⑥ $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س+١} - ٣}{٣ - \sqrt{س+٢}} = \div$ ضرب بالمرافقين تربيعي وتكعيبي

$\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س+١} - ٣}{٣ - \sqrt{س+٢}} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤} \times \dfrac{٣ + \sqrt{س+٢}}{٣ + \sqrt{س+٢}}$

$\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{س+١-٨}{٩-س-٢} \times \underset{س \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{٣ + \sqrt{س+٢}}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$

$\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{س - ٧}{٧ - س} \times \dfrac{٣+٣}{٤+٤+٤}$

$-١ \times \dfrac{٦}{١٢} = \dfrac{-١}{٢}$

⑦ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣ - \sqrt[٣]{س+٢٥}}{\sqrt{س+١٤} - ٤}$

ج : $\dfrac{-٨}{٢٧}$

⑧ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٥ + \sqrt{س+٨}} - ٢}{س - ١} = \div$ مرافقه تكعيبي ومرافق تربيعي

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٥ + \sqrt{س+٨}} - ٢}{س - ١} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{٥+\sqrt{س+٨}})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٥+\sqrt{س+٨}} + ٤}{(\sqrt[٣]{٥+\sqrt{س+٨}})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٥+\sqrt{س+٨}} + ٤}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٥ + \sqrt{س+٨} - ٨}{س - ١} \times \dfrac{١}{٤+٤+٤}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٨} - ٣}{س - ١} \times \dfrac{١}{١٢} \times \dfrac{\sqrt{س+٨} + ٣}{\sqrt{س+٨} + ٣}$

$\dfrac{١}{١٢} \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س + \cancel{٨ - ٩}}{\cancel{س - ١}} \times \dfrac{١}{٣+٣}$

$\dfrac{١}{١٢} \times \dfrac{١}{٦} = \dfrac{١}{٧٢}$

⑨ $\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} - ٢}{س - ٨}$

ج : $\dfrac{١}{٤٨}$

⑩ $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٤} + \sqrt{٢س} - ٢}{\sqrt{س - ٢}}$ "توزع المقام"

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٤}}{\sqrt{س-٢}} + \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢س} - ٢}{\sqrt{س-٢}}$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(س-٢)(س+٢)}}{\sqrt{س-٢}} + \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢س} - ٢}{\sqrt{س-٢}} \times \dfrac{\sqrt{٢س} + ٢}{\sqrt{٢س} + ٢}$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\sqrt{س-٢}} \times \sqrt{س+٢}}{\cancel{\sqrt{س-٢}}} + \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{٢س - ٤}{\sqrt{س-٢}} \times \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{٢س} + ٢}$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{س+٢} + \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{٢(س-٢)}{\sqrt{س-٢}} \times \dfrac{١}{٤}$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{س+٢} + ٢ \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س-٢} \times \cancel{\sqrt{س-٢}}}{\cancel{\sqrt{س-٢}}} \times \dfrac{١}{٤}$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{س+٢} + ٢ \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{س-٢} \times \dfrac{١}{٤}$

$\sqrt{٢+٢} + ٢\sqrt{\text{صفر}} \times \dfrac{١}{٤}$

$\sqrt{٤} + \text{صفر} = ٢$

٥ الاستبدال :-

يستخدم الاستبدال عند يكون ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وأن يحتوي البسط أو المقام على جذور تربيعية أو تكعيبية أو مقادير مرفوعة لقوى شرط أن يكون تحت الجذور أو ما داخل الأقواس مساوياً لقوى الأخرى.

الامثلة :- جد قيمة كل مما يلي.

① $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

بفرض أن $ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^٢ = س$

عندما $س \to ٤$ فإن $ص \to ٢$

$\underset{ص\to ٢}{\text{نها}} \frac{ص^٢ - ٤}{ص - ٢} = \underset{ص\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(ص - ٢)}(ص + ٢)}{\cancel{ص - ٢}}$

$\underset{ص\to ٢}{\text{نها}} (ص + ٢) = ٤$

② $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س - ١}$

$\boxed{ج = \frac{١}{١٢}}$

③ $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(س+١)^٣ - (س+١)^٢ - ٤}{س - ١}$

بفرض أن $ص = س + ١ \leftarrow س = ص - ١$

عند $س \to ١$ فإن $ص \to ٢$

$\underset{ص\to ٢}{\text{نها}} \frac{ص^٣ - ص^٢ - ٤}{ص - ١ - ١} = \underset{ص\to ٢}{\text{نها}} \frac{ص^٣ - ص^٢ - ٤}{ص - ٢}$

$= \underset{ص\to ٢}{\text{نها}} \frac{(ص - ٢)(ص^٢ + ص + ٢)}{(ص - ٢)}$

ص³	ص²	ص	ثابتة	
١	−١	٠	−٤	
	٢	٢	٤	٢
١	١	٢	٠	

$ص^٢ + ص + ٢$

$\underset{ص\to ٢}{\text{نها}} ص^٢ + ص + ٢$

$٤ + ٢ + ٢ = ٨$

④ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤٩^س - ٧^س}{١ - ٧^س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{(٧^س)^٢ - ٧^س}{١ - ٧^س}$

بفرض أن $ص = ٧^س$

عندما $س \to ٠$ فإن $ص \to ١$

$\underset{ص\to ١}{\text{نها}} \frac{ص^٢ - ص}{١ - ص} = \underset{ص\to ١}{\text{نها}} \frac{ص(ص - ١)}{١ - ص} = \underset{ص\to ١}{\text{نها}} -ص = -١$

⑤ $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{١٦^س - ٣\times ٤^س - ٤}{٤^س - ٤}$

$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(٤^س)^٢ - ٣\times ٤^س - ٤}{٤^س - ٤}$

بفرض أن $ص = ٤^س$

عندما $س \to ١$ فإن $ص \to ٤$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \frac{ص^٢ - ٣ص - ٤}{ص - ٤}$

$\underset{ص\to ٤}{\text{نها}} \frac{(ص - ٤)(ص + ١)}{ص - ٤)}$

$= \underset{ص\to ٤}{\text{نها}} ص + ١$

$= ٤ + ١$

$= ٥$

٦ الإضافة والطرح :-

يستخدم الإضافة والطرح عندما يكون ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويحتوي على احدى الحالات الآتية.

١) عند وجود أكثر من جذر في البسط مختلفة في الرتبة أو نفس الرتبة.

٢) عند وجود مقدار مكون من حاصل ضرب مقدارين مطروح منهم عدد.

أمثلة :- جد قيمة كل مما يلي :-

① $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - \sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س}-١}$

نعوض في احد الجذرين نضيف ونطرح الناتج في البسط فقط.

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢ + ٢ - \sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س}-١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢ - \sqrt{\text{س}} + ١}{\text{س}-١}$$

نوزع المقام على البسط

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢}{\text{س}-١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{-\sqrt{\text{س}} + ١}{\text{س}-١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢}{\text{س}-١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{\text{س}}}{\text{س}-١}$$ مرافق التربيعي

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢}{\text{س}-١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٣} + ٢}{\sqrt{\text{س}+٣} + ٢} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{\text{س}}}{\text{س}-١} \times \frac{١+\sqrt{\text{س}}}{١+\sqrt{\text{س}}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٣-٤}{\text{س}-١} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١-\text{س}}{\text{س}-١} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١}{١+\sqrt{\text{س}}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}-١}{\text{س}-١} \times \frac{١}{٤} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١-\text{س}}{\text{س}-١} \times \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٤} + \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٤}$$

② $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٣} - \sqrt{\text{س}-١}}{\text{س}-٥}$

ج : $\frac{-١}{٦}$

③ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} + \sqrt[٣]{٢\text{س}} - ٧}{\text{س}-٤}$

نلاحظ: قيمة $\sqrt{\text{س}^٢+٩}$ هي ٥ وقيمة $\sqrt[٣]{٢\text{س}}$ هي ٢

لذلك نضيف ونطرح ٢ وأيضاً ٥.

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} - ٥ + \cancel{٥} + \cancel{٢} - ٢ + \sqrt[٣]{٢\text{س}} - \cancel{٧}}{\text{س}-٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} - ٥ + \sqrt[٣]{٢\text{س}} - ٢}{\text{س}-٤} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} - ٥}{\text{س}-٤} + \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س}} - ٢}{\text{س}-٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} - ٥}{\text{س}-٤} \times \frac{\sqrt{\text{س}^٢+٩} + ٥}{\sqrt{\text{س}^٢+٩} + ٥} + \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س}} - ٢}{\text{س}-٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{٢\text{س}})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٢\text{س}} + ٤}{(\sqrt[٣]{٢\text{س}})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٢\text{س}} + ٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢+٩-٢٥}{\text{س}-٤} \times \frac{١}{١٠} + \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}-٨}{\text{س}-٤} \times \frac{١}{١٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{(\cancel{\text{س}-٤})(\text{س}+٤)}{\cancel{\text{س}-٤}} \times \frac{١}{١٠} + \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٢(\cancel{\text{س}-٤})}{\cancel{\text{س}-٤}} \times \frac{١}{١٢}$$

$$٨ \times \frac{١}{١٠} + ٢ \times \frac{١}{١٢} = \frac{٢٩}{٣٠}$$

④ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س+١)^٢\sqrt{س} - ٤}{س - ١}$

نعوض في كثير الحدود ، نضيف ونطرح $٤\sqrt{س}$.

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س+١)^٢\sqrt{س} - ٤ + ٤\sqrt{س} - ٤\sqrt{س}}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س+١)^٢\sqrt{س} - ٤\sqrt{س} + ٤\sqrt{س} - ٤}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س+١)^٢\sqrt{س} - ٤\sqrt{س}}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤\sqrt{س} - ٤}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}\left((س+١)^٢ - ٤\right)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤(\sqrt{س} - ١)}{س - ١}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}\left((س+١-٢)(س+١+٢)\right)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤ \times \cancel{(\sqrt{س} - ١)}}{\cancel{(\sqrt{س} - ١)}(\sqrt{س} + ١)}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}\cancel{(س-١)}(س+٣)}{\cancel{س - ١}} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤}{\sqrt{س} + ١}$

$٤ + ٢ = ٦$

⑤ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢\sqrt{س+٢} - ٨}{س - ٢}$ نضيف ونطرح $٤\sqrt{س+٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢\sqrt{س+٢} - ٨ + ٤\sqrt{س+٢} = ٤\sqrt{س+٢}}{س - ٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢\sqrt{س+٢} - ٤\sqrt{س+٢}}{س - ٢} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤\sqrt{س+٢} - ٨}{س - ٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٢}(س^٢ - ٤)}{س - ٢} + \underset{س \to}{\text{نها}} \dfrac{٤(\sqrt{س+٢} - ٢)}{س - ٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٢}\cancel{(س-٢)}(س+٢)}{\cancel{(س - ٢)}} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{(\sqrt{س+٢} - ٢)}}{\cancel{(\sqrt{س+٢} - ٢)}(٢ + \sqrt{س+٢})}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \sqrt{س+٢} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤}{٢ + \sqrt{س+٢}}$

$٢ + ١ = ٣$

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ - \sqrt{س+٢} - ٦}{س^٢ - ٤}$

نطرح ونضيف قيمة كثير الحدود وقيمة الجذر في ٢ ، ٨

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ - ٨ + \cancel{٨} - \sqrt{س+٢} - \cancel{٦} - \cancel{٨} + ٢}{س^٢ - ٤}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س+٢}}{س^٢ - ٤}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(س^٢+٢س+٤)}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt{س+٢}}{س^٢ - ٤} \times \dfrac{٢ + \sqrt{س+٢}}{٢ + \sqrt{س+٢}}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢+٢س+٤}{س+٢} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٤ - س + ٢}}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)} \times \dfrac{١}{٢ + \sqrt{س+٢}}$

$\dfrac{١٢}{٤} + \dfrac{-١}{٤} \times \dfrac{١}{٤} = \dfrac{٤٧}{٤}$

⑦ $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - \sqrt{س+٥} - ١٣}{س - ٤}$

ج : $\dfrac{٥}{٦}$

⑧ $$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}-٢}{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-\sqrt{\text{س}+٢}}$$

في حال وجود مختلفة في المقام نقسم على بسط س-٢

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢}}{\frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢}}$$ حل المقام لوحده بالاضافة والطرح

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-\sqrt{\text{س}+٢}+٢-٢}{\text{س}-٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-٢}{\text{س}-٢} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٢-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢}$$

$$\text{نها} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٦}-٢}{\text{س}-٢} \times \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[٣]{\text{س}+٦}+٤}{(\sqrt[٣]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[٣]{\text{س}+٦}+٤} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٢-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢} \times \frac{٢+\sqrt{\text{س}+٢}}{٢+\sqrt{\text{س}+٢}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}+٦-٨}}{\cancel{\text{س}-٢}} \times \frac{١}{١٢} + \frac{\cancel{٤-\text{س}-٢}}{\cancel{\text{س}-٢}} \times \frac{١}{٤}$$

$$\frac{١}{١٢} - \frac{١}{٤} = \frac{-١}{٦} \Leftarrow \frac{\text{بسط}}{\text{المقام}} = \frac{١}{\frac{-١}{٦}} = -٦$$

المجاهيل :-

① إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{أس}^٢+٢\text{س}+٣}{\text{س}+١} = ٥$ جد قيمة أ.

تعويض مباشر . لانه ناتج تعويض مقام لا يساوي صفر .

$$\frac{٤\text{أ}+٤+٣}{٣} = ٥$$

$$٤\text{أ}+٧ = ١٥$$

$$٤\text{أ} = ٨$$

$$\boxed{\text{أ} = ٢}$$

② $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}^٢+\text{أس}+٨}{\text{س}^٢-١}$ موجودة اوجد

① قيمة أ ② قيمة النهاية.

① ناتج تعويض في المقام يساوي صفر ∴ تصفير البسط والمقام

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{س}^٣-٣\text{س}^٢+\text{أس}+٨ \text{ يصفر}$$

$$١-٣+\text{أ}+٨ = \text{صفر}$$

$$٦+\text{أ} = \text{صفر} \leftarrow \boxed{\text{أ} = -٦}$$

② $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}^٢-٦\text{س}+٨}{\text{س}^٢-١}$$

	س^٣	س^٢	س	ثابت
	١	−٣	−٦	٨
$\boxed{١}$		١	−٢	−٨
	١	−٢	−٨	٠

$$\text{س}^٢-٢\text{س}-٨$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢-٢\text{س}-٨)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢-٢\text{س}-٨}{\text{س}+١}$$

$$\frac{١-٢-٨}{١+١} = \frac{-٩}{٢}$$

③ إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢\text{س}+\text{ب}}-٢}{\text{س}^٢-٩}$ موجودة جد قيمة الثابت ب

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \sqrt{٢\text{س}+\text{ب}}-٢ = \text{صفر}$$

$$\sqrt{٦+\text{ب}}-٢ = \text{صفر} \leftarrow \sqrt{٦+\text{ب}} = ٢$$

$$٦+\text{ب} = ٤ \leftarrow \text{ب} = ٤-٦ \leftarrow \boxed{\text{ب} = -٢}$$

④ إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^٣+\text{أ}}-٣}{\text{س}^٢-٤}$ موجودة جد قيمة الثابت أ .

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \sqrt[٣]{\text{س}^٣+\text{أ}}-٣ = \text{صفر}$$

$$\sqrt[٣]{٨+\text{أ}}-٣ = \text{صفر} \leftarrow \sqrt[٣]{٨+\text{أ}} = ٣$$

$$٨+\text{أ} = ٢٧$$

$$\text{أ} = ٢٧-٨$$

$$\boxed{\text{أ} = ١٩}$$

⑤ إذا كانت $\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+ب س+أ}{س-١} = ٩$ جد قيمة الثابتين أ، ب

$\underset{س\to١}{\text{نها}} (س^{٣}+ب س+أ)=\text{صفر} \Rightarrow أ+ب+١=\text{صفر}$

$$\begin{array}{c|cccc} & س^{٣} & س^{٢} & س & \text{ثابت} \\ & ١ & ٠ & ب & أ \\ \boxed{١} & & ١ & ١ & ١+ب \\ \hline & ١ & ١ & ١+ب & أ+ب+١ \end{array}$$

$\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+ب+١)}{س-١} = ٩$

$\underset{س\to١}{\text{نها}} (س^{٢}+س+ب+١) = ٩$

$١+١+ب+١=٩ \Rightarrow \boxed{ب=٦}$

$أ+ب+١=\text{صفر} \Rightarrow أ+٦+١=\text{صفر} \Rightarrow \boxed{أ=-٧}$

⑥ إذا كانت $\underset{س\to-١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+أس^{٢}+ب س+٢}{س+١} = ٥$ جد قيمة أ، ب.

$\underset{س\to-١}{\text{نها}} (س^{٣}+أس^{٢}+ب س+٢)=\text{صفر} \Rightarrow -١+أ-ب+٢=\text{صفر}$

$أ-ب+١=\text{صفر}$

$أ-ب=-١$ — ①

$$\begin{array}{c|cccc} & س^{٣} & س^{٢} & س & \text{ثابت} \\ & ١ & أ & ب & ٢ \\ \boxed{-١} & & -١ & ١-أ & أ-ب-١ \\ \hline & ١ & أ-١ & ب-أ+١ & أ-ب+١ \end{array}$$

$\underset{س\to-١}{\text{نها}} \frac{(س+١)(س^{٢}+(أ-١)س+ب-أ+١)}{س+١} = ٥$

$\underset{س\to-١}{\text{نها}} (س^{٢}+(أ-١)س+ب-أ+١) = ٥$

$١+(أ-١)\times-١+ب-أ+١=٥$

$-أ+١+١-أ+ب+١=٥$

$-٢أ+ب+٣=٥ \Rightarrow -٢أ+ب=٢$ — ②

① + ②

$أ-ب=-١$

$-٢أ+ب=٢$ +

$-أ=١$

$\boxed{أ=-١}$

$أ-ب=-١$

$-١-ب=-١$

$-ب=-١+١ \Rightarrow \boxed{ب=\text{صفر}}$

⑦ إذا كانت أ، ب ∈ ح وكان

$$ق(س)=\begin{cases} \frac{س^{٣}-أس+٣}{س-١} &، س>١ \\ ب س-٥ &، س<١ \end{cases}$$

جد قيمة أ، ب التي تجعل قيمة $\underset{س\to١}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة

$\underset{س\to١^{+}}{\text{نها}} \frac{س^{٣}-أس+٣}{س-١}$

$\underset{س\to١}{\text{نها}} (س^{٣}-أس+٣) \Rightarrow ١-أ+٣=\text{صفر} \Rightarrow \boxed{أ=٤}$

$\underset{س\to١^{+}}{\text{نها}} \frac{س^{٣}-٤س+٣}{س-١} = \underset{س\to١^{+}}{\text{نها}} \frac{(س-١)(س^{٢}+س-٣)}{(س-١)}$

$\underset{س\to١^{+}}{\text{نها}} (س^{٢}+س-٣) = ١+١-٣=-١$

$\underset{س\to١^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س\to١^{-}}{\text{نها}} ق(س)$

$-١ = \underset{س\to١^{-}}{\text{نها}} (ب س-٥)$

$-١=ب-٥$

$ب=-١+٥$ $\boxed{ب=٤}$

أسئلة سنوات سابقة

٢٠٠٤
ش : إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{٣س}^2 - (\text{٦} - \text{م})\text{س} - \text{٢م}}{\text{س}^2 - ٤} = -٢$ ، فما قيمة م؟

أ) −١٤ ب) صفر ج) ٢ د) −٤

	س²	س	ثابت
	٣	م − ٦	−٢م
٢		٦	٢م
	٣	م	صفر

٣س + م

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{٣س} + \text{م})}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} = -٢$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{٣س} + \text{م}}{\text{س} + ٢} = -٢ \leftarrow \frac{٦ + \text{م}}{٤} = -٢ \leftarrow ٦ + \text{م} = -٨$

$\boxed{\text{م} = -١٤}$

٢٠٠٨
ش : إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{م س}^2 + \text{٢ب} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$ فجد كل من م ، ب .
٤٧

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}$ م س² + ٢ب + ٢ = صفر ← م + ٢ب + ٢ = صفر

م + ٢ب = −٢ —①

	س²	س	ثابت
	م	٢ب	٢
①		م	م + ٢ب
	م	م + ٢ب	م + ٢ب + ٢

م س + م + ٢ب

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{م س} + \text{م} + \text{٢ب})}{(\text{س} - ١)} = ١$

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}$ م س + م + ٢ب = ١

م + م + ٢ب = ١

٢م + ٢ب = ١ —②

① − ②

م + ٢ب = −٢
−٢م + ٢ب = ١
−م = −٣

$\boxed{\text{م} = ٣}$

م + ٢ب = −٢
٣ + ٢ب = −٢
٢ب = −٥

$\boxed{\text{ب} = \frac{-٥}{٢}}$

٢٠٠٩
ش : إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٦}{\text{س} - ١} = ٨$ وكانت
٤٥
$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}^2 + \text{٢س} - ٣}{\text{ق(س)} - ٦} + \text{ب} \right) = \frac{٣}{٢}$ فما قيمة ب ؟

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}^2 + \text{٢س} - ٣}{\text{ق(س)} - ٦} + \text{ب} \right) = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + \text{٢س} - ٣}{\text{ق(س)} - ٦} + \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \text{ب}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}^2 + \text{٢س} - ٣}{\text{س} - ١}}{\frac{\text{ق(س)} - ٦}{\text{س} - ١}} = \frac{\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)}{\text{س} - ١}}{\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} - ٦}{\text{س} - ١}} = \frac{٤}{٨}$

$\frac{١}{٢} + \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

$\boxed{\text{ب} = ١}$

٢٠٠٩
ص : إذا كان ه كثير حدود وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ه(س)} + ٥}{\text{س}} \right) = \frac{١}{٢}$
٤٥
وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\text{ه(س)} - ٥ + \text{٣ب} \right) = ٢$ فجد قيمة ب .

تصغير البسط $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} (\text{ه(س)} + ٥) =$ صفر ← $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{ه(س)} = -٥$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\text{ه(س)} - ٥ + \text{٣ب} \right) = ٢$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{ه(س)} - \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} ٥ + \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{٣ب} = ٢$

−٥ − ٥ + ٣ب = ٢

٣ب = −١٢ ← $\boxed{\text{ب} = -٤}$

٢٠١٠
ش : إذا كان ق(س) اقتران كثير الحدود وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س)} + ٥}{\text{س} - ٣} = ٤$
٤٥
وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} - \text{٢س} + \text{٣ب} \right) = ٧$ فجد قيمة ب .

تصغير البسط $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} + ٥ =$ صفر ← $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} = -٥$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\text{ق(س)} - \text{٢س} + \text{٣ب} \right) = ٧$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} - \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{٢س} + \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{٣ب} = ٧$

−٥ − ٦ + ٣ب = ٧

٣ب = ١٨

$\boxed{\text{ب} = ٦}$

ش ٢٠١١ ع: جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}+١}}-١\right)$

توحيد مقامات

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}+١}}-\frac{\sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{\text{س}+١}}\right)=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\times\frac{١-\sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{\text{س}+١}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\times\frac{١-\sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{\text{س}+١}}\times\frac{١+\sqrt{\text{س}+١}}{١+\sqrt{\text{س}+١}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\times\frac{١-\text{س}-١}{\sqrt{\text{س}+١}}\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\sqrt{\text{س}+١}+١}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\cancel{\text{س}}}\times\frac{-\cancel{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+١}}\times\frac{١}{٢}=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-١}{٢}\times\frac{١}{\sqrt{\text{س}+١}}=\frac{-١}{٢}\times ١=\frac{-١}{٢}$

ص ٢٠١١ ع٧: إذا كانت $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\ \frac{\text{أ}\text{س}^٢-\text{ب}\text{س}-٥}{\text{س}+١}=-٧$ فجد قيمة كل من أ، ب

$\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\ \text{أ}\text{س}^٢-\text{ب}\text{س}-٥=\text{صفر}$ $\quad$ أ + ب − ٥ = صفر

أ + ب = ٥ — ①

	$\text{س}^٢$	س	ثابت
	أ	−ب	−٥
$\boxed{-١}$		−أ	أ+ب
	أ	−أ−ب	أ+ب−٥

أس − أ − ب

$\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س}+١)(\text{أ}\text{س}-\text{أ}-\text{ب})}{\text{س}+١}=-٧$

$\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}\ \text{أ}\text{س}-\text{أ}-\text{ب}=-٧$

−أ − أ − ب = −٧

−٢أ − ب = −٧ — ②

① + ②

أ + ب = ٥
−٢أ − ب = −٧ +

−أ = −٢

$\boxed{\text{أ}=٢}$

أ + ب = ٥

٢ + ب = ٥

ب = ٥ − ٢

ب = ٣

ش ٢٠١٢ ع٦: جد قيمة $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢-٣\text{س}}{\text{س}-\sqrt{\text{س}+١}-١}$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢-٣\text{س}}{(\text{س}-١)-\sqrt{\text{س}+١}}\times\frac{(\text{س}-١)+\sqrt{\text{س}+١}}{(\text{س}-١)+\sqrt{\text{س}+١}}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢-٣\text{س}}{(\text{س}-١)^٢-(\text{س}+١)}\times\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ (\text{س}-١)+\sqrt{\text{س}+١}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}^٢-٢\text{س}+١-\text{س}-١}\times ٤=٤\ \underset{}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}^٢-٣\text{س}}=$

$٤\ \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}(\text{س}-٣)}=٤$

ص ٢٠١٢ ع٥: جد $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{\frac{١}{\text{س}}+\frac{١}{٣}}{\text{س}^٢+٢\text{س}-٣}$

$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{\frac{١}{\text{س}}+\frac{١}{٣}}{\text{س}^٢+٢\text{س}-٣}=\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{٣+\text{س}}{٣\text{س}}\times\frac{١}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{١}{٣\text{س}}\times\frac{١}{\text{س}-١}=\frac{١}{-٩\times -٤}=\frac{١}{٣٦}$

ش ٢٠١٣ ع٦: جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{(\text{س}+٢)^٣}-\frac{١}{٨}\right)$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{٨-(\text{س}+٢)^٣}{٨(\text{س}+٢)^٣}\right)=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\times\left(٢-(\text{س}+٢)\right)\left(٤+٢(\text{س}+٢)+(\text{س}+٢)^٢\right)$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{س}}\times\frac{\left(٢-(\text{س}+٢)\right)\left(٤+٢(\text{س}+٢)+(\text{س}+٢)^٢\right)}{٨(\text{س}+٢)^٣}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{\cancel{\text{س}}}\ \frac{\left(\cancel{٢}-\cancel{\text{س}}-\cancel{٢}\right)\left(٤+٢(\text{س}+٢)+(\text{س}+٢)^٢\right)}{٨(\text{س}+٢)^٣}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\left(٤+٢(\text{س}+٢)+(\text{س}+٢)^٢\right)}{٨(\text{س}+٢)^٣}=\frac{٤+٤+٤}{٨\times ٨}=\frac{١٢}{٦٤}$

ص ٢٠١٣ ع٦: جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٣\text{س}+٣}-\sqrt{٤\text{س}+١}}{\text{س}-٢}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٣\text{س}+٣}-\sqrt{٤\text{س}+١}}{\text{س}-٢}\times\frac{\sqrt{٣\text{س}+٣}+\sqrt{٤\text{س}+١}}{\sqrt{٣\text{س}+٣}+\sqrt{٤\text{س}+١}}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{٣\text{س}+٣-(٤\text{س}+١)}{\text{س}-٢}\times\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{١}{\sqrt{٣\text{س}+٣}+\sqrt{٤\text{س}+١}}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{٣\text{س}+٣-٤\text{س}-١}{\text{س}-٢}\times\frac{١}{٦}=\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{-\text{س}+٢}{\text{س}-٢}\times\frac{١}{٦}$

$-١\times\frac{١}{٦}=\frac{-١}{٦}$

٢٠١٤ ش ع٣

ش :- $\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{س}-٢}{٤-\frac{س}{٢}}$

$\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{س}-٢}{\frac{٨-س}{٢}} \times \frac{(\sqrt[3]{س})^٢+٢\sqrt[3]{س}+٤}{(\sqrt[3]{س})^٢+٢\sqrt[3]{س}+٤}$

$٢\times\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \frac{\cancel{س-٨}}{\cancel{٨-س}} \times \frac{١}{١٢} = \frac{-٢}{١٢} = \frac{-١}{٦}$

٢٠١٤ ش ع٤

ش :- $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{٥-|٣س+١١|}{س^٣+٨}$

$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{٥-(٣س+١١)}{س^٣+٨} = \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{-٣س-٦}{س^٣+٨}$

$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{-٣\cancel{(س+٢)}}{\cancel{(س+٢)}(س^٢-٢س+٤)} = \frac{-٣}{١٢} = \frac{-١}{٤}$

٢٠١٢ ص ع٥

ص :- $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^٣}-٢س}{٢س^٢-٥س-١٢}$

$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^٣}-٢س}{٢س^٢-٥س-١٢} \times \frac{\sqrt{س^٣}+٢س}{\sqrt{س^٣}+٢س}$

$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٣-٤س^٢}{(س-٤)(٢س+٣)} \times \frac{١}{\sqrt{س^٣}+٢س}$

$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٢\cancel{(س-٤)}}{\cancel{(س-٤)}(٢س+٣)} \times \frac{١}{٨}$

$\frac{١٦}{٨\times١١} = \frac{٢}{١١}$

٢٠١٥ ش ع٦

ش :- $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{س+\sqrt{٢س^٢-٩}}$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{س+\sqrt{٢س^٢-٩}} \times \frac{س-\sqrt{٢س^٢-٩}}{س-\sqrt{٢س^٢-٩}}$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{س^٢-(٢س^٢-٩)} \times س-\sqrt{٢س^٢-٩}$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{س^٢-٢س^٢+٩} \times -٦ = \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س+٣}{٩-س^٢} \times -٦$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{-٦\cancel{(س+٣)}}{\cancel{(س+٣)}(٣-س)} = \frac{-٦}{٦} = -١$

٢٠١٥ ص ع٦

ص :- $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢+٢٧}{س^٢-٩} - \frac{س+٣}{س-٣}\right)$

نضرب بسط ومقام (س+٣)

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢+٢٧}{س^٢-٩} - \frac{(س+٣)^٢}{س^٢-٩}\right)$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢+٢٧-(س^٢+٦س+٩)}{س^٢-٩}\right)$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{س^٢}+٢٧-\cancel{س^٢}-٦س-٩}{س^٢-٩}$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{-٦س+١٨}{س^٢-٩}$

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{-٦\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}(س+٣)} = \frac{-٦}{٦} = -١$

٢٠١٦ شتوي: جد كلاً مما يلي:

ع٦

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{٦ - \text{س}\sqrt{\text{س}+١}}{٩ - ٣\text{س}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{٦ - \text{س}\sqrt{\text{س}+١}}{٩ - ٣\text{س}} \times \frac{٦ + \text{س}\sqrt{\text{س}+١}}{٦ + \text{س}\sqrt{\text{س}+١}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{٣٦ - \text{س}^٢(\text{س}+١)}{٩ - ٣\text{س}} \times \frac{١}{١٢} = \text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{-\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ٣٦}{١٢(٩ - ٣\text{س})}$$

س³	س²	س	ثابت
-١	-١	٠	٣٦
	-٣	-١٢	-٣٦
-١	-٤	-١٢	٠

③ ⓪

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}(-\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢)}{١٢ \times ٣ \cancel{(٣ - \text{س})}}$$

$$= \frac{-(-٩ - ١٢ - ١٢)}{٣٦} = \frac{٣٣}{٣٦}$$

٢٠٠٦ صيفي: جد قيمة كلاً مما يلي:

ع٦

$$\text{نها}_{\text{س} \to -٢٧} \frac{\sqrt{٩ - \text{س}} - ٦}{٣ + \sqrt[٣]{\text{س}}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to -٢٧} \frac{\sqrt{٩ - \text{س}} - ٦}{٣ + \sqrt[٣]{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{٩ - \text{س}} + ٦}{\sqrt{٩ - \text{س}} + ٦} \times \frac{٩ - ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}^٢}}{٩ - ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to -٢٧} \frac{٩ - \text{س} - ٣٦}{٢٧ + \text{س}} \times \frac{١}{١٢} \times \frac{٢٧}{١} = \text{نها} \frac{-(\text{س}+٢٧)}{\text{س}+٢٧} \times \frac{٢٧}{١٢}$$

$$= \frac{-٢٧}{١٢}$$

الدرس الرابع : نهاية الاقترانات الدائرية.

متطابقات المثلثية :-

① جا٢س + جتا٢س = ١

② ١ + ظا٢س = قا٢س

③ ١ + ظتا٢س = قتا٢س

④ جا٢س = ٢جاس جتاس

⑤ جتا٢س = ٢جتا٢س − ١
١ − ٢جا٢س
جتا٢س − جا٢س

⑥ جا٢س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

⑦ جتا٢س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

⑧ جا(أ ± ب) = جاأ جتاب ± جتاأ جاب

⑨ جتا(أ ∓ ب) = جتاأ جتاب ± جاأ جاب

⑩ ظا(أ ± ب) = $\frac{\text{ظاأ} \pm \text{ظاب}}{١ \mp \text{ظاأ ظاب}}$

⑪ جاس + جاص = ٢جا$\frac{س+ص}{٢}$ جتا$\frac{س-ص}{٢}$

⑫ جاس − جاص = ٢جتا$\frac{س+ص}{٢}$ جا$\frac{س-ص}{٢}$

⑬ جتاس + جتاص = ٢جتا$\frac{س+ص}{٢}$ جتا$\frac{س-ص}{٢}$

⑭ جتاس − جتاص = −٢جا$\frac{س+ص}{٢}$ جا$\frac{س-ص}{٢}$

⑮ جا−س = −جاس ، جتا−س = جتاس
ظا−س = − ظاس

⑯ جاس = جتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) ، جتاس = جا($\frac{\pi}{٢}$ − س)
ظاس = ظتا($\frac{\pi}{٢}$ − س)

⑰ جاس = جا(π − س) ، جاس = −جا(π + س)
جتاس = −جتا(π − س) ، جتاس = −جتا(π + س)
ظاس = −ظا(π − س) ، ظاس = ظا(π + س)

⑱ جاس = −جا(٢π − س) ، جاس = جا(س + ٢π)
جتاس = جتا(٢π − س) ، جتاس = جتا(س + ٢π)
ظاس = −ظا(٢π − س) ، ظاس = ظا(س + ٢π)

جدول بقيم الاقترانات المثلثية للزوايا المشهورة.

الزاوية بالدرجات	الزاوية بالدائري	جاس	جتاس	ظاس
صفر°	صفر	صفر	١	صفر
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١	صفر	غير معرف
١٨٠°	π	صفر	−١	صفر
٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$	−١	صفر	غير معرف
٣٦٠°	٢π	صفر	١	صفر

ملاحظة :-

① للتحويل من التقدير دائري الى درجات نعوض بدل π = ١٨٠°

$\frac{\pi}{٢}$ = ٩٠° ، $\frac{٢\pi}{٣}$ = ١٢٠° ، $\frac{٥\pi}{٤}$ = ٢٢٥°

$\frac{٣\pi}{٤}$ = ١٣٥° ، $\frac{٥\pi}{٣}$ = ٣٠٠° ، $\frac{٤\pi}{٣}$ = ٢٤٠°

② للتحويل من الدرجات الى دائري نضرب في $\frac{\pi}{١٨٠}$

٣٣٠° = $\frac{\pi}{١٨٠}$ × ٣٣٠ = $\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢١٠° = $\frac{\pi}{١٨٠}$ × ٢١٠ = $\frac{٧\pi}{٦}$

نظرية :- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{س}$ = ١ ، حيث س بالتقدير الدائري (راديان)

بشرط: ناتج تعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نتيجة :- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{س}$ = ١

برهان $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{س}$ = $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{س}$ = $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{س} \times \frac{١}{\text{جتاس}}$ = $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{جتاس}}$

$\underset{\uparrow \text{ من نظرية}}{١} \times \frac{١}{\text{جتا صفر}}$ = ١ × $\frac{١}{١}$ = ١×١ = ١

#

نتائج مهمة على النظرية:-

① $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$ ، وعكسها $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{ب\,س}{\text{جا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

② $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\leftarrow \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{ب\,س}{\text{ظا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

③ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس}{\text{جا}\,ب\,س} = \frac{أ}{ب} \leftarrow \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,ب\,س}{\text{جا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

④ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \frac{أ}{ب} \leftarrow \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,ب\,س}{\text{ظا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

⑤ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \frac{أ}{ب} \leftarrow \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,ب\,س}{\text{ظا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

⑥ $\underset{ه(س)\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,ه(س)}{ه(س)} = ١$ بشكل عام.

مثال①:- جد قيمة النهايات الآتية:-

① $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٤س}{٤س} = ١$

② $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٢س}{٣س} = \frac{٢}{٣}$

③ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٦س}{\text{جا}\,١٢س} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

④ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٥س}{\text{جا}\,١٥س} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

⑤ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٤س}{\text{ظا}\,٦س} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑥ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٧س}{\text{جا}\,٣س} = \frac{٧}{٣}$

⑦ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٢س}{\text{ظا}\,٩س} = \frac{٢}{٩}$

⑧ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\frac{س}{٤}}{س} = \frac{\frac{١}{٤}}{١} = \frac{١}{٤}$

⑨ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٨س}{٣} = \frac{\text{جا}\,٨\times ٠}{٣} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$ "تعويض مباشر"

⑩ $\underset{س\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{٣س} = \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٣}}{٣\times\frac{\pi}{٣}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\pi} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\pi}$ "تعويض مباشر"

⑪ $\underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{٢س}{\text{جتا}\,س} = \frac{٢\times\frac{\pi}{٤}}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{\pi}{\sqrt{٢}}$ "تعويض مباشر"

⑫ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥س}{\text{جتا}\,س} = \frac{٥\times ٠}{\text{جتا}\,٠} = \frac{\text{صفر}}{١} = ١$ "تعويض مباشر"

⑬ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س-٣)}{(س-٣)} = ١$

⑭ $\underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٥(س+١)}{\text{جا}(س+١)} = \frac{٥}{١}$

⑮ $\underset{س\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{٦(س-\frac{\pi}{٢})}{\text{ظا}\,٣(س-\frac{\pi}{٢})} = \frac{٦}{٣} = ٢$

⑯ $\underset{س\to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(س-\pi)}{\text{ظا}(\frac{س-\pi}{٣})} = \underset{س\to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(س-\pi)}{\text{ظا}\,\frac{١}{٣}(س-\pi)} = \frac{١}{\frac{١}{٣}} = ٣$

⑰ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س+\frac{٣\pi}{٢})}{(س+\frac{٣\pi}{٢})} = \frac{\text{جا}\,\frac{٣\pi}{٢}}{\frac{٣\pi}{٢}} = \frac{-١}{\frac{٣\pi}{٢}} = \frac{-٢}{٣\pi}$

"تعويض مباشر"

⑱ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(٢س-٦)}{٣-س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٢(س-٣)}{٣-س} = \frac{-٢}{١} = -٢$

⑲ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\overset{٢}{٨س}}{\text{ظا}\,٢س} = \frac{٨}{٢} = ٤$

⑳ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(٥س-١٠)}{\text{جا}(٣س-٦)} = \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٥(س-٢)}{\text{جا}\,٣(س-٢)} = \frac{٥}{٣}$

(21) $\underset{س\to -\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{س+\frac{\pi}{٢}}{٥}\right)}{\text{جا}(س+\frac{\pi}{٢})} = \underset{س\to -\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٥}(س+\frac{\pi}{٢})}{\text{جا}(س+\frac{\pi}{٢})} = \frac{١}{٥}$

[١] في نهاية التي تحتوي على جيب وظل فقط فإننا نفكر أولاً بالتوزيع ومن ثم التحليل ومن ثم القسمة على معامل الزاوية وأخيراً فإننا نفكر بالمتطابقات.

① $$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\left(\frac{\text{ظا}\,٥\text{س}+\text{جا}\,٧\text{س}}{٢\text{س}}\right)$$ نوزع المقام على البسط

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}\,٥\text{س}}{٢\text{س}}+\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{جا}\,٧\text{س}}{٢\text{س}}$$

$$\frac{٥}{٢}+\frac{٧}{٢}=\frac{١٢}{٢}=٦$$

② $$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}\,٨\text{س}\;\text{جا}\,٢\text{س}-\text{س}^٢}{\text{س}^٢}$$ نوزع المقام على البسط

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}\,٨\text{س}}{\text{س}}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{\text{س}}-\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢}$$

$$٨\times٢-١=١٧$$

③ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{٣\text{س}-\text{ظا}\,٧\text{س}+\text{جا}\,٦\text{س}}{٢\text{س}}$$ نوزع المقام على البسط

$\boxed{\text{ج}=١}$

④ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{جا}^٢\,٣\text{س}}{٥\text{س}^٢}$$ نحل

$$=\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{جا}\,٣\text{س}}{٥\text{س}}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{جا}\,٣\text{س}}{\text{س}}=\frac{٣}{٥}\times٣=\frac{٩}{٥}$$

⑤ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{٥\text{س}^٢+\text{ظا}^٢\,٣\text{س}}{\text{جا}^٢\,٢\text{س}}$$ نوزع ثم نحل

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{٥\text{س}^٢}{\text{جا}^٢\,٢\text{س}}+\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}^٢\,٣\text{س}}{\text{جا}^٢\,٢\text{س}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{٥\text{س}}{\text{جا}\,٢\text{س}}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{س}}{\text{جا}\,٢\text{س}}+\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}\,٣\text{س}}{\text{جا}\,٢\text{س}}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٠}\frac{\text{ظا}\,٣\text{س}}{\text{جا}\,٢\text{س}}$$

$$\frac{٥}{٢}\times\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٢}\times\frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٥}{٤}+\frac{٩}{٤}=\frac{١٤}{٤}=\frac{٧}{٢}$$

⑥ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{(\text{س}^٢-٤)}=\frac{٠}{٠}$$ نحلل المقام

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$$

$$=\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{١}{(\text{س}+٢)}=١\times\frac{١}{٤}=\frac{١}{٤}$$

⑦ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٤}\frac{(\text{س}^٣-٦٤)}{\text{جا}(\text{س}-٤)}=\frac{٠}{٠}$$ نحلل البسط

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٤}\frac{(\text{س}-٤)(\text{س}^٢+٤\text{س}+١٦)}{\text{جا}(\text{س}-٤)}=\text{نها}_{\text{س}\to ٤}\frac{(\text{س}-٤)}{\text{جا}(\text{س}-٤)}\times(\text{س}^٢+٤\text{س}+١٦)$$

$$١\times٤٨=٤٨$$

⑧ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٣}\frac{\text{جا}(\text{س}^٣-٢٧)}{\text{س}-٣}=\frac{٠}{٠}$$ نضرب ونقسم على الزاوية

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٣}\frac{\text{جا}(\text{س}^٣-٢٧)}{\text{س}-٣}\times\frac{\text{س}^٣-٢٧}{\text{س}^٣-٢٧}=\text{نها}_{\text{س}\to ٣}\frac{\text{جا}(\text{س}^٣-٢٧)}{(\text{س}^٣-٢٧)}\times\frac{\text{س}^٣-٢٧}{\text{س}-٣}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٣}\frac{\text{جا}(\text{س}^٣-٢٧)}{(\text{س}^٣-٢٧)}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٣}\frac{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)}{(\text{س}-٣)}$$

$$١\times٢٧=٢٧$$

⑨ $$\text{نها}_{\text{س}\to ١}\frac{\text{س}-١}{\text{ظا}(\text{س}^٢-١)}$$

$\boxed{\text{ج}:\frac{١}{٢}}$

⑩ $$\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{ظا}(\text{س}^٣-٨)}{(\text{س}^٢-٤)}=\frac{٠}{٠}$$ نقسم على الزاوية.

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\dfrac{\text{ظا}(\text{س}^٣-٨)}{\text{س}^٣-٨}}{\dfrac{\text{س}^٢-٤}{\text{س}^٣-٨}}=\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{ظا}(\text{س}^٣-٨)}{(\text{س}^٣-٨)}\times\text{نها}_{\text{س}\to ٢}\frac{(\text{س}^٣-٨)}{(\text{س}^٢-٤)}$$

$$١\times\text{نها}\frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}=١\times\frac{٤+٤+٤}{٢+٢}=\frac{١٢}{٤}=٣$$

(١١) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ظا(جاس)}}{س} = \dfrac{٠}{٠}$ نقسم البسط والمقام على الزاوية

$= \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{\text{ظا(جاس)}}{\text{جاس}}}{\frac{س}{\text{جاس}}} = \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ظا(جاس)}}{\text{جاس}} \times \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{س}{\text{جاس}} = ١\times١ = ١$

(١٢) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ظا٣س} + \text{جا٢س}}{\text{جا٦س} - \text{ظا٥س}}$

ج = ٥

(١٣) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{٣س + \text{جا٢س}}{\text{ظا٣س}} = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{}{\text{نها}}\dfrac{\frac{٣س + \text{جا٢س}}{س}}{\frac{\text{ظا٣س}}{س}} = \text{نها}\dfrac{\frac{٣س}{س} + \frac{\text{جا٢س}}{س}}{\frac{\text{ظا٣س}}{س}}$

$= \dfrac{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٣س}{س} + \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{جا٢س}}{س}}{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظا٣س}}{س}} = \dfrac{٣+٢}{٣} = \dfrac{٥}{٣}$

(١٤) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{س^{٢} + ٣\,\text{ظا}س^{٢}}{٥س^{٢} - \text{ظا}^{٢}٣س} = \dfrac{٠}{٠}$ بالقسمة على س²

$\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{س^{٢} + ٣\text{ظا}س^{٢}}{س^{٢}}}{\frac{٥س^{٢} - \text{ظا}^{٢}٣س}{س^{٢}}} = \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + ٣\frac{\text{ظا}س^{٢}}{س^{٢}}}{\frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{\text{ظا}^{٢}٣س}{س^{٢}}}$

$= \dfrac{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٣\text{ظا}س^{٢}}{س^{٢}}}{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}^{٢}٣س}{س^{٢}}}$

$= \dfrac{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + ٣\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}س^{٢}}{س^{٢}}}{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \underset{س\to٠}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا٣س}}{س}\right)^{٢}} = \dfrac{١+٣}{٥-(٣)^{٢}} = \dfrac{٤}{٥-٩}$

$= \dfrac{٤}{-٤} = -١$

(١٥) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{س^{٣} + \text{ظا٦س} - \text{جا٢س}}{٤س + \text{جا٨س}} = \dfrac{٠}{٠}$ القسمة على س

$= \underset{}{\text{نها}}\dfrac{\frac{س^{٣} + \text{ظا٦س} - \text{جا٢س}}{س}}{\frac{٤س + \text{جا٨س}}{س}} = \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{س^{٣}}{س} + \frac{\text{ظا٦س}}{س} - \frac{\text{جا٢س}}{س}}{\frac{٤س}{س} + \frac{\text{جا٨س}}{س}}$

$= \dfrac{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{س^{٣}}{س} + \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظا٦س}}{س} - \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{جا٢س}}{س}}{\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٤س}{س} + \underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{\text{جا٨س}}{س}} = \dfrac{\underset{س\to٠}{\text{نها}}س^{٢} + ٦-٢}{٤+٨}$

$= \dfrac{٠+٤}{١٢} = \dfrac{١}{٣}$

(١٦) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{٣س\,\text{ظا٢س}}{س^{٢} + \text{جا}^{٢}س} = \dfrac{٠}{٠}$ القسمة على س²

$\underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{٣س\,\text{ظا٢س}}{س^{٢}}}{\frac{س^{٢} + \text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}} = \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\frac{٣س}{س}\times\frac{\text{ظا٢س}}{س}}{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}} = \dfrac{٢+٣}{١+١} = \dfrac{٥}{٢}$

تذكير :- $\text{قاس} = \dfrac{١}{\text{جتاس}}$ ، $\text{قتاس} = \dfrac{١}{\text{جاس}}$

$\text{ظتاس} = \dfrac{١}{\text{ظاس}} = \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$.

(١٧) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ ٢س\ \text{قتا٤س}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ ٢س \times \dfrac{١}{\text{جا٤س}} = \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{٢س}{\text{جا٤س}} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

(١٨) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ ٦س\,(٣\,\text{ظتا٢س} - ٤\,\text{قتاس})$

ج = -١٥

(١٩) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ س^{٢}\ \text{ظتا٥س}\ \text{قتا٢س}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ س^{٢} \times \dfrac{١}{\text{ظا٥س}} \times \dfrac{١}{\text{قتا٢س}}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{س}{\text{ظا٥س}} \times \underset{س\to٠}{\text{نها}}\dfrac{س}{\text{قتا٢س}} = \dfrac{١}{٥}\times\dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{١٠}$

⑳ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٤\text{س}}{٥\text{س}^٢} = \frac{٠}{٠}$ استخدام متطابقة، ولها حل آخر

$\text{جتا}٢(٢\text{س}) = ١ - ٢\text{جا}^٢٢\text{س}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢٢\text{س})}{٥\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - ١ + ٢\text{جا}^٢٢\text{س}}{٥\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}^٢٢\text{س}}{٥\text{س}^٢} = ٢ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٢\text{س}}{٥\text{س}}\right)^٢ = \frac{٢\times٤}{٥} = \frac{٨}{٥}$

㉑ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س ظا}٣\text{س}}{١ - \text{جتا}٨\text{س}} = \frac{٠}{٠}$ باستخدام متطابقة.

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س ظا}٣\text{س}}{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢٤\text{س})} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س ظا}٣\text{س}}{١ - ١ + ٢\text{جا}^٢٤\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س ظا}٣\text{س}}{٢\text{جا}^٢٤\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{٢\text{جا}٤\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س}}{\text{جا}٤\text{س}} = \frac{١}{٢\times٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٣٢}$

㉒ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٦\text{س} - ١}{١ - \text{جتا}٢\text{س}}$

ج: −٩

㉓ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٤\text{س} - \text{جتاس}}{٢\text{س}^٢} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام متطابقة $\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}\right)$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}\left(\frac{٤\text{س}+\text{س}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٤\text{س}-\text{س}}{٢}\right)}{٢\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}\frac{٥\text{س}}{٢}\text{جا}\frac{٣\text{س}}{٢}}{٢\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}\frac{٥\text{س}}{٢}}{٢\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\frac{٣\text{س}}{٢}}{\text{س}}$

$\frac{-٢\times\frac{٥}{٢}}{٢} \times \frac{\frac{٣}{٢}}{١} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{٤}$

㉔ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س ظاس}}{\text{جتا}٥\text{س} - \text{جتا}٧\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س ظاس}}{-٢\text{جا}\left(\frac{٥\text{س}+٧\text{س}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٥\text{س}-٧\text{س}}{٢}\right)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س ظاس}}{-٢\text{جا}٦\text{س جا}-\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}}{-٢\text{جا}٦\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{\text{جا}-\text{س}} = \frac{٢}{-٢\times٦} \times \frac{١}{-١} = \frac{-١}{٦}$

٣) الحالات التي يستخدم فيها ضرب بالمرافق

أ) ١ ± دائري
ب) $١ \pm \sqrt{٢}\,\text{جتاس}$
ج) $١ \pm \sqrt{٢}\,\text{جاس}$
د) جاس ± جتاس

㉕ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{٣\text{س}^٢} = \frac{٠}{٠}$ يمكن حلها كما سبق بالمتطابقات
او يمكن حلها باستخدام المرافق

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{٣\text{س}^٢} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{٣\text{س}^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{٣\text{س}^٢} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{جتاس}} = \frac{١}{٣} \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)^٢ \times \frac{١}{١+١}$

$= \frac{١}{٣} \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

تذكر:
$\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$
$\text{جا}^٢\text{س} = ١ - \text{جتا}^٢\text{س}$

㉖ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}٣\text{س} - ١}{\text{س جا}٤\text{س}} = \frac{٠}{٠}$ ضرب بالمرافق

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}٣\text{س} - ١}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{\text{قا}٣\text{س} + ١}{\text{قا}٣\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}^٢٣\text{س} - ١}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{١}{\text{قا}٣\text{س} + ١} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^٢٣\text{س}}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{١}{١+١}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س}}{\text{جا}٤\text{س}} \times \frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{١} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٨}$

لها حل آخر "توحيد المقامات" بعد $\text{قا}٣\text{س} = \frac{١}{\text{جتا}٣\text{س}}$

② ⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \text{جا}٢\text{س}\,\text{ظاس} - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س} + \text{جا}٢\text{س}\,\text{ظاس}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} = \text{نها} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س}\,\text{ظاس}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س}\,\text{ظاس}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}}$

مرافق

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتا}٢\text{س}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{\text{ظا}٢\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} \times \text{نها} \frac{١}{١ + \text{جتا}٢\text{س}} + ٢ \times \frac{١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}} \times \frac{١}{١+١} + ١$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{ظا}٢\text{س}} \times ١ + ١$

$٢ \times ١ \times ١ + ١ = ٢ + ١ = ٣$

② ⑧ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \frac{٠}{٠}$ ضرب بالمرافقين

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جاس}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتاس}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{١ - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{-\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س}} \times \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}$

$-١ \times \left(\frac{١+١}{١+١}\right) = -١$

② ⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٤\text{س}}{\text{جتا}٨\text{س} - ١}$

ج : $\frac{-١}{٤}$

③ ⓪ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \frac{٠}{٠}$ ضرب بالمرافقين

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جاس}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})}{١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \frac{١+١}{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ١}{١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \frac{٢}{\frac{٢}{\sqrt{٢}}} = -١ \times ٢ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = -\sqrt{٢}$

ملاحظة: أي نهاية يكون فيها $\frac{\text{اقتران مثلثي}}{\text{جمع أو طرح}}$ أو العكس فيمكن حلها باستخدام المتممة أو مكملة أو استبدال وذلك بفرضها الجمع أو طرح.

③ ① $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{\text{س} - \pi} = \frac{٠}{٠}$ $\text{س} = \text{ص} + \pi$

$\text{ص} = \text{س} - \pi$ ، عندما $\text{س} \to \pi$ فإن $\text{ص} \to ٠$.

$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{ص} + \pi)}{\text{ص}} = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاص}\,\text{جتا}\pi + \cancel{\text{جتاص}\,\text{جا}\pi}}{\text{ص}}$

$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاص} \times -١}{\text{ص}} = -١$

حل أخر :- باستخدام تكملة . $\text{جاس} = \text{جا}(\pi - \text{س})$

$\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{\text{س} - \pi} = \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{\text{س} - \pi} = -١$

(٣٢) $$\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}٢س}{\pi-٤س}$$

ج : $\frac{١}{٢}$

(٣٣) $$\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{١+\text{جتا}س}{(س-\pi)^٢}=\frac{٠}{٠}$$ ضرب بالمرافق

$$\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{١+\text{جتا}س}{(س-\pi)^٢}\times\frac{١-\text{جتا}س}{١-\text{جتا}س}=\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{١-\text{جتا}^٢س}{(س-\pi)^٢}\times\frac{١}{٢}$$

$$\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢س}{(\pi-س)^٢}\times\frac{١}{٢}=\left(\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}س}{\pi-س}\right)^٢\times\frac{١}{٢}$$

$$\underset{س\to\pi}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}(\pi-س)}{س-\pi}\right)^٢\times\frac{١}{٢}=(-١)^٢\times\frac{١}{٢}=\frac{١}{٢}$$

(٣٤) $$\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{١-٢\text{جتا}س}{\text{جا}(س-\frac{\pi}{٣})}=\frac{٠}{٠}$$

$$ص=س-\frac{\pi}{٣}\ \to\ س=ص+\frac{\pi}{٣}$$

عندما $س\to\frac{\pi}{٣}$ فإن $ص\to٠$

$$\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-٢\text{جتا}(ص+\frac{\pi}{٣})}{\text{جا}ص}=\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-٢(\text{جتا}ص\,\text{جتا}\frac{\pi}{٣}-\text{جا}ص\,\text{جا}\frac{\pi}{٣})}{\text{جا}ص}$$

$$=\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ ١-٢\left(\text{جتا}ص\times\frac{١}{٢}-\text{جا}ص\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$$

$$=\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-\text{جتا}ص+\text{جا}ص\times\sqrt{٣}}{\text{جا}ص}=$$

$$=\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-\text{جتا}ص}{\text{جا}ص}\ \text{مرافقه}+\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{جا}ص}\times\sqrt{٣}}{\cancel{\text{جا}ص}}$$

$$\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-\text{جتا}ص}{\text{جا}ص}\times\frac{١+\text{جتا}ص}{١+\text{جتا}ص}+\sqrt{٣}$$

$$\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{١-\text{جتا}^٢ص}{\text{جا}ص}\times\frac{١}{١+\text{جتا}ص}+\sqrt{٣}$$

$$\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢ص}{\text{جا}ص}\times\frac{١}{٢}+\sqrt{٣}$$

$$\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \text{جا}ص\times\frac{١}{٢}+\sqrt{٣}=\text{صفر}\times\frac{١}{٢}+\sqrt{٣}=\sqrt{٣}$$

(٣٥) $$\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}(س-١)+\text{جا}\pi س}{١-س}=\frac{٠}{٠}$$

اما بالفرض أو مثبتة

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}(س-١)}{١-س}+\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\pi س}{١-س}$$

$ص=١-س$ ، $س=١-ص$

$س\to١$ ، $ص\to٠$

$$\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}(س-١)}{١-س}+\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\pi(١-ص)}{ص}$$

$$-١+\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\pi-\pi ص)}{ص}=-١+\text{نها}$$

$$=-١+\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\overset{٠}{\cancel{\text{جا}\pi}}\,\text{جتا}\pi ص-\overset{-١}{\cancel{\text{جتا}\pi}}\,\text{جا}\pi ص}{ص}$$

$$-١+\underset{ص\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\pi ص}{ص}=-١+\pi$$

(٣٦) $$\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{س+\text{جا}(\pi-٢س)}{٢س}=\frac{٠}{٠}$$

$$\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{س}{٢س}+\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\pi-٢س)}{٢س}$$

$$\frac{١}{٢}+\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\overset{٠}{\cancel{\text{جا}\pi}}\,\text{جتا}٢س-\overset{-١}{\cancel{\text{جتا}\pi}}\,\text{جا}٢س}{٢س}$$

$$\frac{١}{٢}+\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}٢س}{٢س}$$

$$\frac{١}{٢}+١=\frac{٣}{٢}$$

(٣٧) $$\text{نهـا}_{س\to ٢}\ \frac{\text{قتا}\frac{\pi}{س}}{س-٢}$$

ج : $-\frac{\pi}{٤}$

(٣٨) $$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ \frac{١+\text{جتا}٢س}{(٢س+\pi)^٢} = \frac{٠}{٠}$$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ \frac{١+١-٢\text{جا}^٢س}{(٢س-\pi)^٢} = \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ \frac{٢-٢\text{جا}^٢س}{(٢س-\pi)^٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ \frac{٢(١-\text{جا}^٢س)}{(٢س-\pi)^٢} = \text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{٢\text{جتا}^٢س}{(٢س-\pi)^٢} = \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ ٢\left(\frac{\text{جتا}س}{٢س-\pi}\right)^٢$$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ ٢\left(\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}-س)}{٢(س-\frac{\pi}{٢})}\right)^٢ = \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\ \frac{٢\text{جا}^٢(\frac{\pi}{٢}-س)}{٤(س-\frac{\pi}{٢})^٢}$$

$$\frac{٢}{٤} \times (-١)^٢ = \frac{١}{٢}$$

(٣٩) $$\text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{\sqrt{١+\text{جتا}س}}{\text{جا}س}$$

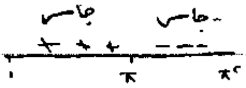
$$\text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{\sqrt{١+\text{جتا}س}}{\text{جا}س} \times \frac{\sqrt{١-\text{جتا}س}}{\sqrt{١-\text{جتا}س}}$$ مرافقه تحت الجذر

$$\text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{\sqrt{(١+\text{جتا}س)(١-\text{جتا}س)}}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{١-\text{جتا}س}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{\sqrt{١-\text{جتا}^٢س}}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{١-١}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{\sqrt{\text{جا}^٢س}}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{|\text{جا}س|}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$



$$= \text{نهـا}_{س\to \pi^+}\ \frac{-\text{جا}س}{\text{جا}س} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$$

(٤٠) $$\text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{١-\text{جا}٢س-\text{جتا}^٢س}{٤س}$$

ج : $\frac{-١}{٢}$

(٤١) أثبت أن $$\text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{١-\text{جتا}٦س}{\text{جتا}٨س-١} = \frac{-٩}{١٦}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{١-\text{جتا}٦س}{\text{جتا}٨س-١} \times \frac{١+\text{جتا}٦س}{١+\text{جتا}٦س} \times \frac{\text{جتا}٨س+١}{\text{جتا}٨س+١}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{١-\text{جتا}^٢٦س}{\text{جتا}^٢س-١} \times \text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{\text{جتا}٨س+١}{\text{جتا}٦س+١}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠}\ \frac{\text{جا}^٢٦س}{-\text{جا}^٢٨س} \times \frac{٢}{٢} = -\text{نهـا}_{س\to ٠}\left(\frac{\text{جا}٦س}{\text{جا}٨س}\right)^٢$$

$$= -\left(\frac{٦}{٨}\right)^٢ = -\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{-٩}{١٦}\ \#$$

(٤٢) أثبت أن $$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٣}}\ \frac{٢\text{جا}س-١}{٤\text{جتا}^٢س-٣} = \frac{-١}{٢}$$

٤٣ ٢٠٠٣

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{قا}س - ١}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}س}{\frac{١}{\text{جتا}س} - ١} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}س}{\frac{١-\text{جتا}س}{\text{جتا}س}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}س\ \text{جتا}س}{١-\text{جتا}س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{(١-\text{جتا}^{٢}س)\text{جتا}س}{١-\text{جتا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{(١-\text{جتا}س)}(١+\text{جتا}س)\ \text{جتا}س}{\cancel{١-\text{جتا}س}}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} (١+\text{جتا}س)\text{جتا}س = (١+١)\times ١ = ٢$$

أسئلة سنوات سابقة

شتوي ٢٠٠٨ ٤٥ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١+\text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}س}{س^{٢}}$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١+\text{جتا}٤س - ٢(١-\text{جا}^{٢}س)}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١+\text{جتا}٤س-٢+٢\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٤س - ١ + ٢\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٤س-١}{س^{٢}} + \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٤س-١}{س^{٢}} \times \frac{\text{جتا}٤س+١}{\text{جتا}٤س+١} + ٢ \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}س}{س}\right)^{٢}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^{٢}٤س - ١}{س^{٢}} \times \frac{١}{\text{جتا}٤س+١} + ٢\times(١)^{٢}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}^{٢}٤س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢} + ٢ = -(٤)^{٢} \times \frac{١}{٢} + ٢ = -٦$$

صيفي ٢٠٠٨ ٤٥ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٨س - ٢\text{جا}^{٢}س}{١٠س^{٢}}$

شتوي ٢٠٠٩ ٤٥ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢س(س+\text{جا}٨س - \text{جا}٤س)}{س^{٢}\ \text{جتا}س}$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢(س+\text{جا}٨س-\text{جا}٤س)}{س\ \text{جتا}س} =$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢}{\text{جتا}س} \times \left(\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{س} + \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٨س}{س} - \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٤س}{س}\right)$$

$$٢ \times (١ + ٨ - ٤) = ١٠$$

صيفي ٢٠٠٩ ٤٥ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} (٧س^{٣}\ \text{ظتا}٢س\ \text{قتا}٥س)$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \left(٧س^{٣} \times \frac{١}{\text{ظا}٢س} \times \frac{١}{\text{جا}٥س}\right)$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٧س}{\text{ظا}٢س} \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{\text{ظا}٢س} \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{\text{جا}٥س}$$

$$\frac{٧}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٢٠}$$

شتوي ٢٠١٠ ٤٦ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}س - \text{جا}س}{س^{٣}}$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} - \text{جا}س}{س^{٣}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}س - \text{جا}س\text{جتا}س}{\text{جتا}س}}{س^{٣}}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س(١-\text{جتا}س)}{س^{٣}\ \text{جتا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س(١-\text{جتا}س)}{س^{٣}\ \text{جتا}س} \times \frac{١+\text{جتا}س}{١+\text{جتا}س}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س(١-\text{جتا}^{٢}س)}{س^{٣}\ \text{جتا}س} \times \frac{١}{٢} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س \times \text{جا}^{٢}س}{س^{٣}\ \text{جتا}س} \times \frac{١}{٢}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}س}{س}\right)^{٣} \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{جتا}س} \times \frac{١}{٢} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

صيفي ٢٠١٠ ٤٦ : $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}^{٢}س - ١}{س^{٢}}$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} - ١}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١-\text{جتا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س}}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١-\text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}\ \text{جتا}^{٢}س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - (\text{جتا}^٢ س - \text{جا}^٢ س)}{س^٢ \,\text{جتا}\,٢س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢ س + \text{جا}^٢ س}{س^٢ \,\text{جتا}\,٢س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ س + \text{جا}^٢ س}{س^٢ \,\text{جتا}\,٢س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\,\text{جا}^٢ س}{س^٢ \,\text{جتا}\,٢س} =$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\, ٢ \left(\frac{\text{جا}\,س}{س}\right)^٢ \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{جتا}\,٢س} = ٢ \times ١ \times ١ = ٢$$

شتوي ٢٠١١ ع٥: $\underset{س\to \frac{ط}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}{س - \frac{ط}{٤}}$.

نفرض أن $ص = س - \frac{ط}{٤} \leftarrow س = ص + \frac{ط}{٤}$

عندما $س \leftarrow \frac{ط}{٤}$ فإن $ص \leftarrow ٠$

$$\underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(ص + \frac{ط}{٤}) - \text{جا}(ص + \frac{ط}{٤})}{ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{جتا}\,ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٤} - \text{جا}\,ص\,\text{جا}\frac{ط}{٤}) - (\text{جا}\,ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{جتا}\,ص\,\text{جا}\frac{ط}{٤})}{ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{جتا}\,ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٤}} - \text{جا}\,ص\,\text{جا}\frac{ط}{٤} - \text{جا}\,ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٤} - \cancel{\text{جتا}\,ص\,\text{جا}\frac{ط}{٤}}}{ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{-\frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{جا}\,ص - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{جا}\,ص}{ص} = \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{-٢}{\sqrt{٢}}\,\text{جا}\,ص}{ص}$$

$\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ "ولها أكثر من حل"

صيفي ٢٠١١ ع٤: $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\, ٣س\,(\text{ظتا}\,٢س + \text{قتا}\,٣س)$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\, ٣س \left(\frac{١}{\text{ظا}\,٢س} + \frac{١}{\text{جا}\,٣س}\right)$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣س}{\text{ظا}\,٢س} + \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣س}{\text{جا}\,٣س}$$

$$\frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٣} = \frac{٥}{٢}$$

شتوي ٢٠١٢ ع٤: $\underset{س\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,س}{٢س - ط}$

$$= \underset{ص\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,س}{٢(س - \frac{ط}{٢})}$$

نفرض أن $ص = س - \frac{ط}{٢} \leftarrow س = ص + \frac{ط}{٢}$

عندما $س \leftarrow \frac{ط}{٢}$ فإن $ص \leftarrow ٠$

$$\underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(ص + \frac{ط}{٢})}{٢ص} = \underset{}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٢} - \text{جا}\,ص\,\text{جا}\frac{ط}{٢}}{٢ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{-\,\text{جا}\,ص \times ١}{٢ص} = \frac{-١}{٢}$$

صيفي ٢٠١٢ ع٦: $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,س}{س\,\text{جا}\,س}$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,س}{س\,\text{جا}\,س} \times \frac{١ + \text{جتا}\,س}{١ + \text{جتا}\,س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{س\,\text{جا}\,س} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}\,س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ س}{س\,\text{جا}\,س} \times \frac{١}{٢} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} \times \frac{١}{٢}$$

$$١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

شتوي ٢٠١٣ ع٧: $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\frac{ط}{٢}س}{س - ١}$

نفرض أن $ص = س - ١ \leftarrow س = ص + ١$ عندما $س \leftarrow ١$ فإن $ص \leftarrow ٠$

$$\underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(\frac{ط}{٢}(ص + ١))}{ص} = \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(\frac{ط}{٢}ص + \frac{ط}{٢})}{ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\frac{ط}{٢}ص\,\text{جتا}\frac{ط}{٢} - \text{جا}\frac{ط}{٢}\,\text{جا}\frac{ط}{٢}ص}{ص}$$

$$= \underset{ص\to ٠}{\text{نها}} \frac{-١ \times \text{جا}\frac{ط}{٢}ص}{ص} = \frac{-١ \times \frac{ط}{٢}}{١} = \frac{-ط}{٢}$$

صيفي ٢٠١٣ ع٧: $\underset{س\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٢س}{س^٢ - \frac{ط}{٢}س}$

$$= \underset{س\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٢س}{س(س - \frac{ط}{٢})} = \underset{س\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \underset{س\to \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٢س}{س - \frac{ط}{٢}}$$

نفرض أن $ص = س - \frac{ط}{٢} \leftarrow س = ص + \frac{ط}{٢}$ عندما $س \leftarrow \frac{ط}{٢}$ فإن $ص \leftarrow ٠$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١}}{\text{س}} \ast \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\text{ص}+\frac{\pi}{\text{٢}})}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{١}}{\frac{\pi}{\text{٢}}} \times \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\text{٢ص}+\pi)}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\pi}\underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٢ص جتا}\pi + \text{جتا٢ص جا}\pi}{\text{ص}}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\pi} \times \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{-\text{١ جا٢ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\pi} \times \frac{-\text{٢}}{\text{١}} = \frac{-\text{٤}}{\pi}$$

أسئلة إضافية

① $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٤}}-\text{٢}}{\text{جا٥س}}$ ج: $\frac{\text{١}}{\text{٢٠}}$

② $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{١}-\text{ظاس}}-\sqrt{\text{١}+\text{ظاس}}}{\text{٢س}}$ ج: $\frac{-\text{١}}{\text{٢}}$

③ $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جا٢س} - \text{جتا٢س} - \text{١}}$ ج: $\frac{-\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$

④ $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{٢}}\ \text{جتاس} - \text{١}}{\text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١}}$ ج: $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

⑤ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{(\text{٣س} + \text{ظاس})^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{جتا٤س}}$ ج: ٢

⑥ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١} + \text{س جاس} - \text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$ ج: ٣

⑦ اثبت أن $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢جاس} - \text{١}}{\text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣}} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}}$

⑧ إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{م} - \text{جتا بس}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$ فجد

قيمة م ، ب.

* إذا كانت $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}}\ \frac{\text{م جتا٢س}}{\pi - \text{٤س}} = \text{٣}$

فجد قيمة م.

الحل: بفرض أن $\text{ص} = \pi - \text{٤س}$ فإن $\text{س} = \frac{\pi - \text{ص}}{\text{٤}}$

عندما $\text{س} \to \frac{\pi}{\text{٤}}$ فإن $\text{ص} \to \text{٠}$

$$\underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{م جتا}\left(\text{٢}\left(\frac{\pi-\text{ص}}{\text{٤}}\right)\right)}{\text{ص}} = \text{٣}$$

$$\underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{م جتا}(\frac{\pi}{\text{٢}} - \frac{\text{ص}}{\text{٢}})}{\text{ص}} = \text{نها}\ \frac{\text{م}[\cancel{\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٢}}\text{جتا}\frac{\text{ص}}{\text{٢}}} + \text{جا}\frac{\text{ص}}{\text{٢}}\text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}}]}{\text{ص}} = \text{٣}$$

$$= \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{م جا}\frac{\pi}{\text{٢}}\ \text{جا}\frac{\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{ص}} = \text{٣}$$

$$= \text{نها}\ \frac{\text{م} \times \text{١} \times \text{جا}\frac{\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{ص}} = \text{٣}$$

$$\text{م} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٣} \rightarrow \boxed{\text{م} = \text{٦}}$$

* إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٤س}}{\text{م س} - \text{س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا بس}}{\text{٧س}} = \text{٥}$

جد قيمة كل من م ، ب.

الحل:-

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٤س}}{\text{م س} - \text{س}} = \text{٥} \rightarrow \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}(\text{م}-\text{١})} = \text{٥}$$

$$\frac{\text{٤}}{\text{م}-\text{م}} = \text{٥} \rightarrow \text{٥م} - \text{٥} = \text{٤} \rightarrow \text{٥م} = \text{٩} \rightarrow \boxed{\text{م} = \frac{\text{٩}}{\text{٥}}}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا بس}}{\text{٧س}} = \text{٥}$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{٧}} = \text{٥} \rightarrow \boxed{\text{ب} = \text{٣٥}}$$

ش٢٠١٤ :- ٤ع

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\ \pi\ \text{س}}$$

بفرض أن ص = س - ٢ ⟸ س = ص + ٢

عندما س ← ٢ فإن ص ← ٠

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}}{\text{ظا}\ \pi(\text{ص}+٢)} = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}}{\text{ظا}(\pi\text{ص}+٢\pi)}$$

$$\boxed{\text{ظا}\ ٢\pi = \text{صفر}}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}}{\dfrac{\text{ظا}\ \pi\text{ص} + \text{ظا}\ ٢\pi}{١ - \text{ظا}\ \pi\text{ص}\ \text{ظا}\ ٢\pi}}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}}{\text{ظا}\ \pi\text{ص}} = \frac{١}{\pi} .$$

صيفي ٢٠١٤ :- ٥ع

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}\ ٣\text{س} - \text{جتا}\ ٥\text{س}}{٢\text{س}^٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-٢\ \text{جا}\left(\frac{٣\text{س}+٥\text{س}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٣\text{س}-٥\text{س}}{٢}\right)}{٢\text{س}^٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-٢\ \text{جا}\ ٤\text{س}\ \text{جا}-\text{س}}{٢\text{س}^٢} =$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-٢\ \text{جا}\ ٤\text{س}}{٢\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}-\text{س}}{\text{س}}$$

$$\frac{-٢\times٤}{٢} \times -١ = ٤$$

تكملة حل صيفي ٢٠١٥

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-\text{جاص}}{٦\text{ص}} = \frac{-١}{٦}$$

ش٢٠١٥ :- ٧ع

$$\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}}\ \frac{١ - \text{جتاس}}{(\text{س} - \pi)^٢}$$

$$\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}}\ \frac{١ - \text{جتاس}}{(\text{س} - \pi)^٢} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$$

$$\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}}\ \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{(\text{س} - \pi)^٢} \times \frac{١}{٢} = \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{(\text{س} - \pi)^٢} \times \frac{١}{٢}$$

ص = س - ط ⟸ س = ص + ط

عندما س ← ط ⟸ فإن ص ← صفر

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢(\text{ص}+\pi)}{\text{ص}^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\left(\text{جاص}\ \overset{-١}{\text{جتا}\pi} + \text{جتاص}\ \overset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جا}\pi}}\right)^٢}{\text{ص}^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢\text{ص}}{\text{ص}^٢} \times \frac{١}{٢} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

ص٢٠١٥ :- ٧ع

$$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاس} - \sqrt{٣}\ \text{جاس}}{٦\text{س} - \pi}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاس} - \sqrt{٣}\ \text{جاس}}{٦(\text{س} - \frac{\pi}{٦})}$$

ص = س - ط/٦ ⟸ س = ص + ط/٦

عندما س ← ط/٦ فإن ص ← ٠

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}(\text{ص}+\frac{\pi}{٦}) - \sqrt{٣}\ \text{جا}(\text{ص}+\frac{\pi}{٦})}{٦\text{ص}}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاص جتا}\frac{\pi}{٦} - \text{جاص جا}\frac{\pi}{٦} - \sqrt{٣}\left(\text{جاص جتا}\frac{\pi}{٦} + \text{جتاص جا}\frac{\pi}{٦}\right)}{٦\text{ص}}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جتاص} - \frac{١}{٢}\text{جاص} - \sqrt{٣}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جاص} + \frac{١}{٢}\text{جتاص}\right)}{٦\text{ص}}$$

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جتاص}} - \frac{١}{٢}\text{جاص} - \frac{٣}{٢}\text{جاص} - \cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جتاص}}}{٦\text{ص}}$$

٢٠١٦ شتوي ٤٧) :

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{١ - \text{جتا}٢\text{س}}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{١-١+٢\text{جا}^{٢}\text{س}}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{٢}\,|\text{جاس}|} ,$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{+}} \frac{٢\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{+}} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}} - \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{+}} \frac{\text{جاس}}{\sqrt{٢}\,\text{جاس}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{٢\text{س} - \text{جاس}}{-\sqrt{٢}\,\text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{٢\text{س}}{-\sqrt{٢}\,\text{جاس}} - \frac{\text{جاس}}{-\sqrt{٢}\,\text{جاس}} =$$

$$= \frac{٢}{-\sqrt{٢}} - \frac{١}{-\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$$

٢٠١٦ صيفي ٤٧)

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٤ - \text{س ظاس} - ٤\text{جتاس}}{\text{س جا}٤\text{س}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٤ - ٤\text{جتاس} - \text{س ظاس}}{\text{س جا}٤\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٤ - ٤\text{جتاس}}{\text{س جا}٤\text{س}} + \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{-\text{س ظاس}}{\text{س جا}٤\text{س}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٤(١ - \text{جتاس})}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} + \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{-\text{س ظاس}}{\text{س جا}٤\text{س}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{٤(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{١}{٢} + \frac{-١}{٤}$$

$$\text{نهـا} \frac{٤\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س جا}٤\text{س}} \times \frac{١}{٢} + \frac{-١}{٤}$$

$$\frac{٤}{٤} \times \frac{١}{٢} + \frac{-١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

الدرس الخامس: الاتصال

أ) الاتصال عند نقطة :

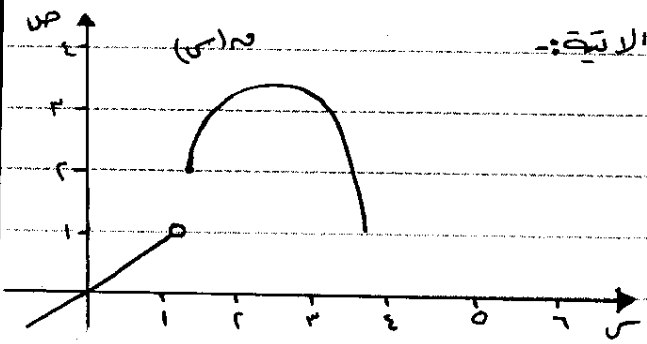
تعريف :- يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ .
إذا تحقق الشروط الآتية :-

١) الاقتران معرف عند س = أ

٢) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة

٣) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(أ) .

مثال①:- باستخدام الشكل المجاور اجب عن الاسئلة الآتية:-

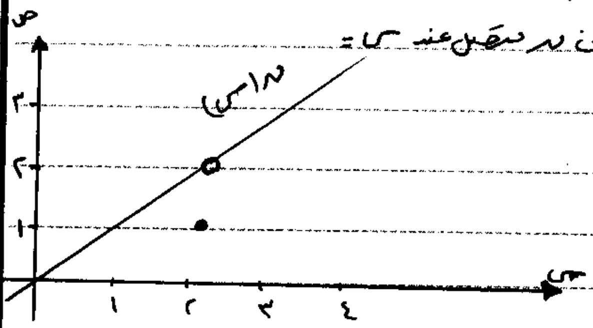


أ- $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢   ب- $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

ج- ق(١) = ١   د- $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

يكون ق(س) اقتران غير متصل عند س = ١ لم يحقق شرط النهاية.

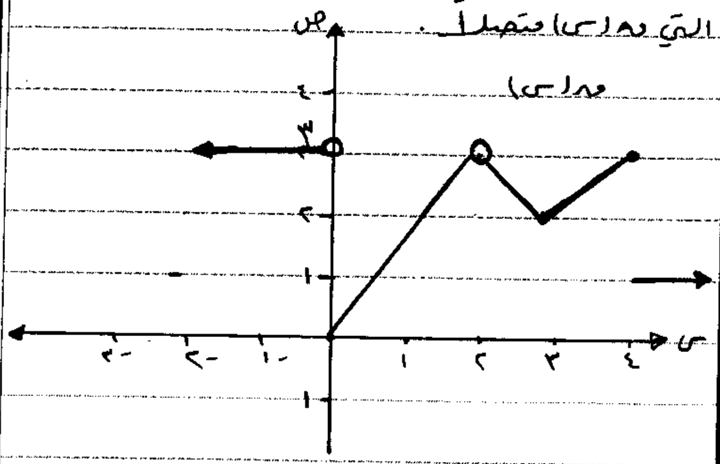
مثال②:- ليكن ق اقتراناً معرفاً على ح، اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق هل الاقتران ق متصل عند س = ٢



أ- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ موجودة   ب- ق(٢) = ١

∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ ق(٢) غير متصل عند س = ٢

مثال③:- ليكن ق اقتراناً معرفاً على ح، اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق حدد قيم س التي ق(س) متصلاً .



نلاحظ من الشكل أن النقاط س = {٠، ٢، ٤} نقاط عدم اتصال لأنه الاقتران لم يحقق شروط الاتصال.

ويكون س = {-٢، ١، ٣} متصلة .

وكذلك فترات (-٤، ∞) ، (-∞، ٠) متصلة.

مثال④:- ليكن ق(س) =

$$\begin{cases} ١ - ٣\text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ -٥ & ، \text{س} = ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٩ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

نتحقق من شروط الاتصال .

١) ق(٢) = -٥

٢) $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}}$ (س^{٢} - ٩) = -٥

$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}}$ (١ - ٣س) = -٥

$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = -٥ موجودة

٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(٢) = -٥

الاقتران ق(س) متصل عند س = ٢

مثال⑤ :- ليكن $\text{ه}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}-١}$ ، س ≠ ١ ابحث في اتصال الاقتران عند س ء ١ ، س ء ٢

ه(١) غير معرفة .

∴ الاقتران ه(س) غير متصل عند س ء ١

$\text{ه}(٢) \,ء\, \frac{٨-١}{٢-١} \,ء\, ٧$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}-١} = ٧$

$∴ \text{ه}(٢) \,ء\, \underset{\text{ص}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\text{ه}(٢) = ٧$

∴ الاقتران ه(س) متصل عند س ء ٢ .

مثال⑥ :- ليكن $\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ه(س) عند س = ٣

① ه(٣) ء ٢×٣ = ٦

② $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) \,ء\, \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\frac{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)}{\cancel{\text{س}-٣}} = ٦$

٣) $\text{ه}(٣) = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = ٦$

∴ ه(س) متصل عند س ء ٣ .

مثال⑦ :- إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} [١-\text{س}] & ، \text{س} < -١ \\ ٢-\text{س} & ، \text{س} = -١ \\ |\text{س}-١|-\text{س} & ، -١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال عند س = -١

اعادة تعريف اكبر عدد صحيح والقيمة المطلقة .

$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} ٢-\text{س} & ، \text{س} = -١ \\ ١-\text{س}-\text{س} & ، -١ \le \text{س} < ١ \\ \text{س}-١-\text{س} & ، ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$

١) ه(-١) = ٢--١ = ٣

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow -١^{+}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow -١^{+}}{\text{نها}}(١-\text{س}-\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow -١^{+}}{\text{نها}}(١-٢\text{س}) = ٣$

$\underset{\text{س}\leftarrow -١^{-}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow -١^{-}}{\text{نها}}٣ \,ء\, ٣$

$∴ \underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = ٣$ موجودة

٣) $\text{ه}(-١) \,ء\, \underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = ٣$

∴ ه(س) متصل عند س ء -١

مثال⑧ : إذا كان $\text{ه}(\text{س}) \,ء\, \begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ [٣\text{س}+١] & ، \text{س} \,ء\, ٠ \\ \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ه(س) عند س ء صفر .

١) ه(٠) ء [٣×٠+١] ء [١] ء ١

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}\frac{\text{س}}{\text{س}} \,ء\, \underset{\text{س}\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}١ \,ء\, ١$

- - - - ٠ + + +

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\right)^{٢} = (١)^{٢} \,ء\, ١$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = ١$ موجودة

$\text{ه}(٠) \,ء\, \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) \,ء\, ١$

ه(س) متصل عند س ء صفر .

مثال⑨ :- إذا كان $\text{ه}(\text{س}) \,ء\, \begin{cases} \frac{\text{ظا}\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\ ٢\text{س}^{٢}+١ & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ه(س) عند س ء صفر

١) ه(٠) = ٢×(٠)²+١ ء ١ $\sqrt{\text{س}^{٢}} \,ء\, |\text{س}|$ — −س − − − ٠ + + + س

٢) $\text{نها}\ \text{ه}(\text{س}) \,ء\, \begin{cases} \frac{\text{ظا}-\text{س}}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ ٢\text{س}^{٢}+١ & ، \text{س} \,ء\, ٠ \end{cases}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظاس}}{\text{س}} \,ء\, ١$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}}\text{ه}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}-\text{س}}{\text{س}} \,ء\, -١$

∴ $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

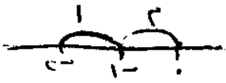
ق(س) غير متصل عند س = صفر

مثال ⑩ لتكن ق(س) = (س³ - ٢٧) . |س² - ٤| ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢.

ق(س) متصل عند س = ٢.

مثال ⑪ :- إذا كان ق(س) = (س - ٥) . [س + ٣] ابحث في اتصال ق(س) عند س = -١.

نفيد تعريف الأكبر عدد صحيح



ق(س) = { (س - ٥) × ١ ، -٢ ≤ س < -١
(س - ٥) × ٢ ، -١ ≤ س < ٠

١. ق(-١) = (-١ - ٥) × ٢ = -١٢

٢. $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نها}}$ (س - ٥) × ١ = -٦

٣. $\underset{س \to -١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to -١^{+}}{\text{نها}}$ (س - ٥) × ٢ = -١٢

$\underset{س \to -١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

∴ نهاية غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س = -١

ب- الاتصال على فترة :-

يكون ق(س) متصلاً على الفترة [أ، ب] إذا كان

① ق متصلاً على كل قاعدة على فترتها الجزئية.

② ق متصلاً عند نقاط التحول والأطراف الفترة التي في المجال.

مثال ① :- إذا كان ق(س) = { ٢س - ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
س² + ٣ ، ٢ < س ≤ ٥

ابحث في اتصال ق(س) على فترة [٠، ٥]

أ) قواعد: ق(س) = ٢س - ١ متصل على فترة (٠، ٢) لأنه كثير حدود

ق(س) = س² + ٣ متصل على فترة (٢، ٥) لأنه كثير حدود.

ب) نقاط التحول س = ٢

ق(٢) = ٤ - ١ = ٣

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ٢س - ١ = ٣

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ (س² + ٣) = ٧

∴ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س = ٢

جـ) أطراف فترة.

س = ٠ "بداية فترة"

ق(٠) = -١ موجودة.

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}$ ٢س - ١ = -١ نهاية من جهة يمين فقط

ق(٠) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = -١

ق(س) متصل عند س = ٠ من جهة اليمين

س = ٥ "نهاية فترة"

ق(٥) = ٢٥ + ٣ = ٢٨

$\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}}$ (س² + ٣) = ٢٨ نهاية من جهة يسار فقط

ق(٥) = $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢٨

ق(س) متصل عند س = ٥ من جهة يسار

نلاحظ أن الاقتران متصل على مجاله ولكنه هناك $س = ٢$ غير متصلة .

∴ يكون ق(س) متصل على فترة المغلقة $[٠، ٥] - \{٢\}$ ماعدا $س = ٢$.

مثال ②:- إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س ، & ١ \leq س \leq ٣ \\ ٩ ، & ٣ < س \leq ٥ \\ ٧ - ٢س ، & ٥ < س \leq ٧ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) في $[١، ٧]$

ق(س) متصل على فترة $[١، ٧] - \{٥\}$

مثال ③:- إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ ، & س < ٠ \\ [س + ٢] ، & ٠ \leq س < ٢ \\ \sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س} ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) لكل س عدد حقيقي (ح) .

اعادة تعريف أكبر عدد صحيح

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & س < ٠ \\ ٢ & ٠ \leq س < ١ \\ ٣ & ١ \leq س < ٢ \\ \sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س} & س \geq ٢ \end{cases}$$

قواعد :-

ق(س) = $س^٢ + ٢$ متصل على $(-\infty، ٠)$ لانه كثير حدود

ق(س) = ٢ متصل على فترة (٠، ١) لانه كثير حدود

ق(س) = ٣ متصل على فترة (١، ٢) لانه كثير حدود

ق(س) = $\sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س}$ متصل على فترة $(٢، \infty)$ لانه كثير حدود

نقاط التحول

س = ١

ق(س) غير متصل عند س = ١

$$\text{نها}_{س \to ١^+} ق(س) \neq \text{نها}_{س \to ١^-} ق(س)$$

$$٣ \neq ٢$$

س = ٢

ق(س) غير متصل

$$\text{نها}_{س \to ٢^+} ق(س) \neq \text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س)$$

$$٥ \neq ٣$$

متصل عند س = صفر من جهة اليمين . لانه

$$ق(٠) = \text{نها}_{س \to ٠^+} ق(س) = ٢$$

متصل عند س = ٢ من جهة اليسار لانه

$$ق(٢) = \text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س) = ٥$$

ق(س) متصل على ح - {١، ٢}

مثال ④ :- إذا كان ق(س) = { ٣ جتا س ، $-\frac{ط}{٦} < س \le ٠$

{ $\frac{\text{ظا}٣س}{س}$ ، $٠ < س < \frac{ط}{٦}$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة $(-\frac{ط}{٦} ، \frac{ط}{٦})$

قواعد

ق(س) = ٣ جتا س متصل على فترة $(-\frac{ط}{٦} ، ٠)$ لأن

ق(أ) = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(أ) لكل أ ∈ $(-\frac{ط}{٦} ، ٠)$

ق(س) = $\frac{\text{ظا}٣س}{س}$ متصل على فترة $(٠ ، \frac{ط}{٦})$ لأن

ق(أ) = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) لكل أ ∈ $(٠ ، \frac{ط}{٦})$

صفر اعتام للاينتمي للفترة . ٠ ∉ $(٠ ، \frac{ط}{٦})$

نقاط تحول

س = صفر

ق(٠) = ٣ جتا ٠ = ٣

$\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{ظا}٣س}{س}$ = ٣

$\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٣ جتا س = ٣

ق(٠) = $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) .

ق(س) متصل عند س = صفر

∴ ق(س) متصل على فترة $(-\frac{ط}{٦} ، \frac{ط}{٦})$

مثال ⑤ :- إذا كان ق(س) = { $\frac{٢س \text{ جا} س}{\text{ظا} س}$ ، $-\frac{ط}{٢} < س < ٠$

{ ٢ جتا ٣س ، $٠ \le س < \frac{ط}{٢}$

ابحث في اتصال ق(س) في فترة $(-\frac{ط}{٢} ، \frac{ط}{٢})$.

قواعد :-

ق(س) = $\frac{٢س \text{ جا} س}{\text{ظا} س}$ = $\frac{٢س \text{ جا} س}{\frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س}}$ = ٢ جتا س

متصل على فترة $(-\frac{ط}{٢} ، ٠)$ لأن

ق(أ) = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) لكل أ ∈ $(-\frac{ط}{٢} ، ٠)$

صفر ∉ $(-\frac{ط}{٢} ، ٠)$

ق(س) = ٢ جتا ٣س متصل على فترة $(٠ ، \frac{ط}{٢})$ لأن

ق(أ) = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) لكل أ ∈ $(٠ ، \frac{ط}{٢})$

نقاط التحول :-

عند س = صفر

ق(٠) = ٢ جتا ٣ × ٠ = ٢

$\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٢ جتا ٣س = ٢

$\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}}$ $\frac{٢س \text{ جا} س}{\text{ظا} س}$ = ٢

ق(٠) = $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = صفر .

ق(س) متصل على فترة $(-\frac{ط}{٢} ، \frac{ط}{٢})$.

مثال ⑥ إذا كان ق(س) = { $س^٢ + ١$ ، $|س| \le ٣$

{ ٢س + ٤ ، $|س| > ٣$.

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله .

ق(س) = { $س^٢ + ١$ ، $-٣ \le س \le ٣$

{ ٢س + ٤ ، س > ٣ أو س < −٣

قواعد :-

ق(س) = $س^٢ + ١$ متصل على فترة (−٣ ، ٣) لأنه كثير حدود

ق(س) = ٢س + ٤ متصل على فترة (−∞ ، −٢) ، (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود

نقاط التحول :-

عند س = −٣

ق(−٣) = $(-٣)^٢ + ١$ = ١٠

$\underset{س \to -٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to -٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{س \to -٣^-}{\text{نهـا}}$ (٢س + ٤) = $\underset{س \to -٣+١}{\text{نهـا}}$ $(س^٢ + ١)$ = ١٠

ق(−٣) = $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = −٣

عند س = ٣

ق(٣) = ١٠

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}}$ (٢س + ٤) = $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}}$ $(س^٢ + ١)$ = ١٠

ق(٣) = $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

∴ ق(س) متصل على مجاله

مثال ⑦ :- إذا كان ق(س) = { $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ ، |س - ٣| < ١

س^{٢} + ٢ ، [س] = ٤

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله .

ق(س) = { $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ ، -١ < س - ٣ < ١

س^{٢} + ٢ ، ٤ ≤ س < ٥

ق(س) = { $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ ، ٢ < س < ٤

س^{٢} + ٣ ، ٤ ≤ س < ٥

بعد إيجاد مجال الاقتران ق(س) نبحث في اتصاله على مجاله

قواعد :

ق(س) = $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ متصل على فترة (٢، ٤)

لأنه داخل مجاله - - - + + + - - - (٠ ، ٥)

ق(س) = س^{٢} + ١ متصل على فترة (٤، ٥) لأنه كثير حدود

نقاط التحول

عند س = ٤

ق(٤) = (٤)^{٢} + ٢ = ١٨

$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + ٢) = ١٨

$\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ $\sqrt{٥س - س^{٢}}$ = $\sqrt{٢٠ - ١٦}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

∴ $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٤

∴ ق(س) متصل على فترة (٢، ٥) - {٤}

مثال ⑧ :- إذا كان ق(س) = { س^{٣} - ٣س + ٣ ، -٢ ≤ س < ١

[س] ، ١ ≤ س < ٣

|س - ٥| ، ٣ ≤ س ≤ ٨

ابحث في اتصال ق في الفترة [-٢، ٨]

ج- نظريات في الاتصال :-

إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

١) كلا الاقترانين ق + هـ ، ق - هـ اقتران متصل عند س = أ .

٢) الاقتران ق × هـ متصل عند س = أ

٣) الاقتران $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ متصل عند س = أ بشرط أن هـ(أ) ≠ صفر .

مثال ① :- إذا كان ق(س) = { س^{٢} + ٣ ، س < ٢

٤س - ١ ، س ≥ ٢

وكان هـ(س) = ٢س^{٢} - س

ابحث في اتصال ق(س) + هـ(س) عند س = ٢ .

$\boxed{١}$ نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(٢) = ٤ × ٢ - ١ = ٧

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ (٤س - ١) = ٧

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + ٣) = ٧

∴ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٧ ∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٧ موجودة

ق(٢) = $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٧

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

∴ ق + هـ متصل عند س = ٢ لأنه جمع اقترانين متصلين اقتران متصل لأن هـ(س) اقترانه متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود .

② حل آخر : نجمع الاقترانين ليصبح اقتران واحد

ل(س) = { س^{٢} + ٣ + ٢س^{٢} - س ، س < ٢

٤س - ١ + ٢س^{٢} - س ، س ≥ ٢

حيث فرضنا أن ل(س) = ق(س) + هـ(س) .

ل(س) = { ٣س^{٢} - س + ٣ ، س < ٢

٢س^{٢} + ٣س - ١ ، س ≥ ٢

ثم نبحث في اتصال ل(س) عند س = ٢

١. ل(٢) = ٢(٢)^{٢} + ٣×٢ − ١ = ١٣

٢. نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ (٣س^{٢} − س + ٣) = ١٣

نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ (٢س^{٢} + ٣س − ١) = ١٣

∴ نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = ١٣ والنهاية موجودة

ل(٢) = نهـا$_{س \to ٢}$ ل(س)

∴ ل(س) = ق(س) + هـ(س) متصل عند س = ٢.

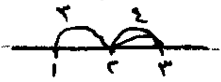
مثال ②:- إذا كان ق(س) = { س^{٢} ، س < ٢
٣س − ٢ ، س ≥ ٢

هـ(س) = س^{٣} − ١ بين أن ق(س) × هـ(س) متصل عند س = ٢.

ك(س) = ق(س) × هـ(س) متصل عند س = ٢

مثال ③:- ابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) إذا كان ق(س) = (س − ٣)^{٣} ، هـ(س) = [½ س + ٣].

نعيد تعريف الأكبر عدد صحيح:



هـ(س) = { ٣ ، ١ ≤ س < ٢
٤ ، ٢ ≤ س < ٣

ل(س) = ق(س) × هـ(س) = { ٣(س − ٣)^{٣} ، ١ ≤ س < ٢
٤(س − ٣)^{٣} ، ٢ ≤ س < ٣

نبحث في اتصال ل(س) عند س = ٢

١. ل(٢) = ٤(٢ − ٢)^{٣} = صفر

٢. نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ٤(س − ٣)^{٢} = صفر

نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ٣(س − ٣)^{٢} = صفر

٣. ∴ نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = ل(٢) = صفر

∴ ل(س) = ق(س) × هـ(س) متصل عند س = ٢

مثال ④:- إذا كان ق(س) = { −١ ، س < ٢
صفر ، س = ٢
١ ، س > ٢

هـ(س) = س^{٢} + ٣ ابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) لجميع قيم س الحقيقية.

∴ ل(س) = ق(س) × هـ(س)

ل(س) = { −١(س^{٢} + ٣) ، س < ٢
صفر(س^{٢} + ٣) ، س = ٢
١(س^{٢} + ٣) ، س > ٢

نقاط التحول

١. ل(٢) = صفر × ((٢)^{٢} + ٣) = صفر

٢. نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ (س^{٢} + ٣) = ٧

نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ −(س^{٢} + ٣) = −٧

∴ نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) ≠ نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ل(س)

∴ ل(س) غير متصل عند س = ٢

قواعد

- (س^{٢} + ٣) متصل على فترة (−∞ ، ٢) لأنه كثير حدود
- (س^{٢} + ٣) متصل على فترة (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود.

∴ ل(س) = ق(س) × هـ(س) متصل على الأعداد الحقيقية ماعدا {٢}

ح − {٢}

ملاحظة:- إذا كانت إحدى الاقترانين أو كلاهما غير متصل عند س = أ، فإننا لا نستطيع الحكم على نوع العمليات إلا بعد إجرائها والبحث في الاتصال كما في الأمثلة السابقة.

مثال⑤:- إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥ - ٣س^{٢} & ، س < -١ \\ ٢س + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٤س + ٣ & ، س < -١ \\ س^{٢} + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$ عند $س = -١$

$\therefore ل(س) = ق(س) + هـ(س)$

$ل(س) = \begin{cases} ٥ - ٣س^{٢} + ٤س + ٣ & ، س < -١ \\ ٢س + ١ + س^{٢} + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$

$ل(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} + ٤س + ٨ & ، س < -١ \\ س^{٢} + ٢س + ٢ & ، س \geq -١ \end{cases}$

$ل(-١) = (-١)^{٢} + ٢ \times -١ + ٢ = ١$

$\lim_{س \to -١^{+}} ل(س) = \lim_{س \to -١^{+}} (س^{٢} + ٢س + ٢) = ١$

$\lim_{س \to -١^{-}} ل(س) = \lim_{س \to -١^{-}} (-٣س^{٢} + ٤س + ٨) = ١$

$\therefore \lim_{س \to -١^{+}} ل(س) = \lim_{س \to -١^{-}} ل(س) = ١$ موجودة

$\therefore ل(-١) = \lim_{س \to -١} ل(س)$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = -١$

مثال⑥:- إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س\sqrt[٣]{س} & ، س < ١ \\ س^{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٢ \\ س^{٢} + ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ① $ع(س) = ق(س) + هـ(س)$ عند $س = ١ ، س = ٢$

② $ل(س) = ق(س) - ٢هـ(س)$ لجميع قيم س الحقيقية.

① $ع(س) = \begin{cases} س\sqrt[٣]{س} + ٢س + ١ & ، س < ١ \\ س^{٢} + ٢س + ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢س^{٢} + ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$ع(١) = (١)^{٢} + ٢ \times ١ + ١ = ٤$

$\lim_{س \to ١^{+}} ع(س) = \lim_{س \to ١^{+}} (س^{٢} + ٢س + ١) = ٤$

$\lim_{س \to ١^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ١^{-}} (س\sqrt[٣]{س} + ٢س + ١) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ١^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ١^{+}} ع(س) = ٤$ موجودة

$\therefore ع(١) = \lim_{س \to ١} ع(س) \therefore ع(س)$ متصل عند $س = ١$

$ع(٢) = ٢(٢)^{٢} + ٣ = ١١$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} (٢س^{٢} + ٣) = ١١$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} (س^{٢} + ٢س + ١) = ٩$

$\therefore \lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) \neq \lim_{س \to ٢^{-}} ع(س)$ غير موجودة

$\therefore ع(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

② $ل(س) = ق(س) - ٢هـ(س)$

$ل(س) = \begin{cases} س\sqrt[٣]{س} - ٤س - ٢ & ، س < ١ \\ س^{٢} - ٤س - ٢ & ، ١ \leq س < ٢ \\ -س^{٢} - ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

قواعد:-

$س\sqrt[٣]{س} - ٤س - ٢$ متصل على فترة $(-\infty ، ١)$ لأنه

$ق(أ) = \lim_{س \to أ} ق(س) ، أ \in (-\infty ، ١)$

$س^{٢} - ٤س - ٢$ متصل على فترة $(١ ، ٢)$ لأنه كثير حدود

$-س^{٢} - ٦$ متصل على فترة $(٢ ، \infty)$ لأنه كثير حدود.

نقاط تحول:-

$س = ١ : ل(١) = -٥$

$\lim_{س \to ١^{+}} ل(س) = \lim_{س \to ١^{+}} (س^{٢} - ٤س - ٢) = -٥$

$\lim_{س \to ١^{-}} ل(س) = \lim_{س \to ١^{-}} (س\sqrt[٣]{س} - ٤س - ٢) = -٥$

$\therefore ل(١) = \lim_{س \to ١} ل(س) = -٥$ متصل عند $س = ١$

$ل(٢) = -١٠$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ل(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} (-س^{٢} - ٦) = -١٠$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ل(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} (س^{٢} - ٤س - ٢) = -٦$ $\lim_{س \to ٢} ل(س)$ غير موجودة

$ل(س)$ متصل على $ح - \{٢\}$

إيجاد الثوابت :-

مثال ①:- ليكن
$$\text{ع(س)} = \begin{cases} [\text{س}] + \text{أ} \text{ ، } & \text{س} \geq \text{٣} \\ \text{أس} - \text{٧} \text{ ، } & \text{س} < \text{٣} \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل الاقتران ع متصلاً عند س = ٣

بما أن ع(س) متصلاً عند س = ٣ فإنه

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}^{+}} \text{ع(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{٣}^{-}} \text{ع(س)}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}^{+}} ([\text{س}] + \text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{٣}^{-}} (\text{أس} - \text{٧})$$

$$\text{٣} + \text{أ} = \text{٣أ} - \text{٧}$$

$$\text{١٠} = \text{٢أ} \longrightarrow \boxed{\text{أ} = \text{٥}}$$

مثال ②:- ليكن
$$\text{ه(س)} = \begin{cases} \text{أس}^{\text{٣}} - \text{ب س} + \text{١} \text{ ، } & \text{س} < \text{١} \\ \text{٥} \text{ ، } & \text{س} = \text{١} \\ \text{س}^{\text{٢}} - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + \text{٢} \text{ ، } & \text{س} > \text{١} \end{cases}$$

جد قيم أ، ب التي تجعل ه متصل عند س = ١ .

بما أن ه(س) اقتران متصل عند س = ١ فإنه يحقق جميع شروط الاتصال

$$\text{ه(١)} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^{+}} \text{ه(س)}$$

$$\text{٥} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^{+}} (\text{س}^{\text{٢}} - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + \text{٢})$$

$$\text{٥} = \text{١} - \text{أ} - \text{ب} + \text{٢} \longrightarrow -\text{أ} - \text{ب} = \text{٢} \text{ — } \boxed{\text{١}}$$

$$\text{ه(١)} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^{-}} \text{ه(س)}$$

$$\text{٥} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^{-}} (\text{أس}^{\text{٣}} - \text{ب س} + \text{١})$$

$$\text{٥} = \text{أ} - \text{ب} + \text{١} \longrightarrow \text{أ} - \text{ب} = \text{٤} \text{ — } \boxed{\text{٢}}$$

$$\boxed{\text{١}} + \boxed{\text{٢}} \quad -\text{أ} - \text{ب} = \text{٢}$$

$$+ \quad \text{أ} - \text{ب} = \text{٤}$$

$$-\text{٢ب} = \text{٦} \longrightarrow \boxed{\text{ب} = -\text{٣}}$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \text{٤}$$

$$\text{أ} - -\text{٣} = \text{٤}$$

$$\boxed{\text{أ} = \text{١}}$$

مثال ③: جد إذا كان
$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{١}}{\text{س} - \text{١}} \text{ ، } & \text{س} > \text{١} \\ \text{ب} \text{ ، } & \text{س} = \text{١} \\ \text{٢أس} \text{ ، } & \text{س} < \text{١} \end{cases}$$

متصلاً عند س = ١ فجد كلاً من أ ، ب

أ $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ، ب $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

مثال ④:- إذا علمت أن
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - (\text{٣} - \text{٢جـ})\text{س} - \text{٦جـ}}{\text{س} - \text{٣}} \text{ ، } & \text{س} \neq \text{٣} \\ \text{٤س} - \text{١} \text{ ، } & \text{س} = \text{٣} \end{cases}$$

اقتران متصل على ح ، جد قيمة جـ .

بما أن ق متصل على ح فهو متصل عند س = ٣ فإنه

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \text{ق(س)} = \text{ق(٣)}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - (\text{٣} - \text{٢جـ})\text{س} - \text{٦جـ}}{\text{س} - \text{٣}} = \text{٤} \times \text{٣} - \text{١}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \frac{\cancel{(\text{س} - \text{٣})}(\text{س} + \text{٢جـ})}{\cancel{\text{س} - \text{٣}}} = \text{١١}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}} (\text{س} + \text{٢جـ}) = \text{١١} \longrightarrow \text{٣} + \text{٢جـ} = \text{١١}$$

$$\boxed{\text{جـ} = \text{٤}}$$

مثال ⑤:- ليكن ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{4\text{س}^2 - \text{أ}}{\text{س} - 2} & ، \text{س} < 2 \\ \text{ب}\text{س} - 2\text{جـ} & ، 2 \le \text{س} \le 3 \\ 4\text{س} & ، \text{س} > 3 \end{cases}$$

اقتران متصلاً على ح جد قيمة كل من أ ، ب ، جـ.

بما أن ق متصل على ح فإنه متصل عند نقاط التفرع.

$\therefore$ $\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س})$ موجودة وناتج المقام = صفر إذاً ناتج تعويض البسط أيضاً صفر.

$4 \times (2)^2 - \text{أ} = \text{صفر} \leftarrow \boxed{\text{أ} = 16}$

$$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to 2^+} (\text{ب}\text{س} - 2\text{جـ}) = \lim_{\text{س} \to 2^-} \frac{4\text{س}^2 - 16}{\text{س} - 2}$$

$$2\text{ب} - 2\text{جـ} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{4\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)}{\cancel{\text{س} - 2}}$$

$$2\text{ب} - 2\text{جـ} = 16 \longrightarrow ①$$

$$\lim_{\text{س} \to 3^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 3^-} \text{ق}(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to 3^+} 4\text{س} = \lim_{\text{س} \to 3^-} (\text{ب}\text{س} - 2\text{جـ})$$

$$12 = 3\text{ب} - 2\text{جـ} \longrightarrow ②$$

① − ②

$2\text{ب} - 2\text{جـ} = 16$ ①

$3\text{ب} - 2\text{جـ} = 12$ ② −

$-\text{ب} = 4 \rightarrow \boxed{\text{ب} = -4}$

من معادلة ① فإن $2\text{ب} - 2\text{جـ} = 16$

$2 \times -4 - 2\text{جـ} = 16 \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = -12}$

مثال ⑥:- إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{جتا}\text{س} & ، \text{س} \le \frac{\pi}{2} \\ 2\text{أ}\text{س} + 3\pi & ، \text{س} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

أوجد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{2}$

بما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{2}$ فإن نهاية موجودة

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^-} \text{ق}(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^+} (2\text{أ}\text{س} + 3\pi) = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^-} 4\text{جتا}\text{س}$$

$$2\text{أ} \times \frac{\pi}{2} + 3\pi = 4\text{جتا}\frac{\pi}{2}$$

$$\pi\text{أ} + 3\pi = \text{صفر}$$

$$\pi(\text{أ} + 3) = \text{صفر} \leftarrow \text{أ} + 3 = \text{صفر} \leftarrow \boxed{\text{أ} = -3}$$

مثال ⑦ جد ليكن ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا}\,\text{أ}\text{س} - 2\text{س}^2}{\text{س}\,\text{جا}\text{س}} & ، -\frac{\pi}{4} \le \text{س} < 0 \\ 3 & ، \text{س} = 0 \\ \dfrac{\text{س}^2 + (\text{ب} + 2)\text{س}}{\text{ب}\text{س}} & ، 0 < \text{س} \le 2 \end{cases}$$

جد قيمة أ ، ب التي ق متصل عند س = صفر

أ = ٦ ، ب = ٢

نقاط عدم الاتصال:- هي تلك النقاط التي يفشل عندها أحد شروط الاتصال. أمثلة على ذلك

1) اقتران نسبي "أصفار المقام"

2) اقتران متشعب "نقاط التحول"

مثال:- جد نقاط عدم الاتصال في كل مما يلي.

1) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 11}{\text{س}^3 - 8}$ $\boxed{\text{س} = 2}$

2) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} - 2 & ، \text{س} < 1 \\ \text{س}^2 + 3 & ، \text{س} \ge 1 \end{cases}$$

عند س = 1 لا يوجد اتصال

أسئلة سنوات السابقة

٢٠٠٧ ش ٤٧ :- ليكن $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < 1 \\ 3س\sqrt{س}-1 & ، س \geq 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س الحقيقية

قواعد :-

$ق(س) = س^2$ متصل على فترة $(-\infty ، 1)$ لأنه كثير حدود

$ق(س) = 3س\sqrt{س}-1$ متصل على فترة $(1 ، \infty)$ لأن

$ق(أ) = \lim_{س \to أ} ق(س)$ ، $أ \in (1 ، \infty)$

نقاط التحول :-

عند $س = 1$ ، $ق(1) = 3 \times 1 \times \sqrt{1} - 1 = 2$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} (3س\sqrt{س}-1) = 2$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} (س^2) = 1$

$\therefore \lim_{س \to 1^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 1^-} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) متصل على الأعداد الحقيقية ماعدا $س = 1$

أو $ح - \{1\}$.

٢٠٠٧ ص ٤٧ :- إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س] + س & ، -1 \leq س < 0 \\ \sqrt{س} + \frac{3}{5}س^2 & ، 0 \leq س \leq 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على فترة $[-1 ، 2]$

$\therefore ق(س) = \begin{cases} -1 + س & ، -1 \leq س < 0 \\ \sqrt{س} + \frac{3}{5}س^2 & ، 0 \leq س \leq 2 \end{cases}$

قواعد :-

$ق(س) = -1 + س$ متصل على فترة $(-1 ، 0)$ لأنه كثير حدود

$ق(س) = \sqrt{س} + \frac{3}{5}س^2$ متصل على فترة $(0 ، 2)$ لأنه لا يوجد نقاط عدم اتصال في تلك الفترة.

نقاط التحول.

$س = صفر$ ، $ق(0) = \sqrt{0} + \frac{3}{5}(0)^2 = صفر$.

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = \lim_{س \to 0^+} (\sqrt{س} + \frac{3}{5}س^2) = صفر$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} (-1 + س) = -1$

$\therefore \lim_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^-} ق(س)$ نهاية غير موجودة.

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند $س = صفر$.

أطراف فترة.

عند $س = -1$ متصل لأن

$ق(-1) = \lim_{س \to -1^+} ق(س) = \lim_{س \to -1^+} (-1 + س) = -2$

عند $س = 2$ متصل لأن

$ق(2) = \lim_{س \to 2^-} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} (\sqrt{س} + \frac{3}{5}س^2) = \sqrt{2} + \frac{3}{5} \times 4$

$\therefore$ ق(س) متصل على فترة $[-1 ، 2] - \{0\}$.

٢٠٠٩ س ع٤ :- إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + \sqrt{-س} & ، -1 \leq س < 0 \\ [س] + 5س - 3 & ، 0 \leq س \leq 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق على فترة $[-1 ، 1]$.

قواعد :-

$ق(س) = س^2 + \sqrt{-س}$ متصل على فترة $(-1 ، 0)$ لأنه

$ق(أ) = \lim_{س \to أ} ق(س)$ ، $أ \in (-1 ، 0)$

$ق(س) = 5س - 2$ متصل لأنه كثير حدود على فترة $(0 ، 1)$

$\therefore ق(س) = \begin{cases} س^2 + \sqrt{-س} & ، -1 \leq س < 0 \\ 5س - 2 & ، 0 \leq س < 1 \\ 4 & ، س = 1 \end{cases}$

نقاط التحول :-

$س = صفر$ $ق(0) = 5 \times 0 - 2 = -2$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = \lim_{س \to 0^+} (5س - 2) = -2$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} (س^2 + \sqrt{-س}) = صفر$

$\therefore \lim_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^-} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند $س = صفر$.

اطراف الفترة .

عند $س = -1$ متصل لأن $ق(-1) = \lim_{س \to -1^+} ق(س) = 2$

عند $س = 1$ متصل لأنه $ق(1) = \lim_{س \to 1^-} ق(س) = 3$

ق(س) متصل على فترة $[-1 ، 1] - \{0\}$

٢٠٠٩
ع٨

س :- إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt[3]{\text{س}} + |\text{س}-١| ، & -٢ \le \text{س} < ٠ \\ \frac{٤}{\text{س}+١} ، & ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٦ ، & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق على فترة $[-٢، ٣]$

٢٠١٠
ع٨

س :- إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^٢ ، & ٠ < \text{س} \le ٢ \\ [\text{س}] + ٣ ، & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ ، & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

وكان ق متصلاً عند س = ٢ فأجب عما يلي :-

١) اوجد قيمة أ   ٢) ابحث اتصال على فترة $[٠، ٣]$

١) بما أنه ق متصل عند س = ٢ فإنه

$$\lim_{\text{س}\to٢^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢)$$

$$\lim_{\text{س}\to٢^+} [\text{س}] + ٣ = \lim_{\text{س}\to٢^-} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^٢\right)$$

$$٢ + ٣ = \frac{\text{أ}}{٢} + ٤ \leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢}{\text{س}} + \text{س}^٢ ، & ٠ < \text{س} \le ٢ \\ ٥ ، & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ ، & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

قواعد

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}} + \text{س}^٢$ متصل على فترة $(٠، ٢)$ لانه مجموع اقترانين متصلين متصل " (معطى من السؤال) " عند س = ٢

$\text{ق}(\text{س}) = ٥$ متصل على فترة $(٢، ٣)$ لانه كثير حدود

نقاط التحول عند س = ٢ متصل من السؤال معطى.

اطراف فترة غير متصل عند س = ٣ من جهة اليسار لانه

$\text{ق}(٣) \ne \lim_{\text{س}\to٣^-} \text{ق}(\text{س})$

$٧ \ne ٥$ ∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣ من اليسار

∴ ق(س) متصل على فترة $(٠، ٣)$.

٢٠١٠
ع٩

س :- ابحث في اتصال الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+١} ، & -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س}[\text{س}] + ١ ، & -١ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق على فترة $[-٢، ١)$

نعيد تعريف اكبر عدد صحيح

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+١} ، & -٢ \le \text{س} < -١ \\ -\text{س} + ١ ، & -١ \le \text{س} < ٠ \\ ١ ، & ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

قواعد :-

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+١}$ متصل على فترة $(-٢، -١)$ لانه اقتران نسبي وأصفار مقام لا تنتمي للفترة .

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{س} + ١$ متصل على فترة $(-١، ٠)$ لانه كثير حدود

$\text{ق}(\text{س}) = ١$ متصل على فترة $(٠، ١)$ لانه كثير حدود

نقاط التحول .

عند س = −١ ، $\text{ق}(-١) = -١ \times -١ + ١ = ٢$

$$\lim_{\text{س}\to-١^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to-١^+} (-\text{س} + ١) = ٢$$

$$\lim_{\text{س}\to-١^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to-١^-} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}+١} = \lim_{\text{س}\to-١^-} \frac{(\text{س}-١)\cancel{(\text{س}+١)}}{\cancel{\text{س}+١}} = \lim_{\text{س}\to-١^-} \text{س} - ١ = -٢$$

$\therefore \lim_{\text{س}\to-١^-} \text{ق}(\text{س}) \ne \lim_{\text{س}\to-١^+} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة وغير متصل عند س = −١

عند س = صفر ق(٠) = ١

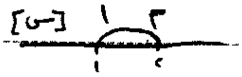
$$\lim_{\text{س}\to٠^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to٠^+} -\text{س} + ١ = ١$$

$\lim_{\text{س}\to٠^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to٠^-} ١ = ١$ ∴ نهـا موجودة ومتصل عند س = ٠

ق متصل على فترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

ش ٢٠١١ ع٧ :- ابحث في اتصال الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{[\text{س}] + \text{س}}$ في الفترة (١، ٢] .

نعيد تعريف اكبر عدد صحيح



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{١ + \text{س}} & ، ١ < \text{س} < ٢ \\ \sqrt{٢ + \text{س}} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{١ + \text{س}}$ متصل على فترة (١، ٢) لانه

$\text{ق}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ أ ∈ (١، ٢)

نبحث في اتصال ق عند س = ٢ من جهة يسار

$\text{ق}(٢) = \sqrt{٢ + ٢} = ٢$

$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} \sqrt{١ + \text{س}} = \sqrt{٣}$

∴ $\text{ق}(٢) \neq \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س})$

∴ ق(س) متصل على فترة مفتوحة (١، ٢) فقط

ص ٢٠١١ ع١٠ :- إذا $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = [\text{س}]$

نابحث في اتصال ق(س) = ل(س) × هـ(س) في فترة [٠، ٢]

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{صفر} & ، ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢} & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \frac{٢(\text{س}^٢ - ١)}{\text{س} + ٢} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

ق(س) = صفر متصل في فترة (٠، ١) لانه ثابت.

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢}$ متصل ع (١، ٢) لانه اقتران نسبي

وعدم وجود أصفار مقام في فترة.

عند س = ١ ق(١) = صفر

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^+} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢} = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{صفر} = \text{صفر}$

∴ $\text{ق}(١) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$ متصل عند س = ١

عند س = ٢ $\text{ق}(٢) = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} \frac{٤ - ١}{٢ + ٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\text{ق}(٢) \neq \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند س = ٢

∴ ق متصل ع فترة [٠، ٢)

ش ٢٠١٢ ع٨ :- ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - ٩ & ، \text{س} \leq ٢ \\ [٢ - \frac{١}{٢}\text{س}] & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \\ |\text{س} - ٤| & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجموعة الاعداد الحقيقية

$$∴ \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - ٩ & ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{صفر} & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \\ \text{س} - ٤ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

ق(س) = ٥س − ٩ متصل على فترة (−∞، ٢) لانه كثير حدود

ق(س) = صفر متصل على فترة (٢، ٤) لانه ثابت

ق(س) = س − ٤ متصل على فترة (٤، ∞) لانه كثير حدود

عند س = ٢ ق(٢) = ١

$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} (٥\text{س} - ٩) = ١$

$\lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{صفر} = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س})$ ∴ غاية غير موجودة وغير متصل عند س = ٢

عند س = ٤ ق(٤) = صفر .

$\lim_{\text{س} \to ٤^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٤^+} \text{س} - ٤ = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to ٤^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٤^-} \text{صفر} = \text{صفر}$ نهاية موجودة وق(س) متصل عند س = ٤

∴ ق(س) متصل على ح − {٢}.

ص ٢٠١٢ ع٨ :- ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} < ٣ \\ [\text{س} + ١] & ، ٣ \leq \text{س} < ٤ \\ ٩ - ٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجموعة الأعداد الحقيقية ،

ش٢٠١٣ ع٧ س: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٥س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١

$ق(١) = ٥ \times ١ - ١ = ٤$

$\lim\limits_{س \to ١} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س^٢ + ٢س + ٤)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}} = \lim\limits_{س \to ١} (س^٢ + ٢س + ٤)$

$= ٧$

$ق(١) \neq \lim\limits_{س \to ١} ق(س)$

$٤ \neq ٧$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١

ص٢٠١٣ ع٥ س: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \leq ٢ \\ [س + ٣] & س > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢

$ق(٢) = (٢)^٢ + ١ = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} (س^٢ + ١) = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^+} [س + ٣] = \lim\limits_{س \to ٢^+} [س] + ٣ = [٢] + ٣$

$= ٥$

$\because \lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ موجودة

$ق(٢) = \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٥$

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

ص٤٩ س١٤: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \left|\frac{\text{س}}{٢} - ١\right| & ،\ -١ \le \text{س} < ٣ \\ \left[\frac{١}{٢}\text{س} + ٣\right] & ،\ ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ .

$\text{ق}(٣) = \left[\frac{١}{٢} \times ٣ + ٣\right] = \left[\frac{٣}{٢} + ٣\right] = [٤،٥] = ٤$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \left[\frac{١}{٢}\text{س} + ٣\right] \Leftarrow [٤،٥] = ٤$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \left|\frac{\text{س}}{٢} - ١\right| = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \left(\frac{\text{س}}{٢} - ١\right) = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق(س)} \ne \lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق(س)}$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س = ٣ .

ص٤٧ س١٥: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٤\text{س} + ٢ & ،\ ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ١٠ & ،\ \text{س} = ٢ \\ \frac{(٢\text{س} + ١)^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٢} & ،\ ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢

$\text{ق}(٢) = ١٠$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} ٤\text{س} + ٢ = ١٠$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(٢\text{س} + ١)^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(٢\text{س} + ١ - ٥)(٢\text{س} + ١ + ٥)}{\text{س} - ٢}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(٢\text{س} - ٤)(٢\text{س} + ٦)}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ٢)}(٢\text{س} + ٦)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$

$= ٢٠$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق(س)} \ne \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق(س)}$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)}$ غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س = ٢

ص٤٧ س١٥: إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جا}^٢(\text{ب س}) - ٩\text{س}^٢}{\text{س جا ٥س}} & ،\ -\frac{\text{ط}}{٦} \le \text{س} < ٠ \\ ١١ & ،\ \text{س} = ٠ \\ \frac{\text{س}^٢ - (٢ - \text{أ})\text{س}}{\text{أ س}} & ،\ ٠ < \text{س} < \frac{\text{ط}}{٢} \end{cases}$$

إذا كان ق متصلاً عند س = صفر جد قيم أ ، ب .

$\text{ق}(٠) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق(س)}$

$١١ = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\text{جا}^٢(\text{ب س}) - ٩\text{س}^٢}{\text{س جا ٥س}}$

$١١ = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \left(\frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا ب س}}{\text{جا ٥س}} - \frac{٩\cancel{\text{س}^٢}}{\cancel{\text{س}}\ \text{جا ٥س}}\right)$

$١١ = \text{ب} \times \text{ب} - \frac{٩}{٥} \Leftarrow \text{ب}^٢ = ١١ + \frac{٩}{٥}$

$\text{ب}^٢ = \frac{٦٤}{٥}$

$\boxed{\text{ب} = \pm\frac{٨}{\sqrt{٥}}}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = \text{ق}(٠)$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\text{س}^٢ - (٢ - \text{أ})\text{س}}{\text{أ س}} = ١١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} - (٢ - \text{أ}))}{\text{أ}\ \cancel{\text{س}}} = ١١$

$\frac{٠ - ٢ + \text{أ}}{\text{أ}} = ١١$

$١١\text{أ} = -٢ + \text{أ}$

$١٠\text{أ} = -٢$

$\text{أ} = \frac{-٢}{١٠} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -\frac{١}{٥}}$

(شتوي ٢٠١٦ ٤٧) و- اذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٩\text{س}^٢ - ١}{\sqrt{١٧ - ٦\text{س} + ٩\text{س}^٢}} & -\frac{١}{٣} < \text{س} < \frac{١}{٣} \\ -٢ & \text{س} = \frac{١}{٣} \\ -٦\text{س} - [\text{س}] & \frac{١}{٣} < \text{س} < \frac{٤}{٣} \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = $\frac{١}{٣}$.

$\text{ق}(\frac{١}{٣}) = ٢$

$\displaystyle\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}} -٦\text{س} - [\text{س}] = -٦ \times \frac{١}{٣} - [\frac{١}{٣}] = -٢$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩\text{س}^٢ - ١}{\sqrt{١٧ - ٦\text{س} + ٩\text{س}^٢}} = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣\text{س} - ١)(٣\text{س} + ١)}{\sqrt{(١ - ٣\text{س})^٢}}$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٢\text{س} - ١)(٣\text{س} + ١)}{|١ - ٣\text{س}|} = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣\text{س} - ١)(٢\text{س} + ١)}{١ - ٢\text{س}} = -٢$$

$\therefore \displaystyle\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٣}^-} \text{ق}(\text{س}) = -٢ = \text{ق}(\frac{١}{٣})$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = $\frac{١}{٣}$.

(صيفي ٢٠١٦ ٤٨) - إذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(٥ - \text{س}^٢) - [٢\text{س} + ٣]}{١ - \text{س}} & ٠ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} - |١ - \text{س}^٢| & ١ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ١ .

$\text{ق}(١) = ٢ \times ١ - |١ - (١)^٢| = ٢ - ٠ = ٢$

$\displaystyle\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^+} ٢\text{س} - |١ - \text{س}^٢| = \lim_{\text{س} \to ١^+} ٢\text{س} - (\text{س}^٢ - ١)$

$= ٢$

$$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^-} \frac{(٥ - \text{س}^٢) - [٢\text{س} + ٣]}{١ - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^-} \frac{٥ - \text{س}^٢ - ٤}{١ - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^-} \frac{١ - \text{س}^٢}{١ - \text{س}} = \lim_{\text{س} \to ١^-} \frac{\cancel{(١ - \text{س})}(١ + \text{س})}{\cancel{١ - \text{س}}} = ٢$$

$\therefore \displaystyle\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = ٢$

$\therefore \displaystyle \text{ق}(١) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = ٢$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ١ .