أولاً : بغوض العدد في النهاية فإذا كانت

١) $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$:

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢}{س^٣ + ٥} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

٢) $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$:

$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٣} = \frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$

٣) $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} \Leftarrow$ غير موجودة

مثال جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢}{س - ١}$

الحل: $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} \Leftarrow$ غير موجودة

مثال جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

الحل:

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣} = \frac{١٠}{\text{صفر}}$

= غير موجودة

٤) $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم الطرق التالية :

* التحليل

مثال جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

الحل: $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س - ٢}$

$= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$

مثال جد $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥}$

الحل: $\lim_{س \to -٥} \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{(س + ٥)}$

$= -٥ - ٢ = -٧$

مثال جد $\lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١)^٢ - ٨١}{س - ٨}$

الحل:

$\lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١) - ٩)((س + ١) + ٩)}{س - ٨}$

$\lim_{س \to ٨} \frac{(س - ٨)(س + ١٠)}{(س - ٨)}$

$= ٨ + ١٠ = ١٨$

مثال إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٢٧}{٢س^٣ + ٦س + ١٨} & س \to ع \\ س + ٥ & س > ع \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim_{س \to ع} ل(س)$ موجودة.

الحل: لتكون النهاية موجودة فإن

$\lim_{س \to ع^-} ل(س) = \lim_{س \to ع^+} ل(س)$

$\lim_{س \to ع^-} ل(س) = ع + ٥$ ..... (١)

نهـا $\frac{ل(س)}{ع}$ =
$س \to ع^+$

نهـا $\frac{س^3 - ٧س + ٦}{س^3 - ٢س^2 + ٦س + ١٨}$
$س \to ع^+$

نهـا $\frac{(س-ع)(س^2 + ٣ع س + ٩)}{٢(س^3 + ٣ع س + ٩)}$
$س \to ع^+$

$= \frac{(ع-٣)}{٣}$ ..... ①

$\Leftarrow (ع+٥) = \frac{(ع-٣)}{٣}$

$٣ع + ١٥ = ع - ٣$

$ع = -٣ - ١٥ \Leftarrow ع = -١٣$

مثال جد نهـا $\frac{س^3 + ٣س - ٤}{س^3 - ١}$
$س \to ١$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} س^3 + ٣س - ٤ & س^3 - ١ \\ \hline -(س^3 - س) & س \\ \hline ٤س - ٤ & \end{array}$$

نهـا $\left(\frac{س}{س^3 - ١} + \frac{٤س - ٤}{س^3 - ١}\right)$
$س \to ١$

نهـا $\left(\frac{س}{(س-١)(س^2 + س + ١)} + \frac{٤(س-١)}{(س-١)(س+١)}\right)$
$س \to ١$

$= \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٢}$

$= ١ + ٢ = ٣$

مثال

جد نهـا $\frac{ع^4 - ٢س^2 + ١}{س^3 - ١}$
$س \to ١$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} ع^4 - ٢س^2 + ١ & س^3 - س - ١ \\ \hline -(ع^4 - س^3) & س - ١ \\ \hline -٢س^2 + س + ١ & \\ -(-٢س^2 + ٢س) & \\ \hline -س + ١ & \\ -(-س + ١) & \\ \hline ٠ & \end{array}$$

$س^3 - ١ = (س-١)(س^2 + س + ١)$

نهـا $\frac{(س-١)(س^3 + س^2 - س - ١)}{(س-١)(س^2 + س + ١)}$
$س \to ١$

$= \frac{١ + ١ - ١ - ١}{١ + ١ + ١} =$ صفر

مثال جد نهـا $\frac{(٦٤)^س - ٨س}{١ - ٨س}$
$س \to ٠$

الحل: نهـا $\frac{(٨^٢)^س - ٨س}{١ - ٨س}$
$س \to ٠$

$= نهـا \frac{٨^{٢س} - ٨س}{١ - ٨س}$ $= نهـا \frac{٨س(٨س - ١)}{(١ - ٨س)}$
$س \to ٠$ $س \to ٠$

$= -٨ = -١$

* الضرب بالمرافق التربيعي :

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س - ٣}$ ، س ← ٣

الحل:

نهـا $\frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س-٣} \times \frac{\sqrt{س+٦} + ٣}{\sqrt{س+٦} + ٣}$ ، س ← ٣

نهـا $\frac{س+٦ - ٩}{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٣)}$ ، س ← ٣

نهـا $\frac{(س-٣)}{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٣)}$ ، س ← ٣

$= \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

* الضرب بالمرافق التكعيبي

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$ ، س ← ٨

الحل:

نهـا $\frac{(\sqrt[٣]{س} - ٢)}{(س-٨)} \times \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$ ، س ← ٨

نهـا $\frac{(س-٨)}{(س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$ ، س ← ٨

$= \frac{١}{٤+٤+٤}$

$= \frac{١}{١٢}$

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$ ، س ← ٧

الحل:

نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س-٧} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$ ، س ← ٧

نهـا $\frac{س+١ - ٨}{(س-٧)(\sqrt[٣]{(س+١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤)}$ ، س ← ٧

$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$ ، س ← ٨

الحل:

نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س-٨}{٣}}$ ، س ← ٨

نهـا $\frac{٣(\sqrt[٣]{س} - ٢)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}{(س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$ ، س ← ٨

نهـا $\frac{٣(س-٨)}{(س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$ ، س ← ٨

$= \frac{٣}{٤+٤+٤} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

* توحيد المقامات في الكسور

مثال

جد نهـا $\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{س-٣}}{س}$ ، س ← ٠

Esam Shikh Master Math 0796300625	رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (النهايات والاتصال) الدرس (نهاية اقترانات كسرية)

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{(1)(-٤+س)+(1)(٤)}{(٤)(-٤+س)} \times \frac{1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-٤+س+٤}{(٤)(-٤+س)} \times \frac{1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س}{(٤)(-٤+س)} \times \frac{1}{س}$$

$$\frac{1}{(٤)(-٤)} = \frac{-1}{١٦}$$

مثال

جد $\text{نهـا}_{س\to 0} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{1}{س-٢٥}\right)$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{(٥)(٥)-(٥)(س)}{(س)(٥)} \times \frac{1}{(س-٥)(س+٥)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{٢٥-٥س}{٥س} \times \frac{1}{(س-٥)(س+٥)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-١(٥-س)}{٥س} \times \frac{1}{(س-٥)(س+٥)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-١}{٥س} \times \frac{1}{(س+٥)}$$

$$\frac{-١}{١٠ \times ٥} = \frac{-١}{٥٠} = \frac{-١}{١٢٥}$$

مثال

جد $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{(٣+س)^{٢}} - \frac{1}{٩}\right)$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{(1)(٩)-(1)(٣+س)^{٢}}{(٩)(٣+س)^{٢}} \times \frac{1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{٩-(٩+٦س+س^{٢})}{(٣+س)^{٢}(٩)} \times \frac{1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-٦س-س^{٢}}{(٣+س)^{٢}(٩)} \times \frac{1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س(-٦-س)}{(٣+س)^{٢}(٩)} \times \frac{1}{س}$$

$$= \frac{-٦}{(٩)(٩)} = \frac{-١}{٩}$$

اضافي على المراجعة

مثال

جد $\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦}$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦} \times \frac{\sqrt{س+٣٤}+٦}{\sqrt{س+٣٤}+٦}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{س+٣٤-٣٦}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{(س-٢)}$$

$$= ٦+٦ = ١٢$$

Esam Shikh Master Math 0796300625	رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (النهايات والاتصال) الدرس (نهاية اقترانات كسرية)

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt{ح+1} - \sqrt{1-ح}}{ح}$ ، ح ← ٠

الحل:

نهـا $\frac{\sqrt{ح+1} - \sqrt{1-ح}}{ح} \times \frac{\sqrt{ح+1} + \sqrt{1-ح}}{\sqrt{ح+1} + \sqrt{1-ح}}$ ، ح ← ٠

نهـا $\frac{ح+1 - (1-ح)}{ح(\sqrt{ح+1} + \sqrt{1-ح})}$ ، ح ← ٠

نهـا $\frac{٢ \not{ح}}{\not{ح}(\sqrt{ح+1} + \sqrt{1-ح})}$ ، ح ← ٠

$= \frac{٢}{\sqrt{١+١} + \sqrt{١-٠}} = \frac{٢}{٢} = ١$

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt{١+ح} - \sqrt{١-ح}}{ح}$ ، ح ← ٠

الحل:

نهـا $\frac{\sqrt{١+ح} - \sqrt{١-ح}}{ح} \times \frac{\sqrt{١+ح} + \sqrt{١-ح}}{\sqrt{١+ح} + \sqrt{١-ح}}$ ، ح ← ٠

نهـا $\frac{١+ح - (١-ح)}{ح(\sqrt{١+ح} + \sqrt{١-ح})}$ ، ح ← ٠

نهـا $\frac{٢ \not{ح}}{\not{ح}(\sqrt{١+ح} + \sqrt{١-ح})}$ ، ح ← ٠

$= \frac{٢}{\sqrt{١+١} + \sqrt{١-٠}} = \frac{٢}{٢} = ١$

* الطرح والإضافة :

مثال

جد نهـا $\frac{٦ - س\sqrt{ح+١}}{٩ - ٣س}$ ، ح ← ٣

الحل:

نهـا $\frac{٦ - ٣س + ٣س - س\sqrt{ح+١}}{٩ - ٣س}$ ، ح ← ٣

نهـا $\frac{٦ - ٣س}{٩ - ٣س}$ ، ح ← ٣ + نهـا $\frac{٣س - س\sqrt{ح+١}}{٩ - ٣س}$ ، ح ← ٣

نهـا $\frac{٣(٢ - \sqrt{ح+١})}{٣(٣ - ح)}$ ، ح ← ٣ + نهـا $\frac{س(٢ - \sqrt{ح+١})}{٣(٣ - ح)}$ ، ح ← ٣

$\frac{٢}{٣}$ + نهـا $\frac{س(٢ - \sqrt{ح+١})(٢ + \sqrt{ح+١})}{٣(٣ - ح)(٢ + \sqrt{ح+١})}$ ، ح ← ٣

$\frac{٢}{٣}$ + نهـا $\frac{س(٤ - (ح+١))}{٣(٣ - ح)(٢ + \sqrt{ح+١})}$ ، ح ← ٣

$\frac{٢}{٣}$ + نهـا $\frac{س(٣ - ح)}{٣(٣ - ح)(٢ + \sqrt{ح+١})}$ ، ح ← ٣

$\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{(٢+٢)٣}$

$\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٨ + ٣}{١٢} = \frac{١١}{١٢}$

* نهاية الجذور مع الكسور

مثال

جد نهـا $\frac{\sqrt{ح - ٢٥}}{\sqrt{س - ٥}}$ ، ح ← ٢٥ ، س ← ٥

الحل:

$س^2 - 25 = 0$

$س^2 = 25$

$س = \pm 5$

+++ | ----- | +++
-5 $\quad$ 5

$س - 5 = 0$ $\quad$ +++ | ---

$س = 5$

كلا الجذرين يقع من يمين 5

بذا يوجب

$\Leftarrow$

$\lim_{س \to 5^+} \frac{(س-5)(س+5)}{(س-5)}$

$\lim_{س \to 5^+} س + 5 = 10$

لكن اذا كان أحدهما أي الجذرين أو كلاهما غير معرف عند العدد من الجهة المطلوبة فتكون النهاية غير موجودة.

مثال

جد $\lim_{س \to -5^+} \frac{س^2 - 25}{س - 5}$

الحل

بما $\sqrt{س^2 - 25}$ غير موجودة

$س \to -5^+$ $\quad$ $\sqrt{س - 5}$

بذا $\sqrt{س - 5}$ غير معرف من

يسار 5

$\Leftarrow$ بما $\lim_{س \to 5^+} \frac{\sqrt{س^2 - 25}}{\sqrt{س - 5}}$ غير موجودة

مثال

جد $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س^2 - 4}}{\sqrt{س - 2}}$

الحل:

$س^2 - 4 = 0$

$س^2 = 4$

$س = \pm 2$

+++ | --- | +++
-2 $\quad$ 2

$س - 2 = 0$ $\quad$ --- | +++

$س = 2$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{(س-2)(س+2)}{(س-2)}$

$= \sqrt{4} = 2$

مثال جد $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س^2 - 4}}{\sqrt{س - 2}}$

الحل

غير موجودة بذا $\sqrt{س - 2}$ غير معرف من اليسار

مثال

جد $\lim_{س \to 1} \frac{س^٤ - ١}{س - ١}$

الحل:

$س^٤ - ١ = ٠$

$(س^٢ - ١)(س^٢ + ١) = ٠$

$(س - ١)(س + ١)(س^٢ + ١) = ٠$

$س = \pm ١$

$س - ١ = ٠$

$س = ١$

$\lim_{س \to 1} \frac{(س - ١)(س + ١)(س^٢ + ١)}{(س - ١)} = ١ + ١ \times ٢ = ٤$

مثال

جد $\lim_{س \to ٧^+} \frac{س^٢ - ٤٩}{|س - ٧|}$

الحل:

$س^٢ - ٤٩ = ٠$

$(س - ٧)(س + ٧) = ٠$

$س = \pm ٧$

$س - ٧ = ٠$

$س = ٧$

$\lim_{س \to ٧^+} \frac{(س - ٧)(س + ٧)}{(س - ٧)} = ١٤$

* ايجاد النهاية للمطلق $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال

جد $\lim_{س \to -٢^+} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$

الحل:

$س + ٢ = ٠$

$س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$

$\lim_{س \to -٢^-} \frac{-(س + ٢)}{س + ٢} = -١$

مثال

جد $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س + ١| - ٥}{س^٣ + ٨}$

الحل:

$٣ \times -٢ + ١ = -٥$

$\lim_{س \to -٢} \frac{-(-٣س - ١) - ٥}{س^٣ + ٨}$

$\lim_{س \to -٢} \frac{٣س - ٤}{س^٣ + ٨}$

$\lim_{س \to -٢} \frac{٣(س + ٢)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}$

$= \frac{٣}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{٣}{١٢}$

مثال

جد $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٤س + ٤}{س + ٢}$

الحل:

$\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س + ٢)}{س + ٢}$

$\lim_{س \to -٢} (س + ٢)$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$

$س^2+س=0$ ، $س(س+1)=0$ ، $س=0$ ، $س=-1$

$س$	$-\infty$	-1	0	$\infty+$
$س$	$-$	$-$	$+$	$+$
$س+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{س}{س+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	$+$

$\lim_{س\to-1^+} \frac{س}{س+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ ، $\lim_{س\to-1^-} \frac{س}{س+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{س\to-1} \frac{س}{س+1}$ غير موجودة

مثال

جد $\lim_{س\to5} \frac{س^2-10س+25}{س-5}$

الحل:

$\lim_{س\to5} \frac{(س-5)^2}{س-5}$

$\lim_{س\to5} |س-5|$

$س-5=0$ ، $س=5$

$س$	$5-$	5	$5+$
$س-5$	$-$	0	$+$

$\lim_{س\to5^+} \frac{س-5}{س-5} = \frac{0^+}{0^+} = 1$

$\lim_{س\to5^-} \frac{-(س-5)}{س-5} = \frac{0^-}{0^-} = -1$

$\lim_{س\to5} \frac{|س-5|}{س-5}$ غير موجودة

مثال إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{3-س}{\sqrt{س+1}-2} & س<3 \\ جـ س-4 & س\geq3 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س\to3} ق(س)$ موجودة جد قيمة الثابت جـ .

الحل:

$3-س=0$ ، $س=3$

$س$	$3-$	3	$3+$
$3-س$	$+$	0	$-$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{3-س}{\sqrt{س+1}-2} & س<3 \\ جـ س-4 & س\geq3 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} -1 & س<3 \\ جـ س-4 & س\geq3 \end{cases}$

$\lim_{س\to3} ق(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$\lim_{س\to3^+} ق(س) = \lim_{س\to3^-} ق(س)$

$-1 = جـ(3)-4$

$3جـ = 9$

$جـ = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

* إيجاد نهاية أكبر عدد صحيح صفر/صفر

مثال

جد $\lim_{س\to2.5} \frac{2س-[2س]}{4س^2-25}$

الحل:

$2س=0$ ، $ل = \frac{1}{12.1} = \frac{1}{12}$

$س=0$

٢ ، ٥ ٢ ٣

٤ ٢ < س < ٢,٥

٥ ٢,٥ < س < ٣

نهـا (س٢ - ٤) / (٤ س - ٢٥) = ١ / صفر = غير موجودة
س ← ٢,٥

نهـا (س - ٥) / (٤ س٢ - ٢٥)
س ← ٢,٥+

= نهـا (س - ٥) / (٢س - ٥)(٢س + ٥)
س ← ٢,٥+

= ١ / ١٠

∴ نهـا س / [٢س] غير موجودة
س ← ٢,٥ (٤ س٢ - ٢٥)

ملاحظه

إذا كان نهـا ق(س) / هـ(س) = جـ
س ← م

وكان هـ(م) = صفر فإن

① نهـا ق(س) = صفر
س ← م

② نهـا (ناتج القسمه) = جـ
س ← م

مثال

اذا كانت نهـا (م س٢ + ٢ب س + ٢) / (س - ١) = ١
س ← ١

فجد قيمة كل من الثابتين م ، ب

الحل :

نهـا م س٢ + ٢ب س + ٢ = صفر
س ← ١

م + ٢ب + ٢ = صفر

م + ٢ب = -٢ ..... (١)

س	العدد
م	٢ب
٢	
① ٠	م + ٢ب
م	م + ٢ب
صفر	

نهـا م س + م + ٢ب = ١
س ← ١

م + م + ٢ب = ١

٢م + ٢ب = ١ ..... (٢)

م + ٢ب = -٢

-٢م + ٢ب = ١

-٣م = -٣ ← م = ٣

م + ٢ب = -٢ ←

٣ + ٢ب = -٢

٢ب = -٥ ← ب = -٥/٢

مثال

إذا كان هـ كثير حدود وكانت

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{هـ(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} (هـ(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$

فجد قيمة الثابت ب .

الحل :

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} (هـ(س) + ٥) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) = -٥$

• $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} (هـ(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) - \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ٢س + \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ٣ب = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow ب = ٦$

مثال

إذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \frac{هـ(س) - ٦}{س - ١} = ٨$

وكانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{هـ(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب .

الحل :

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{هـ(س) - ٦} + \text{نهـا}_{س \leftarrow ١} ب = \frac{٣}{٢}$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ١)}{هـ(س) - ٦} \times \text{نهـا}_{س \leftarrow ١} (س + ٣) + \text{نهـا}_{س \leftarrow ١} ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٨} \times ٤ + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow ب = ١$

مثال

إذا كان هـ كثير حدود وكانت

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = ٤$

و $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣جـ) = ٢$

فجد قيمة الثابت جـ .

مثال

إذا كان $\text{مدى}(ق) = \frac{س^2 + ٥}{س^2 - ٥س + ٦}$

جد قيم م التي يكون نهـا مدى غير موجودة.
م ← ٣

الحل:

$س^2 - ٥س + ٦ = صفر$

$(س - ٣)(س - ٢) = صفر$

$س = ٣ ، ٢$

$م \in \{٣ ، ٢\}$ ←

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات والاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

الأسئلة الوزارية :

٢٠٠٨ شتوي

نهـا $\frac{٦س^{٤}+١٨س^{٢}}{٢س^{٢}-٣س^{٣}}$ = ؟
س ← ٠

أ) -٦ ب) -٣ ج) ٣ د) ٩

٢٠٠٨ شتوي

إذا كانت نهـا $\frac{أس^{٢}+٢ب س+٢}{س-١}$ = ١
س ← ١

فجد قيمة كل من أ، ب .

الحل :

نهـا $(أس^{٢}+٢ب س+٢)$ = صفر
س ← ١

أ + ٢ب + ٢ = صفر

← أ + ٢ب = -٢ ـــــ ①

	$س^{٢}$	س	العدد
①	أ	٢ب	-٢
	أ	أ+٢ب	صفر

← نهـا $(أس+(أ+٢ب))$ = ١
س ← ١

أ + ٢ب + أ = ١

٢أ + ٢ب = ١ ـــــ ②

أ + ٢ب = -٢

$\frac{٢أ+٢ب=١}{-أ=-٣}$

← أ = ٣ ← ب = $\frac{-٥}{٢}$

٢٠٠٩ شتوي

إذا كانت نهـا $\frac{ق(س)-٦}{س-١}$ = ٨
س ← ١

وكانت نهـا $\left(\frac{س^{٢}+٢س-٣}{ق(س)-٦}+ب\right)$ = $\frac{٣}{٢}$
س ← ١

فجد قيمة ب ؟

الحل :

نهـا ق(س) - ٦ = ٠ ← نهـا ق(س) = ٦
س ← ١ س ← ١

نهـا $\left(\frac{(س+٣)(س-١)}{ق(س)-٦}+ب\right)$ = $\frac{٣}{٢}$
س ← ١

نهـا $(س+٣)$ × نهـا $\frac{س-١}{ق(س)-٦}$ + ب = $\frac{٣}{٢}$
س ← ١ س ← ١

٤ × $\frac{١}{٨}$ + ب = $\frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ + ب = $\frac{٣}{٢}$

← ب = $\frac{٣}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

٢٠٠٩ صيفي

إذا كان هـ كثيرحدود وكانت

نهـا $\frac{هـ(س)+٥}{س}$ = $\frac{١}{٢}$
س ← ٠

وكانت نهـا $\left(\frac{هـ(س)}{س}-٥+٣ب\right)$ = ٢
س ← ٠

فجد قيمة الثابت ب ؟.
س ← ٠

الحل :

نهـا هـ(س) + ٥ = ٠ ← نهـا هـ(س) = -٥
س ← ٠ س ← ٠

← نهـا $\left(\frac{هـ(س)}{س}-٥+٣ب\right)$ = ٢
س ← ٠

← -٥ - ٥ + ٣ب = ٢

← ٣ب = ١٢

← ب = ٤

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات والاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

٣.١٠ شتوي

إذا كان ف ر اقتران كثير حدود وكانت

$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{ف ر(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ وكانت

$\text{نها}_{س \to ٣} (ف ر(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$

فجد قيمة ب ؟.

الحل:

$\text{نها}_{س \to ٣} ف ر(س) + ٥ = ٠ \Leftarrow \text{نها}_{س \to ٣} ف ر(س) = -٥$

$\text{نها}_{س \to ٣} (ف ر(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ١٨ \Leftarrow ب = ٦$

٣.١١ شتوي

جد $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{\sqrt{س+١}} - ١ \right)$

الحل:

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{\sqrt{س+١}} - \frac{١}{١}}{س}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}} \times \frac{١}{س}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{س+١}}{س\sqrt{س+١}} \times \frac{١ + \sqrt{س+١}}{١ + \sqrt{س+١}}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١ - (س+١)}{(س\sqrt{س+١})(١ + \sqrt{س+١})}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{-س}{(س\sqrt{س+١})(١ + \sqrt{س+١})}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{-١}{(\sqrt{س+١})(١ + \sqrt{س+١})} = \frac{-١}{١(١+١)} = -\frac{١}{٢}$

٣.١١ صيغي

إذا كانت $\text{نها}_{س \to ١} \frac{أ س^٢ - ب س - ٥}{س + ١} = -٧$

فجد قيمة أ ، ب ؟

الحل:

$\text{نها}_{س \to ١} (أ س^٢ - ب س - ٥) = ٠$

$أ + ب - ٥ =$ صفر

$\Leftarrow أ + ب = ٥$ ..... ①

$س^٢$	$س$	العدد
أ	-ب	-٥
٠	-أ	٥
أ	-أ-ب	صفر

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to -١} (أ س + (-أ-ب)) = -٧$

$-أ - أ - ب = -٧$

$-٢أ - ب = -٧$ ..... ②

$أ + ب = ٥$

$-٢أ - ب = -٧$ (+)

$-أ = -٢ \Leftarrow أ = ٢$

$أ + ب = ٥$

$٢ + ب = ٥ \Leftarrow ب = ٣$

٣.١٢ شتوي

جد قيمة $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ١ - \sqrt{س+١}}$

الحل:

$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{(س-١) - \sqrt{س+١}} \times \frac{(س-١) + \sqrt{س+١}}{(س-١) + \sqrt{س+١}}$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات والاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٣س)(\sqrt{س+١} + (س-١))}{(س-١)^٢ - (س+١)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٣س)(\sqrt{س+١} + (س-١))}{س^٢ - ٣س - س + ١}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٣س)(\sqrt{س+١} + (س-١))}{س^٢ - ٣س}$$

$$= \sqrt{٤} + (٣-١) = ٢ + ٢ = ٤$$

٣.١٣ شتوي

إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ل(س) - ٤}{س} = ٨$

وكان $ل(س)$ اقتران كثير حدود فإن

$\text{نهـا}_{س \to ٠} (ل(س) + ١٠) =$

أ) ٤ ب) ١٤ ج) ١٨ د) ٦

٣.١٣ صيفي

جد قيمة $\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{\frac{٣+س}{٣س}}{(س-١)(س+٣)}$$

$$= \frac{١}{-٩ \times ٤} = \frac{١}{٣٦}$$

٣.١٣ صيفي

إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ + (م+١٣)س + م}{س - ٣}$

حيث $س \neq ٣$ جد قيمة $م$ التي تجعل

$\text{نهـا}_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة.

أ) ٣٠ ب) -٣٠ ج) -١٣ د) -١٠

٣.١٣ شتوي

جد $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س} \left(\frac{١}{٣(س+٢)} - \frac{١}{٨} \right)}{س}$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٣(س+٢)} - \frac{١}{٨}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٨ - ٣(س+٢)}{٨ \times ٣(س+٢)} \times \frac{١}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٨ - (٨ + ١٢س + ٦س^٢ + س^٣)}{٨س(س+٢)^٣}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{-١٢س - ٦س^٢ - س^٣}{٨س(س+٢)^٣}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ل(-١٢ - ٦س - س^٢)}{٨ ل(س+٢)^٣}$$

$$= \frac{-١٢ - ٠ - ٠}{٨ \times ٨} = \frac{-١٢}{٦٤}$$

٣.١٣ شتوي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{|س-١٣|} & س < ٣ \\ ج س^٢ - ٤ & س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\text{نهـا}_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة، فما قيمة ج؟

الحل:

$ق(س) = \begin{cases} -١ & س < ٣ \\ ج س^٢ - ٤ & س > ٣ \end{cases}$

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات والاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س→٣+ س→٣-

-١ = ٩جـ - ٤

٣ = ٩جـ ⇐ جـ = ٣/٩ = ١/٣

٣.١٣ صيفي

نهـا (√(س - ٩)) / (س - ٣) تساوي
س→٣

■ صفر ■ √٦ ■ ٦ ● غير موجودة

٣.١٣ صيفي

نهـا ((٢٥)^س - ٥^س) / (٥^س - ١)
س→٠

● -١ ■ صفر ■ ١ ■ غير موجودة

٣.١٣ صيفي (٦ علامات)

جد نهـا (√(س+٣) - √(٤س+١)) / (س - ٢)
س→٢

الحل:

نهـا [(√(س+٣) - √(٤س+١)) / (س - ٢)] × [(√(س+٣) + √(٤س+١)) / (√(س+٣) + √(٤س+١))]
س→٢

نهـا (س+٣ - (٤س+١)) / ((س-٢)(√(س+٣) + √(٤س+١)))
س→٢

نهـا (-٣س+٣) / ((س-٢)(√(س+٣) + √(٤س+١)))
س→٢

نهـا (-٣(س-١)) / ((س-٢)(√(س+٣) + √(٤س+١)))
س→٢

نهـا (-٣) / (√(س+٣) + √(٤س+١))
س→٢

-٣/٤

نهـا (س - ١) / (√(س+٣) - ٢)
س→١

الحل:

نهـا [(س - ١) / (√(س+٣) - ٢)] × [(√(س+٣) + ٢) / (√(س+٣) + ٢)]
س→١

نهـا ((س-١)(√(س+٣) + ٢)) / (س+٣ - ٤)
س→١

نهـا ((س-١)(√(س+٣) + ٢)) / (س-١)
س→١

نهـا (√(س+٣) + ٢)
س→١

٤

٣.١٤ شتوي (٣ علامات)

جد نهـا (√(س^٣) - ٢) / (س^(٣/٢) - ٤)
س→٨

الحل:

نهـا [(√(س^٣) - ٢) / (س^(٣/٢) - ٤)] × [(√(س^٣) + ٢) / (√(س^٣) + ٢)]
س→٨

نهـا (س^٣ - ٤) / ((س^(٣/٢) - ٤)(√(س^٣) + ٢))
س→٨

نهـا ((س^(٣/٢) - ٤)(س^(٣/٢) + ٤)) / ((س^(٣/٢) - ٤)(√(س^٣) + ٢))
س→٨

نهـا (س^(٣/٢) + ٤) / (√(س^٣) + ٢)
س→٨

٨/٤ = ٢

٣.١٤ شتوي (٤ علامات)

جد نهـا (|٣س+١| - ٥) / (س^٣ + ٨)
س→-٢

الحل:

نهـا [(|٣س+١| - ٥) / (س^٣ + ٨)] × [(|٣س+١| + ٥) / (|٣س+١| + ٥)]
س→-٢

نهـا (|٣س+١|^٢ - ٢٥) / ((س^٣ + ٨)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

نهـا ((٣س+١)^٢ - ٢٥) / ((س^٣ + ٨)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

نهـا ((٣س+١ - ٥)(٣س+١ + ٥)) / ((س^٣ + ٨)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

نهـا ((٣س-٤)(٣س+٦)) / ((س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

نهـا ((٣س-٤)(٣(س+٢))) / ((س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

نهـا (٣(٣س-٤)) / ((س^٢ - ٢س + ٤)(|٣س+١| + ٥))
س→-٢

-٢١/١٤

٣.١٤ شتوي (٥ علامات)

إذا كان ق(س) = { ٢س^٢ + ١/٢ [س/٣] ، ١ ≤ س ≤ ٣
{ (|س-١٣| - ٩) / (س^٢ - ٩) ، ٣ < س < ٤

نهـا ق(س) = نهـا (٢س^٢ + ١/٢ [س/٣])
س→٣+ س→٣+

= ٢(٣)^٢ + ١/٢ [٣/٣]

= ١٨ + ١/٢ (١)

= ١٨ ١/٢

نهـا ق(س) = نهـا (|س-١٣| - ٩) / (س^٢ - ٩)
س→٣- س→٣-

نهـا (-(س-١٣) - ٩) / ((س-٣)(س+٣))
س→٣-

نهـا (-س+١٣ - ٩) / ((س-٣)(س+٣))
س→٣-

نهـا (-س+٤) / ((س-٣)(س+٣))
س→٣-

نهـا (-(س-٤)) / ((س-٣)(س+٣))
س→٣-

-١/٦ = -١/(٩+٩) = -١/(√٩ + √٩)

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات و الاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

فجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$.

الحل :

٣.١٤ صيغي (٥ علامات)

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣ - ١٢|س|}}{٣س^٢ - ٥س - ١٢}$

الحل :

٣.١٥ مشتوي (٦ علامات)

جد $\lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{س + ٣ \sqrt{س^٢ - ٩}}$

الحل :

٣.١٥ صيغي (٦ علامات)

جد $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٤ + ٢٧}{س^٢ - ٩} \right) \left(\frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$

الحل :

التخصص(العلمي) الوحدة(١) (النهايات والاتصال) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٣) (نهاية اقترانات كسرية) ماجستير رياضيات

٣.١٦ شتوي **(٦ علامات)**

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٦}{س^{٣} - ٩س}$

الحل:

٣.١٦ صيفي **(٦ علامات)**

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٩-س} - ٦}{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢٧}$

الحل:

٢٠١٧ شتوي (٧ علامات)

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٤س - ١٢}{س^٢ - ٤}$

الحل:

٢٠١٧ صيفي (٦ علامات)

جد $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢ - ٤)^٤}{(س^٢ - ٢س + ١)^٢}$

الحل: