# النجوم في

## للمرحلة الثانوية

التكامل
الجزء الاول

**شرح مفصل للمادة**

**أسئلة السنوات السابقة**

**تمارين إضافية**


إعداد الأستاذ

# إياد عباد

0799366611

eyad emad abbad

eyad_abbad


Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

# التكامل غير المحدود

[1] $\int dP = aP + b$

امثلة $\int dr = kr + b$

$\int 5\,dr = 5r + b$

$\int \pi\,dx = \pi x + b$

$\int dx = x + b$

$\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + b$

[2] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + b$

امثلة: $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + b$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + b$

$\int x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + b$

$\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + b$

$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + b$

[1] $\int 5x^4 + 2x + 6\,dx$

$= \frac{5x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} + 6x + b$

$= x^5 + x^2 + 6x + b$

② $\int x^n\,(x^{\frac{1}{2}} + x^{-3})\,dx$

$= \int x^n\,(x^{\frac{1}{2}} + x^{-3})\,dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}} + x^{-2}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + b$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^{-1} + b$

③ $\int \frac{x^6 + 5x^4 + x^2}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{x^6}{x^2} + \frac{5x^4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\,dx$

$= \int x^4 + 5x^2 + 1\,dx$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} + x + b$

تدريب:

$\int (x^3 + 5x^2 + 4)(x^2 + 3)\,dx$

$\int \frac{x^5 + 3x^2 - 15}{x - 3}\,dx$

$\int \frac{x^5}{x^5 - 5}\,dx$

[3] $\int \frac{x^3 - 4x^2}{x^2}\,dx$.

$= \int \frac{x^2(x-4)}{x^2}\,dx$.

$\int \frac{x^2(x^2-4)(x^2+4)}{x^2}\,dx$

$\int x^4 + 4x^2\,dx$

$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + b$

[1] $\int 5x^4 + 2x + 6\,dx$

$= x^5 + x^2 + 6x + b$

تدريب:

① $\int (6 - 5x)(7 + 8x)\,dx$

② $\int \frac{6x^2 - 30}{3x}\,dx$

③ اذا كانت $f$ كثير حدود ضمن الدرجة المناسبة وكانت $f(x) = 3x^2 - 2$ وكانت $(1,6)$ تقع على المنحنى فما قاعدة الاقتران

④ اذا كانت $f' = \frac{1}{x^3}$ ويمر $(2,0)$ وميل المماس عندها $(2,0)$ جد $f$ فما قاعدة $f(x)$.

Scanned by CamScanner

## ) لتكامل المحدود

مثال:
حسب قيمة كلاً مما يلي :

$\int_1^5 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_1^5 = \frac{75}{2} - \frac{3}{2} = 36$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = -1$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$

$\int_2^2 5x\,dx =$

$\int_3^4 3b\,dx = 48$ عندما $b =$

$= 3b(4-2) = 48$

$3b(6) = 48$

$b = \frac{48}{6} = 8$

$\int_{1+b}^{3} 5\,dx = 4$ عندما $b =$

خواص المحدود :

① $\int_a^a f(x)\,dx =$ صفر

② عند عكس حدود التكامل نعكس الاشارة الناتج

① $\int_3^3 3x^2+9x\,dx =$ صفر

② $\int_1^5 f(x)\,dx = 9$ فإن $\int_5^1 f(x)\,dx = -9$

مثال: اجب .

$\int_1^4 3x^2+5x\,dx$

$= x^3 + \frac{5x^2}{2}\Big|_1^4$

$= (64 + \frac{80}{2}) - (1 + \frac{5}{2}) = 101\frac{1}{2}$

مثال:
اذا كانت $\int_1^5 f(x)\,dx = -3$ , $\int_5^1 g(x)\,dx = 18$

احسب $\int_1^5 4f(x) - 5g(x)\,dx$

الحل:

تدريب :
اذا كانت $\int_3^4 f(x)\,dx + 5\int_3^4 f(x)\,dx = 19$

$\int_3^3 f(x)\,dx = 9$ فما قيمة $\int_3^5 f(x)\,dx$

تدريب :
اذا كانت $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ احسب قيمة

$\int_b^a f(x)\,dx$ .

### خاصية الاضافة

اذا كانت $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال : اذا كانت $\int_1^2 f(x)\,dx = 7$

$\int_2^5 f(x)\,dx = 9$ فإن $\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx$

$= 7 + 9 = 16$

Scanned by CamScanner

مثال:

$\int_3^5 (س^2 - 3س + 4)\,دس = 6$ ، $\int_3^8 دس = 4$

أ) $\int_3^8 (س + 3)\,دس$

الحل

$\int_3^5 س\,دس - 3\int_3^5 دس = 4$

$\int_3^5 س\,دس - (3)(5-3) = 4$

$\int_3^5 س\,دس = 10$

$\int_3^8 دس = 20$

الحل

$\int_3^8 (س + 3)\,دس + \int_5^8 س\,دس + \int_3^5 س\,دس$

$= 20 + 6 = 26$

الحل النهائي:

$\int_3^8 (س + 3)\,دس$

$= \int_3^8 س\,دس + 3\int_3^8 دس$

$= 26 + 3(5) = 41$

تدريب:

إذا كانت $\int_9^5 (2س + 3)\,دس = -17$

أوجد $\int_5^9 س\,دس$

الحل

$\int_9^5 (2س + 3)\,دس = -17$

$\int_9^5 2س\,دس + 3\int_9^5 دس = -17$

$\int_9^5 2س\,دس + 3(-4) = -17$

$\int_9^5 2س\,دس = -5$

$\int_5^9 س\,دس = -\frac{5}{2}$

مثال:

إذا كانت $\int_1^3 (2س + \frac{1}{س} - 6)\,دس = 12$

أوجد $\int_1^3 \frac{س^2 - 1}{س}\,دس$

تمارين

١) إذا كانت

$\int_9^5 (2س + 3)\,دس = -17$

$\int_5^9 س\,دس = -2$ .

أوجد $\int_5^9 (4س - 1)\,دس$

٢) إذا كانت $\int_3^8 س\,دس = 20$ ، $\int_3^8 دس = 4$

أوجد $\int_3^8 (س + 3)\,دس$

٣) $\int_2^3 (3س^2 - 3)\,دس = 20$ فما قيمة ب

٤) إذا كانت $\int_3^8 س\,دس = \int_3^8 دس$ ، $\int_3^8 دس \neq 0$

أوجد $\int_3^8 (س + 3)\,دس$

٥) أوجد أكبر حدود ممكنة للعدد الثابت أ بحيث $\int_1^3 س\,دس = 4$ ، $\int_1^3 دس = 2$

٦) إذا كانت

$س = \int_{-2}^{ب} (3ع^2 - 3ع + 4)\,دع$

(أوجد ق(١))

٧) $\int_ب^{-3} دس = 2$ فما قيمة ب .

٨) $\int_{-1}^{1} س(1 - س)\,دس$ = صفر

فما قيمة ب



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<١\\ ٢ك س+١ & ١\le س\le ٣\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$ حيث $ك$ ثابت

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٣} ٢ك س+١\,د س+\int_{١}^{٣} ٥\,د س$

$=[ك س^{٢}+س]_{١}^{٣}+[٥س]_{١}^{٣}$

$=(٩ك+٣)-(ك+١)+(١٥-٥)$

$=٨ك+١٢$

٥) $\int_{١}^{٢} س(س^{٣}+٢)\,د س$ بدون استخدام الحاسبة

الحل نضع $ص=س^{٣}+٢\Rightarrow د ص=٣س^{٢}\,د س$

$\Rightarrow \frac{١}{٣}د ص=س^{٢}\,د س$

$\frac{١}{٣}\int_{١}^{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\,د ص=\frac{١}{٣}\times\frac{٢}{٣}[ص^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٢}$

$=\frac{٢}{٩}(١٠\sqrt{١٠}-٣\sqrt{٣})$

٦) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٣\end{cases}$

اوجد $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{٠}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{٠}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=١٠+(٣٠-١٠)=٣٠$

٧) $\int_{-٢}^{٢} ٨س^{٣}+٩س\,د س=$ صفر

٨) $\int_{-٢}^{٢} ٨س^{٣}+٩س^{٢}\,د س=$ عدد موجب

٩) اذا كان $\int_{٠}^{ك} ٣س^{٢}+٢س\,د س=$ صفر فما قيمة $ك$

الحل $[س^{٣}+س^{٢}]_{٠}^{ك}=$ صفر

$ك^{٣}+ك^{٢}=$ صفر

$ك^{٢}(ك+١)=$ صفر

$ك=$ صفر او $ك=-١$

١٠) اذا كان $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٨$ فاوجد $\int_{٠}^{٢} ٣ق(س)+٥\,د س$

الحل $=٣\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٠}^{٢} ٥\,د س$

$=٣(٨)+[٥س]_{٠}^{٢}$

$=٢٤+١٠=٣٤$

١١) اذا كان $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=١٠$ ، $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٣$

فاوجد $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$١٠=٣+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س=٧$

١٢) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

١٣) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

١٤) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

١٥) $\int_{١}^{٢} س(س^{٣}+٢)\,د س$ بدون استخدام الحاسبة

الحل نضع $ص=س^{٣}+٢\Rightarrow د ص=٣س^{٢}\,د س$

$\Rightarrow \frac{١}{٣}د ص=س^{٢}\,د س$

$\frac{١}{٣}\int_{١}^{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\,د ص=\frac{١}{٣}\times\frac{٢}{٣}[ص^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٢}$

$=\frac{٢}{٩}(١٠\sqrt{١٠}-٣\sqrt{٣})$

١٦) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<١\\ ٢ك س+١ & ١\le س\le ٣\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$ حيث $ك$ ثابت

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٣} ٢ك س+١\,د س+\int_{١}^{٣} ٥\,د س$

$=[ك س^{٢}+س]_{١}^{٣}+[٥س]_{١}^{٣}$

$=(٩ك+٣)-(ك+١)+(١٥-٥)$

$=٨ك+١٢$

١٧) اذا كان $\int_{٠}^{ك} ٣س^{٢}+٢س\,د س=$ صفر فما قيمة $ك$

الحل $[س^{٣}+س^{٢}]_{٠}^{ك}=$ صفر

$ك^{٣}+ك^{٢}=$ صفر

$ك^{٢}(ك+١)=$ صفر

$ك=$ صفر او $ك=-١$

١٨) اذا كان $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٨$ فاوجد $\int_{٠}^{٢} ٣ق(س)+٥\,د س$

الحل $=٣\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٠}^{٢} ٥\,د س$

$=٣(٨)+[٥س]_{٠}^{٢}$

$=٢٤+١٠=٣٤$

١٩) اذا كان $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=١٠$ ، $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٣$

فاوجد $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$١٠=٣+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س=٧$

٢٠) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

٢١) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

٢٢) $\int_{١}^{٢} س(س^{٣}+٢)\,د س$ بدون استخدام الحاسبة

الحل نضع $ص=س^{٣}+٢\Rightarrow د ص=٣س^{٢}\,د س$

$\Rightarrow \frac{١}{٣}د ص=س^{٢}\,د س$

$\frac{١}{٣}\int_{١}^{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\,د ص=\frac{١}{٣}\times\frac{٢}{٣}[ص^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٢}$

$=\frac{٢}{٩}(١٠\sqrt{١٠}-٣\sqrt{٣})$

٢٣) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<١\\ ٢ك س+١ & ١\le س\le ٣\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$ حيث $ك$ ثابت

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٣} ٢ك س+١\,د س+\int_{١}^{٣} ٥\,د س$

$=[ك س^{٢}+س]_{١}^{٣}+[٥س]_{١}^{٣}$

$=(٩ك+٣)-(ك+١)+(١٥-٥)$

$=٨ك+١٢$

٢٤) اذا كان $\int_{٠}^{ك} ٣س^{٢}+٢س\,د س=$ صفر فما قيمة $ك$

الحل $[س^{٣}+س^{٢}]_{٠}^{ك}=$ صفر

$ك^{٣}+ك^{٢}=$ صفر

$ك^{٢}(ك+١)=$ صفر

$ك=$ صفر او $ك=-١$

٢٥) اذا كان $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٨$ فاوجد $\int_{٠}^{٢} ٣ق(س)+٥\,د س$

الحل $=٣\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٠}^{٢} ٥\,د س$

$=٣(٨)+[٥س]_{٠}^{٢}$

$=٢٤+١٠=٣٤$

٢٦) اذا كان $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=١٠$ ، $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س=٣$

فاوجد $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س=\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$١٠=٣+\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س=٧$

٢٧) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

٢٨) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<٢\\ ٣س^{٢}+١ & ٢\le س\le ٤\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٢} ٥\,د س+\int_{٢}^{٣} ٣س^{٢}+١\,د س$

$=[٥س]_{١}^{٢}+[س^{٣}+س]_{٢}^{٣}$

$=٥+(٣٠-١٠)=٢٥$

٢٩) $\int_{١}^{٢} س(س^{٣}+٢)\,د س$ بدون استخدام الحاسبة

الحل نضع $ص=س^{٣}+٢\Rightarrow د ص=٣س^{٢}\,د س$

$\Rightarrow \frac{١}{٣}د ص=س^{٢}\,د س$

$\frac{١}{٣}\int_{١}^{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\,د ص=\frac{١}{٣}\times\frac{٢}{٣}[ص^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٢}$

$=\frac{٢}{٩}(١٠\sqrt{١٠}-٣\sqrt{٣})$

٣٠) اذا كان $ق(س)=\begin{cases}٥ & ٠\le س<١\\ ٢ك س+١ & ١\le س\le ٣\end{cases}$

اوجد $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$ حيث $ك$ ثابت

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س=\int_{١}^{٣} ٢ك س+١\,د س+\int_{١}^{٣} ٥\,د س$

$=[ك س^{٢}+س]_{١}^{٣}+[٥س]_{١}^{٣}$

$=(٩ك+٣)-(ك+١)+(١٥-٥)$

$=٨ك+١٢$



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢) اذا كان $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & 0\le x\le 1\\ 2x & 1<x\le 3\end{cases}$

اوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$ ثم اوجد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الحل $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 (x^2+1)\,dx+\int_1^3 5\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+5x\Big|_1^3$

$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0+15-5$

$=\frac{4}{3}+10=\frac{34}{3}$

٣) اذا كان $f(x)=|x+1|$ ، $x\in[-2,3]$

اوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

الحل: $|x+1|$ ← نعيد التعريف

$x=-1$ ← $-2$ | $-$ | $-1$ | $+$ | $3$

$\begin{cases}-x-1 & -2\le x<-1\\ x+1 & -1\le x\le 3\end{cases}$

$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{3}(x+1)\,dx$

$=\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{3}$

$=\left(\frac{1}{2}-1\right)-(-2+2)+\left(\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{21}{2}$

٤) $\int_0^5 [\frac{1}{2}x+1]\,dx$

نعيد التعريف $[\frac{1}{2}x+1]$

$\frac{1}{2}x+1=2$ ← $x=2$

$\frac{1}{2}x+1=3$ ← $x=4$

$\frac{1}{2}x+1=4$ ← $x=6$

| 0 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | |

$=\begin{cases}1 & 0\le x<2\\ 2 & 2\le x<4\\ 3 & 4\le x<5\end{cases}$

$=\int_0^2 1\,dx+\int_2^4 2\,dx+\int_4^5 3\,dx$

$=1(2-0)+2(4-2)+3(5-4)=7$

٥) $\int_1^2 (\frac{1}{x}+x)\,dx$ بدون حاسبة

الحل نبدأ بـ $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|$

$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

الطريقة: $\int x\,dx+\int \frac{1}{x}\,dx$

$=\frac{x^2}{2}+\ln|x|\Big|_1^2$

$=(2+\ln 2)-(\frac{1}{2}+\ln 1)$

$=\frac{3}{2}+\ln 2$

٦) اذا كان $\int_0^5 f(x)\,dx=6$ ، $\int_0^8 f(x)\,dx=14$

فما قيمة $\int_5^8 f(x)\,dx$

الحل: $\int_0^8 f(x)\,dx=\int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx$

$14=6+\int_5^8 f(x)\,dx$

$\int_5^8 f(x)\,dx=8$

٧) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx=$ صفر

٨) $\int_{-2}^{2} x^3+6x\,dx=$ صفر

٩) $\int_a^b f(x)\,dx=$ صفر

١٠) $\int_a^b cx+d\,dx=$ صفر عندما $a=-b$

$\int_a^b cx\,dx+\int_a^b d\,dx=$ صفر

$\frac{cx^2}{2}+dx\Big|_a^b=$ صفر

$\left(\frac{cb^2}{2}+db\right)-\left(\frac{ca^2}{2}+da\right)=$ صفر

$\frac{c}{2}b^2+db-\frac{c}{2}a^2-da=$ صفر

$\frac{c}{2}(b^2-a^2)+d(b-a)=$ صفر

$(b-a)\left(\frac{c}{2}(b+a)+d\right)=$ صفر

$\frac{c}{2}(b+a)+d=0$

$\frac{c}{2}(b+a)=-d$

$b+a=-\frac{2d}{c}$

$a=-b$

١١) $\int_{-3}^{3} x^2+bx+c\,dx=$ صفر ، $\int_{-3}^{3} x^2+bx+c\,dx=$ صفر

$\int_{-3}^{3} x^2\,dx+\int_{-3}^{3} bx\,dx+\int_{-3}^{3} c\,dx=$ صفر

$\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\Big|_{-3}^{3}=$ صفر

$(9+\frac{9b}{2}+3c)-(-9+\frac{9b}{2}-3c)=$ صفر

$18+6c=$ صفر

$6c=-18$

$c=-3$

$\int_{-3}^{3} x^3+bx^2+cx\,dx=$ صفر

$\frac{x^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\Big|_{-3}^{3}=$ صفر

$(\frac{81}{4}+9b-\frac{9c}{2})-(\frac{81}{4}-9b-\frac{9c}{2})=$ صفر

$18b=$ صفر

$b=$ صفر

بالتعويض $b=0$ ، $c=-3$ في $\int_{-3}^{3} x^3+bx^2+cx\,dx=$ صفر

$\int_{-3}^{3} x^3-3x\,dx=$ صفر

$\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-3}^{3}=$ صفر

$(\frac{81}{4}-\frac{27}{2})-(\frac{81}{4}-\frac{27}{2})=$ صفر

$0=$ صفر

١٢) $\int_a^b cx+d\,dx=$ صفر ، $\int_a^b cx^2+dx+e\,dx=$ صفر

$\int_a^b cx\,dx+\int_a^b d\,dx=$ صفر

$\frac{cx^2}{2}+dx\Big|_a^b=$ صفر

$\left(\frac{cb^2}{2}+db\right)-\left(\frac{ca^2}{2}+da\right)=$ صفر

$\frac{c}{2}b^2+db-\frac{c}{2}a^2-da=$ صفر

$\frac{c}{2}(b^2-a^2)+d(b-a)=$ صفر

$(b-a)\left(\frac{c}{2}(b+a)+d\right)=$ صفر

$\frac{c}{2}(b+a)+d=0$

$\frac{c}{2}(b+a)=-d$

$b+a=-\frac{2d}{c}$

$a=-b$

$\int_a^b cx^2+dx+e\,dx=$ صفر

$\frac{cx^3}{3}+\frac{dx^2}{2}+ex\Big|_a^b=$ صفر

$\left(\frac{cb^3}{3}+\frac{db^2}{2}+eb\right)-\left(\frac{ca^3}{3}+\frac{da^2}{2}+ea\right)=$ صفر

$\frac{c}{3}b^3+\frac{d}{2}b^2+eb-\frac{c}{3}a^3-\frac{d}{2}a^2-ea=$ صفر

$\frac{c}{3}(b^3-a^3)+\frac{d}{2}(b^2-a^2)+e(b-a)=$ صفر

$(b-a)\left(\frac{c}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{d}{2}(b+a)+e\right)=$ صفر

$\frac{c}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{d}{2}(b+a)+e=0$

$\frac{c}{3}(b^2+ab+a^2)=-e$

$b^2+ab+a^2=-\frac{3e}{c}$

$a=-b$

١٣) $\int_a^b cx^3+dx^2+ex+f\,dx=$ صفر ، $\int_a^b cx^3+dx^2+ex+f\,dx=$ صفر

$\int_a^b cx^3\,dx+\int_a^b dx^2\,dx+\int_a^b ex\,dx+\int_a^b f\,dx=$ صفر

$\frac{cx^4}{4}+\frac{dx^3}{3}+\frac{ex^2}{2}+fx\Big|_a^b=$ صفر

$\left(\frac{cb^4}{4}+\frac{db^3}{3}+\frac{eb^2}{2}+fb\right)-\left(\frac{ca^4}{4}+\frac{da^3}{3}+\frac{ea^2}{2}+fa\right)=$ صفر

$\frac{c}{4}b^4+\frac{d}{3}b^3+\frac{e}{2}b^2+fb-\frac{c}{4}a^4-\frac{d}{3}a^3-\frac{e}{2}a^2-fa=$ صفر

$\frac{c}{4}(b^4-a^4)+\frac{d}{3}(b^3-a^3)+\frac{e}{2}(b^2-a^2)+f(b-a)=$ صفر

$(b-a)\left(\frac{c}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{d}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{e}{2}(b+a)+f\right)=$ صفر

$\frac{c}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{d}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{e}{2}(b+a)+f=0$

$\frac{c}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{d}{3}(b^2+ab+a^2)=-f$

$b^3+ab^2+a^2b+a^3+\frac{4d}{3c}(b^2+ab+a^2)=-\frac{4f}{c}$

$a=-b$

١٤) $\int_a^b cx^4+dx^3+ex^2+fx+g\,dx=$ صفر ، $\int_a^b cx^4+dx^3+ex^2+fx+g\,dx=$ صفر

$\int_a^b cx^4\,dx+\int_a^b dx^3\,dx+\int_a^b ex^2\,dx+\int_a^b fx\,dx+\int_a^b g\,dx=$ صفر

$\frac{cx^5}{5}+\frac{dx^4}{4}+\frac{ex^3}{3}+\frac{fx^2}{2}+gx\Big|_a^b=$ صفر

$\left(\frac{cb^5}{5}+\frac{db^4}{4}+\frac{eb^3}{3}+\frac{fb^2}{2}+gb\right)-\left(\frac{ca^5}{5}+\frac{da^4}{4}+\frac{ea^3}{3}+\frac{fa^2}{2}+ga\right)=$ صفر

$\frac{c}{5}b^5+\frac{d}{4}b^4+\frac{e}{3}b^3+\frac{f}{2}b^2+gb-\frac{c}{5}a^5-\frac{d}{4}a^4-\frac{e}{3}a^3-\frac{f}{2}a^2-ga=$ صفر

$\frac{c}{5}(b^5-a^5)+\frac{d}{4}(b^4-a^4)+\frac{e}{3}(b^3-a^3)+\frac{f}{2}(b^2-a^2)+g(b-a)=$ صفر

$(b-a)\left(\frac{c}{5}(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4)+\frac{d}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{e}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{f}{2}(b+a)+g\right)=$ صفر

$\frac{c}{5}(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4)+\frac{d}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{e}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{f}{2}(b+a)+g=0$

$\frac{c}{5}(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4)+\frac{d}{4}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{e}{3}(b^2+ab+a^2)=-g$

$b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4+\frac{5d}{4c}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)+\frac{5e}{3c}(b^2+ab+a^2)=-\frac{5g}{c}$

$a=-b$

١٥) $\int_1^2 x^2+\frac{1}{x}\,dx$ بدون حاسبة

الحل نبدأ بـ $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|$

$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

الطريقة: $\int x^2\,dx+\int \frac{1}{x}\,dx$

$=\frac{x^3}{3}+\ln|x|\Big|_1^2$

$=(\frac{8}{3}+\ln 2)-(\frac{1}{3}+\ln 1)$

$=\frac{7}{3}+\ln 2$



Scanned by CamScanner

**خاصية المقارنة**

1. اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ على $[a,b]$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
2. اذا كانت $f(x)$ موجبة على $[a,b]$
فانه تكاملها موجب على نفس الفترة.
3. اذا كانت $f(x)$ سالبة على $[a,b]$
فانه تكاملها سالب على نفس الفترة.
4. تستخدم المقارنة في الحالات التالية:
1. معرفة اشارة التكامل.
2. معرفة اي التكاملات أكبر
3. ايجاد اصغر واكبر قيمة للتكامل.

---

10. $\int_2^6 3f(x)\,dx = 15$ و $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$
فما قيمة $\int_5^6 f(x)\,dx$

الحل: $\int_2^6 3f(x)\,dx = 15 \Leftarrow \int_2^6 f(x)\,dx = 5$
المطلوب: $\int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx = \int_2^6 f(x)\,dx$
$\int_5^6 f(x)\,dx = 5 - 3 = 2$

---

11. $\int_1^3 2x\,dx = F(3) - F(1) = 4 - 1 = 3$
فما قيمة $\int_1^3 (3x^2 + 4x)\,dx = -12$

الحل $\int_1^3 (3x^2+4x)\,dx = 12$
$\int_1^3 3x^2\,dx + \int_1^3 4x\,dx = -12$
$3\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 2x\,dx = -12$
$= \int_1^3 3x^2 - 2\times 2\int_1^3 2x\,dx = -12$
$= \int_1^3 3x^2 - 4\int_1^3 2x\,dx = -12$
$x^3\Big|_1^3 - 3x^2\Big|_1^3 = -12$
$= (27-9) - (-1+3) = -12$
$= 18 - 12 = -12$
$18 = 12 \Leftarrow$ خطأ $\Leftarrow$ لا يوجد قيمة

---

12. اذا كانت $\int_2^4 f(x)\,dx = 8$ و $\int_2^4 g(x)\,dx = 12$
فما قيمة $\int_2^4 [3g(x) - 4f(x) - 8]\,dx$

الحل: $\int_2^4 3g(x)\,dx = 12 \Leftarrow \int_2^4 g(x)\,dx = 4$
المطلوب: $3\int_2^4 g(x)\,dx - 4\int_2^4 f(x)\,dx - \int_2^4 8\,dx$
$= 3\times 4 - 4\times 8 - 8(4-2) = -24$

---

13. اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 6-x^2 & , x \leq 3 \\ 2x & , x > 3 \end{cases}$
وكان $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = 8$ فما قيمة $a$ (واجب)

---

1. أيهما أكبر $\int_1^2 (x^3+1)\,dx$ أم $\int_1^2 (x^4+3x)\,dx$

الحل: $x^3+1 < x^4+3$
$\int_1^2 x^3+1\,dx < \int_1^2 x^4+3x\,dx$ الاكبر

2. اثبت أن $\int_1^3 x^3\,dx \leq \int_1^3 x^4\,dx$

الحل $x \leq x^4$ على $[1,3]$
بتكامل الطرفين $\Rightarrow \int_1^3 x^3\,dx \leq \int_1^3 x^4\,dx$

3. ايهما أكبر $\int_1^2 \sin x\,dx$ أم $\int_1^2 x^4\,dx$

الحل: $x^4 \geq \sin x$ على $[0,1]$
$\Rightarrow \int_1^2 x^4\,dx \geq \int_1^2 \sin x\,dx$

4. ليكن $f(x) = \frac{5x+2}{x^4+4}$ , $x \in [0,2]$
صار اشارة $\int_0^2 f(x)\,dx$
الحل: - نعلم أنه $x^4+4 > 0$ لكل $x \in [0,2]$
وأنه $5x+2 > 0$ لكل $x \in [0,2]$
اذاً $\frac{5x+2}{x^4+4} > 0$ لكل $x \in [0,2]$
$\Rightarrow$ اشارة $\int_0^2 \frac{5x+2}{x^4+4}\,dx$ موجب

5. صار اشارة $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^4+2}\,dx$ (واجب)



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

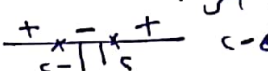
٦ بدون استخدام التكامل جد قيمة $\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x)\,dx$

الحل: نجد أصفار $x^3 - 3x$ على $[-1,1]$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0, \pm\sqrt{3}$




لذلك $x^3 - 3x$ سالبة على $[-1,1]$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x)\,dx$ سالبة

٧ بين أن $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ ينحصر بين

العددين صفر و ٢

الحل ١- نجد القيم الصغرى والعظمى حيث

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ على $[-1,1]$

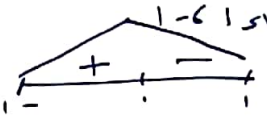
$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$x = 0$

أصفار البسط $x = 0$ حرجة

أصفار المقام $1 - x^2 = 0$ حرجة $x = \pm 1$

الحرجة $= \{-1, 0, 1\}$




$f(0) = 1$ ← أكبر قيمة

$f(1) = 0$, $f(-1) = 0$ ← أصغر قيمة

$\Rightarrow 0 \le f(x) \le 1$ لكل $x \in [-1,1]$

$\int_{-1}^{1} 0\,dx \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \le \int_{-1}^{1} 1\,dx$

$0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \le 2$

٨ اثبت أن $0 \le \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \le 18$

واضح

٩ بين أن $6 \le \int_{1}^{4} (3\sin x + 5)\,dx \le 24$

الحل: $-1 \le \sin x \le 1$

$(-3 \le 3\sin x \le 3) + 5$

$2 \le 3\sin x + 5 \le 8$ نكامل $\int_{1}^{4}$

$\int_{1}^{4} 2\,dx \le \int_{1}^{4} (3\sin x + 5)\,dx \le \int_{1}^{4} 8\,dx$

$6 \le \int_{1}^{4} (3\sin x + 5)\,dx \le 24$

١٠ بين أنه $\int_{-3}^{3} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ ينحصر بين الصفر و ٦

الحل: $0 \le x \le 1$

$0 \le x^3 \le 1$ — ①

$0 \le x \le 1$

$(0 \le x^2 \le 1) + 1$

$1 \le x^2 + 1 \le 2$ نأخذ الجذر

$1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$ — ②

اضرب المعادلة ① في ②

$0 \le x^3\sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$ نكامل $[0, 3]$

$\int_{0}^{3} 0\,dx \le \int_{0}^{3} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_{0}^{3} \sqrt{2}\,dx$

صفر $\le \int_{-3}^{3} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \le 6$ (لأن $-3 \to 0$)

صفر $\le \int_{-3}^{3} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \le 6$

١١ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{p}{p-1}(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ x^p & 1 < x \le 2 \end{cases}$

اثبت $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ موجب حيث $p > 1$

الحل: $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{p}{p-1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2} x^p\,dx$

$= \frac{p}{p-1}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^2$

$= \frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$= \frac{p}{2(p-1)} + \frac{2^{p+1} - 1}{p+1} > 0$

١٢ اذا كانت $f$ متصل على $[0, 5]$

وكان $-2 \le f(x) \le 3$ لكل $x \in [0, 5]$

فأثبت أن يوجد $m, n$ بحيث $m \le \int_{0}^{5} f(x)\,dx \le n$

الحل: $-2 \le f(x) \le 3$

$\int_{0}^{5} -2\,dx \le \int_{0}^{5} f(x)\,dx \le \int_{0}^{5} 3\,dx$

$-10 \le \int_{0}^{5} f(x)\,dx \le 15$ ⇐ $m = -10$, $n = 15$

١٣ اذا كان $3 \le f(x) \le 6$ لكل $[2, 4]$

فأثبت أن يوجد $m, n$ بحيث $m \le \int_{2}^{4} 5 - f(x)\,dx \le n$

الحل: $3 \le f(x) \le 6$ × $-1$

$-3 \ge -f(x) \ge -6$ نجمع 5

$2 \ge 5 - f(x) \ge -1$ نكامل $[2, 4]$

$\int_{2}^{4} 2\,dx \ge \int_{2}^{4} 5 - f(x)\,dx \ge \int_{2}^{4} -1\,dx$

$4 \ge \int_{2}^{4} 5 - f(x)\,dx \ge -2$

$m$ ↓ $n$



Scanned by CamScanner

مثال
دون اجراء التكامل بين أن
$\int_{0}^{\pi} (1+\sin x)\,dx \geq$ صفر .

الحل : نوجد اشارة $1+\sin x$ على $[0, 2\pi]$
$1+\sin x \geq$ صفر لكل $[0, 2\pi]$
$\Leftarrow \int_{0}^{2\pi} 1+\sin x \geq$ صفر

مثال :
بين أن
$\int_{-2}^{0} x^4+3 \leq \int_{-2}^{0} 3x^3\,dx$
دون حساب التكامل .

الحل $f(x)=x^4+3$ ، $g(x)=3x^3$
$h(x)=f(x)-g(x)$
نوجد اشارة $h(x)$ على $[-2, 0]$
$\Leftarrow x^4-3x^3+3 \geq$ صفر
$\Leftarrow x^4+3 \geq 3x^3$ لكل $[-2, 0]$
$\Leftarrow \int_{-2}^{0} x^4+3\,dx \geq \int_{-2}^{0} 3x^3\,dx$ .

مثال :
بين أن $\int_{0}^{2\pi} 3+\cos x\,dx$ ينحصر بين
$6\pi$ ، $8\pi$ دون اجراء التكامل

الحل :
$-1 \leq \cos x \leq 1$ لكل $[0, 2\pi]$
$0 \leq \cos x \leq 1$
$3 \leq 3+\cos x \leq 4$
$\int_{0}^{2\pi} 3\,dx \leq \int_{0}^{2\pi} 3+\cos x\,dx \leq \int_{0}^{2\pi} 4\,dx$
$6\pi \leq \int_{0}^{2\pi} 3+\cos x\,dx \leq 8\pi$

تدريب
① صا قيم م ، ك في كلا من التاليين

① $m \leq \int_{1}^{2} \frac{x}{1+x^2}\,dx \leq k$

② $m \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}\,dx \leq k$

③ $m \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \leq k$

الحل :



Scanned by CamScanner

**١٤** اصغر، اكبر قيمة للمقدار $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -3\sin x \, dx$

الحل $f(x) = -3\sin x$

$f'(x) = -\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$

| | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + |

$x = 0$ عندها $f(0) = 3$

$x = \frac{\pi}{2}$ صغرى $f(\frac{\pi}{2}) = 2$

$x = \pi$ عظمى $f(\pi) = 3$

$2 \le -3\sin x \le 3$

$\int_{\pi}^{\pi} 2 \, dx \le \int_{\pi}^{\pi} -3\sin x \, dx \le \int_{\pi}^{\pi} 3 \, dx$

$2\pi \le \int_{\pi}^{\pi} -3\sin x \, dx \le 3\pi$

اكبر قيمة هي $3\pi$

**١٥** $\int_{0}^{7} |x-6| \, dx$

| | 6 | 7 |
|---|---|---|
| $x-6$ | − | + |

$= \int_{0}^{6} -x+6 \, dx + \int_{6}^{7} x-6 \, dx$

$= [6x - \frac{x^2}{2}]_0^6 + [\frac{x^2}{2} - 6x]_6^7$

$= (36-18) - 0 + (\frac{49}{2} - 42) - (18-36) = 13$

**١٦** $\int_{-1}^{3} |3x-2| \, dx$

$3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} = 0.5$

| | $-1$ | 0.5 | 3 |
|---|---|---|---|
| $3x-2$ | − | + | |

$= \int_{-1}^{0.5} -3x+2 \, dx + \int_{0.5}^{3} 3x-2 \, dx$

$= [-\frac{3x^2}{2} + 2x]_{-1}^{0.5} + [\frac{3x^2}{2} - 2x]_{0.5}^{3} = \dots = 6.5$

**١٧** $\int_{-2}^{3} |x^2 - x - 3| \, dx$

$x^2 - x - 3 = 0$

$x = -1, 3$

$(x-3)(x+1) = 0$

| | $-2$ | $-1$ | 3 |
|---|---|---|---|
| $(x-3)(x+1)$ | + | − | + |

$= \int_{-2}^{-1} x^2 - x - 3 \, dx + \int_{-1}^{3} -x^2 + x + 3 \, dx$

$= [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x]_{-2}^{-1} + [-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x]_{-1}^{3}$

$= \frac{5}{6} + \frac{32}{3} = \frac{37}{2}$

**١٨** $\int_{-1}^{2} 3x|x| \, dx$ واجب

**١٩** $\int_{-2}^{2} x^2 + 3 - |1-x| \, dx$ واجب

الجواب $\frac{52}{3}$

**٢٠** $\int_{-1}^{3} [x+3] \, dx$

$[x+3] = 1$ عندما $-2 \le x < -1$

$= 2$ عندما $-1 \le x < 0$

$= 3$ عندما $0 \le x < 3$

$= 4$ عندما $3 \le x < 4$

$\int_{-1}^{-2} 1 \, dx + \int_{-2}^{0} 2 \, dx + \int_{0}^{3} 3 \, dx = 1 + 4 + 9 = 14$

**٢١** $\int_{-1}^{3} [-x-1] \, dx$

$[-x-1] = 1$ عندما $-2 < x \le -1$

$= 0$ عندما $-1 < x \le 0$

$= -1$ عندما $0 < x \le 1$

$= -2$ عندما $1 < x \le 2$

$= -3$ عندما $2 < x \le 3$

$\int_{-1}^{-2} 1 \, dx + \int_{-2}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{1} -1 \, dx + \int_{1}^{2} -2 \, dx + \int_{2}^{3} -3 \, dx$

$= 1 + 0 - 1 - 2 - 3 = -5$

**٢٢** $\int_{2}^{3} x[x+3] \, dx$ واجب

**٢٣** $\int_{1}^{3} 3x - [-x] \, dx$ واجب

**٢٤** $\int_{1}^{3} |x-2| + [3-x] \, dx$

$|x-2|$

| | 2 | |
|---|---|---|
| | − | + |

$[3-x]$

$[3-x] = 1$ عندما $1 \le x < 2$

$= 0$ عندما $2 \le x < 3$

$= -1$ عندما $3 \le x < 4$

$f = \begin{cases} -x+2+1 & 1 \le x < 2 \\ x-2+0 & 2 \le x < 3 \\ x-2-1 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

$\int_{1}^{2} -x+3 \, dx + \int_{2}^{3} x-2 \, dx + \int_{3}^{4} x-3 \, dx$

$= [-\frac{x^2}{2} + 3x]_1^2 + [\frac{x^2}{2} - 2x]_2^3 + [\frac{x^2}{2} - 3x]_3^4 = \dots = 0$ الباقي

**٢٥** اثبت أن $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \ge 0$

الحل: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$0 \le \tan x \le 1$ $\quad [0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \ge 0$ الباقي

**٢٦** اذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1 \\ x^2 & 1 < x \le 3 \end{cases}$

جد $\int_{-2}^{3} f(x) \, dx = 10$ ، $c > 1$ حيث $c$ تحقق

الحل: $\int_{0}^{1} 3x \, dx + \int_{1}^{c} x^2 \, dx = 10$

$\frac{3}{2} + \frac{c^3}{3} - \frac{1}{3} = 10 \Rightarrow c^3 = 30 - 3 = 27$

$c = \sqrt[3]{27} = 3$



Scanned by CamScanner

## معكوس المشتقة

**تعريف:-**
اذا كان $f$ اقتران متصل على الفترة $[a,b]$ فإن $F(x)$ يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران $f(x)$ واذا كان $F'(x)=f(x)$ لكل $(a,b)$

**ملاحظة:-**
اذا كانت $f(x)=3x^2$ سنجد عدداً نهائياً من الاقترانات التي مشتقتها $3x^2$ مثل $x^3$ ، $x^3+1$ ، $x^3-\frac{1}{2}$ ، $x^3+\sqrt{3}$ ، .....
ويمكن كتابتها على الصورة $F(x)=x^3+c$ حيث $c$ عدد ثابت يسمى معكوس المشتقة حيث $F'(x)=f(x)$ .

**مثال(١):-**
بين أن الاقتران $F(x)=x^5+4x^2+2$ هو معكوس مشتقة الاقتران $f(x)=5x^4+8x$

**الحل:-**
$f$ متصل لانه كثير حدود ⇐
$F'(x)=5x^4+8x=f(x)$
⇐ $F(x)$ هو معكوس مشتقة $f(x)$

**مثال(٢)**
بين أن $F(x)=x^4-\cos x-\frac{1}{3}x$
هو معكوس مشتقة $f(x)=4x^3-\sin x$

**مثال(٣):**
اذا كانت $F(x)$ ، $H(x)$ هما معكوسين لمشتقة $f(x)$
وكانت $L(x)=F(x)-H(x)$
ما صحيح $L'(4)$ .

**الحل:-**
$F$ ، $H$ معكوسا مشتقة $f$
⇐ $F(x)-H(x)=$ صفر (ثابت)
$L(x)=$ ثابت ⇐ $L'(x)=$ صفر

**تدريب:-**
اذا كانت $F(x)$ ، $L(x)$ معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل $f(x)$ وكانت $L(x)=3F(x)-5$ احسب $L'(x)$ بدلالة $f(x)$ .

**مثال(٤):-**
احسب معكوس المشتقة لكل مما يلي:-
① $f(x)=\sin x$
$F(x)=-\cos x+c$ .
② $f(x)=\sec^2 x$
$F(x)=\tan x+c$
③ $f(x)=9x^8$
$F(x)=x^9+c$

**مثال(٥):**
اذا كانت $f(x)dx=x^2-\cos x+2$ .
احسب $f(x)$ ، $F(x)$ .

**الحل:**
اشتقة الطرفين
$f(x)=2x+\sin x$
$F(x)=x^2+\cos x$

**تدريب:**
اذا كانت $f$ اقتران متصل وكان $f(x)\sec^2 x\,dx=1+x^3$
احسب $f(x)$

اذا كانت
$f(x)+2x\,dx=x^3+bx^2+9$
وكانت $f(1)=7$ فما قيمة $b$

**الحل** نشتق الطرفين
$f(x)+2x=3x^2+2bx$
$f(1)+2=3(1)^2+2b(1)$
$7+2=3+2b$
$b=3$



Scanned by CamScanner

**مثال**
اذا كانت $\int_{0}^{س} ق(ن)\,د ن = جا س - ٢$ جتا س + ١
وكانت $ق(\frac{\pi}{٤}) = ٣$ فما قيمة ٢ .

**مثال :**
اذا كانت $ق = ٣ س^{٢}$ اجب ٢ معكوس
المشتقة علماً ٢(٢) = ٥

**مثال:**
اذا كانت ٢(١) = ٢ ، معكوسه لمشتقة ق
وكانت ٢(١) = ٣ ك$^{٣}$ − ٢ ك + ٥ ، ٢(٢) = ٤
اجب قاعدة ٢(س)

**مثال:**
بين أنه ٢(س) = $\frac{س}{\sqrt{س}+١}$ هو معكوس لمشتقة
ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ ، $\sqrt{س} \neq -١$

**مثال :**
بين أنه ٢(س) = جا س هو معكوس لمشتقة
ق(س) = جا س

**تدريب :**
① اذا كان $\int ق(س)\,د س = ك^{٣} - ك^{٢} + ٢ك + ١$
اجب ق(−٣)

② اذا كان $\int ق(س)\,د س$ = جا س − جتا س + ٣
اثبت ق($\frac{\pi}{٢}$) − ق(٠) = ٢ .

③ اجب معكوس لمشتقة صايكي :
① ق(س) = $\frac{١}{س}$
② ق(س) = قا س جتا س
③ ق(س) = $\frac{١}{٢ جا س}$
④ ق(س) = ٥ ظا$^{٢}$ س + ٥

④ اذا كانت ٢(س) هو معكوس لمشتقة ق
ق(س) = ظتا س + ١ ، اجب ٢($\frac{\pi}{٤}$) .

**مثال:**
اذا كانت ٢ = ٢ ك$^{٤}$ + ٦ س$^{٢}$ + ٣ معكوساً
لمشتقة ق اجب ق(١)



Scanned by CamScanner

الأستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

م(س) المشتقة العكسية

مثلاً: اذا كانت هـ = ٢س وكان
م١(س) = س٢ + ١
م٢(س) = س٢ - ٤
م٣ = س٢ + ٤
فإن م١ = م٢ = م٣ = هـ(س) = ٢س
اذاً م١ ، م٢ ، م٣ في ثلاث اقترانات معكوس مشتقة هـ

مشتقة الاقتران الاصلي = الاقتران الاصلي
م(س) = هـ(س)

تكامل الاقتران الاصلي = معكوس المشتقة
∫ هـ(س) = م(س)

اذا كان م(س) بدائي لـ هـ(س) فإن ∫ هـ(س) دس = م(ب) - م(أ)

١ اذا كانت م(س) = س٢ + ٤س هو معكوس مشتقة
للاقتران هـ اجد هـ(١).
الحل: هـ(س) = م'(س) = ٢س + ٤
هـ = ٢س + ٤ ⇒ هـ(١) = ٢×١ + ٤ = ٦

٢ اجد الاقتران الذي معكوس مشتقته للاقتران هـ = ٣س٢ + ٢س
الحل م(س) = ∫ هـ(س) دس
= ∫ ٣س٢ + ٢س دس
= ٣س٣/٣ + ٢س٢/٢ + جـ

٣ اجد معكوس المشتقة س ∈ [-١، ٢]
للاقتران هـ = س٢ + ١
الحل:
م(س) = ∫ هـ(س) دس
= ∫ س٢ + ١ دس
= س٣/٣ + س |-١ ٢
= (٨/٣ + ٢) - (-١/٣ - ١) = ٢٢/٣

٤ اذا كان م(س) بدائي للاقتران هـ(س) بحيث
م(١) = ٣ ، م(٤) = ٩ اجد ∫ هـ(س) دس
الحل = ∫ هـ(س) = م(٤) - م(١)
= ٩ - ٣ = ٦

٥ اذا كان م(س) = √(س٢ + ٩) اجد ∫ هـ(س) دس
الحل: ∫ هـ(س) دس = م(٣) - م(٠)
= √(٣٦ - ٩٠) = ٦ - ٣ = ٣

٦ اذا كان م(س) اقتران بدائي لـ هـ(س) وكان
م(٢) = -٣ ، م(٥) = ٤ اجد
∫ ٥ ٢ هـ(س) + ٤ دس
الحل: ∫ ٥ ٢ هـ(س) = م(٥) - م(٢)
= ٤ - (-٣) = ٧
الحل ب: ∫ ٥ ٢ ٣ هـ(س) + ٤ دس = ٣×٧ + ٤(٥ - ٢) = ٣

٧ اذا كان م(س) بدائي للاقتران هـ وكان
م(س) = س٣ + جـ س + جـ ، اجد ∫ ٣ ١ هـ(س) دس
الحل: ∫ ٣ ١ هـ(س) دس = م(٣) - م(١)
= (٣٣ + ٢×٣٢ + جـ) - (١٣ + ٢×١ + جـ)
= (٤٥ + جـ) - (٣ + جـ)
٤٥ + جـ - ٣ - جـ = ٤٥ - ٣ = ٤٢

٨ اذا كانت هـ(س) = أس + ب وكان
م(س) بدائي لـ هـ(س) حيث
م(٢) = ٧ ، م(٣) = ٢ فما قيم أ ، ب.
الحل: م(س) = هـ(س) = أس + ب
م(٢) = ٢أ + ب = ٧ ... ①
م(٣) = هـ(س) = أ
لكن م(٣) = ٢ ⇒ أ = ٢ ⇒ ب = ٣

٩ اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائيان
للاقتران هـ(س) وكان
∫ ٣ ١ (م - هـ) دس = ١٢ فما قيمة ∫ ٣ ١ (م - هـ) دس
الحل: نفرض م - هـ = جـ ، جـ ثابت
⇒ ∫ ٣ ١ جـ دس = ١٢
جـ (٣ - ١) = ١٢ ⇒ جـ = ٦
الحل ب: ∫ ٣ ١ ٣س٢ دس = ٣س٣ |١ ٣ = ٣(٢٧ - ١) = ٧٨



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

## متطابقات هامة

جا$^2$س + جتا$^2$س = ١
جاس جتاس = جا٢س
جتا$^2$س - جا$^2$س = جتا٢س
١ + ظا$^2$س = قا$^2$س
١ + ظتا$^2$س = قتا$^2$س
$\frac{1}{2}$ (١ - جتا٢س) = جا$^2$س
$\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س) = جتا$^2$س

## قواعد التكامل

| الاقتران | تكامله |
|---|---|
| جاس | -جتاس |
| جتاس | جاس |
| قا$^2$س | ظاس |
| قاس ظاس | قاس |
| قتاس ظتاس | -قتاس |
| قا$^2$س | ظاس |
| قتا$^2$س | -ظتاس |

قاعدة: ∫ جا(ام س+ب) = $\frac{-\text{جتا}(\text{ام س}+\text{ب})}{\text{م}}$ + ج

وكذلك باقي النسب المثلثية.

أمثلة:-

① $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}$ جاس دس = $\frac{1}{2}$ جتاس $\Big|_0^{\pi}$ = $\frac{1}{2}$(-١-١) = ١

② ∫ (١ + ظا$^2$س) دس = ∫ قا$^2$س دس = ظاس + ج

③ ∫ قتا$^3$ن ظتا$^2$ن دن = $\frac{-\text{قتا}^3\text{ن}}{3}$ + ج

④ ∫ جا$^2$س + جتا$^2$س دس = ∫ $\frac{\text{جتا}2\text{س}}{2}$ + $\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}$ + ج

⑤ ∫ جا$^2$س دس
= ∫ $\frac{1}{2}$ (١ - جتا٢س) دس
= $\frac{1}{2}$ (س - $\frac{\text{جا}2\text{س}}{2}$) + ج

⑥ ∫ جتا$^2$س دس = ∫ $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س) دس
= $\frac{1}{2}$ (س + $\frac{\text{جا}2\text{س}}{2}$) + ج

⑦ ∫ ٥ جتاس + ٦ قتاس ظتاس دس
= ٥ جاس - ٣ قتاس + ج

⑧ ∫ س$^2$ + ٣ قتا$^2$س دس
= $\frac{\text{س}^3}{3}$ - ٣ ظتاس + ج

⑨ ∫ جا$^2$س + جتا$^2$س دس = ∫ ١ دس = س + ج

⑩ ∫ قاس (قاس + ظاس) دس
= ∫ قا$^2$س + قاس ظاس دس
= ظاس + قاس + ج

⑪ ∫ (جاس + جتاس)$^2$ دس
= ∫ جا$^2$س + ٢جتاس جاس + جتا$^2$س دس
= ∫ ١ + ٢ جتاس جاس دس
= ∫ ١ + جا٢س دس = س - $\frac{1}{2}$ جتا٢س + ج

⑫ ∫ $\frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}}$ دس = ∫ قاس . قاس دس = ∫ قا$^2$س دس
= ظاس + ج

⑬ ∫ جا٣س + جتا(٥س+٢) + قا٢س ظا٢س دس
= $\frac{1}{3}$ جتا٣س + $\frac{1}{5}$ جا(٥س+٢) + $\frac{1}{2}$ قا٢س + ج

⑭ ∫ قتا$^2$٤س دس = $\frac{1}{4}$ ظتا٤س + ج

⑮ ∫ $\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{جا}^3\text{س} \times \text{جتاس}}$ دس
= ∫ $\frac{2\text{جاس جتاس}}{\text{جا}^3\text{س . جتاس}}$ دس = ∫ $\frac{2}{\text{جا}^2\text{س}}$ دس
= ∫ ٢ قتا$^2$س دس = -٢ ظتاس + ج

⑯ ∫ $\frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ دس
= ∫ $\frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ دس = ∫ $\frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ دس
= ∫ $\frac{1}{\text{جاس}} - \frac{1}{\text{جتاس}}$ دس = ∫ قتاس - قاس دس
= -ظتاس - ظاس + ج

⑰ ∫ $\frac{\text{جا}^3\text{س} - 5}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}$ دس
= ∫ $\frac{\text{جا}^3\text{س} - 5}{\text{جا}^2\text{س}}$ دس = ∫ $\frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{5}{\text{جا}^2\text{س}}$ دس
= ∫ جاس - ٥ قتا$^2$س دس = -جتاس + ٥ ظتاس + ج



Scanned by CamScanner

الاستاذ
ايـاد عمـاد عبـاد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٨ $\int \frac{1-\text{جا}^2 س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س$

$= \int \frac{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س - 2 \text{جا}س \text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, د س$

$= \int \frac{(\text{جا}س - \text{جتا}س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)}{(\text{جا}س - \text{جتا}س)} \, د س$

$= \int (\text{جا}س - \text{جتا}س) \, د س = -\text{جتا}س - \text{جا}س + ج$

١٩ $\int \frac{\text{جا}^3 س}{1-\text{جتا}س} \, د س$

$= \int \frac{1-\text{جتا}^2 س}{1-\text{جتا}س} \, د س = \int \frac{(1-\text{جتا}س)(1+\text{جتا}س)}{1-\text{جتا}س} \, د س$

$= \int (1+\text{جتا}س) \, د س = س + \text{جا}س + ج$

٢٠ $\int \frac{2}{1-\text{جتا}^2 س} \, د س$

$= \int \frac{2}{1-(1-2\text{جا}^2 س)} \, د س = \int \frac{2}{2\text{جا}^2 س} \, د س = \int \text{قا}^2 س \, د س$

$= -\text{ظتا}س + ج$

٢١ $\int \text{ظا}^2 س \, د س = \int \text{قا}^2 س - 1 \, د س = \text{ظا}س - س + ج$

٢٢ $\int (\text{قا}س + \text{ظا}س)^2 \, د س$

$= \int \text{قا}^2 س + 2\text{قا}س \text{ظا}س + \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قا}^2 س + 2\text{قا}س \text{ظا}س + \text{قا}^2 س - 1 \, د س$

$= \text{ظا}س + 2\text{قا}س + \text{ظا}س - س + ج$

٢٣ $\int \text{جا}^4 س \, د س$

$= \int \frac{1}{4}(1-\text{جتا}2س)^2 \, د س$

$= \frac{1}{4}(س - \frac{\text{جا}4س}{4}) + ج$

٢٤ $\int \frac{5}{\text{قتا}^2 س} \, د س$

$= \int 5 \text{جا}^2 س \, د س = 5 \times \frac{1}{2} \int (1-\text{جتا}2س) \, د س$

$= \frac{5}{2}(س - \frac{1}{2}\text{جا}2س) + ج$

٢٥ $\int \text{جتا}^6 3س \, د س$

$= \frac{1}{8} \int (1+\text{جتا}6س)^3 \, د س$

$= \frac{1}{8}(س + \frac{1}{6}\text{جا}6س) + ج$

٢٦ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 5\text{جا}س + 4\text{جتا}س \, د س$

$= -5\text{جتا}س + 4\text{جا}س \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(-5 \times 0 + 4 \times 1) - (-5 \times 1 + 4 \times 0) = 4 + 5 = 9$

٢٧ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3 + 3\text{ظا}^2 س \, د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3(1+\text{ظا}^2 س) \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3\text{قا}^2 س \, د س = 3\text{ظا}س \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3(1-0) = 3$

٢٨ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\text{جا}2س} \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س + 2\text{جا}س \text{جتا}س} \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\text{جا}س + \text{جتا}س)(\text{جا}س + \text{جتا}س)} \, د س$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^2} \, د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |\text{جا}س + \text{جتا}س| \, د س$

موجبة لانها بالربع الاول

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}س + \text{جتا}س \, د س = -\text{جتا}س + \text{جا}س \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$

٢٩ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\text{جتا}2س}{2}} \, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{2+2\text{جتا}2س}{2}} \, د س = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{4\text{جتا}^2 س}{2}} \, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س} \, د س = \int_{0}^{\pi} |\text{جتا}س| \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا}س \, د س$

$= \text{جا}س \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \text{جا}س \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 2$

٣٠ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\text{جتا}2س}{2}} \, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-(1-2\text{جا}^2 س)}{2}} \, د س = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int_{0}^{\pi} |\text{جا}س| \, د س = \int_{0}^{\pi} \text{جا}س \, د س + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{جا}س \, د س$

$= -\text{جتا}س \Big|_0^{\pi} + \text{جتا}س \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1) + (1-(-1)) = 4$

٣١ اذا كانت $م = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^3 س \, د س$ ، $ن = \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^3 س \, د س$

فما قيمة $م + ن$

الحل: $م + ن = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^3 س + \text{جتا}^3 س \, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \text{جا}س + \text{جتا}س \, د س = -\text{جتا}س + \text{جا}س \Big|_0^{\pi}$

$= -(-1-1) + (0-1) = 2 - 1 = 1$

٣٢ اذا كانت $م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س \, د س$ ، $ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س \, د س$

فجد $م - ن$

الحل: $م - ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 + \text{ظا}^2 س - \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 \, د س = س \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

قاعدة ∫ جا^ن جتا^ن س دس
نستخدم احدى المتطابقات التالية
½(١ − جتا٢س) = جا^٢س
½(١ + جتا٢س) = جتا^٢س
٢جاس جتاس = جا٢س

١ ∫ جا^٤س جتا^٢س دس
= ∫(جاس جتاس)^٢ دس = ∫(½ جا٢س)^٢ دس
= ¼ ∫ جا^٢٢س دس
¼ ∫ ½(١ − جتا٤س) دس
⅛ (س − جا٤س/٤) + ج

٢ ∫ جا^٤س دس
= ∫(جا^٢س)^٢ دس = ∫(½(١ − جتا٢س))^٢ دس
= ¼ ∫ ١ − ٢جتا٢س + جتا^٢٢س دس
¼ ∫ ١ − ٢جتا٢س + ½(١ + جتا٤س) دس
¼ (س − ٢جا٢س/٢ + ½(س + جا٤س/٤)) + ج
¼ (س − جا٢س + ½س + جا٤س/٨) + ج
¾س − ¼جا٢س + ⅛جا٤س + ج

٣ ∫ (١ + جاس)/(جاس + جتاس) دس
∫ (جا^٢س + جتا^٢س + ٢جاس جتاس)/(جاس + جتاس) دس
= ∫ (جا^٢س + ٢جاس جتاس + جتا^٢س)/(جاس + جتاس) دس
= ∫ (جاس + جتاس)(جاس + جتاس)/(جاس + جتاس) دس
= ∫ جاس + جتاس دس = −جتاس + جاس + ج

قاعدة المرافقة :- عند وجود
في المقام ١ ± جا ، ١ ± جتا ، ١ ± قا ، ...

١ ∫ 1/(١ + جتاس) دس (نضرب بالمرافقة)
= ∫ 1/(١ + جتاس) × (١ − جتاس)/(١ − جتاس) دس
= ∫ (١ − جتاس)/(١ − جتا^٢س) دس = ∫ (١ − جتاس)/جا^٢س دس
= ∫ 1/جا^٢س − جتاس/جا^٢س دس = ∫ قا^٢س − قتاس ظتاس دس
= ظاس − قاس + ج

٢ ∫ 1/(١ − جاس) دس
∫ 1/(١ − جاس) × (١ + جاس)/(١ + جاس) دس
∫ (١ + جاس)/(١ − جا^٢س) دس = ∫ (١ + جاس)/جتا^٢س دس
= ∫ 1/جتا^٢س + ∫ جاس/جتا^٢س دس
= ∫ قا^٢س + ∫ ظتاس قاس دس
= ظاس + قاس + ج

متطابقات هامة
١ جاأس × جتاب س = ½(جا(أ−ب)س + جا(أ+ب)س)
٢ جاأس × جاب س = ½(جتا(أ−ب)س − جتا(أ+ب)س)
٣ جتاأس × جتاب س = ½(جتا(أ−ب)س + جتا(أ+ب)س)

٤ ∫ جتا٣س جا٥س دس
= ½ ∫ (جا٢س + جا٨س) دس
½(−جتا٢س/٢ − جتا٨س/٨) + ج

٥ ∫ جا٥س جتا٣س دس
= ½ ∫ جا(٥س−٣س) + جا(٥س+٣س) دس
= ½ ∫ (جا٢س + جا٨س) دس = ½(−½جتا٢س − ⅛جتا٨س) + ج

٦ ∫ جا٧س جا٣س دس
= ½ ∫ (جتا٤س − جتا١٠س) دس
= ½(¼جا٤س − ⅒جا١٠س) + ج

٧ ∫ جتا٨س جتا٤س دس
= ½ ∫ (جتا١٢س + جتا٤س) دس = ½(⅛جا١٢س + ¼جا٤س) + ج

٨ ∫ جتا٨س جتا٢س دس

٩ ∫ جا٥س جا٣س دس



Scanned by CamScanner

١) $\int \frac{س^٤ - ٩س}{٧س - ٣}$ دس

٢) $\int \frac{(٤ - س)^٣}{س^{\frac{١}{٢}}}$ دس

٣) $\int \frac{٣}{(٧س + ٥)^٤}$ دس

٤) $\int -٤س^{\frac{-٣}{٤}} (٥ - س^{\frac{-٣}{٤}})^٤$ دس

٥) $\int$ قتا٤س ظتا٤س + قتا٣س دس

٦) $\int$ جتا٤س ظا٤س + $\frac{١}{جتا^٦ س}$ دس

٧) $\int$ (قا س + ظا س)$^٢$ دس

٨) $\int \frac{٣}{١ - جتا٤س}$ دس

٩) $\int \frac{جتا٤س}{جا^٣ س جتا^٣ س}$ دس

١٠) $\int$ (جتا س − جا س)$^٢$ دس

١١) $\int (٥ + ٣هـ)^٤$ دهـ

١٢) $\int \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ دس

١٣) $\int (٤ص^٢ + ٢٠ص + ٢٥)^٥$ دص

١٤) $\int \frac{(ن + ٣)^٢ - ٩}{ن}$ دن

١٥) $\int (١ - ٣س)(س - ١)^٥$ دس

١٦) $\int س \sqrt[٣]{٥س^٣ - \frac{١}{٤س^٣}}$ دس

١٧) $\int \frac{س - ٧س}{٧س - ١}$ دس

١٨) $\int ٣س^٣ (٦س^٣ + \frac{٥}{٦س^٣})$ دس

١٩) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س^٣ + ٣س + ٦س + ٣}}$ دس

٢٠) $\int \frac{٥}{جا^٢ س} - \frac{٣}{جتا^٢ س}$ دس

٢١) $\int \frac{جا^٢ س + جتا^٢ س}{١ + جتا٢س}$ دس

٢٢) $\int$ (ظتا س − قتا س)$^٢$ دس

٢٣) $\int \frac{جا س + جتا^٢ س}{١ - جا^٢ س}$ دس

٢٤) $\int \frac{١ - جا س}{جا^٢ س جتا^٢ س}$ دس

٢٥) $\int \frac{١ - جا٢س}{جا س - جتا س}$ دس

٢٦) $\int \frac{جتا٣س}{جتا س}$ دس

٢٧) $\int \frac{دس}{جا^٢ س - جا^٤ س}$

٢٨) $\int$ قا س (ظا س + جتا س) دس

٢٩) $\int$ جا٦س جا٤س دس

٣٠) $\int \frac{جتا^٣ س - ٥}{١ - جا^٢ س}$ دس

٣١) $\int$ جتا$^٤$س − جا$^٤$س دس

٣٢) $\int \frac{جا س}{١ - جا س}$ دس



Scanned by CamScanner

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٥ $\int_{1}^{7} |س-٦|$ د س

$س-٦=٠ \Leftarrow س=٦$

| | ١ | | ٦ | | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|
| $س-٦$ | − | − | ٠ | + | + |

$= \int_{1}^{6} (٦-س)$ د س $+ \int_{6}^{7} (س-٦)$ د س

$= [٦س - \frac{س^٢}{٢}]_{1}^{6} + [\frac{س^٢}{٢} - ٦س]_{6}^{7}$

$= ٢٠$

٦ إذا كان $\int_{1}^{3} ٢ق(س)$ د س $= ١٢$

فما قيمة $\int_{1}^{3} (\frac{ق(س)}{٢} - ٣س^٢)$ د س

الجواب النهائي $= -١٢١$

٧ دون إجراء التكامل بين أن

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ جتاس د س $>$ صفر

الحل: بما أن جتاس $>$ صفر في $[٠, \frac{\pi}{٤}]$

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ جتاس د س $>$ صفر

٨ $\int_{١}^{ب} [\frac{١}{٣}س + ١]$ د س $= ١١$ فما قيمة ب علماً

| | ٣ | | ٦ | | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | | ② | | ③ | |

$\int_{١}^{٣}$ ١ د س $+ \int_{٣}^{٦}$ ٢ د س $+ \int_{٦}^{ب}$ ٣ د س $= ١١$

$٢ + ٦ + ٣(ب - ٦) = ١١$

$ب = ٧ \leftarrow ٣ب - ١٨ = ١٢ - ٨$

وأيضاً

| | ١- | | ٣- | | ٦- | | ٩- | | ١٢- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |

$\int_{١}^{-٣}$ ١ د س $+ \int_{-٣}^{-٦}$ ٢ د س $+ \int_{-٦}^{-٩}$ ٣ د س $+ \int_{-٩}^{ب}$ ٤ د س $= ١١$

$-١ + ٠ + ٣ + ٦ + ٣(ب + ٩) = ١١$

$ب = -١٠$

٩ $\int_{١}^{ب} [\frac{١}{٣}س + ١]$ د س $= ١١$ فما قيمة ب علماً

| | ٣ | | ٦ | | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | | ② | | ③ | |

$\int_{١}^{٣}$ ١ د س $+ \int_{٣}^{٦}$ ٢ د س $+ \int_{٦}^{ب}$ ٣ د س $= ١١$

$٢ + ٦ + ٣(ب - ٦) = ١١$

$ب = ٧ \leftarrow ٣ب - ١٨ = ١٢ - ٨$

وأيضاً

| | ١- | | ٣- | | ٦- | | ٩- | | ١٢- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |

$\int_{١}^{-٣}$ ١ د س $+ \int_{-٣}^{-٦}$ ٢ د س $+ \int_{-٦}^{-٩}$ ٣ د س $+ \int_{-٩}^{ب}$ ٤ د س $= ١١$

$-١ + ٠ + ٣ + ٦ + ٣(ب + ٩) = ١١$

$ب = -١٠$

١٠ $\int_{١}^{ب} [\frac{١}{٢}س + ١]$ د س $= ١٧$ فما قيمة ب

الجواب النهائي ب $= ٢٥$

١١ إذا كان

$\int_{١}^{٣}$ ٣ ق(س) $-$ ٤ د س $= ٤$ ، $\int_{١}^{٤}$ ق(س) د س $= ٦$

فما قيمة $\int_{١}^{٤}$ ق(س) د س

الجواب النهائي $= ٣$



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

# التكامل بالتعويض

الشكل الاول: ∫ (اقتران)^(قوة) × (مشتقة الاقتران)

ع = ما داخل القوة
د ع = مشتقة ع د س

[1] ∫ س^٣ (س^٤ + ١)^٥ د س

ع = س^٤ + ١
د ع = ٤ س^٣ د س
د س = د ع / ٤ س^٣

∫ س^٣ (ع)^٥ د ع / ٤ س^٣ = ١/٤ ∫ ع^٥ د ع
= ١/٤ ع^٦/٦ + ج
= ١/٢٤ (س^٤ + ١)^٦ + ج

[2] ∫ س √(٢ س^٢ + ١) د س

ع = ٢ س^٢ + ١
د ع = ٤ س د س
د س = د ع / ٤ س

∫ س (ع)^(١/٢) د ع / ٤ س = ١/٤ ∫ ع^(١/٢) د ع
= ١/٤ ع^(٣/٢) / ٣/٢ + ج
= ١/٦ (٢ س^٢ + ١)^(٣/٢) + ج

[3] ∫ جا^٣ س جتا^٢ س د س

ع = جا س ⇐ د ع = جتا س د س / ؟

∫ ع^٣ جتا^٢ س د ع / جتا س = ∫ ع^٣ د ع
= ع^٤/٤ + ج = جا^٤ س / ٤ + ج

الشكل الثاني: ∫ مشتقي (زاوية غير خطية) د س

ع = ؟

[1] ∫ (س + ١) جا س^٢ + ٢ س د س

ع = س^٢ + ٢ س + ٢
د ع = (٢ س + ٢) د س
د س = د ع / ٢ س + ٢

∫ (س + ١) جا ع / ٢ س + ٢ = ١/٢ ∫ جا ع د ع
= ١/٢ جتا ع + ج
= ١/٢ جتا (س^٢ + ٢ س + ٢) + ج

الشكل الثالث: اذا ورد في التكامل جا و جتا وكان لهما نفس القوة نفرض ص = ايهما.

مثال: ∫ جا س جتا^٣ س د س

ص = جا س ⇐ د ص = جتا س د س
د س = د ص / جتا س

∫ ص جتا^٣ س د ص / جتا س = ∫ ص جتا^٢ س د ص
= ∫ ص (١ − جا^٢ س) د ص
= ∫ ص د ص − ∫ ص جا^٢ س د ص
= ص^٢/٢ − ص^٤/٤ + ج
= جا^٢ س / ٢ − جا^٤ س / ٤ + ج

[2] ∫ جتا^٥ س جا^٢ (جا س) د س

ص = جا س
د ص = جتا س د س
د س = د ص / جتا س

∫ جتا^٥ س جا^٢ ص د ص / جتا س
∫ جا^٢ ص د ص = ∫ ١/٢ (١ − جتا ٢ ص) د ص
= ١/٢ (ص − جا ٢ ص / ٢) + ج
= ١/٢ (جا س − جا ٢ (جا س) / ٢) + ج

واجب: حل السؤال بطريقتين غير ما سبق.

الشكل الرابع:- ∫ جا^قوة جتا^قوة د س

اذا كان احد القوسين فردي نخفض الفردي بمقدار واحد

[1] ∫ جا^٣ س جتا^٢ س د س

= ∫ جا^٢ س . جا س جتا^٢ س د س
= ∫ (١ − جتا^٢ س) جا س جتا^٢ س د س

ص = جتا س
د ص = − جا س د س
د س = د ص / − جا س

∫ (١ − ص^٢) جا س ص^٢ د ص / − جا س
= − ∫ (١ − ص^٢) ص^٢ د ص
= − ∫ ص^٢ + ص^٤ د ص
= − ص^٣/٣ + ص^٥/٥ + ج
= − جتا^٣ س / ٣ + جتا^٥ س / ٥ + ج

واجب ∫ جا^٣ س د س

[2] ∫ جا^٣ س جتا^٤ س د س

= ∫ جا^٢ س جتا^٤ س . جتا س د س
= ∫ جا^٢ س (١ − جا^٢ س) جتا^٤ س جتا س د س

ص = جا س
د ص = جتا س د س
د س = د ص / جتا س

∫ ص^٢ (١ − ص^٢) جتا^٤ س جتا س د ص / جتا س
∫ ص^٢ (١ − ص^٢) د ص = ∫ ص^٢ − ص^٤ د ص
= ص^٣/٣ − ص^٥/٥ + ج
= جا^٣ س / ٣ − جا^٥ س / ٥ + ج



Scanned by CamScanner

الأستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١) $\int \frac{\sin^3 x + 5}{\sqrt[3]{\cos^4 x + 2\cos x}}\,dx$

$= \int (\sin^3 x + 5)(\cos^4 x + 2\cos x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$\int (\cos^4 x + 2\cos x)^{-\frac{1}{3}} (\sin x)\,dx$

$\frac{dm}{dx} = 4\cos^3 x(-\sin x) + 2(-\sin x)$

$= -4\sin x\cos^3 x - 2\sin x$

$\frac{dm}{dx} = -2\sin x(2\cos^3 x + 1)$

$dx = \frac{dm}{-2\sin x(2\cos^3 x + 1)}$

$= \frac{1}{2}\int m^{-\frac{1}{3}}\,dm + c = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{3}{4}(\cos^4 x + 2\cos x)^{\frac{2}{3}} + c$

٢) $\int (x+1)$ جتا$(x^3+3x^2+1)$ dx

$m = x^3 + 3x^2 + 1$

$\frac{dm}{dx} = 3x^2 + 3$

$dx = \frac{dm}{3x^2+3}$

$\int (x+1)$ جتا$m \cdot \frac{dm}{3x^2+3}$

$= \frac{1}{3}\int$ جتا$m\,dm = \frac{1}{3}$ جا$m + c$

$= \frac{1}{3}$ جا$(x^3+3x^2+1) + c$

٣) $\int \frac{x \tan^{-1} x + 1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\int \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$m = \tan^{-1} x$

$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$dx = (x^2+1)\,dm$

$\int m \cdot x\,dm + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$m = \sqrt{x^2+1}$

$\frac{dm}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$dx = \frac{dm}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

$= -\tan^{-1} x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dm$

$= -\tan^{-1} x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{x}\,dm$

$= -\tan^{-1} x\sqrt{x^2+1} + \ln|m| + c$

$= -\tan^{-1} x\sqrt{x^2+1} + \ln|\sqrt{x^2+1}| + c$

٤) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{جا}^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{جا}^2 x}{\sqrt{2\text{جا}^2\frac{x}{2}}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{جا}^2 x}{\sqrt{2}\,\text{جا}\frac{x}{2}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\text{جا}x\cos x}{\sqrt{2}\,\text{جا}\frac{x}{2}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2}\,\text{جا}x\cos x\,\text{جتا}\frac{x}{2}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2}\,\text{جا}x\cos x\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جا}x\cos x\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$m = 1+\cos x$

$\frac{dm}{dx} = -\sin x$

$dx = \frac{dm}{-\sin x}$

$\int_{2}^{1} \text{جا}x\cos x\sqrt{m}\cdot\frac{dm}{-\sin x}$

$= \int_{1}^{2} \cos x\sqrt{m}\,dm$

$= \int_{1}^{2} m^{\frac{1}{2}}\,dm = \left|\frac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{2}{3}\left|(1+\cos x)^{\frac{3}{2}}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \frac{2}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}x\,\text{جتا}x}{\sqrt{1+\text{جا}^2 x}}\,dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}x\cos x}{\sqrt{1+\text{جا}^2 x}}\,dx$

$m = 1+\text{جا}^2 x$

$\frac{dm}{dx} = 2\text{جا}x\cos x$

$dx = \frac{dm}{2\text{جا}x\cos x}$

$\int_{1}^{2} \frac{\text{جا}x\cos x}{\sqrt{m}}\cdot\frac{dm}{2\text{جا}x\cos x}$

$= \frac{1}{2}\int_{1}^{2} m^{-\frac{1}{2}}\,dm = \left|\sqrt{m}\right|_1^2 = \sqrt{2}-1$

٦) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ قاس ظاس dx

$m = \text{ظاس}$

$\frac{dm}{dx} = \text{قاس}$

$dx = \frac{dm}{\text{قاس}}$

$\int_{0}^{1} \text{قاس}\cdot m\cdot\frac{dm}{\text{قاس}}$

$= \int_{0}^{1} m\,dm = \left|\frac{1}{2}m^2\right|_0^1 = \frac{1}{2}$

٧) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x\,dx$

$m = 1+x^2$

$\frac{dm}{dx} = 2x$

$dx = \frac{dm}{2x}$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{m}}\cdot x\cdot\frac{dm}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{m-1}{\sqrt{m}}\,dm$

$= \frac{1}{2}\int (m^{\frac{1}{2}} - m^{-\frac{1}{2}})\,dm$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m^{\frac{3}{2}} - 2m^{\frac{1}{2}}\right) + c$

$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + c$

٨) $\int x\sqrt{x^3+4}\,dx$

٩) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

واجبي

١٠) اذا كان ق(١) = ٣ ، ق(٩) = ١٠

و $\int_{1}^{3} x^2$ ق$(x^3+1)\,dx$ =

$m = x^3+1$

$\frac{dm}{dx} = 3x^2$

$dx = \frac{dm}{3x^2}$

$\int_{1}^{9} x^2$ ق$(m)\cdot\frac{dm}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int_{1}^{9}$ ق$(m)\,dm$

$= \frac{1}{3}$ ق$(9) - \frac{1}{3}$ ق$(1) = 14$

١١) اذا كان ق(١) = ١٦ ، ق(٠) = ١٢

و $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس ق(جاس) dx =

واجبي



Scanned by CamScanner

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

**١٢** $\int \frac{2س - 1}{ظا^2 ص - س + 2}$ د س

$ص = س^2 - س + 2$
$د ص = (2س - 1)$ د س
$د ص = (2س - 1)$ د س

$\int \frac{2س - 1}{ظا^2 ص} \times$ د ص

$\int$ قتا$^2$ ص د ص $= -$ ظتا ص $- ص + ج$
$= -$ ظتا$(س^2 - س + 2) - (س^2 - س + 2) + ج$

**١٣** $\int$ جا$^2$ ص $\sqrt{1 - جاس}$ د س

$\int$ جا ص جتا ص $\sqrt{1 - جا ص}$ د ص

$ص = 1 - جا ص$
$د ص = -$ جتا ص د ص
$د س = \frac{د ص}{-جتا ص}$
$\sqrt{1 - جا ص} = \sqrt{ص}$
$س = 1 - ص$

$\int (1 - ص) ص^{\frac{1}{2}}$ د ص

$= \int ص^{\frac{1}{2}} - ص^{\frac{3}{2}}$ د ص

$= \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} + ج$

$= \frac{2}{3} (\sqrt{1 - جاس})^3 - \frac{2}{5} (\sqrt{1 - جاس})^5 + ج$

**١٤** $\int \frac{جا^2 س}{قتا^4 س}$ د س

$= \int$ جا$^2$ س جتا$^4$ س د س

$= \int$ جا$^2$ س جتا$^2$ س جتا$^2$ س د س

$= \int \frac{1}{4} ص^2 \frac{د ص}{جتا س}$ جتا$^2$ س

$= \int \frac{1}{4} ص^2$ د ص

$= \frac{1}{12} ص^3 + ج$

$= \frac{1}{12}$ جا$^3$ س $+ ج$

$ص = جا س$
$د ص = جتا س د س$

**١٥** $\int \frac{جا^3 س}{جتا^7 س}$ د س

$= \int \frac{جا^3 س}{جتا^6 س جتا س}$ د س $= \int$ ظا$^3 س$ قا$^2 س$ د س

$= \int ص^3$ د ص

$= \frac{1}{4} ص^4 + ج = \frac{1}{4}$ ظا$^4 س + ج$

$ص = ظا س$
$د ص = \frac{د س}{قا^2 س}$

**١٦** $\int \frac{1}{س^2 ظا^2 س}$ د س

واجب

أفرض ص $= \frac{1}{س}$

**١٧** $\int$ جتا$^4 س$ د س

$= \int$ جتا$^3 س$ جتا س د س

$= \int (1 - جا^2 س)$ جتا س د س

$\int (1 - ص^2)$ د ص $= ص - \frac{ص^3}{3} + ج$

$= جا س - \frac{جا^3 س}{3} + ج$

$ص = جا س$
$د ص = جتا س د س$

**١٨** $\int$ جا س $(ظتا س + \frac{1}{قتا س})$ د س

$\int$ جا س $(\frac{جتا س}{جا س} + جا س)$ د س

$\int$ جتا س $+ \int$ جا$^2 س$ د س

$\int$ جتا س $+ \int$ جا س جا س د س

$\int$ جتا س $+ \int (1 - جتا^2 س)$ جا س د س

$+$ جا س $+ \int (1 - ص^2)$ جا س $\frac{د ص}{-جا س}$

جا س $- \int (ص - \frac{ص^3}{3}) + ج$

جا س $- (ص - \frac{ص^3}{3}) + ج$

$ص = جا س$
$د ص = -جا س د س$

**١٩** $\int \frac{جتا^3 س - جا^2 س}{\sqrt{جا س}}$ د س

$\int \frac{جتا س}{\sqrt{جا س}}$ د ص $=$

$\int \frac{ص د ص}{\sqrt{ص}} = \int ص^{\frac{1}{2}}$ د ص

$= \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج = \frac{2}{3} \sqrt{جا^3 س} + ج$

$ص = جا س$
$د ص = جتا س د س$

**٢٠** $\int \frac{جتا^3 س}{جا^3 س - جا^2 س}$ د س

$= \int \frac{جتا^3 س}{جا^2 س (جا س - 1)}$ د س

$= \int \frac{جتا^3 س}{ص^2 (ص - 1)} \frac{د ص}{جتا س}$ د س $= \int \frac{جتا^2 س}{ص^2 (ص - 1)}$ د ص

$\int \frac{1 - ص^2}{ص^2 (ص - 1)}$ د ص $= \int \frac{-(ص - 1)(ص + 1)}{ص^2 (ص - 1)}$ د ص

$\int \frac{-(ص + 1)}{ص^2}$ د ص $= \int -ص^{-2} - ص^{-1}$ د ص

$= ص^{-1} + ص^{-2} + ج = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص^2} + ج$

$ص = \frac{1}{2} جا س$
$د ص = \frac{1}{2} جتا س د س$



Scanned by CamScanner

الأستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢١) $\int جا^{٤}س\ جتا^{٣}س\ دس$

٢٢) $\int جا^{٣}س\ جتا^{٣}س\ دس$ واجب

٢٣) $\int جتا^{٤}س\ جا^{٤}س\ دس$

٢٤) $\int قا^{٤}س\ ظا^{٥}س\ دس$

$\int قا^{٤}س\ ظ\ دظ$

$= \int (١+ظا^{٢}س)\ ظ\ دظ = \int (١+ظ^{٢})\ ظ\ دظ$

$= \int ظ + ظ^{٣} + ظ^{٥}\ دظ = \frac{ظ^{٢}}{٢} + \frac{ظ^{٤}}{٤} + \frac{ظ^{٦}}{٦} + ج$

$= \frac{ظا^{٢}س}{٢} + \frac{ظا^{٤}س}{٤} + \frac{ظا^{٦}س}{٦} + ج$

ظ = ظا س
دظ = قا^٢ س دس

٢٥) $\int قا^{٣}س\ ظا^{٣}س\ دس$

$= \int ظا^{٣}س\ قا^{٣}س\ دس$

$= \int ظا^{٢}س\ قا^{٢}س\ قاس ظاس\ دس$

$= \int (قا^{٢}س - ١)\ قا^{٢}س\ قاس ظاس\ دس$

ق = قاس
دق = قاس ظاس دس

$\int (ق^{٢} - ١)\ ق^{٢}\ دق = \int ق^{٤} - ق^{٢}\ دق = \frac{ق^{٥}}{٥} - \frac{ق^{٣}}{٣} + ج$

$= \frac{قا^{٥}س}{٥} - \frac{قا^{٣}س}{٣} + ج$

٢٦) $\int جاس\ جتا^{٤}(جتاس)\ دس$

ص = جتاس

واجب

٢٧) $\int س\ جاس\ ظا^{٢}(جتاس)\ دس$

ص = جتاس

واجب

٢٨) $\int (٥س - ٢)^{٦}\ دس = \frac{(٥س-٢)^{٧}}{٧ \times ٥} + ج$

٢٩) $\int (٤س^{٢} + ٤س + ١)^{٦}\ دس$

$= \int ((٢س+١)^{٢})^{٦}\ دس = \int (٢س+١)^{١٢}\ دس$

$= \frac{(٢س+١)^{١٣}}{١٣ \times ٢} + ج$

٣٠) $\int \frac{١}{س^{٢} + ١٠س + ٢٥}\ دس$

واجب

٣١) $\int \frac{١٤}{٧س + ١}^{٥}\ دس$

واجب

٣٢) $\int س^{٥}(\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س})^{٤}\ دس$

$= \int س^{٥}(\frac{٢ - ٣س}{س^{٢}})^{٤}\ دس$

$= \int \frac{س^{٥}(٢-٣س)^{٤}}{س^{٨}}\ دس = \int (٢-٣س)^{٤}\ دس$

$= \frac{١}{-٣} \frac{(٢-٣س)^{٥}}{٥} + ج$

٣٣) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٥}{س^{٢}}}\ دس$

$= \int س \sqrt[٣]{\frac{٢ - ٥س}{س^{٣}}}\ دس$

$= \int س \frac{\sqrt[٣]{٢-٥س}}{س}\ دس$

$\int \sqrt[٣]{٢-٥س}\ دس = \int (٢-٥س)^{\frac{١}{٣}}\ دس$

$= \frac{١}{-٥} \times \frac{(٢-٥س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ج$

ص = ٢ - ٥س
دص = -٥ دس
دس = $\frac{دص}{-٥}$

٣٤) $\int س\ (س^{٤} + ٢س + ١)^{٥}\ دس$

$\int س((س+١)^{٢})^{٥}\ دس = \int س\ (س+١)^{١٠}\ دس$

ص = س + ١
س = ص - ١
دس = دص

$\int (ص-١)\ ص^{١٠}\ دص$

$\int ص^{١١} - ص^{١٠}\ دص$

$\frac{ص^{١٢}}{١٢} - \frac{ص^{١١}}{١١} + ج$

$\frac{(س+١)^{١٢}}{١٢} - \frac{(س+١)^{١١}}{١١} + ج$

٣٥) $\int س\ (س^{٤} + ٢س^{٢} + ١)^{٥}\ دس$

$= \int س\ ((س^{٢}+١)^{٢})^{٥}\ دس$

ص = $س^{٢}$ + ١

واجب

٣٦) $\int \frac{(٢س+٣)^{٩}}{س^{١١}}\ دس$

$= \int \frac{(٢س+٣)^{٩}}{س^{٩} \times س^{٢}}\ دس = \int \frac{١}{س^{٢}} \times (\frac{٢س+٣}{س})^{٩}\ دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} (\frac{٢س}{س} + \frac{٣}{س})^{٩}\ دس = \int \frac{١}{س^{٢}} (٢ + \frac{٣}{س})^{٩}\ دس$

$= \int \frac{١}{-٣} (ص)^{٩}\ دص = \frac{١}{-٣} \frac{ص^{١٠}}{١٠} + ج$

$= \frac{١}{-٣} \frac{(٢ + \frac{٣}{س})^{١٠}}{١٠} + ج$

ص = ٢ + $\frac{٣}{س}$
دص = $\frac{-٣}{س^{٢}}$ دس
$س^{٢}$ دس = $\frac{-١}{٣}$ دص



Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٣٧ $\int (x+1)^3(x^2+2x+1)^5\,dx$

$u = x^2+2x+1$
$du = 2x+2\,dx$
$dx = \frac{du}{2x+2}$
$x+1 = \frac{u}{x+1}$

$\int (x+1)^3 u^5 \frac{du}{2(x+1)}$

$\frac{1}{2}\int (x+1)^2 u^5\,du$

$\frac{1}{2}\int (x^2+2x+1)\,u^5\,du$

لكن: $u = x^2+2x+1$
$u-1 = x^2+2x$

$\frac{1}{2}\int (u-1)u^5\,du = \frac{1}{2}\int (u^6-u^5)\,du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6}\right)+c$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2x+1)^7}{7} - \frac{(x^2+2x+1)^6}{6}\right)+c$

٣٨ $\int (x+1)\sqrt[3]{x}\,dx$

$u = x+1$
$x = u-1$
$dx = du$

$\int u\sqrt[3]{u-1}\,du$

$v = u-1$
$u = v+1$
$dv = du$

$\int (v+1)v^{\frac{1}{3}}\,dv$

$= \int v^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{1}{3}}\,dv$

$= \frac{3}{7}v^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}v^{\frac{4}{3}}+c$

$= \frac{3}{7}(u-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(u-1)^{\frac{4}{3}}+c$

$= \frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+c$

٣٩ $\int \frac{\sqrt{x^3+2x}}{x^3}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x^3(1+\frac{2}{x^2})}}{x^3}\,dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{1}{2}}}{x^3}\,dx$

$= \int x^{-\frac{3}{2}}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{3}{2}}\frac{1}{-4}+c$

$= -2x^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{3}{2}}\frac{1}{-4}+c$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{3}{2}}+c$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\frac{2}{x^2})^{\frac{3}{2}}+c$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+c$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+c$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{2}}}+c$

٤٠ $\int \sqrt{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$

واجب

$u = x^3-3x^2+3x-1$
$du = 3x^2-6x+3\,dx$
$dx = \frac{du}{3x^2-6x+3}$
$x-1 = \sqrt[3]{u}$

$\int \sqrt{u}\frac{du}{3x^2-6x+3}$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\frac{du}{x^2-2x+1}$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\frac{du}{(x-1)^2}$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\,du$

$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{6}}\,du$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{-\frac{1}{6}+1}u^{-\frac{1}{6}+1}+c$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{5}{6}}u^{\frac{5}{6}}+c$

$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{6}}+c$

$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}+c$

٤١ $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

$= -\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

٤٢ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$

$= \int \frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int x^2\sqrt{x^2+1}\,d\theta$

$= \int \tan^2\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}\,d\theta = \int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta$

$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$

$= \int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \sec^3\theta - \sec\theta\,d\theta$

$= \int \sec^3\theta\,d\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}\cdot\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}+\frac{x}{1}\right|+c$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1}+x|+c$

٤٣ $\int (x^2-3x)^5\,dx$

$= \int x^5(x-3)^5\,dx$

$= \int x^5(x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243)\,dx$

$= \int x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5\,dx$

$= \frac{1}{11}x^{11} - \frac{15}{10}x^{10} + \frac{90}{9}x^9 - \frac{270}{8}x^8 + \frac{405}{7}x^7 - \frac{243}{6}x^6+c$

$= \frac{1}{11}x^{11} - \frac{3}{2}x^{10} + 10x^9 - \frac{135}{4}x^8 + \frac{405}{7}x^7 - \frac{81}{2}x^6+c$

واجب

٤٤ $\int (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\,dx$

$= \int (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)\,dx$

$u = x^2+5x+5$
$du = 2x+5\,dx$
$dx = \frac{du}{2x+5}$
$x^2+5x = u-5$

$\int (u-1)(u+1)\frac{du}{2x+5}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{2x+5}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{\sqrt{4x^2+20x+25}}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{\sqrt{4(x^2+5x)+25}}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{\sqrt{4(u-5)+25}}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{\sqrt{4u-20+25}}$

$= \int (u^2-1)\frac{du}{\sqrt{4u+5}}$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \int \frac{1}{\sqrt{4u+5}}\,du$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{2}\int (4u+5)^{-\frac{1}{2}}\,du$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}(4u+5)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}+c$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{4}\sqrt{4u+5}+c$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+20x+25}+c$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{4}(2x+5)+c$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}+c$

$= \int \frac{u^2}{\sqrt{4u+5}}\,du - \frac{1}{2}x+c$

$= \int \frac{(\frac{1}{4}v-\frac{5}{4})^2}{\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{4}\,dv - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{16}v^2-\frac{5}{8}v+\frac{25}{16}}{\sqrt{v}}\,dv - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{16}v^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8}v^{\frac{1}{2}} + \frac{25}{16}v^{-\frac{1}{2}}\,dv - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\frac{1}{\frac{5}{2}}v^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{8}\frac{1}{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{16}\frac{1}{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{40}v^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{12}v^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{8}v^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{40}(4u+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{12}(4u+5)^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{8}(4u+5)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}x+c$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{40}(4x^2+20x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{12}(4x^2+20x+5)^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{8}(4x^2+20x+5)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}x+c$

٤٥ $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

$= -\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

٤٦ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$

$= \int \frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int x^2\sqrt{x^2+1}\,d\theta$

$= \int \tan^2\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}\,d\theta = \int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta$

$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$

$= \int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \sec^3\theta - \sec\theta\,d\theta$

$= \int \sec^3\theta\,d\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}\cdot\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}+\frac{x}{1}\right|+c$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1}+x|+c$

Scanned by CamScanner

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

من تمارين الكتاب

**١** $\int \frac{\text{ظا}^3 س}{\text{قا}^4 س}$ د س

$= \int \text{ص}^3 \times \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$

$\text{ص} = \text{ظا} س$

$\text{د ص} = \text{قا}^2 س$ د س

$\text{ص} = \text{ظا} س$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$

**٢** $\int س \text{ قا}(١-٢س^2)$ ظا$(١-٢س^2)$ د س

$\text{ص} = ١-٢س^2$

$\text{د ص} = -٤س$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-٤س}$

$= -\frac{١}{٤} \int \text{قا ص ظا ص}$ د ص

$= -\frac{١}{٤} \text{قا ص} + ج$

$= -\frac{١}{٤} \text{قا}(١-٢س^2) + ج$

**٣** $\int \frac{\text{جا}^3 س}{١+\text{جتا} س}$ د س

$= \int \frac{\text{جا}^2 س \text{ جا} س}{١+\text{جتا} س}$ د س

$= \int \frac{(١-\text{جتا}^2 س) \text{ جا} س}{١+\text{جتا} س}$ د س

$\text{ص} = \text{جتا} س$

$\text{د ص} = -\text{جا} س$ د س

$= -\int \frac{(١-\text{ص}^2)}{١+\text{ص}}$ د ص

$= -\int (١-\text{ص})$ د ص

$= -\text{ص} + \frac{\text{ص}^2}{٢} + ج$

$= -\text{جتا} س + \frac{\text{جتا}^2 س}{٢} + ج$

**٤** $\int_{١}^{٢} |س-١|$ د س

$= \int_{١}^{٢} (س-١)$ د س

$= \frac{١}{٢}(س-١)^2 \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{١}{٢}(١)^2 - \frac{١}{٢}(٠)^2$

$= \frac{١}{٢}$

**٥** $\int \frac{\text{قتا}^2 س}{\text{ظا} س}$ د س

$\text{ص} = \text{ظا} س$

$\text{د ص} = \text{قا}^2 س$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$

$= \int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2 س}$

$= \int \frac{١}{\text{ص}}$ د ص

$= \ln |\text{ص}| + ج$

$= \ln |\text{ظا} س| + ج$

**٦** $\int$ س جا$(٢س-١)$ د س

$\text{ص} = ٢س-١$

$\text{د ص} = ٢$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢}$

$= \int \frac{\text{ص}+١}{٢} \text{ جا ص} \frac{\text{د ص}}{٢}$

$= \frac{١}{٤} \int (\text{ص}+١) \text{ جا ص}$ د ص

$= \frac{١}{٤} [-(\text{ص}+١) \text{ جتا ص} + \int \text{جتا ص}$ د ص$]$

$= \frac{١}{٤} [-(\text{ص}+١) \text{ جتا ص} + \text{جا ص}] + ج$

$= \frac{١}{٤} [-(٢س-١+١) \text{ جتا}(٢س-١) + \text{جا}(٢س-١)] + ج$

$= \frac{١}{٤} [-٢س \text{ جتا}(٢س-١) + \text{جا}(٢س-١)] + ج$

**٧** $\int \frac{٤}{س \sqrt{١+س^2}}$ د س، س $>$ ٠

$= \int \frac{٤}{س^2 \sqrt{١+س^2}}$ د س

$= \int \frac{٤}{س^3 \sqrt{(\frac{١}{س^2}+١)}}$ د س

$= \int \frac{٤}{س^3 |س| \sqrt{\frac{١}{س^2}+١}}$ د س

$\text{ص} = \frac{١}{س^2} + ١$

$\text{د ص} = \frac{-٢}{س^3}$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-٢س^3}$

$= \int \frac{٤}{س^3 \sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{د ص}}{-٢س^3}$

$= -٢ \int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}$ د ص

$= -٤ \sqrt{\text{ص}} + ج$

$= -٤ \sqrt{\frac{١}{س^2}+١} + ج$

**٨** $\int \frac{\text{جا}^3 س}{\sqrt{\text{جتا} س}}$ د س

$= \int \frac{\text{جا}^2 س \text{ جا} س}{\sqrt{\text{جتا} س}}$ د س

$= \int \frac{(١-\text{جتا}^2 س) \text{ جا} س}{\sqrt{\text{جتا} س}}$ د س

$\text{ص} = \text{جتا} س$

$\text{د ص} = -\text{جا} س$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{جا} س}$

$= -\int \frac{(١-\text{ص}^2)}{\sqrt{\text{ص}}}$ د ص

$= -\int (\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{٣}{٢}})$ د ص

$= -[٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}] + ج$

$= -٢\sqrt{\text{جتا} س} + \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{جتا}^5 س} + ج$

**٩** $\int \frac{\text{جا}^3 س}{\text{جتا}^4 س}$ د س

$= \int \frac{\text{جا}^2 س \text{ جا} س}{\text{جتا}^4 س}$ د س

$= \int \frac{(١-\text{جتا}^2 س) \text{ جا} س}{\text{جتا}^4 س}$ د س

$\text{ص} = \text{جتا} س$

$\text{د ص} = -\text{جا} س$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{جا} س}$

$= -\int \frac{(١-\text{ص}^2)}{\text{ص}^4}$ د ص

$= -\int (\text{ص}^{-٤} - \text{ص}^{-٢})$ د ص

$= -[-\frac{١}{٣}\text{ص}^{-٣} + \text{ص}^{-١}] + ج$

$= \frac{١}{٣}\text{ص}^{-٣} - \text{ص}^{-١} + ج$

$= \frac{١}{٣\text{جتا}^3 س} - \frac{١}{\text{جتا} س} + ج$

**١٠** $\int (\text{قا} س + \text{ظا} س)^2$ قا س د س

$\text{ص} = \text{قا} س + \text{ظا} س$

$\text{د ص} = \text{قا} س \text{ ظا} س + \text{قا}^2 س$ د س

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا} س (\text{ظا} س + \text{قا} س)}$

$= \int \text{ص}^2 \times \frac{\text{د ص}}{\text{قا} س (\text{ظا} س + \text{قا} س)}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{قا} س}$ د ص

$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}} \text{ د ص} = \frac{\text{ص}^2}{٢} + ج$

$= \frac{(\text{قا} س + \text{ظا} س)^2}{٢} + ج$

**١١** $\int$ س $\sqrt[٣]{س+١}$ د س

$\text{ص} = س+١$

$\text{د ص} = \text{د س}$

$= \int (\text{ص}-١) \sqrt[٣]{\text{ص}}$ د ص

$= \int (\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} - \text{ص}^{\frac{١}{٣}})$ د ص

$= \frac{٣}{٧}\text{ص}^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٤}(س+١)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

**١٢** $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^3 - س^2}$ د س

واجب

Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

# التكامل بالأجزاء

**١** $\int$ س جتاس دس

ع = س ← دع = ١ دس
دص = جتاس دس ← ص = جاس
= ع ص − ∫ ص دع
= س جاس − ∫ ١ جاس دس
= س جاس + جتاس + ج

**٢** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ٤س جتا٢س دس

ع = ٤س ← دع = ٤ دس
دص = جتا٢س دس ← ص = $\frac{1}{2}$ جا٢س
ع ص − ∫ ص دع
٤س × $\frac{1}{2}$ جا٢س $|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ − ∫ $\frac{1}{2}$ جا٢س × ٤ دس
= ٢س جا٢س $|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ − ٢ × $\frac{-1}{2}$ جتا٢س $|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$
= ٢س جا٢س + جتا٢س $|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ = −٢

**٣** $\int$ س٢ جاس دس

اجزاء صرتين

ع = س٢ ← دع = ٢س دس
دص = جاس دس ← ص = −جتاس
= −س٢ جتاس + ∫ ٢س جتاس دس
ع = ٢س ← دع = ٢ دس
دص = جتاس ← ص = جاس
= −س٢ جتاس + ٢س جاس − ∫ ٢ جاس دس
= −س٢ جتاس + ٢س جاس + ٢جتاس + ج

**٤** $\int \frac{(٢س+٣)}{قا٢س}$ دس = $\int$ (٢س+٣) جتا٢س دس

ع = ٢س + ٣ ← دع = ٢ دس
دص = جتا٢س ← ص = $\frac{جا٢س}{٢}$
(٢س+٣) $\frac{جا٢س}{٢}$ − ∫ $\frac{جا٢س}{٢}$ دس
(٢س+٣) $\frac{جا٢س}{٢}$ + $\frac{جتا٢س}{٤}$ + ج

**٥** $\int$ ٢س٤ جا٢س دس

واجب

**٦** $\int$ ٤س جتا٢س دس

= $\int$ ٤س ($\frac{1}{2}$ (١+جتا٤س)) دس
= $\int$ ٢س + ٢س جتا٤س دس

مباشر ← ٢س
اجزاء ← جتا٤س دس

ع = ٢س ← دع = ٢ دس
دص = جتا٤س ← ص = $\frac{جا٤س}{٤}$
٢س $\frac{جا٤س}{٤}$ − ∫ $\frac{جا٤س}{٤}$ دس
$\frac{٢س^{٢}}{٢}$ + س $\frac{جتا٤س}{٤}$ + ج

**٧** $\int$ س (جاس+جتاس)$^{٢}$ دس

= $\int$ س (جا٢س + ٢جاسجتاس + جتا٢س) دس
= $\int$ س (١ + جا٢س) دس
= $\int$ س + س جا٢س دس

مباشر ← س
اجزاء ← جا٢س دس

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ − $\frac{1}{2}$ س جتا٢س + $\frac{1}{4}$ جا٢س + ج ... واجب

**٨** $\int$ جا$\sqrt{٢س+٣}$ دس

(وجود داخل الجذر يستحسن التخلص منه)

ص = $\sqrt{٢س+٣}$
ص$^{٢}$ = ٢س + ٣
٢ص دص = ٢ دس

$\int$ ص جاص دص

اجزاء

ع = ص ← دع = ١ دص
دص = جاص ← ص = −جتاص
= −ص جتاص + $\int$ جتاص دص
= −ص جتاص + جاص + ج
= $-\sqrt{٢س+٣}$ جتا$\sqrt{٢س+٣}$ + جا$\sqrt{٢س+٣}$ + ج

**٩** $\int$ س جا$\sqrt{س+١}$ دس

ص = $\sqrt{س+١}$
ص$^{٢}$ = س + ١
٢ص دص = دس

$\int$ ص جاص ص دص

$\int$ ص$^{٣}$ جاص دص

اجزاء

ع = ص$^{٢}$ ← دع = ٢ص دص
دص = جاص ← ص = −جتاص
= −ص$^{٢}$ جتاص + ٢ $\int$ ص جتاص دص

ع = ص ← دع = دص
دص = جتاص ← ص = جاص
= −ص$^{٢}$ جتاص + ٢ص جاص − ٢ $\int$ جاص دص
= −ص$^{٢}$ جتاص + ٢ص جاص + ٢جتاص + ج
= $-(س+١)\sqrt{س+١}$ جتا$\sqrt{س+١}$ + ٢$\sqrt{س+١}$ جا$\sqrt{س+١}$ + ٢جتا$\sqrt{س+١}$ + ج

**١٠** $\int$ س$^{ن}$ لو س دس

ع = لو س ← دع = $\frac{1}{س}$ دس
دص = س$^{ن}$ دس ← ص = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$
= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لو س − $\int \frac{1}{س} \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ دس
= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لو س − $\frac{1}{ن+١}$ $\int$ س$^{ن}$ دس
= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لو س − $\frac{1}{(ن+١)^{٢}}$ س$^{ن+١}$ + ج

**١١** $\int$ لو س دس

ع = لو س ← دع = $\frac{1}{س}$ دس
دص = دس ← ص = س
= س لو س − $\int \frac{1}{س} \times س$ دس
= س لو س − $\int$ ١ دس
= س لو س − س + ج

**١٢** $\int$ س$^{٣}$ لو س دس

ع = لو س ← دع = $\frac{1}{س}$ دس
دص = س$^{٣}$ دس ← ص = $\frac{س^{٤}}{٤}$
= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو س − $\int \frac{1}{س} \times \frac{س^{٤}}{٤}$ دس
= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو س − $\frac{1}{4}$ $\int$ س$^{٣}$ دس
= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو س − $\frac{1}{16}$ س$^{٤}$ + ج

**١٣** $\int$ س$^{ن}$ لو$^{٢}$ س دس

ع = لو$^{٢}$ س ← دع = $\frac{٢ \text{ لو س}}{س}$ دس
دص = س$^{ن}$ دس ← ص = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$
= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لو$^{٢}$ س − $\int \frac{٢ \text{ لو س}}{س} \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ دس
= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لو$^{٢}$ س − $\frac{٢}{ن+١}$ $\int$ س$^{ن}$ لو س دس

**١٤** $\int$ س$^{٣}$ لو$^{٢}$ س دس

= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو$^{٢}$ س − $\frac{٢}{٤}$ $\int$ س$^{٣}$ لو س دس
= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو$^{٢}$ س − $\frac{1}{2}$ [$\frac{س^{٤}}{٤}$ لو س − $\frac{1}{16}$ س$^{٤}$ + ج]
= $\frac{س^{٤}}{٤}$ لو$^{٢}$ س − $\frac{1}{8}$ س$^{٤}$ لو س + $\frac{1}{32}$ س$^{٤}$ + ج

**١٥** $\int$ ٢س٤ جا٢س دس ... واجب



Scanned by CamScanner

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٠) $\int (س+٢)^{٢}$ جتا $س$ د$س$

ع $= (س+٢)^{٢}$ ← د ع $= ٢(س+٢)$ د$س$

د ه $=$ جتا $س$ د$س$ ← ه $=$ جا $س$

$(س+٢)^{٢} \times$ جا $س - \int$ جا $س \times ٢(س+٢)$ د$س$

$= (س+٢)^{٢}$ جا $س - \int (س+٢)$ جا $س$ د$س$

ع ه د ع ه

$(س+٢)^{٢}$ جا $س + ٢(س+٢)$ جتا $س - \int ٢$ جتا $س$ د$س$

$= (س+٢)^{٢}$ جا $س + ٢(س+٢)$ جتا $س + ٢$ جا $س + ج$

١١) $\int$ جتا$^{٣}$ $س$ د$س$

$\int$ جتا$^{٢}$ $س$ جتا $س$ د$س$

$\int (١ - $ جا$^{٢}$ $س)$ جتا $س$ د$س$

$\int$ جتا $س$ د$س - \int$ جا$^{٢}$ $س$ جتا $س$ د$س$

$\int$ جتا $س$ د$س - \int$ ص$^{٢}$ د ص

$= $ جا $س - \frac{ص^{٣}}{٣} + ج$

$= $ جا $س - \frac{$جا$^{٣} س}{٣} + ج$

ص $=$ جا $س$

د ص $=$ جتا $س$ د$س$

١٢) $\int$ جا$^{٣}$ $س$ د$س$

$\int$ جا$^{٢}$ $س$ جا $س$ د$س$

$\int (١ - $ جتا$^{٢}$ $س)$ جا $س$ د$س$

$\int$ جا $س$ د$س - \int$ جتا$^{٢}$ $س$ جا $س$ د$س$

$\int$ جا $س$ د$س + \int$ ص$^{٢}$ د ص

$= - $ جتا $س + \frac{ص^{٣}}{٣} + ج$

$= - $ جتا $س + \frac{$جتا$^{٣} س}{٣} + ج$

ص $=$ جتا $س$

د ص $= -$ جا $س$ د$س$

١٣) $\int$ جا$^{٢}$ $س$ جتا$^{٢}$ $س$ د$س$

$\int \left(\frac{١ - $ جتا $٢س}{٢}\right)\left(\frac{١ + $ جتا $٢س}{٢}\right)$ د$س$

$\frac{١}{٤} \int (١ - $ جتا$^{٢}$ $٢س)$ د$س$

$\frac{١}{٤} \int (١ - \frac{١ + $ جتا $٤س}{٢})$ د$س$

$\frac{١}{٤} \int (\frac{١}{٢} - \frac{$جتا $٤س}{٢})$ د$س$

$\frac{١}{٨} س - \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٤}$ جا $٤س + ج$

$\frac{١}{٨} س - \frac{١}{٣٢}$ جا $٤س + ج$

١٤) $\int \frac{س$ جا $س}{$قا $س}$ د$س$

$= \int \frac{س$ جا $س$ جتا $س}{١}$ د$س$

$= \int س$ جا $س$ جتا $س$ د$س$

... واجب

١٥) $\int \frac{س$ جا $س}{$جتا$^{٣} س}$ د$س$

$= \int س \frac{$جا $س}{$جتا$^{٣} س}$ د$س$

ع $= س$ ← د ع $=$ د$س$

د ه $= \frac{$جا $س}{$جتا$^{٣} س}$ د$س$ ← ه $= \frac{$جتا$^{-٢} س}{-٢}$

$\frac{س}{-٢$جتا$^{٢} س} - \int \frac{١}{-٢$جتا$^{٢} س}$ د$س$

$\frac{-س}{٢$جتا$^{٢} س} + \frac{١}{٢} \int$ قا$^{٢}$ $س$ د$س$

$\frac{-س}{٢$جتا$^{٢} س} + \frac{١}{٢}$ ظا $س + ج$

١٦) $\int$ جا$^{٢}$ $س$ (س + جتا$^{٢}$ $س$) د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س +$ جا$^{٢}$ $س$ جتا$^{٢}$ $س$ د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س + \frac{١}{٤} \int$ ٢ جا$^{٢}$ $س$ جتا$^{٢}$ $س$ د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س + \frac{١}{٤} \int$ جا$^{٢}$ $٢س$ د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س + \frac{١}{٤} \int \frac{١ - $ جتا $٤س}{٢}$ د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س + \frac{١}{٨} \int (١ - $ جتا $٤س)$ د$س$

$\int$ س جا$^{٢}$ $س + \frac{١}{٨} س - \frac{١}{٣٢}$ جا $٤س + ج$

١٧) $\int \frac{$جا$^{٢} س}{$جتا $س}$ د$س$

$= \int \frac{$جا$^{٢} س}{$جتا $س}$ د$س$

$= \int \frac{١ - $ جتا$^{٢} س}{$جتا $س}$ د$س$

$= \int$ قا $س - \int$ جتا $س$ د$س$

$= \int$ قا $س$ د$س - \int$ جتا $س$ د$س$

$= $ لا قا $س + $ ظا $س -$ جا $س + ج$

١٨) $\int \frac{$جا$^{٢} س}{$جتا$^{٢} س}$ د$س$

$= \int \frac{$جا$^{٢} س}{$جتا$^{٢} س}$ د$س$

$= \int$ ظا$^{٢}$ $س$ د$س$

$= \int ($قا$^{٢} س - ١)$ د$س$

$= \int$ قا$^{٢}$ $س$ د$س - \int ١$ د$س$

$= $ ظا $س - س + ج$

Scanned by CamScanner

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٢٦٦٦١١

١٨ $\int (2س-1)$ جتا $3س$ $د س$

١٩ $\int (س-2)^2$ جتا$(س+1)$ $د س$

٢٠ $\int$ جتا$^2$ $2ك+1$ $د س$

٢١ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5س\sqrt{س+3}$ $د س$

٢٢ $\int \frac{س$ جا$2س}{ق$ا$^2 س}$ $د س$

٢٣ $\int \frac{س$ ظا$س}{$جتا$^3 س}$ $د س$

٢٤ $\int \frac{3س}{\sqrt[3]{2ك+1}}$ $د س$

٢٥ $\int$ جا$^3 س$ جتا$^3 س$ $د س$

$ص = ظاس \leftarrow د ص = ق^2 س د س$

$= \int ظا^3 س$ ق$^2 س د س$

$= \int ص^3 د ص$

$= \frac{ص^4}{4} + ك$

$= \frac{1}{4}$ ظا$^4 س + ك$

٢٦ $\int س\sqrt{1-س} د س$

$= \int \frac{س}{\sqrt{1-س}} د س$

---- واجب

٢٧ $\int س\sqrt[3]{س^2+1} د س$

٢٨ اذا كان ق(١) = ٢ ، ق(٥) = ٦

ق(٥) = ق(١) = ٢

$\int_1^5$ جا ق(س) د س $= -\int_1^5$ ق(س) د ك

$= س ق(س)|_1^5 - \int_1^5 ق(س) د س$

$= (5 \times 6 - 1 \times 2) - (6 - 2) = 30 - 4 = 26$

٢٩ اذا كان ق(١) = ٤ ، ق(-١) = ٣

$\int_{-1}^{1}$ ق(س) د ك $= 2$ ، $\int_1^3 س^2$ ق(٥-٢ك) د س

اكل: $ص = 5 - 2ك \leftarrow د ص = -2 د س$

$د س = -\frac{د ص}{2}$

وايضا $2ك = 5 - ص \leftarrow س = \frac{5-ص}{2}$

عندما $س = 3 \leftarrow ص = -1$

$س = 1 \leftarrow ص = 3$

$\int_3^1 س^2$ ق$(5-2ك)$ د ك $= \int_{-1}^{3} \frac{(5-ص)^2}{8}$ ق$(ص) \times -\frac{د ص}{2}$

$= -\frac{1}{16} \int_{-1}^{3} (5-ص)^2$ ق$(ص)$ د ص

اجزاء

$ق = ق(ص) \leftarrow د ق = ق'(ص) د ص$

$د ع = (5-ص)^2 د ص \leftarrow ع = -\frac{(5-ص)^3}{3}$

$= -\frac{1}{16} \left[ -\frac{(5-ص)^3}{3} ق(ص) \right|_{-1}^{3} + \frac{1}{3} \int_{-1}^{3} ق'(ص) (5-ص)^3 د ص \Big]$

$= -\frac{1}{16} \left[ 0 - \left( -\frac{64}{3} \times 4 \right) \right] = -\frac{16}{3}$

٣٠ اذا كان ق(١) = ٤ ، $\int_1^4$ جا ق(س) د س $= 6$

$\int_1^4$ ق(س) د ك $= 3$ ، اثبت $\int_1^2 س^3$ جا ق$(س^2)$ د س $= 3$

اكل: $ص = س^2 \leftarrow د ص = 2س د س$

$د س = \frac{د ص}{2س}$

$\int_1^2 س^3$ جا ق$(س^2) \times \frac{د ص}{2س} = \frac{1}{2} \int_1^2 س^2$ جا ق$(س^2)$ د ص

$= \frac{1}{2} \int_1^4$ ص جا ق(ص) د ص

اجزاء

$ق = ص \leftarrow د ق = د ص$

$د ع = جا ق(ص) د ص \leftarrow ع = -$ جتا ق(ص)

$= \frac{1}{2} \left[ -ص$ جتا ق$(ص) \Big|_1^4 + \int_1^4$ جتا ق$(ص) د ص \right]$

$= \frac{1}{2} \left[ -4 \times ق(4) + 1 \times ق(1) + \int_1^4 ق'(ص)$ جتا ق$(ص) د ص \right]$

$= \frac{1}{2} [-4 \times 4 + 1 \times 4] + \frac{1}{2} \int_1^4$ جتا ق$(ص) د ص$

$= -6 + \frac{1}{2} \int_1^4$ جتا ق$(ص) د ص$

---

صفحة تمارين الكتاب

$= \frac{1}{2} س$ جتا$2س + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} س$ جا$2س + \frac{1}{2}$ جتا$2س + \frac{1}{6}$ جا$3س \right) + ك$

$= \frac{1}{2} س$ جتا$2س + \frac{3}{4} س$ جا$2س + \frac{1}{4}$ جتا$2س + \frac{1}{12}$ جا$3س + ك$

$= \frac{1}{2} ص$ جتا$ص + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} ص$ جا$ص + \frac{1}{2}$ جتا$ص \right) + \frac{1}{12}$ جا$3ص + ك$

$= \frac{1}{2} ص$ جتا$ص + \frac{3}{8} ص$ جا$ص + \frac{3}{8}$ جتا$ص + \frac{1}{12}$ جا$3ص + ك$

---

$\int$ جتا$^4 ص د ص$

$= \int$ جتا$^2 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int \left( \frac{1}{2} (1 + جتا2ص) \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int (1 + 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص) د ص$

$= \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2$ جتا$2ص + \frac{1}{2} (1 +$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} ص + 2 \times \frac{1}{2}$ جا$2ص + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ جا$4ص \right) + ك$

$= \frac{3}{8} ص + \frac{1}{4}$ جا$2ص + \frac{1}{32}$ جا$4ص + ك$

---

$\int$ جا$^4 ص د ص$

$= \int$ جا$^2 ص$ جا$^2 ص د ص$

$= \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص) د ص$

$= \frac{1}{4} \int \left( 1 - 2$ جتا$2ص + \frac{1}{2} (1 +$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} ص - 2 \times \frac{1}{2}$ جا$2ص + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ جا$4ص \right) + ك$

$= \frac{3}{8} ص -$ جا$2ص + \frac{1}{32}$ جا$4ص + ك$

---

$\int$ جا$^3 ص$ جتا$^3 ص د ص$

$= \int$ جا$^3 ص$ جتا$^2 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^3 ص (1 -$ جا$^2 ص)$ جتا$ص د ص$

$ع = ص$ جا$ص \leftarrow د ع = د ص$

$د ع = جتا ص د ص \leftarrow ع =$ جا$ص$

$= \int ع^3 (1 - ع^2) د ع$

$= \int (ع^3 - ع^5) د ع$

$= \frac{ع^4}{4} - \frac{ع^6}{6} + ك$

$= \frac{1}{4}$ جا$^4 ص - \frac{1}{6}$ جا$^6 ص + ك$

---

$\int$ جا$^4 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^2 ص$ جا$^2 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^2 ص \left( \frac{1}{2}$ جا$2ص \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^2 ص$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^2 ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^2 ص (1 -$ جتا$4ص) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^2 ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^2 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص)$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{16} \int (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{16} \int (1 -$ جتا$2ص)$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{16} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص - \frac{1}{16} \int$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{16} \int$ جتا$2ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{16} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص - \frac{1}{64}$ جا$4ص + \frac{1}{16} \int \frac{1}{2} ($ جتا$2ص +$ جتا$6ص) د ص$

$= \frac{1}{16} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص - \frac{1}{64}$ جا$4ص + \frac{1}{32} \left( \frac{1}{2}$ جا$2ص + \frac{1}{6}$ جا$6ص \right) + ك$

$= \frac{1}{16} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص - \frac{1}{64}$ جا$4ص + \frac{1}{64}$ جا$2ص + \frac{1}{192}$ جا$6ص + ك$

$= \frac{1}{16} ص - \frac{1}{64}$ جا$2ص - \frac{1}{64}$ جا$4ص + \frac{1}{192}$ جا$6ص + ك$

---

$\int$ جا$^4 ص$ جتا$^4 ص د ص$

$= \int$ جا$^4 ص$ جتا$^2 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^4 ص \left( \frac{1}{2}$ جا$2ص \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^4 ص$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^4 ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص (1 -$ جتا$4ص) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^2 د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{32} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{32} \int \left( 1 - 2$ جتا$2ص + \frac{1}{2} (1 +$ جتا$4ص) \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{32} \left( \frac{3}{2} ص - 2 \times \frac{1}{2}$ جا$2ص + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ جا$4ص \right) - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{3}{64} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص + \frac{1}{256}$ جا$4ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^4 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{3}{64} ص - \frac{1}{32}$ جا$2ص + \frac{1}{256}$ جا$4ص - \frac{1}{40}$ جا$^5 ص$ جتا$ص + ك$

---

$\int$ جا$^4 ص$ جتا$^3 ص د ص$

$= \int$ جا$^4 ص$ جتا$^2 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^4 ص (1 -$ جا$^2 ص)$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^4 (1 - ع^2) د ع$

$= \int (ع^4 - ع^6) د ع$

$= \frac{ع^5}{5} - \frac{ع^7}{7} + ك$

$= \frac{1}{5}$ جا$^5 ص - \frac{1}{7}$ جا$^7 ص + ك$

---

$\int$ جا$^5 ص$ جتا$^3 ص د ص$

$= \int$ جا$^5 ص$ جتا$^2 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^5 ص (1 -$ جا$^2 ص)$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^5 (1 - ع^2) د ع$

$= \int (ع^5 - ع^7) د ع$

$= \frac{ع^6}{6} - \frac{ع^8}{8} + ك$

$= \frac{1}{6}$ جا$^6 ص - \frac{1}{8}$ جا$^8 ص + ك$

---

$\int$ جا$^5 ص$ جتا$^5 ص د ص$

$= \int$ جا$^5 ص$ جتا$^4 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^5 ص (1 -$ جا$^2 ص)^2$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^5 (1 - ع^2)^2 د ع$

$= \int ع^5 (1 - 2ع^2 + ع^4) د ع$

$= \int (ع^5 - 2ع^7 + ع^9) د ع$

$= \frac{ع^6}{6} - \frac{2ع^8}{8} + \frac{ع^{10}}{10} + ك$

$= \frac{1}{6}$ جا$^6 ص - \frac{1}{4}$ جا$^8 ص + \frac{1}{10}$ جا$^{10} ص + ك$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$^3 ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص$ جتا$^2 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص (1 -$ جا$^2 ص)$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^6 (1 - ع^2) د ع$

$= \int (ع^6 - ع^8) د ع$

$= \frac{ع^7}{7} - \frac{ع^9}{9} + ك$

$= \frac{1}{7}$ جا$^7 ص - \frac{1}{9}$ جا$^9 ص + ك$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$^5 ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص$ جتا$^4 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص (1 -$ جا$^2 ص)^2$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^6 (1 - ع^2)^2 د ع$

$= \int ع^6 (1 - 2ع^2 + ع^4) د ع$

$= \int (ع^6 - 2ع^8 + ع^{10}) د ع$

$= \frac{ع^7}{7} - \frac{2ع^9}{9} + \frac{ع^{11}}{11} + ك$

$= \frac{1}{7}$ جا$^7 ص - \frac{2}{9}$ جا$^9 ص + \frac{1}{11}$ جا$^{11} ص + ك$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$^6 ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص$ جتا$^4 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص (1 -$ جا$^2 ص)^2 \left( \frac{1}{2}$ جا$2ص \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^6 ص (1 - 2$ جا$^2 ص +$ جا$^4 ص)$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^6 ص$ جا$^2 2ص د ص - \frac{1}{2} \int$ جا$^8 ص$ جا$^2 2ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^{10} ص$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^6 ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص - \frac{1}{2} \int$ جا$^8 ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^{10} ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص (1 -$ جتا$4ص) د ص - \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص (1 -$ جتا$4ص) د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص (1 -$ جتا$4ص) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^3 د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^4 د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^5 د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{64} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{64} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{64} \int \left( 1 - 3$ جتا$2ص + \frac{3}{2} (1 +$ جتا$4ص) - \frac{1}{4} (3$ جتا$2ص +$ جتا$6ص) \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{64} \int \left( 1 - 4$ جتا$2ص + \frac{3}{2} (1 +$ جتا$4ص) \right) د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{64} \int \left( \frac{5}{2} - \frac{15}{4}$ جتا$2ص + \frac{3}{8}$ جتا$4ص - \frac{1}{4}$ جتا$6ص \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{64} \int \left( \frac{5}{2} - 4$ جتا$2ص + \frac{3}{8}$ جتا$4ص \right) د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{5}{128} ص - \frac{15}{256}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{5}{128} ص + \frac{1}{16}$ جا$2ص - \frac{3}{2048}$ جا$4ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= -\frac{15}{256}$ جا$2ص + \frac{1}{16}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{256}$ جا$2ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{256}$ جا$2ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{256}$ جا$2ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \int \left( 1 - 3$ جتا$2ص + \frac{3}{2} (1 +$ جتا$4ص) - \frac{1}{4} (3$ جتا$2ص +$ جتا$6ص) \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{256}$ جا$2ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \int \left( \frac{5}{2} - \frac{15}{4}$ جتا$2ص + \frac{3}{8}$ جتا$4ص - \frac{1}{4}$ جتا$6ص \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{256}$ جا$2ص - \frac{1}{256}$ جا$6ص + \frac{5}{512} ص - \frac{15}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{5}{512} ص + \frac{1}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص + \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص$ جتا$^3 2ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص$ جتا$^2 2ص$ جتا$2ص د ص$

$= \int$ جا$^6 ص (1 -$ جا$^2 2ص)$ جتا$2ص د ص$

$ع =$ جا$2ص \leftarrow د ع = 2$ جتا$2ص د ص$

$= \frac{1}{2} \int ع^6 (1 - ع^2) د ع$

$= \frac{1}{2} \int (ع^6 - ع^8) د ع$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{ع^7}{7} - \frac{ع^9}{9} \right) + ك$

$= \frac{1}{14}$ جا$^7 2ص - \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص + ك$

---

$\int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص$ جتا$^3 2ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص$ جتا$^2 2ص$ جتا$2ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص (1 -$ جا$^2 2ص)$ جتا$2ص د ص$

$ع =$ جا$2ص \leftarrow د ع = 2$ جتا$2ص د ص$

$= \frac{1}{2} \int ع^8 (1 - ع^2) د ع$

$= \frac{1}{2} \int (ع^8 - ع^{10}) د ع$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{ع^9}{9} - \frac{ع^{11}}{11} \right) + ك$

$= \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص - \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص + ك$

---

$\int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \int$ جا$^{10} ص$ جتا$^3 2ص د ص$

$= \int$ جا$^{10} ص$ جتا$^2 2ص$ جتا$2ص د ص$

$= \int$ جا$^{10} ص (1 -$ جا$^2 2ص)$ جتا$2ص د ص$

$ع =$ جا$2ص \leftarrow د ع = 2$ جتا$2ص د ص$

$= \frac{1}{2} \int ع^{10} (1 - ع^2) د ع$

$= \frac{1}{2} \int (ع^{10} - ع^{12}) د ع$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{ع^{11}}{11} - \frac{ع^{13}}{13} \right) + ك$

$= \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص - \frac{1}{26}$ جا$^{13} 2ص + ك$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{5}{512} ص + \frac{1}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{14}$ جا$^7 2ص - \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص - \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص - \frac{1}{26}$ جا$^{13} 2ص \right) + ك$

$= \frac{5}{512} ص + \frac{1}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص - \frac{1}{112}$ جا$^7 2ص + \frac{1}{144}$ جا$^9 2ص + \frac{1}{704}$ جا$^{11} 2ص - \frac{1}{832}$ جا$^{13} 2ص + ك$

---

$\int$ جا$^6 ص$ جتا$^6 ص د ص$

$= \frac{5}{512} ص + \frac{1}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص + \frac{1}{256} \left( \frac{1}{14}$ جا$^7 2ص - \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{18}$ جا$^9 2ص - \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{22}$ جا$^{11} 2ص - \frac{1}{26}$ جا$^{13} 2ص \right) + ك$

$= \frac{5}{512} ص + \frac{1}{1024}$ جا$2ص + \frac{3}{2048}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص + \frac{1}{3584}$ جا$^7 2ص - \frac{1}{4608}$ جا$^9 2ص - \frac{1}{1408}$ جا$^{11} 2ص + \frac{1}{1664}$ جا$^{13} 2ص + ك$

---

$\int$ جا$^8 ص$ جتا$^8 ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص$ جتا$^6 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص (1 -$ جا$^2 ص)^3$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^8 (1 - ع^2)^3 د ع$

$= \int ع^8 (1 - 3ع^2 + 3ع^4 - ع^6) د ع$

$= \int (ع^8 - 3ع^{10} + 3ع^{12} - ع^{14}) د ع$

$= \frac{ع^9}{9} - \frac{3ع^{11}}{11} + \frac{3ع^{13}}{13} - \frac{ع^{15}}{15} + ك$

$= \frac{1}{9}$ جا$^9 ص - \frac{3}{11}$ جا$^{11} ص + \frac{3}{13}$ جا$^{13} ص - \frac{1}{15}$ جا$^{15} ص + ك$

---

$\int$ جا$^8 ص$ جتا$^7 ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص$ جتا$^6 ص$ جتا$ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص (1 -$ جا$^2 ص)^3$ جتا$ص د ص$

$ع =$ جا$ص \leftarrow د ع =$ جتا$ص د ص$

$= \int ع^8 (1 - ع^2)^3 د ع$

$= \int ع^8 (1 - 3ع^2 + 3ع^4 - ع^6) د ع$

$= \int (ع^8 - 3ع^{10} + 3ع^{12} - ع^{14}) د ع$

$= \frac{ع^9}{9} - \frac{3ع^{11}}{11} + \frac{3ع^{13}}{13} - \frac{ع^{15}}{15} + ك$

$= \frac{1}{9}$ جا$^9 ص - \frac{3}{11}$ جا$^{11} ص + \frac{3}{13}$ جا$^{13} ص - \frac{1}{15}$ جا$^{15} ص + ك$

---

$\int$ جا$^8 ص$ جتا$^8 ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص$ جتا$^6 ص$ جتا$^2 ص د ص$

$= \int$ جا$^8 ص (1 -$ جا$^2 ص)^3 \left( \frac{1}{2}$ جا$2ص \right)^2 د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص (1 - 3$ جا$^2 ص + 3$ جا$^4 ص -$ جا$^6 ص)$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص$ جا$^2 2ص د ص - \frac{3}{4} \int$ جا$^{10} ص$ جا$^2 2ص د ص + \frac{3}{4} \int$ جا$^{12} ص$ جا$^2 2ص د ص - \frac{1}{4} \int$ جا$^{14} ص$ جا$^2 2ص د ص$

$= \frac{1}{4} \int$ جا$^8 ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص - \frac{3}{4} \int$ جا$^{10} ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص + \frac{3}{4} \int$ جا$^{12} ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص - \frac{1}{4} \int$ جا$^{14} ص \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$4ص) \right) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص (1 -$ جتا$4ص) د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص (1 -$ جتا$4ص) د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص (1 -$ جتا$4ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص (1 -$ جتا$4ص) د ص$

$= \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^4 د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{3}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^5 د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^6 د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} (1 -$ جتا$2ص) \right)^7 د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{128} \int (1 - 4$ جتا$2ص + 6$ جتا$^2 2ص - 4$ جتا$^3 2ص +$ جتا$^4 2ص) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{3}{256} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{512} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^3 د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{1024} \int (1 - 2$ جتا$2ص +$ جتا$^2 2ص)^3 (1 -$ جتا$2ص) د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{128} \int \left( 1 - 4$ جتا$2ص + 3 (1 +$ جتا$4ص) - 2 (3$ جتا$2ص +$ جتا$6ص) + \frac{1}{4} (3 + 4$ جتا$4ص +$ جتا$8ص) \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{3}{256} \int (1 - 4$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{512} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{1024} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{1}{128} \int \left( \frac{35}{8} - \frac{7}{2}$ جتا$2ص + \frac{1}{2}$ جتا$4ص - \frac{1}{4}$ جتا$6ص + \frac{1}{32}$ جتا$8ص \right) د ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{3}{256} \int \left( \frac{5}{2} - 4$ جتا$2ص + \frac{3}{8}$ جتا$4ص \right) د ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{512} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{1024} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص د ص$

$= \frac{35}{1024} ص - \frac{7}{256}$ جا$2ص + \frac{1}{256}$ جا$4ص - \frac{1}{1024}$ جا$6ص + \frac{1}{8192}$ جا$8ص - \frac{1}{8} \int$ جا$^8 ص$ جتا$4ص د ص - \frac{15}{512} ص + \frac{3}{128}$ جا$2ص - \frac{3}{2048}$ جا$4ص + \frac{3}{8} \int$ جا$^{10} ص$ جتا$4ص د ص + \frac{3}{512} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص) د ص - \frac{3}{8} \int$ جا$^{12} ص$ جتا$4ص د ص - \frac{1}{1024} \int (1 - 3$ جتا$2ص + 3$ جتا$^2 2ص -$ جتا$^3 2ص)^2 (1 -$ جتا$2ص) د ص + \frac{1}{8} \int$ جا$^{14} ص$ جتا$4ص