمه عليه وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط



الحل

$ح = \pi س^٢ ص$

بكره من المثلثات المتشابهه

$\frac{ع - ص}{س} = \frac{ع}{نق}$

$\Leftarrow ع\ نق - ص\ نق = ع\ س$

$ص\ نق = ع\ نق - ع\ س$

$ص = \frac{ع(نق - س)}{نق} = \frac{ع}{نق}(نق - س)$

$ح = \pi س^٢ (\frac{ع}{نق}(نق - س))$

$= \frac{ع\pi}{نق}(نق\ س^٢ - س^٣)$

$ح' = \frac{ع\pi}{نق}(٢\ نق\ س - ٣ س^٢)$

$٢\ نق\ س - ٣ س^٢ = ٠$

$س(٢ نق - ٣ س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ,\ س = \frac{٢}{٣} نق$

	٠		$\frac{٢}{٣} نق$	
$ح'$		+	٠	−
$ح$		↗ عظمى		↘

$ص = \frac{ع}{نق}(نق - \frac{٢}{٣} نق)$

$= \frac{ع}{نق} \times \frac{١}{٣} نق = \frac{١}{٣} ع$

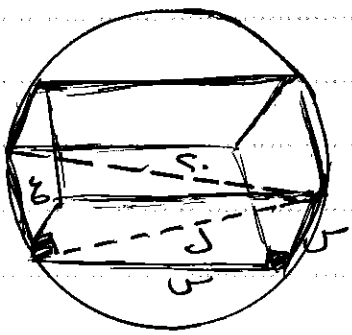
$ح = \pi س^٢ ص = \pi \times \frac{٤}{٩} نق^٢ \times \frac{١}{٣} ع$

$= \frac{٤}{٩}(\frac{١}{٣} \pi\ نق^٢ ع)$

$= \frac{٤}{٩} \times$ حجم المخروط

تدريب ⑥ ص ٢٠٩

كرة مصمته نصف قطرها ١٠ سم حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه (ع) سم ماهي ابعاد متوازي المستطيلات ليكون حجمه أكبر ما يمكن



الحل

$ل^٢ = س^٢ + س^٢$

$= ٢ س^٢$

$(٢٠)^٢ = ل^٢ + ع^٢$ بتعويض $ل^٢ = ٢ س^٢$

$٤٠٠ = ٢ س^٢ + ع^٢$

$٢ س^٢ = ٤٠٠ - ع^٢ \Leftarrow س^٢ = ٢٠٠ - \frac{١}{٢} ع^٢$

$ح = س \times س \times ع = س^٢ ع$

$= (٢٠٠ - \frac{١}{٢} ع^٢) ع = (٢٠٠ ع - \frac{١}{٢} ع^٣)$

$ح' = ٢٠٠ - \frac{٣}{٢} ع^٢ = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢} ع^٢ = ٢٠٠$

$ع^٢ = \frac{٤٠٠}{٣} \Leftarrow ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

عظمى عندما $ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

$ص = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

	٠		$\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$	
$ح'$		+	٠	−
$ح$		↗		↘

وكالة البسام ALWESSAM
الأعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل الكتاب

صفحة (٢١٠)

السؤال الأول

قطعة ارض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م ، جد بعدي قطعة الارض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن

الحل

س = الطول ، ص = العرض

م = المساحة ، ل = المحيط

م = س × ص

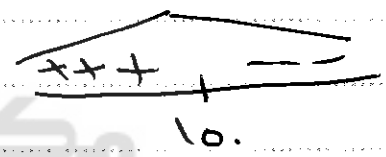
ل = ٢س + ٢ص = ٦٠٠

س + ص = ٣٠٠ ⇐ ص = ٣٠٠ − س

م = س (٣٠٠ − س)

= ٣٠٠ س − س٢

م′ = ٣٠٠ − ٢س = ٠ ⇐ س = ١٥٠



بعدي المستطيل

س = ١٥٠ م

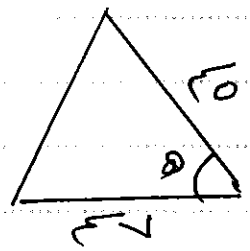
ص = ٣٠٠ − ١٥٠ = ١٥٠

م = ١٥٠ × ١٥٠ = ٢٢٥٠٠

السؤال الثاني

مثلث طولا ضلعين فيه ٥ سم ، ٧ سم والزاوية المحصورة بينهما هـ ، جد قيمة هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل



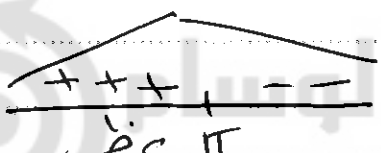
مساحة المثلث

= ½ × ٧ × ٥ × جا هـ

= ٣٥/٢ جا هـ

م′ = ٣٥/٢ × جتا هـ = ٠

هـ = π/٢ أو ٣π/٢ ∉

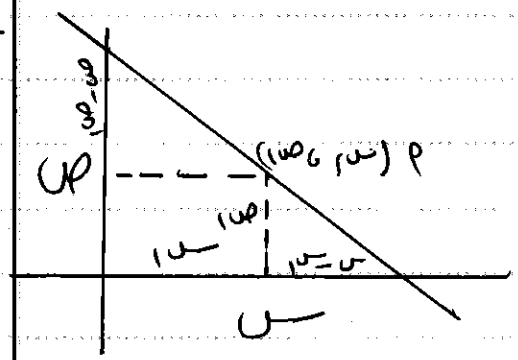


مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

اذا كانت النقطة P(س١، ص١) تقع في الربع الأول من المستوى الديكارتي فجد معادلة المستقيم المار بالنقطة P(س١، ص١) ويصنع مع المحور السيني والصادي ونقطة الاصل مثلثاً مساحته ١ ك٢ ما عكسه

الحل



م = ½ س ص ، س١، ص١ ثابتان

ص / س = ص١ / (س − س١) ومنه ص = ص١ س / (س − س١)

م = ½ س (ص١ س / (س − س١)) = ½ ص١ × س٢ / (س − س١)

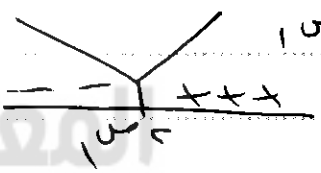
م' = ½ ص١ × (س − س١) × ٢س − س٢ / (س − س١)٢

⇐ (س − س١) × ٢س − س٢ = ٠

٢س٢ − ٢س س١ − س٢ + س س١ = ٠

س (س − ٢س١) = ٠

س = ٠ ، س = ٢س١



ص = ص١ س٢ / س٢ − س١ س = ٢ص١

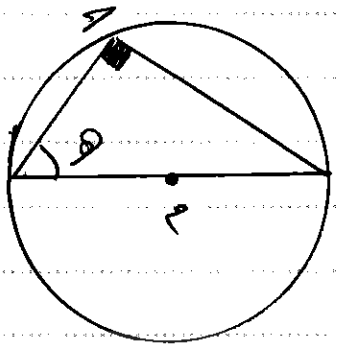
المستقيم يمر بالنقطتين (٢س١، ٠) (س١، ص١)

الميل = ص١ / −س١ = ص١ / س١

ص − ٠ = ص١ / س١ (س − ٢س١)

السؤال الرابع

الشكل المجاور عبارة عن دائرة قطرها $\overline{AP}$ طوله ٤ سم، بدأت النقطة ح الحركة على الدائرة من النقطة ل باتجاه النقطة P، لترسم مع القطر AP مثلثاً قائم الزاوية في ح، جد قياس الزاوية



الحل

نفرض ان ∠PAح = هـ

مساحة المثلث

م = ½ × AP × Aل × جا هـ

= ½ × ٤ × Aل × جا هـ

م = ٢ Aل جا هـ

لكن جا هـ = Aل / ٤

⇐ Aل = ٤ جا هـ

يتبع ←

مكتبة الجواب
AlJawab.com
المعلم ناجح الجمزاوي

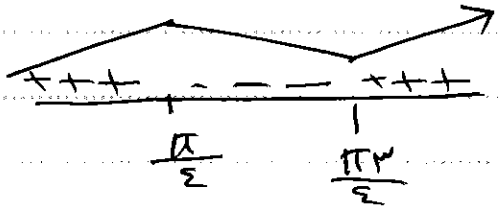
$\Leftarrow م = ٤ \times ٢ \times$ ضا $\times$ جا

$= ٤$ جا $\times$ هـ

$م' = ٨$ جتا $\times$ هـ = صفر

$\leftarrow$ جتا هـ $= \frac{\pi}{٢}$ أو $= \frac{٣\pi}{٢}$

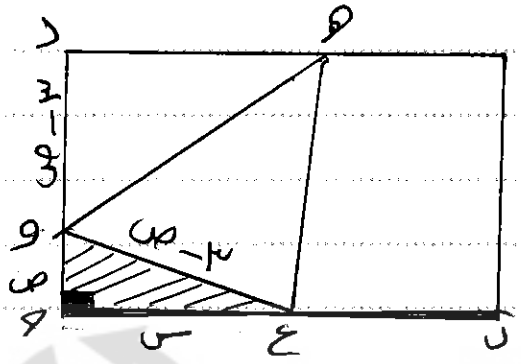
$\leftarrow$ هـ $= \frac{\pi}{٤}$ أو هـ $= \frac{٣\pi}{٤}$



عندما هـ $= \frac{\pi}{٤}$ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

السؤال السادس

عين الشكل المجاور المستطيل أ ب جـ د الذي محيطه ٦ سم، طول أ ب = ٣ سم، طول الزاوية أ جـ و فيه المتغير (و) حيث انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ حيث المنطقة ع هي أكبر مساحة ممكنة للمثلث و جـ ع.



الحل

نفرض و جـ = ص ، ع جـ = س

م = مساحة Δ و جـ ع

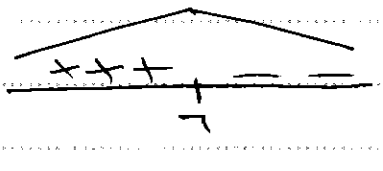
$= \frac{١}{٢} \times$ س $\times$ ص

$\Leftarrow$ يتبع

ح' $= \pi(٧ - \frac{٣}{٤}ع^٢) = ٠$

$\frac{٣}{٤}ع^٢ = ٧ \Leftarrow ع^٢ = \frac{٤ \times ٧}{٣} = ٣٦$

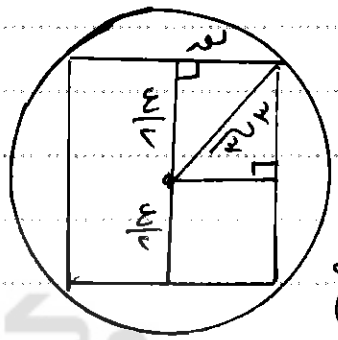
ع $= \pm ٦$



ع $= ٦$ أكبر ما يمكن

السؤال الخامس

جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣√٣



الحل

ح $= \pi$ نق^٢ ع

من الشكل فيثاغورس

$(٣\sqrt{٣})^٢ =$ نق$^٢ + (\frac{ع}{٢})^٢$

$٢٧ =$ نق$^٢ + \frac{ع^٢}{٤} \leftarrow$ نق$^٢ = ٢٧ - \frac{ع^٢}{٤}$

ح $= \pi \times ع \times (٢٧ - \frac{ع^٢}{٤})$

$= \pi(٢٧ ع - \frac{ع^٣}{٤})$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

عندما ينطبق الرأس د على النقطة ع فان د و تنطبق على ع و

$\Leftarrow$ د و = و ع

د و = ٣ − ص $\Leftarrow$ و ع = ٣ − ص

نطبق نظرية فيثاغورس على

Δ و ج ع $\leftarrow$

$(٣-ص)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$٩ - ٦ص + ص^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$٦ص = ٩ - س^{٢}$

$ص = \frac{٩-س^{٢}}{٦}$

$م = \frac{١}{٢} س \left(\frac{٩-س^{٢}}{٦}\right)$

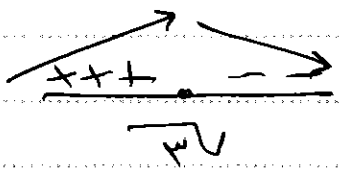
$= \frac{١}{١٢} (٩س - س^{٣})$

$م' = \frac{١}{١٢} (٩ - ٣س^{٢}) =$ صفر

$٩ - ٣س^{٢} = ٠$

$٣س^{٢} = ٩ \leftarrow س^{٢} = ٣$

$س = \pm \sqrt{٣}$

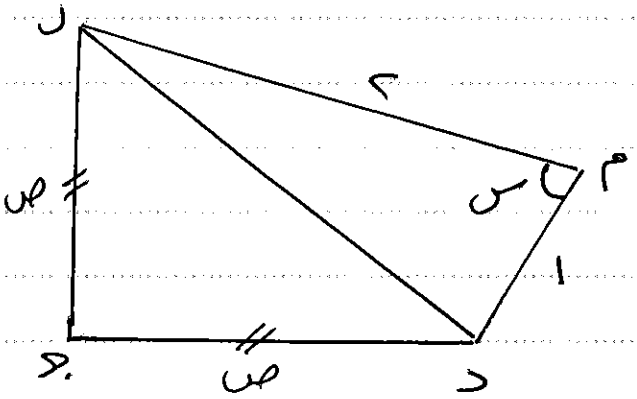


مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \sqrt{٣} \times \left(\frac{٩-٣}{٦}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

السؤال السابع

مثلث الشكل المجاور، الشكل الرباعي ب ج د هـ الذي فيه، الضلع ب ج ثابت وطوله = ٤ سم، وفيه م د ثابتة طوله ٤ سم إلا ان وضعه متحول، يمكنه ان يدور في مستوى الشكل حول النقطة م، ويصنع مع الضلع الثابت م ب زاوية تقدرها س، اما الزاوية د ج ب فهي قائمة، والضلعان ج د ج ب متساويان دوماً، جد قيمة س التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن.



الحل

نفرض ان ج د = ص = ب هـ

مساحة الشكل الرباعي

= مساحة Δ ب هـ د + مساحة م ب د

$= \frac{١}{٢} \times ص \times ٤ \sin س + \frac{١}{٢} \times ١ \times ٤ \sin س$

$= \frac{١}{٢} ص^{٢} + ٢ \sin س$ الرئيسي $\leftarrow$

المعلم ناجح الجمزاوي
AlWesam

نطبق مبدأ نيوتن على Δ ب د

$(ب د)^2 = ه^2 + ه^2 = 2 ه^2$

$\leftarrow ب د = \sqrt{2}\, ه$

ونطبق قانون جيب التمام على Δ م ب د

$(\sqrt{2}\, ه)^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 1 \times$ جتا س

$2 ه^2 = 5 - 4$ جتا س

$ه^2 = \frac{5 - 4 \text{ جتا س}}{2}$ نعوضها في م

$م = \frac{1}{2}\left(\frac{5 - 4 \text{ جتا س}}{2}\right) +$ جا س

$= \frac{1}{4}(5 - 4 \text{ جتا س}) +$ جا س

$م' = \frac{1}{4}(0 + 4 \text{ جا س}) +$ جتا س

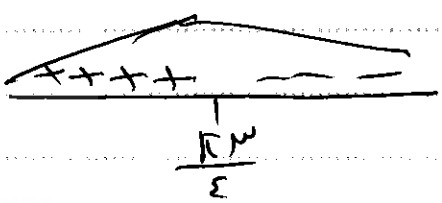
$= 0$

$\leftarrow$ جا س + جتا س = 0

جا س = − جتا س بالقسمة على جتا س

ظا س = −1

$س = 135° = \frac{3\pi}{4}$ أو $س = 315° = \frac{7\pi}{4}$ مرفوض



$م = \frac{1}{4}(5 - 4 \text{ جتا } \frac{3\pi}{4}) +$ جا $\frac{3\pi}{4}$

$= \frac{1}{4}(5 - 4 \times -\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{4}(5 + \frac{4}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

اتفقت احدى الجامعات مع شركة سياحية لتسيير رحلة الى الحصيبة بان يدفع كل شخص (٦٥) دينارا ، اذا كان عدد المشتركين في الرحلة (١٠٠) شخص واذا زاد عدد المشتركين عن (١٠٠) شخص فان الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد ، جد عدد المشتركين في الرحلة ليكون ايراد الشركة اكبر ما يمكن .

الحل

سعر التذكرة	عدد المشتركين
٦٥	١٠٠
$٦٥-\frac{١}{٢}$	$١٠٠+١$
$٦٥-١$	$١٠٠+٢$
⋮	⋮
$(٦٥-\frac{س}{٢})$	$(١٠٠+س)$

ايراد الشركة = عدد المشتركين × سعر التذكرة

$د(س) = (١٠٠+س)(٦٥-\frac{س}{٢})$

$د(س) = ٦٥٠٠ + ٦٥س - ٥٠س - \frac{١}{٢}س^٢$

$د'(س) = ٦٥ - ٥٠ - س = ٠$

$١٥ - س = ٠ \Leftarrow س = ١٥$

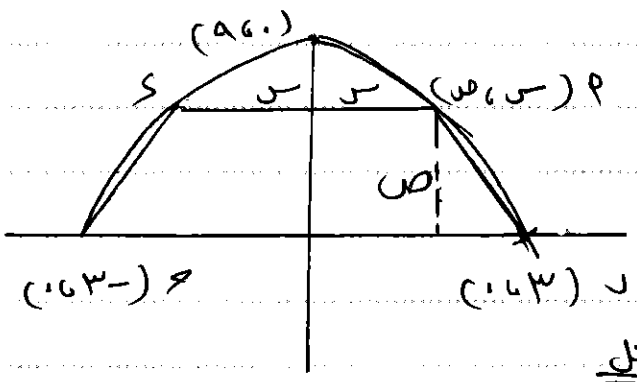
	+		−
		١٥	

عند $س = ١٥$

عدد المشتركين $= ١٠٠ + ١٥ = ١١٥$ شخص

السؤال التاسع

صمم اكبر حديقة ممكنة الشكل مثلث على شكل نصف قطع مكافئ محوره السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات وراسه الاخر على منحنى المعادلة $ص = ٩ - س^٢$



الحل

راس القطع $(٠،٩)$

تقاطعه مع السينات $٩ - س^٢ = ٠$

$س^٢ = ٩ \quad س = \pm ٣$

مساحة سطح المثلث

$= \frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢}(ع و + ه و) \times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢}(٦ + ٢س) \times ص$

$= (٣ + س) \times ص$

بما ان $ص = ٩ - س^٢$ نعوضها

$م = (٣ + س)(٩ - س^٢)$

$= ٢٧ - ٣س^٢ - س^٣ + ٣س$

$م' = ٣ - ٦س - ٣س^٢ = ٠$

بالقسمة على $-٣ \Leftarrow م' = س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = -٣ \quad س = ١$

	+		−
		١	

اكبر مساحة $= \frac{١}{٢}(٦)(٩ - ١) = ٢٧$

مكتبة المعلم ALMOALEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال العاشر .

وجد صنع اثاث ان تكلفه الكليه بالدينار للانتاج الاسبوعي لغرف نوم عددها س تقدر بالأفران
ك(س) = س^{3} − ٣س^{2} + ٨٠س + ٥٠٠
فاذا بيعت كل غرفة نوم بسعر ٨٠٠ دينار ، فما الانتاج الاسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن)

الحل

نفرض ان عدد الغرف = س
سعر بيع الغرفه = ٨٠٠ س

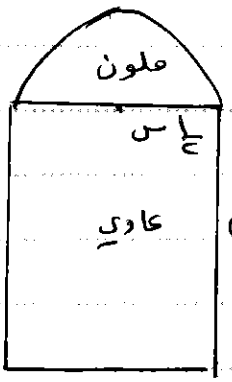
الربح الكلي = الايراد الكلي − التكلفه الكليه
ر(س) = ٨٠٠ س − (س^{3} − ٣س^{2} + ٨٠س + ٥٠٠)
= ٨٠٠س − س^{3} + ٣س^{2} − ٨٠س − ٥٠٠
= − س^{3} + ٣س^{2} + ٧٢٠س − ٥٠٠
ر(س) = − ٣س^{2} + ٦س + ٧٢٠ = ٠
بالقسمة ع ٣
س^{2} − ٢س − ٢٤٠ = ٠
(س − ١٦) (س + ١٥) = ٠
س = ١٦ ، س = − ١٥ مرفوض

	+	+	+		−	−	−
				١٦			

ر عظمى

السؤال الحادي عشر

نافذة محيطها (٦) امتار على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة اذا كان الزجاج الذي شكل نصف دائرة ملوناً ويسمح بادخال نصف كمية الضوء الذي يسمح بادخاله الزجاج العادي الذي يكون الجزء المتبقي من النافذه فجد ابعاد المنطقه المستطيله للنافذه بحيث يسمح بادخال أكبر كميه ممكنه من الضوء .



الحل

كمية الضوء =
ضوء المستطيل + ضوء ½ نصف الدائرة
ك = الاضاءة المستطيل + ½ الاضاءة نصف الدائرة

ك = س ص + ½ × ½ π (س/٢)^{2}
= س ص + π/١٦ س^{2}

لكن
س + ٢ص + ½ π س = ٦ بالضرب بـ ٢
٢س + ٤ص + π س = ١٢
٤ص = ١٢ − ٢س − π س
ص = (١٢ − ٢س − π س)/٤

بتعويضها في ك ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

ل = $\frac{1}{4}$ س × (١٢ ع − ٣ س ع − $\frac{\pi}{16}$ س^2)
+ $\frac{\pi}{16}$ س^2
= $\frac{1}{4}$ (١٢ س ع − ٣ س^2 ع − $\frac{\pi}{16}$ س^3) + $\frac{\pi}{16}$ س^2

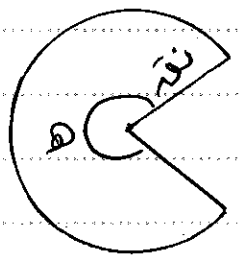
ل′ = $\frac{1}{4}$ (١٢ ع − ٦ س ع − $\frac{3\pi}{16}$ س^2) + $\frac{\pi}{8}$ س = ٠
بالضرب بـ ٨
٤٨ ع − ٨ س ع − ٣ π س^2 + ٢ π س = ٠
٤٨ ع = ٨ س ع + ٣ π س^2 − ٢ π س
٤٨ ع = (٨ ع + ٣ π س − ٢ π) س
س = $\frac{48 ع}{8 ع + 3\pi س - 2\pi}$

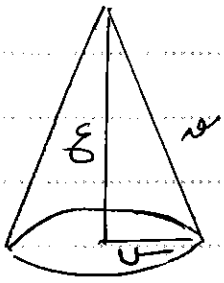
	+ + + ١ − − −	
عظمى		$\frac{48 ع}{8 ع + 3\pi س - 2\pi}$

ص = $\frac{12 ع + 3\pi}{8 ع + 3\pi}$

السؤال الثاني عشر

قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري (هـ) ونصف قطر دائرته نق، حُوّل الى مخروط قائم دائري نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع، جد قيمة هـ التي تجعل المخروط أكبر ما يمكن





نق ثابت ، س : متغير
عندما يتحول القطاع الدائري الى مخروط فان نق التي في القطاع يصبح وتر في المخروط
وطول القوس يصبح محيط قاعدة المخروط
ع = $\frac{\pi}{2}$ س ع
وحسب فيثاغورس فان
نق^2 = س^2 + ع^2
س^2 = نق^2 − ع^2 بالتعويض في ح
ع = $\frac{\pi}{3}$ (نق^2 ع − ع^3)
= $\frac{\pi}{3}$ (نق^2 ع − ع^3) نق : ثابت
ع′ = $\frac{\pi}{3}$ (نق^2 − ٣ ع^2) = ٠
نق^2 − ٣ ع^2 = ٠ ← ع^2 = $\frac{نق^2}{3}$

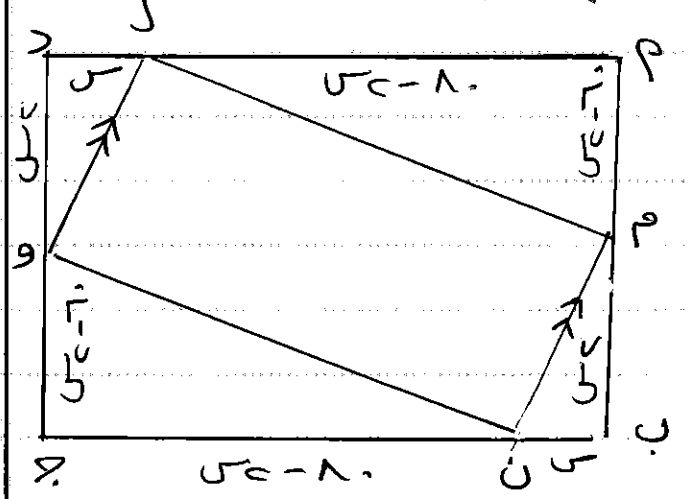
	+ + + ١ − − −	
		$\frac{نق}{\sqrt{3}}$

← ع = $\frac{نق}{\sqrt{3}}$
عندما ع = $\frac{نق}{\sqrt{3}}$ يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن
طول القوس = محيط قاعدة المخروط
نق × هـ = ٢ π س ← نق^2 − ع^2 = س^2
← نق^2 − $\frac{نق^2}{3}$ = س^2 ← س^2 = $\frac{2}{3}$ نق^2
س = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ نق ← نق × هـ = ٢ π $\sqrt{\frac{2}{3}}$ نق
هـ = ٢ π $\sqrt{\frac{2}{3}}$ = $\sqrt{\frac{8}{3}}$ π راديان

السؤال السابع عشر مراجعة

ص ٢١٤

الشكل المقابل يمثل المستطيل أ ب ج د
حيث أ ب = ٦٠ سم ، ب ج = ٨٠ سم
وبداخله متوازي اضلاع م ن و ل
الذي تقع رؤوسه على اضلاع المستطيل
أ ب ج د .
جد قيمة س التي تجعل مساحة متوازي
الاضلاع (م ن و ل) أكبر ما يمكن
علمًا بأن م ل = ٢ ب ن .



الحل

بما أن ب ن = س ⇐ م ل = ٢ س

مساحة المثلث م ب ن = مساحة المثلث ل د و

$= \frac{1}{2} \times س \times ٢س = س^2$

مساحة المثلث ن ج و = مساحة المثلث م أ ل

$= \frac{1}{2} (٨٠ - س)(٦٠ - ٢س)$

مساحة متوازي الاضلاع =

مساحة المستطيل − مساحة المثلثات الأربعة

$م = ٦٠ \times ٨٠ - (٢س^2 + \frac{1}{2}(٨٠ - س)(٦٠ - ٢س))$

$= ٤٨٠٠ - (٢س^2 + ٢٤٠٠ - ٦٠س - ٤٨٠س + س^2)$

$= ٤٨٠٠ - (٣س^2 - ٥٦٠س + ٢٤٠٠)$

$= ٤٨٠٠ - ٣س^2 + ٥٦٠س - ٢٤٠٠$

$= -٣س^2 + ٥٦٠س + ٢٤٠٠$

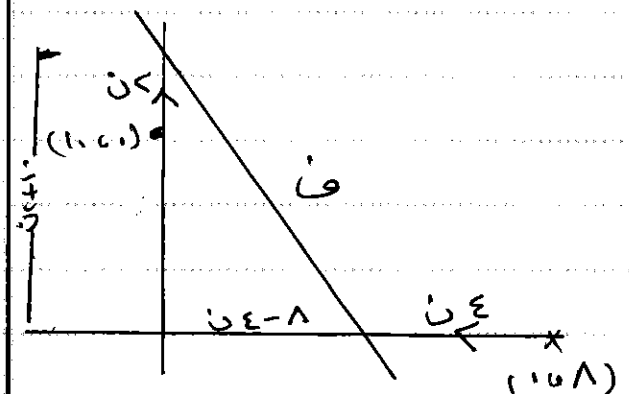
$م' = -٦س + ٥٦٠ = ٠$

$٦س = ٥٦٠ \Leftarrow س = \frac{٥٦٠}{٦} = ٩٣,٣$

$س = ٩٣,٣$ عظمى

السؤال الخامس اختبار ذاتي ص ٢١٨

بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة م (٨، ٠) على محور السينات باتجاه نقطة الاصل بسرعة ٤ سم/ث، وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة اخرى الحركة من النقطة ب (٠، ١٠) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة ٢ سم/ث متى يكون البعد بين النقطتين اقل ما يمكن



$ف^2 = (٨-٤ن)^2 + (١٠+٢ن)^2$

$ف^2 = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^2 + ١٠٠ + ٤٠ن + ٤ن^2$

$ف = \sqrt{٢٠ن^2 - ٢٤ن + ١٦٤}$

$ف' = \frac{٤٠ن - ٢٤}{٢\sqrt{١٠ن^2 - ٢٤ن + ١٦٤}}$

$٤٠ن - ٢٤ = ٠ \leftarrow ن = \frac{٢٤}{٤٠} = ٠٫٦$

	−	0	+
ف'	−	صفر	+

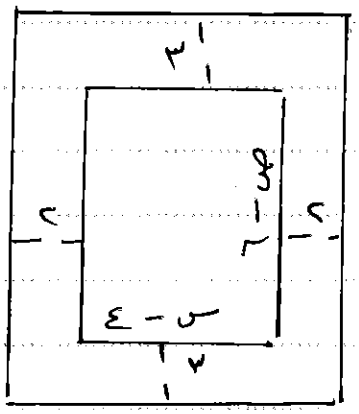
٠٫٦

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

يراد طباعة اعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة واسفلها (٣) سم وفي كل من الجانبين (٢) سم ، اذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي (١٥٠) سم فأجد ابعاد الورقة التي مساحتها اصغر ما يمكن وعليه استعمالها للطباعة .



نفرض ابعاد الورقة هي س ، ص
ابعاد الورقة المطبوعة هي
ص - ٦ ، س - ٤

م = س × ص

مساحة المنطقة المطبوعة = م

١٥٠ = (ص - ٦)(س - ٤)

ص - ٦ = $\frac{١٥٠}{س-٤}$ ⇐

ص = $\frac{١٥٠}{س-٤}$ + ٦

م = ($\frac{١٥٠}{س-٤}$ + ٦) × س

= $\frac{١٥٠س}{س-٤}$ + ٦ س

م' = $\frac{(س-٤)\times ١٥٠ - ١٥٠س}{(س-٤)^{٢}}$ + ٦

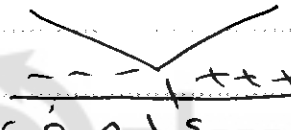
= $\frac{-١٥٠ع - ٦٠٠ - ١٥٠ع}{(س-٤)^{٢}}$ + ٦

= $\frac{-٦٠٠}{(س-٤)^{٢}}$ + ٦

$\frac{-٦٠٠}{(س-٤)^{٢}}$ + ٦ = ٠ ⇐ ٦(س-٤)^{٢} = ٦٠٠

(س-٤)^{٢} = ١٠٠

س - ٤ = ± ١٠ ⇐ س = ١٤ ، س = -٦ مرفوض



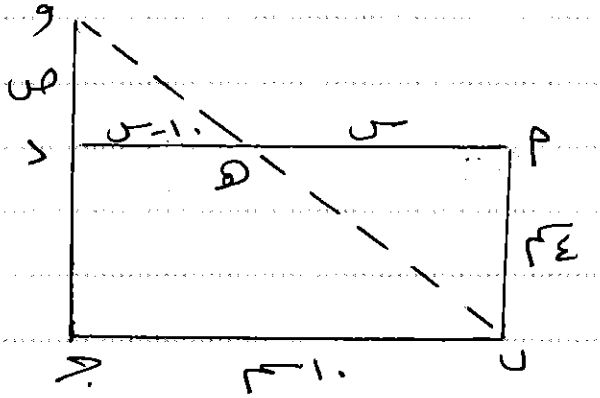
ص = $\frac{١٥٠}{س-٤}$ + ٦ = $\frac{١٥٠}{١٤-٤}$ + ٦

= ٢١

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٨) صيفية

ا ب ج د مستطيل فيه ا ب = ٤ سم ، ب ج = ١٠ سم ، قُذف الضلع ج د على استقامته الى (و) ثم وصل ب و فقطع الضلع ا د في هـ ، فاذا كان ا هـ = س سم ، د و = ص سم جد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، ا هـ ب اصغر ما يمكن



نفرض ان م = مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، ا هـ ب

مساحة د هـ و = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × ص

مساحة ا هـ ب = $\frac{1}{2}$ × س × ٤ = ٢ س

م = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × ص + ٢ س

المثلثان د هـ و ، ا هـ ب متشابهان

$\frac{٤}{س} = \frac{ص}{١٠-س}$

س ص = ٤ (١٠-س)

ص = $\frac{٤(١٠-س)}{س}$

$\Leftarrow$

م = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × $\frac{٤(١٠-س)}{س}$ + ٢ س

م = $\frac{٢(١٠-س)^{٢}}{س}$ + ٢ س

م' = $\frac{س \times ٢(١٠-س) \times -١ - ٢(١٠-س)^{٢}}{س^{٢}}$ + ٢

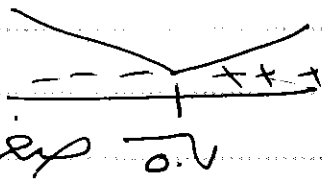
$= \frac{-٢٠س + ٢س^{٢} - ٢(١٠٠ - ٢٠س + س^{٢})}{س^{٢}}$ + ٢

$= \frac{-٢٠س + ٢س^{٢} - ٢٠٠ + ٤٠س - ٢س^{٢} + ٢س^{٢}}{س^{٢}}$

٤ س^٢ - ٢٠٠ = ٠ ⇐ ٤ س^٢ = ٢٠٠

س^٢ = ٥٠ ⇐ س = ± $\sqrt{٥٠}$

س = ٥√٢

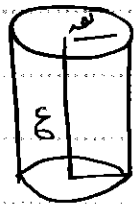


ص = $\frac{٤(١٠-٥\sqrt{٢})}{٥\sqrt{٢}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اسطوانة دائرية قائمة مجموع مساحة قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم اوجد ارتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها أكبر ما يمكن.



الحل

$ح = \pi نق^2 ع$

$٢\pi نق + ع = ٦٦$

$ع = ٦٦ - ٢\pi نق$

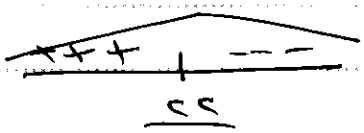
$ح = \pi نق^2 (٦٦ - ٢\pi نق)$

$= ٦٦\pi نق^2 - ٢\pi نق^3$

$ح' = ١٣٢\pi نق - ٦\pi نق^2$

$٦\pi نق (٢٢ - \pi نق) = ٠$

$نق = ٠ \quad نق = \frac{٢٢}{\pi}$

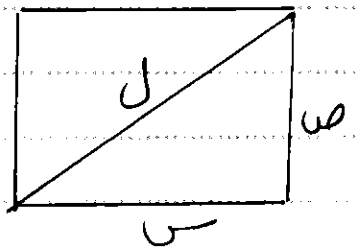


عظمى عند $نق = \frac{٢٢}{\pi}$

$ع = ٦٦ - ٢\pi \times \frac{٢٢}{\pi} = ٢٢$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

ستطيل مساحته ١٦ سم^2 أوجد بعديه عندما يكون طول قطره اصغر ما يمكن.



الحل

$ل^2 = س^2 + ص^2$

$س \times ص = ١٦ \leftarrow ص = \frac{١٦}{س}$

$ص^2 = \frac{٢٥٦}{س^2}$ نعوضها في ل

$ل^2 = س^2 + \frac{٢٥٦}{س^2}$

$ل \times ل' = ٢س - \frac{٥١٢}{س^3} = \frac{٢س^4 - ٥١٢}{س^3} = ٠$

$٢س^4 - ٥١٢ = ٠ \leftarrow ٢س^4 = ٥١٢ \leftarrow س^4 = \frac{٥١٢}{٢}$

$س^4 = ٢٥٦ \leftarrow س = ٤$ أو -٤

نأخذ $س = ٤$

$ص = \frac{١٦}{س} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٠ ج) شتوية

اذا كان الانتاج اليومي لمصنع حديد صلب طناً من نوع الحديد الجيد، س طناً من نوع الحديد الأقل جودة فاذا كانت ص = $\frac{٤٠-٥س}{١٠-س}$ $س \neq ٠$

وكان سعر الطن من الحديد الجيد لياوي مثلي سعر الطن من الحديد الأقل جودة، فجد الكمية التي ينتجها المصنع يومياً من كل نوع حتى تحقق أكبر ايراد.

الحل

نفرض سعر طن الحديد الأقل جودة = ل

← سعر طن الحديد الجيد = ٢ل

ايراد المصنع = عدد طن ص × سعر ص + عدد طن س × سعر س

∴ ح = ص × ٢ل + س × ل

ح(س) = ٢ل ص + ل س

لكن ص = $\frac{٤٠-٥س}{١٠-س}$

ح(س) = ٢ل $\left(\frac{٤٠-٥س}{١٠-س}\right)$ + ل س

= $\frac{ل٢(٤٠-٥س)+ل س(١٠-س)}{١٠-س}$

= $\frac{٨٠ل-١٠ل٢س+ل٢س-ل س^{٢}}{١٠-س}$

ح(س) = $\frac{٨٠ل-ل س^{٢}}{١٠-س}$

ح'(س) = $\frac{(١٠-س)(-٢ل س)-(٨٠ل-ل س^{٢})(-١)}{(١٠-س)^{٢}}$

= $\frac{-١٠ل س+٢ل س^{٢}+٨٠ل-ل س^{٢}}{(١٠-س)^{٢}}$

= $\frac{ل س^{٢}-١٠ل س+٨٠ل}{(١٠-س)^{٢}}$

بالقسمة على ل

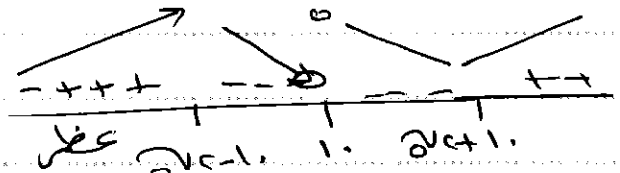
$س^{٢}-١٠س+٨٠=٠$

تتحقق القانون العام

$س = \frac{١٠ \pm \sqrt{١٠^{٢}-٤×١×٨٠}}{٢×١}$

$س = ١٠ \pm ٥\sqrt{٢}$

$س = ١٠-٥\sqrt{٢}$

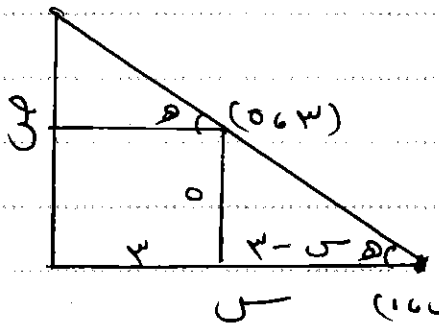


أكبر ايراد عند س = ١٠-٥√٢ ≈ ٣,٩

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

(٦) وزارة (٢٠١٠) صيفية

ص معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٥،٣) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × س × ص

ظا ه = أو تشابه

$\frac{٥}{س-٣} = \frac{ص}{س}$

$\leftarrow ص = \frac{٥س}{س-٣}$

$م = \frac{1}{2} س \left(\frac{٥س}{س-٣}\right) = \frac{٥س^{٢}}{٢(س-٣)}$

$م' = \frac{٢(س-٣)\times ١٠س - ٥س^{٢} \times ٢}{(٢(س-٣))^{٢}}$

$١٠س^{٢} - ٦٠س - ١٠س^{٢} = ٠$

$-٦٠س = ٠ \leftarrow س(س-٦) = ٠$

$\leftarrow س = ٠ \quad س = ٦$

المقطع السيني (٦، ٠) ٦ صغرى

ميل المستقيم = $\frac{٠-٥}{٦-٣} = \frac{-٥}{٣}$

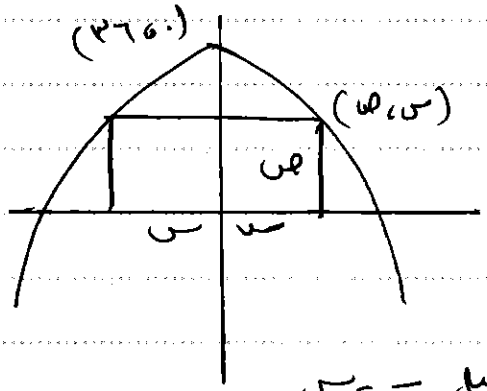
معادلة المستقيم

$ص - ٠ = \frac{-٥}{٣}(س-٦)$

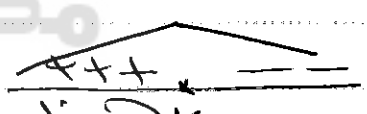
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

صندوق أكد مستطيل مساحة قاعدته المساحة عليه رسمة قطع مكافئ محورها ينطبق على محور الصادات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى $ق(س) = ٣٦ - س^٢$



طول المستطيل $= ٢س$
عرض المستطيل $= ص$
$م = ٢س \times ص$
$ص = ٣٦ - س^٢$
$م = ٢س(٣٦ - س^٢) = ٧٢س - ٢س^٣$
$م' = ٧٢ - ٦س^٢ = ٠$
$٦س^٢ = ٧٢$ $س^٢ = \frac{٧٢}{٦} = ١٢$
$س = \pm\sqrt{١٢} = \pm ٢\sqrt{٣}$
نأخذ الموجب فقط



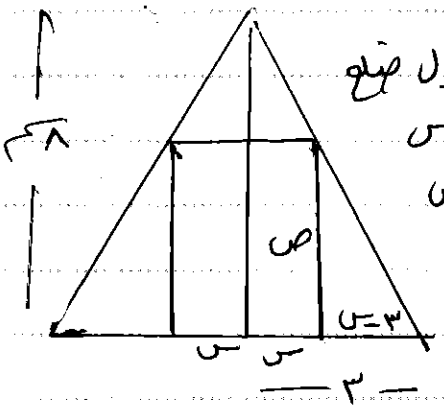
$ص = ٣٦ - ١٢ = ٢٤$

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦سم، وارتفاعه ٨سم، يُراد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث هندسي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

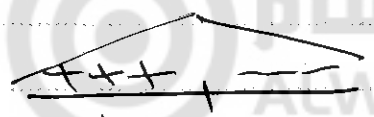
نفرض ان طول ضلع المستطيل $= ٢س$
عرضه $= ص$



$م = ٢س \times ص$ من تشابه المثلثين
$\frac{ص}{٨} = \frac{٣-س}{٣}$ $\Leftarrow ص = \frac{٨}{٣}(٣-س)$

$م = ٢س \times \frac{٨}{٣}(٣-س)$
$= \frac{١٦}{٣}(٣س - س^٢)$
$م' = \frac{١٦}{٣}(٢ - ٣س)$

$٣ - ٢س = ٠$
$س = \frac{٣}{٢}$سم



البعد الآخر
$ص = \frac{٨}{٣}(٣ - \frac{٣}{٢}) = ٤$سم

مكتبة الوسام
AlwesAM
المعلم ناجح الجمزاوي

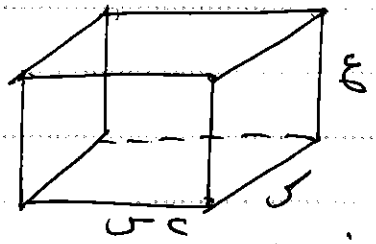
⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه، اذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم فجد الحادة التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحل

نفرض ان عرض الصندوق = س

ارتفاعه = ع طوله = ٢س



ح = الطول × العرض × الارتفاع

= ٢س × س × ع = ٢س^٢ ع

لكن الارتفاع + محيط القاعدة = ٧٢

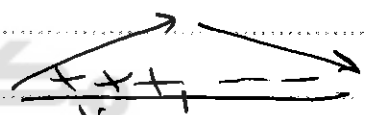
ع + ٦س = ٧٢

⇐ ع = ٧٢ − ٦س

ح = ٢س^٢ (٧٢ − ٦س) = ١٤٤س^٢ − ١٢س^٣

ح′ = ٢٨٨س − ٣٦س^٢ = ٠

٣٦س (٨ − س) = ٠ ⇐ س = ٨



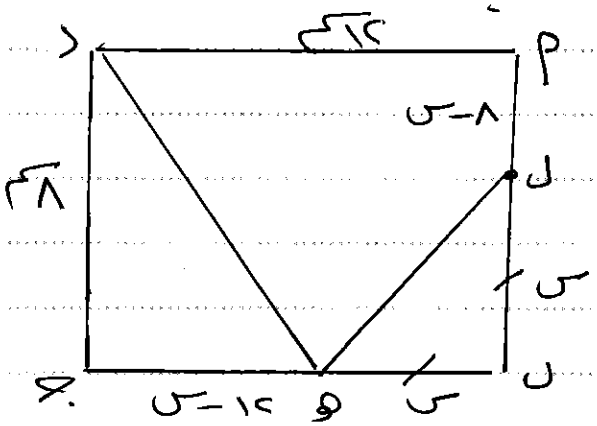
ارتفاعه = ٧٢ − ٦ × ٨

= ٢٤

طوله = ١٦ عرضه = ٨

⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

في الشكل المجاور ABCD شبه منحرف فيه AB = ٨سم، DC = ١٢سم عينت النقطتان L، H على الضلعين AD، BC على الترتيب بحيث كان LH = BH، فجد طول AL الذي يجعل مساحة الشكل الرباعي ALHD أكبر ما يمكن



مساحة الشكل ALHD

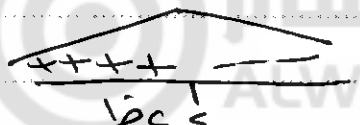
= مساحة شبه منحرف − (مساحة Δ ALH + مساحة Δ HDC)

= ٨ × ١٢ − (½ س^٢ + ½ (١٢−س) ٨)

= ٩٦ − (½ س^٢ + ٤٨ − ٤س)

= ٩٦ − ½ س^٢ − ٤٨ + ٤س

م′ = −س + ٤ = ٠ ⇐ س = ٤



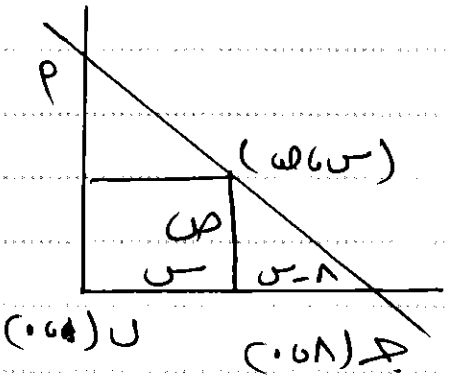
س = ل ل = ٤

تكون مساحة الشكل أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل المثلث P ب جـ القائم الزاوية في ب ، جـ فيه مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث .



نفرض ان النقطة (س، ص)

طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص

م = س × ص

من تشابه المثلثات

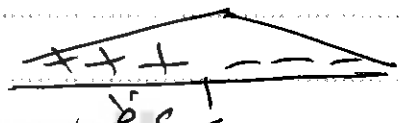
$\frac{ص}{٨-س} = \frac{٦}{٨} \Leftarrow ص = \frac{٦}{٨}(٨-س)$

$ص = \frac{٣}{٤}(٨-س)$

$م = س \times \frac{٣}{٤}(٨-س) = \frac{٣}{٤}(٨س - س^٢)$

$م' = \frac{٣}{٤}(٨-٢س) = ٠$

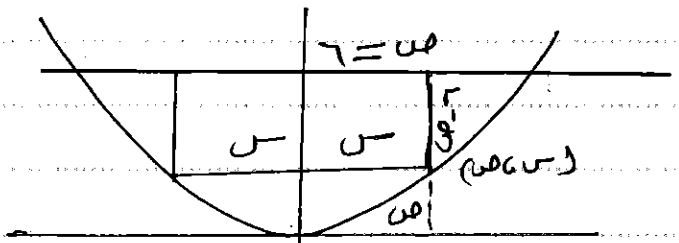
$٨-٢س = ٠ \leftarrow س = ٤$



$ص = \frac{٣}{٤}(٨-٤) = ٣$

(١٢) وزارة (٢٠١٣) صيفية

جد أكبر مستطيل في الشكل المجاور الذي يقع رأسان من رؤوسه على منحنى العلاقة $٤ص = س^٢$ ويقع رأسان آخران على المستقيم $ص = ٦$



مساحة المستطيل = $٢س \times (٦-ص)$

لكن $٤ص = س^٢ \Rightarrow ص = \frac{س^٢}{٤}$

$م = ٢س(٦ - \frac{س^٢}{٤})$

$= ١٢س - \frac{س^٣}{٢}$

$م' = ١٢ - \frac{٣}{٢}س^٢ = ٠$

$\frac{٣}{٢}س^٢ = ١٢ \quad س^٢ = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

$س = ٢\sqrt{٢}$

$ص = \frac{(٢\sqrt{٢})^٢}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

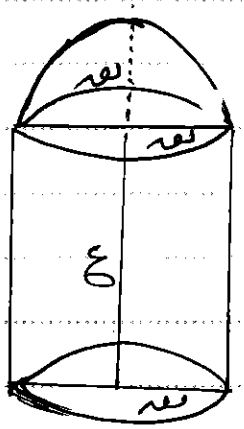
$م = ٢ \times ٢\sqrt{٢}(٦-٢) = ٨\sqrt{٢}$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

حافظة للماء إلى أعلى تتكون من جزأين الجزء الأول وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) والجزء الثاني غطاء على شكل نصف كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الاسطوانة كما في الشكل، إذا كان حجم الحافظة 360π سم^3 جد كلاً من نصف القطر والارتفاع اللذان يجعلان مساحة الكلية لسطح الحافظة أقل ما يمكن

الحل



$ح = \pi 360$

$ح = \pi نق^2 ع + \frac{2}{3} \pi نق^3$

$\Leftarrow ع = \frac{360\pi - \frac{2}{3}\pi نق^3}{\pi نق^2}$

$= \frac{360}{نق^2} - \frac{2}{3} نق$

المساحة = مساحة القاعدة + مساحة الجانبين + مساحة سطح نصف الكرة

$م = \pi نق^2 + 2\pi نق ع + \frac{1}{2}(4\pi نق^2)$

$= \pi نق^2 + 2\pi نق \left(\frac{360}{نق^2} - \frac{2}{3} نق\right) + 2\pi نق^2$

$م = \frac{720\pi}{نق} + \frac{5}{3}\pi نق^2$

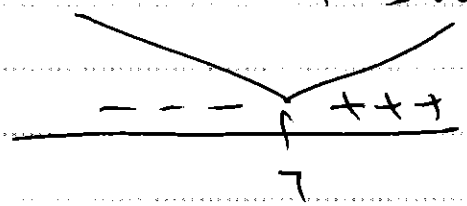
$م' = -\frac{720\pi}{نق^2} + \frac{10}{3}\pi نق = 0$

بالضرب في $نق^2$

$-720\pi + \frac{10}{3}\pi نق^3 = 0$

$نق^3 = \frac{3 \times 720}{10} = 216$

$نق = 6$



صغرى عند $نق = 6$

$ع = \frac{360}{36} = 6 \times \frac{2}{3}$

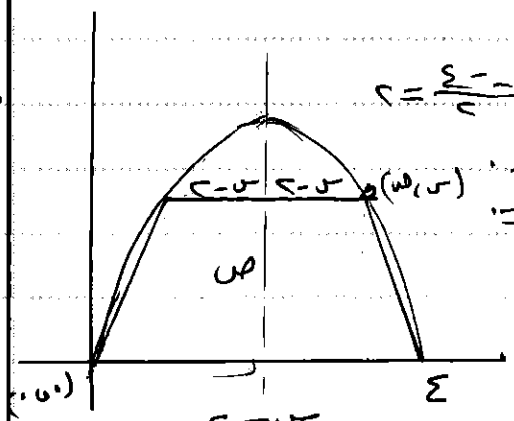
$= 10 - 4 = 6$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

جد ابعاد اكبر مستطيل محيطه ٤ سم الذي يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات، ورأسان آخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٤س - س^٢$ لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

$٤س - س^٢ = ٠$

$س(٤ - س) = ٠$

$س = ٠، ٤$

$م = \frac{١٠}{ج} \times ص \times (٤ + (ج - س - ج))$

$= (س - ج - ٢) \times (٤س - س^٢)$

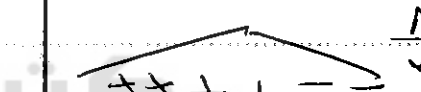
$= (س) (٤س - س^٢)$

$= ٤س^٢ - س^٣$

$م' = ٨س - ٣س^٢ = ٠$

$س(٨ - ٣س) = ٠$

$س = ٠، س = \frac{٨}{٣}$



القاعدة العليا $= ج(س - ٢)$

$= \frac{٤}{٣}(\frac{٨}{٣} - ٢)$

القاعدة السفلى $= ٤$

الارتفاع $= ٤(\frac{٨}{٣}) - (\frac{٨}{٣})^٢ = \frac{٩٦}{٩} - \frac{٦٤}{٩}$

$= \frac{٣٢}{٩}$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

اسطوانة دائرية قائمة وعلقة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) ومجموعهما (٥٤π) سم^٣ حيث نصف قطر قاعدة الاسطوانة وارتفاعها اللذان يجعلان حجمها أكبر ما يمكن أوجد هذا الحجم.

الحل

المساحة م = م١ جانبية + م٢ لقاعدتين

$م = ٢\pi نق ع + ٢\pi نق^٢$

$٥٤\pi = \pi نق^٢ ع + ٢\pi نق^٢$

$ع = \frac{٥٤\pi - ٢\pi نق^٢}{\pi نق^٢}$

$ع = \frac{٥٤}{نق^٢} - ٢$

$م = ٢\pi نق \times (\frac{٥٤}{نق^٢} - ٢) + \pi نق^٢$

$= \frac{١٠٨\pi}{نق} - ٤\pi نق + \pi نق^٢$

$م' = -\frac{١٠٨\pi}{نق^٢} - ٤\pi + ٢\pi نق$

$٤\pi نق = \frac{١٠٨\pi}{نق^٢} \leftarrow ٤ نق^٣ = ١٠٨$

$نق^٣ = \frac{١٠٨}{٤} = ٢٧ \leftarrow نق = ٣$

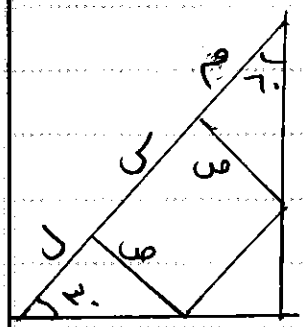
$ع = \frac{٥٤}{٩} = \frac{٥٤}{ج^٢} = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

صد صاحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث قائم الزاوية طول وتره ٤ سم وقياس احدى زواياه ٣٠°
بحيث تقع احدى قاعدتي المستطيل على الوتر ورأساه الاخران على ضلعي القائمة.

الحل



$ظ ٣٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{ل}$

$\leftarrow ل = \sqrt{٣}\, ص$

$ظ ٦٠ = \sqrt{٣} = \frac{ص}{م} \leftarrow م = \frac{ص}{\sqrt{٣}}$

$ل + م + س = ٤$

$\sqrt{٣}\, ص + \frac{ص}{\sqrt{٣}} + س = ٤$ × $\sqrt{٣}$

$٣ص + ص + \sqrt{٣} س = ٤\sqrt{٣}$

$٤ص = ٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣} س$

$= \sqrt{٣}(٤ - س)$

$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - س)$

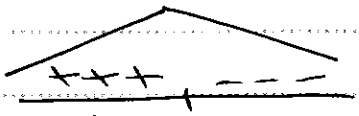
$م = س \times ص = س \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - س)$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤س - س^٢)$

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - ٢س) = ٠$

$٤ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٢$

←



٢ عظمى

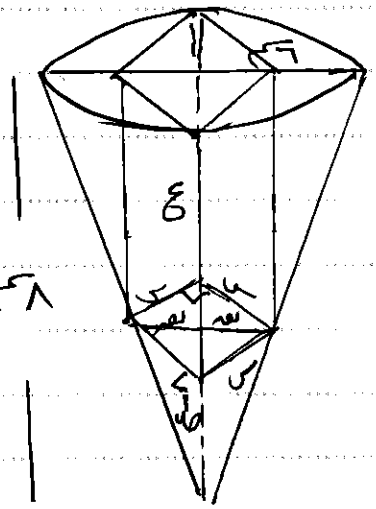
$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - ٢) = \sqrt{٣}$

$م = ٢ \times ٢ \sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوي

جد حجم أكبر مخروط (قشور) دائري قائم قاعدته مرتبطة بشكل عكسي وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (٦) سم وارتفاعه (٨) سم.



الحل

نفرض طول قاعدة المخروط = س
ارتفاعه = ع

حجم المخروط = مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ الارتفاع

$$ح = \frac{1}{3} \pi س^2 ع \quad \text{---} (1)$$

نفرض طول نصف قطر قاعدته = نق

حسب فيثاغورس

$$(٦ - نق)^2 = س^2 + (٨ - ع)^2$$

$$٣٦ - ١٢ نق + نق^2 = س^2 + ٦٤ - ١٦ ع + ع^2$$

$$نق^2 = \frac{1}{4} س^2 \leftarrow$$

$$\boxed{نق = \frac{1}{2} س}$$

فتقدم لنا بالمثلثات

$$\frac{نق}{٨ - ع} = \frac{٦}{٨}$$

$$٦(٨ - ع) = ٨ نق$$

$$٤٨ - ٦ع = ٨ نق \leftarrow نق = ٦ - \frac{٣}{٤} ع$$

$$نق = ٦ - \frac{٣}{٤} ع \leftarrow$$

$$ع = \frac{٤}{٣}(٦ - نق) \Leftarrow$$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٣} نق$$

بتعويض $نق = \frac{1}{2} س$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٢\sqrt{٣}} س$$ بتعويضها في الحجم

$$ح = \frac{1}{3} \pi س^2 (٨ - \frac{٤}{٢\sqrt{٣}} س)$$

$$= \frac{٨}{3} \pi س^2 - \frac{٤}{٦\sqrt{٣}} \pi س^3$$

$$ح' = \frac{١٦}{3} \pi س - \frac{١٢}{٦\sqrt{٣}} \pi س^2 = ٠$$

$$\frac{٤}{٣} \pi س (٤ - \frac{1}{2\sqrt{٣}} س) = ٠$$

$$س = ٠ \text{ أو } ٤ - \frac{1}{2\sqrt{٣}} س = ٠$$

$$س = ٤\sqrt{٣}$$

$٤\sqrt{٣}$ عظمى	+	−

$$نق = \frac{1}{2} \times ٤\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٣} \times ٣ = ٨ - ٤ = \frac{١٦}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

$$ح = \frac{1}{3} \times ٢\sqrt{٣} \times \frac{٨}{٣}$$

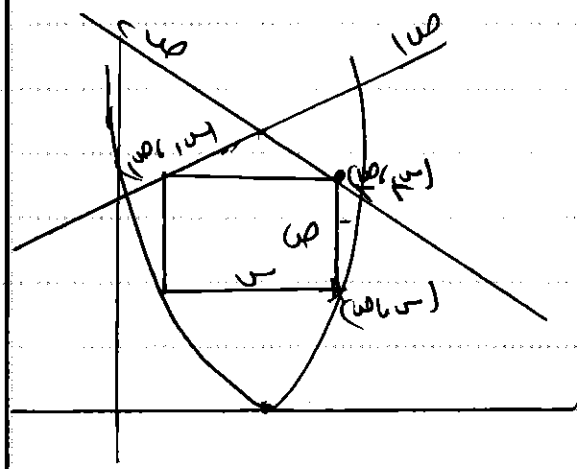
$$= \frac{٥٦\sqrt{٣}}{٣} = ٣٢\sqrt{٣}$$

مكتبة الوسام Alwesam
الاستاذ ناجح الجمزاوي

(١٨) وزارة صيفية (٢٠١٦)

يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الاقتران ق(س) = ٩ + ٦س - س٢ ورأساه الآخران على المستقيمين ص١ = ٢ + س ، ص٢ = ٨ - س

حدد بعدي المستطيل اللذين يجعلان مساحته أكبر ما يمكن



م = س × ص

الطول = س٢ - س١

لكن ص١ = ص٢ ⇐ ٢ + س = ٨ - س٢

⇐ ٢س = ٦ - س

⇐ الطول س = س٢ - ٦ + س

$$س = ٦ - ٢س$$

ص = ص٢ - ص = ٨ - س٢ - (٩ + ٦س - س٢)

ص = ٨ - س٢ - ٩ + ٦س - س٢

$$ص = -٢س٢ + ٦س - ١$$

م = س × ص

= (٦ - ٢س)(-٢س٢ + ٦س - ١)

= ٤س٣ - ١٢س٢ + ٦س + ٢س٢ - ٦س + ٦

= ٤س٣ - ١٠س٢ + ٦

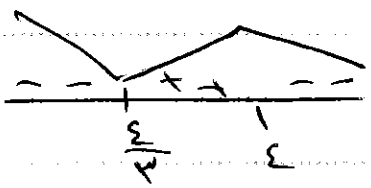
م' = ١٢س٢ - ٢٠س = ٠

÷ (٢س)

٦س - ١٠ = ٠

٢(٣س - ٥) = ٠

س = ٥/٣ ، س = ٠ (مرفوض)



عظمى عند س = ٥/٣

⇐ س = الطول = ٦ - ٢ × ٥/٣

= ٨/٣

ص = -(٥/٣)٢ + ٦ × ٥/٣ - ١

العرض = -٢٥/٩ + ١٠ - ١

= ٦٤/٩

مكتبة السام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي