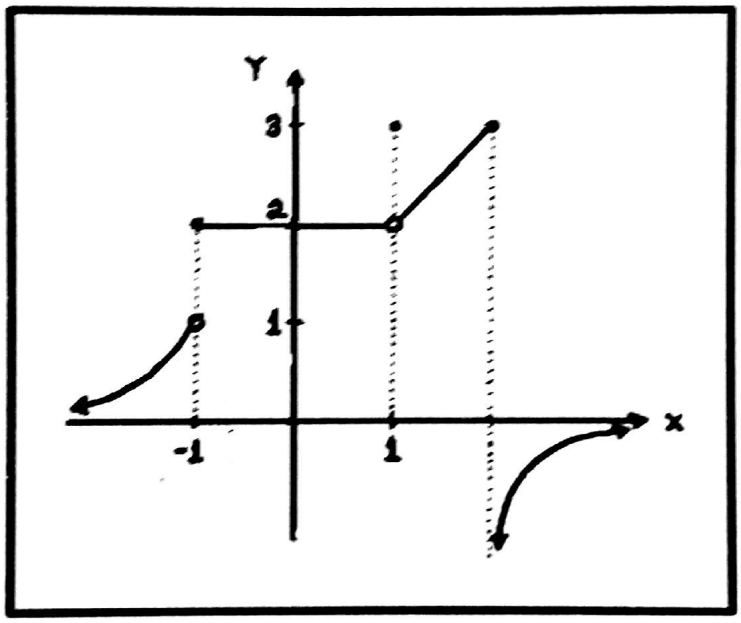
Limits and Continuity

النهايات و الاتصال

-الفرع الادبي-



-وائل يوسف-

0789594545

Scanned by CamScanner

النهايات :-

* النهاية :- هي دراسة سلوك الاقتران ق(س) عندما يقترب المتغير س من عددها مثل (P) من جهة اليمين او اليسار. يرمز لها بالرمز $\lim_{س \to P}$ ق(س).

ملاحظات :-

① $\lim_{س \to P^+}$ ق(س) تعني دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب لـ P من جهة اليمين. (س > P).

② $\lim_{س \to P^-}$ ق(س) تعني دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب لـ P من جهة اليسار. (س < P).

* متى تكون النهاية موجودة ؟؟

عندما تكون : $\lim_{س \to P^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to P^-}$ ق(س) ⇐ $\lim_{س \to P}$ ق(س) = ل.

اما اذا كانت : $\lim_{س \to P^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to P^-}$ ق(س) ⇐ $\lim_{س \to P}$ ق(س) غير موجودة.

طرق إيجاد النهايات :

① بالرسم ② بالجدول ③ بالتعويض المباشر وهي الطريقة الأساسية.

---

* ايجاد النهاية من الجدول * (أولاً).

مثال : من خلال الجدول جد $\lim_{س \to ٥}$ ق(س).

س	٤٫٣	٤٫٥	٤٫٨	٥	٥٫١	٥٫٢	٥٫٥	٥٫٧
ق(س)	٧	١٨	١٩	؟	٤١	٤٥	٤٨	٤٧

* $\lim_{س \to ٥^+}$ ق(س) = ٥

* $\lim_{س \to ٥^-}$ ق(س) = ٥

⇐ $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ٥

Scanned by CamScanner

تدريب :- جد نهاية لكل من الجداول التالية :-

①

س	٣٢	٣٤	٣٦	٣٨	٣٩	٤٠	٤٢
م(س)	٦,٣	٦,٤	٦,١		٤٩	٤٨	٤٧

نهـا م(س) = ٤٩
س←٣

②

س	٣٣	٣٤	٣٦	٣٨	٣٩	٤٠	٤٢
ق(س)	٦,٣	٦,٤	٦,١		٤٩	٤٨	٤٧

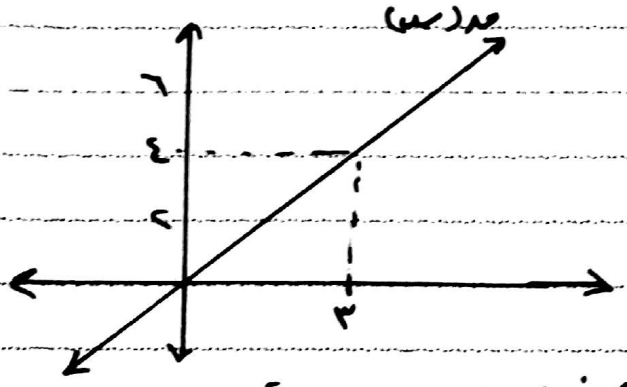
نهـا ق(س) = ٤٩
س←٣

تدريب :- كون جدول واذكر سلوك الاقتران عند(س) = س+٤ عندما تقترب س من العدد ١ .

س				١				
عند(س)								

* ثانياً : إنهاية من الرسم

مثال : اعتماداً على الشكل اجب عن التالي :

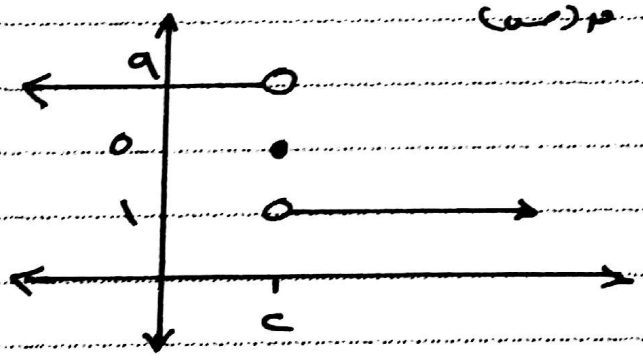


① نهـا عد(س) = ٤
س←٣+

② نهـا عد(س) = ٤
س←٣-

③ نهـا عد(س) = ٤
س←٣

مثال :- اعتماداً على الشكل اجب عن التالي :-



① عد(٢) = ٥

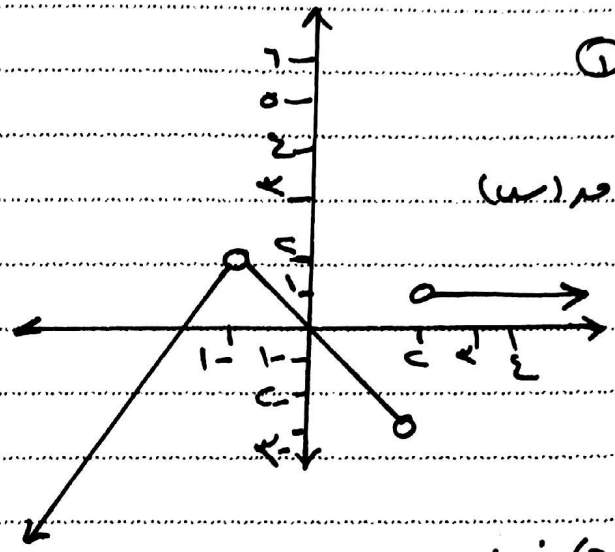
② نهـا عد(س) = ١
س←٢+

③ نهـا عد(س) = ٩
س←٢-

④ نهـا عد(س) = غير موجودة .
س←٢

Scanned by CamScanner

تمارين : - جد نهاية د(س) لكل من :

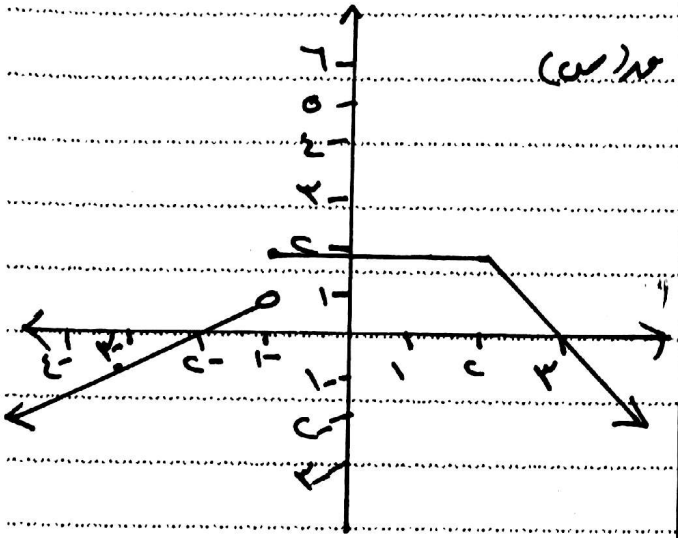
① 

أ) نهاية د(س) = ؟ (س ← -١)

ب) نهاية د(س) = ؟ (س ← ٣)

ج) نهاية د(س) = ؟ (س ← ٣)

② اعتماداً على الشكل الذي يمثل الدالة د جد قيمة كل من :



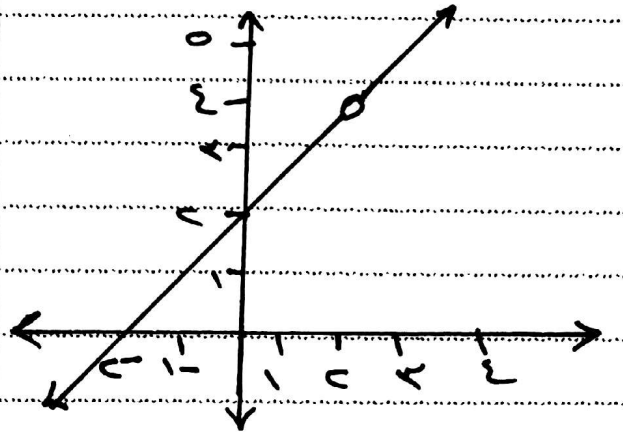
أ) نهاية د(س) = ؟ (س ← ٣)

ب) نهاية د(س) = ؟ (س ← ١)

ج) قيمة P ، صح نهاية د(س) غير موجودة (س ← P)

د) قيم ب ، صح نهاية د(س) = صفر. (س ← ب)

③ ليكن عين د(س) = $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$



أ) نهاية د(س) = ؟ (س ← ٢)

ب) د(٢) = ؟ د(س) = ؟

ج) نهاية د(س) = ؟ (س ← ٢)

Scanned by CamScanner

ثالثاً:

* حساب النهايات *

عند حساب النهايات لا تتوفر معلومة قاعدته لا صل (التعويض المباشر) مباشرة، الجواب النهائي لا يمكن حالات:

* $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ او $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

* ملاحظة:-

الجذور سوف نقوم بدراستها بشكل منفصل.

* أمثلة وتمارين:

جد قيمة النهايات التالية:

① $\lim_{س \to 1} (س+1) = 1+1 = 2$

② $\lim_{س \to 4} س^2 = (4)^2 = 16$

③ $\lim_{س \to 2} (س^3 + 3س) = (2)^3 + 3(2)$
$= 8 + 6 = 14$

④ $\lim_{س \to 9} \frac{س + 3\sqrt{س}}{س + 1}$

$= \frac{9 + 3\sqrt{9}}{9+1} = \frac{9+3}{10} = \frac{6}{10}$

⑤ $\lim_{س \to -1} (س+1)(س-1)$

$= (-1+1)(-1-1)$

$= 0 \times -2 = 0$

⑥ $\lim_{س \to 2} (2س^3 - 8س^2)$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$

⑧ $\lim_{س \to 2} (3س - 1)$

⑨ $\lim_{س \to 4} س^2 (س+1)^2$

⑩ $\lim_{س \to 2} \frac{(س+1)^3}{س - 1}$

Scanned by CamScanner

(11) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٥}{س} + \frac{٣}{س}}{س + ٢}$

(12) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س + ١}$

(13) $\lim_{س \to -٢} \frac{س(س+١)^٢}{س - ١}$

(14) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٣ - س + ٢}{س^٤ + ١}$

(15) $\lim_{س \to ٥} (س^٤ - ٥)$

* ملاحظات هامة جداً :-

① اذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{عدد}{صفر}$ فان النهاية غير موجودة

② اذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ نبحث عن طرق اخرى :

١- اخراج عامل مشترك .
٢- تحليل عبارة تربيعية .
٣- الفرق بين مربعين .
٤- الفرق او مجموع مكعبين .
٥- تعويض المقامات .
٦- الضرب بالمرافق .

تذكير :- الاصل دائماً التعويض المباشر

أمثلة :-

① $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{س - ٣} = \frac{٣+٣}{٣-٣} = \frac{٦}{٠} =$ غ.م

② $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤س + ١} - ٥}{س - ٢}$

$= \frac{\sqrt{٤ \times ٢ + ١} - ٥}{٢ - ٢} = \frac{٥ - ٥}{٠}$

$= \frac{٠}{٠} \Leftarrow$ غير محددة

أمثلة :- (اخراج عامل مشترك)

*ملاحظة: العامل المشترك اما ان يكون عدد او متغير او عدد ومتغير في نفس الوقت.

① $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٢س}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س(س^٣ - ٢)}{(س - ٣)}$

$\lim_{س \to ٣} س = ٣$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٨}{٥س - ٢٠} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{٥(س - ٤)} = \frac{٨}{٥}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ + ٤س}{س^٤} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س(س^٢ + ٤)}{س^٤}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢ + ٤)}{س^٣}$

$= \frac{٤}{٠} = \infty$

تمارين :-

① $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^٤ - ١٠س}{س - ٢}$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{٩س - س^٣}{س^٤ - ٩}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٣ - ٥س^٤}{٥س^٤ - ٣س^٣}$

④ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ٤س}{س^٢ - ٨}$

Scanned by CamScanner

أمثلة: (تحليل لعبارة تربيعية)

① نهـا $\frac{س^{٤}-٥س^{٢}+٦}{٣-س}$ $س \to ٣$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س-٣)(س-٢)(س+٢)}{(س-٣)}$ $س \to ٣$

$= ٣-٢ = ١$

② نهـا $\frac{س^{٤}+٣س^{٢}+١}{س+١}$ $س \to -١$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س+١)(س^{٣}-س^{٢}+١)}{(س+١)}$ $س \to -١$

$= -١ -١ +١ = ٠$

③ نهـا $\frac{س^{٤}+٥س^{٢}-١٤}{س+٧}$ $س \to -٧$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س+٧)(س^{٣}-٧س+٤)}{(س+٧)}$ $س \to -٧$

$= -٧-٢ = -٩$

④ نهـا $\frac{س^{٤}-٦س^{٢}-١٦}{س-٨}$ $س \to ٨$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س-٨)(س^{٣}+٢س^{٢}+٤س+٤)}{(س-٨)}$ $س \to ٨$

$= ٨+٢ = ١٠$

أمثلة: (الفرق بين مربعين)

① نهـا $\frac{س^{٤}-٩}{س-٣}$ $س \to ٣$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س-٣)(س+٣)(س^{٢}+٩)}{(س-٣)}$ $س \to ٣$

$= ٣+٣ = ٦$

② نهـا $\frac{س^{٤}-٤}{س-٢}$ $س \to ٢$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٤)}{(س-٢)}$ $س \to ٢$

$= ٢+٢ = ٤$

③ نهـا $\frac{س^{٤}-٥٦}{س+٥}$ $س \to -٥$ $= \frac{٠}{٠}$

نهـا $\frac{(س-٥)(س+٥)(س^{٢}+٢٥)}{(س+٥)}$ $س \to -٥$

$= -٥-٥ = -١٠$

④ نهـا $\frac{١٦-س^{٤}}{س-٢}$ $س \to ٢$ $= \frac{٠}{٠}$

-١

نهـا $\frac{(٢-س)(٢+س)(س^{٢}+٤)}{(س-٢)}$ $س \to ٢$

$= -١ \times (٤+٤)$

$= -١ \times ٨$

$= -٨$

Scanned by CamScanner

أمثلة : (فرق او مجموع مكعبين)

① $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 8}{س - 2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(س^2+2س+4)}{(س-2)}$

$= (2)^2 + 2\times2 + 4 = 12$

② $\lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{س^3 - 1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to 1} \frac{(س-1)}{(س-1)(س^2+س+1)}$

$= \frac{1}{(1)^2+1+1} = \frac{1}{3}$

③ $\lim_{س \to -3} \frac{س^3 + 27}{س + 3} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to -3} \frac{(س+3)(س^2-3س+9)}{(س+3)}$

$= (-3)^2 - 3\times-3 + 9 = 27$

④ $\lim_{س \to -5} \frac{س + 5}{س^3 + 125} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to -5} \frac{(س+5)}{(س+5)(س^2-5س+25)}$

$= \frac{1}{(-5)^2 - 5\times-5 + 25}$

$= \frac{1}{75}$

غير ذلك :- (كسور)

① $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + 5س + 6}{9 - س^2}$

② $\lim_{س \to 2} \frac{س^4 - 27س}{3 - س}$

③ $\lim_{س \to -4} \frac{-3س + 12}{س^2 - 3س - 4}$

④ $\lim_{س \to 3} \frac{س^3 - 27}{3س^2 - 9س}$

Scanned by CamScanner

⑤ $\lim_{س \to 1} \frac{س^٤ + س - ٢}{س^٤ - ١}$

⑥ $\lim_{س \to ٥} \frac{٥س - س^٤}{س^٣ - ١٢٥}$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{(٤+س)^{\frac{١}{٢}} - ٢}$

⑧ $\lim_{س \to ٢} \frac{(٣س+٢)^{\frac{١}{٣}} - ٥}{س - ٢}$

أمثلة :- (تعويض المقامات)

① $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٤ - س)}{٢س٤} \times \frac{١}{(٤ - س)}$

$= \frac{١}{٢ \times ٤} = \frac{١}{٨}$

② $\lim_{س \to ٥} \frac{\frac{١}{س+٥} - \frac{١}{١٠}}{س - ٥} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١٠ - (س+٥)}{١٠(س+٥)} \times \frac{١}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{١٠(س+٥)} \times \frac{١}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-(س-٥)}{١٠(س+٥)} \times \frac{١}{(س-٥)}$

$= \frac{-١}{١٠ \times (٥+٥)} = \frac{-١}{١٠٠}$

③ $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}}{س - ٤}$

Scanned by CamScanner

④ $\lim_{س \to 1} \frac{\frac{1}{س+3} - \frac{2}{س+2}}{س-1}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{2}{س+2} + \frac{س-2}{س}}{س}$

⑥ $\lim_{س \to 3} \frac{\frac{س}{س-3} - \frac{س+2}{س-1}}{س-3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{س \to 3} \frac{(س-1)س - (س-3)(س+2)}{(س-3)(س-1)(س-3)}$$

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - س - س^2 + 3 + 3}{(س-3)(س-1)(س-3)}$$

$$\lim_{س \to 3} \frac{-1(-س+6)}{(س-3)(س-1)(س-3)}$$

$$= \frac{-1}{2 \times 2 \times (-1)} = \frac{-1}{-4}$$

⑦ $\lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{س}}{س+2}$

⑧ $\lim_{س \to 7} \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{س-2}}{3س^2 - 14س}$

Scanned by CamScanner

* (الضرب بالمرافقة)

المقدار	المرافقة	ناتج الضرب
$\sqrt{س}-1$	$\sqrt{س}+1$	$س-1$
$\sqrt{س}+9$	$\sqrt{س}-9$	$س-81$
$\sqrt{س+ج}-أ$	$\sqrt{س+ج}+أ$	$س+ج-أ^2$ $=س-1$
$\sqrt{س}\pm\sqrt{ص}$	$\sqrt{س}\mp\sqrt{ص}$	$س-ص$

* تأكيد :- تستخدم هذه الطريقة اذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

أمثلة وتمارين :-

① نهـا $\frac{\sqrt{س}-1}{س-1} = \frac{0}{0}$ ، $س \to 1$

نهـا $\frac{\sqrt{س}-1}{س-1} \times \frac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1}$ ، $س \to 1$

نهـا $\frac{(س-1)}{(س-1)} \times \frac{1}{\sqrt{س}+1}$ ، $س \to 1$

$= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

② نهـا $\frac{س-16}{3-\sqrt{س}+4} = \frac{0}{0}$ ، $س \to 16$

نهـا $\frac{س-16}{3-\sqrt{س}+4} \times \frac{3+\sqrt{س}+4}{3+\sqrt{س}+4}$ ، $س \to 16$

نهـا $\frac{(س-16)}{(16-س)} \times (3+\sqrt{س}+4)$ ، $س \to 16$

$= -1 \times (3+\sqrt{16}+4)$

$= -1 \times (3+4) = -8$

③ نهـا $\frac{\sqrt{س+1}-2}{س-3}$ ، $س \to 3$

④ نهـا $\frac{س-16}{3-\sqrt{س+1}}$ ، $س \to 8$

Scanned by CamScanner

⑤ $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٤} - ٥}$

⑥ $\lim_{س \to ٧} \frac{س - ٧}{\sqrt{س + ٢} - ٣}$

⑦ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩}$

⑧ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س + ١} - \sqrt{٢س + ٣}}{س - ٢}$

⑨ $\lim_{ه \to ٠} \frac{\sqrt{٣ه + ٥} - \sqrt{٥}}{ه} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{ه \to ٠} \frac{\sqrt{٣ه + ٥} - \sqrt{٥}}{ه} \times \frac{\sqrt{٣ه + ٥} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٣ه + ٥} + \sqrt{٥}}$

$\lim_{ه \to ٠} \frac{٣ه + ٥ - ٥}{ه} \times \frac{١}{\sqrt{٣ه + ٥} + \sqrt{٥}}$

$\lim_{ه \to ٠} \frac{٣ه}{ه} \times \frac{١}{\sqrt{٣ه + ٥} + \sqrt{٥}}$

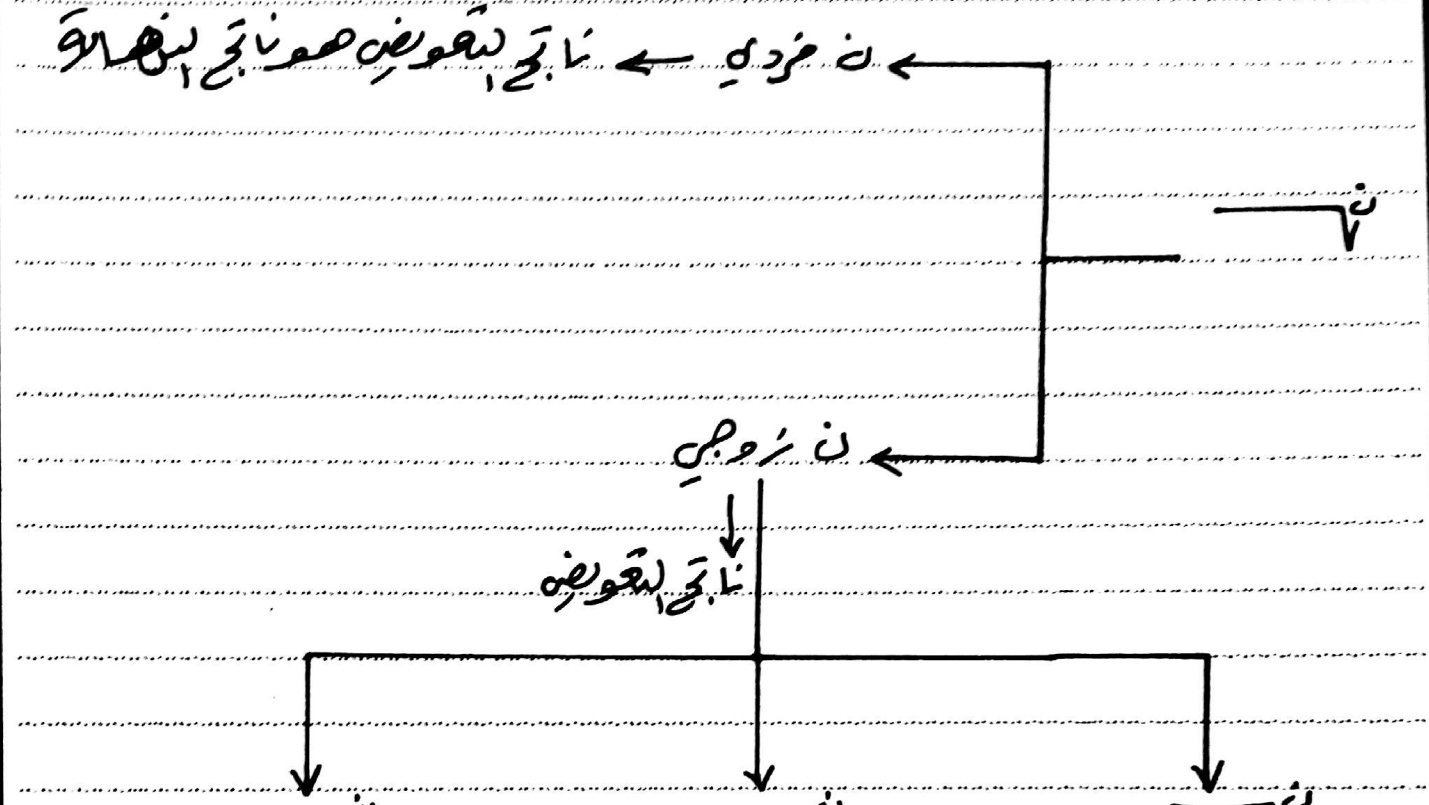
$= \frac{١}{\sqrt{٥} + \sqrt{٥}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٥}}$

Scanned by CamScanner

* نهايات الجذور :-

أولاً نقوم بالتعويض المباشر ثم نتبع بما يلي :-



* دراسة الإشارة :-

① نادي ما داخل الجذر بالصفر ⇐ (د(س) = ٠)

② نجد قيمة س ونخدها على خط الأعداد لينتج لنا منطقة موجبة (د(س) > ٠) ومنطقة سالبة (د(س) < ٠)

③ المنطقة الموجبة (د(س) > ٠) ⇐ النهاية = ٠
المنطقة السالبة (د(س) < ٠) ⇐ النهاية غير موجودة .

Scanned by CamScanner

تمارين :-

① $\lim_{س \to 1} (س^3 + 3س)$

$= (1)^3 + 3(1) = 1 + 3 = 4$

② $\lim_{س \to 3} (س^2 - 6)$

$= (3)^2 - 6 = 9 - 6 = 3$

③ $\lim_{س \to 1} (س^4 + 15)$

$= (1)^4 + 15 = 16 = 4$

④ $\lim_{س \to 0} (س + 4)$

$= 0 + 4 = 4 = 2$

⑤ $\lim_{س \to 6} (س^2 - 5س)$

$= (6)^2 - 5(6) = 36 - 30 = 6$ غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to 3} (س^3 - 9)$

$= (3)^3 - 9 = 27 - 9$

$= 18$ غير موجودة

⑦ $\lim_{س \to 2^+} (س - 2)$ نأخذ يمين = 0

$س - 2 = 0 \Leftarrow س = 2$

(س+2 > 0) (س+2 < 0)

$\lim_{س \to 2^+} (س - 2) = 0$

⑧ $\lim_{س \to 1} (س^2 - 1) \Leftarrow$ نأخذ = 0

$س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س = \pm 1$

$\lim_{س \to 1^+} (س^2 - 1) = 0$

$\lim_{س \to 1^-} (س^2 - 1) = 0^+$

$\Leftarrow \lim_{س \to 1} (س^2 - 1) = 0^+$

⑨ $\lim_{س \to 2} (3 - س)$

(١٠) $\lim_{س \to ٥} (\sqrt{٣-س} + س^{٣} - ٤)$

(١١) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{(٤-س)^{٣}}$

(١٢) $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٣]{٤-س^{٣}}$

(١٣) $\lim_{س \to +\infty} \sqrt{\frac{١}{٤}-\frac{١}{س}}$

(١٤) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤س^{٣}}$

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٤س}$

(١٦) $\lim_{س \to \frac{١}{٥}} \sqrt{٥س-١}$

(١٧) $\lim_{س \to -١} \left(\sqrt{٣-س} + \frac{س+١}{س^{٣}+١}\right)$

H.W : $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^{٣}-١٠س+٥}$

Scanned by CamScanner

* نهاية الاقتران المتشعب :-

ملاحظات : ① دائماً المطلوب ايجاد النهاية او الصورة لعددها .
② الاصل دائماً التعويض المباشر (بشرط) .

لنفرض ان $f(x)$ اقتران متشعب ونريد ايجاد $\lim_{x \to P} f(x)$

$x = P$

(نقطة عادية) نختار القاعدة المناسبة ونعوض

(نقطة تشعب او تحول) نجد النهاية من اليمين ومن اليسار فاذا تساوت النهايتين النهاية موجودة اما العكس النهاية غ.م.

* اذا طلب الصورة : $x = P$ نقطة عادية نختار القاعدة ، $x = P$ نقطة تشعب نعوض بنفسها واوجد أصله ومقارنه :

① اذا كان $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 1 \\ \frac{x+3}{5} & , x \geq 1 \end{cases}$

جد :

① $f(-1) =$

$f(1) =$

② $\lim_{x \to 4} f(x) =$

③ $\lim_{x \to 1} f(x) =$

② اذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x \leq 2 \\ 4x-2 & , x > 2 \end{cases}$

جد :

① $f(2) =$

② $\lim_{x \to 1} f(x) =$

③ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

Scanned by CamScanner

* اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & ، س \neq ص \\ ٤س + ١ & ، س = ص \end{cases}$$

(حيث ص عدد ثابت، لإيجاد قيمة ص)

جد نهاية $ق(س)$ عندما $س \to ٣$

* اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \neq ٣ \\ ٨ & ، س = ٣ \end{cases}$

جد:

① نهاية $هـ(س)$ عندما $س \to ٥$

② نهاية $هـ(س)$ عندما $س \to ٣$

③ $هـ(٣) =$

* اذا كان:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س < ٠ \\ ٥س & ، ٠ \leq س \leq ٦ \\ س - ٦ & ، س > ٦ \end{cases}$$

جد:

① نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٠$

② نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٦$

③ نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٦$

Scanned by CamScanner

* نظريات لنهايات :-

* اذا كانت $\lim_{س \to ب} د(س) = ل$

و $\lim_{س \to ب} هـ(س) = م$ فإن :-

① $\lim_{س \to ب} ج د(س) = ج \lim_{س \to ب} د(س) = ج ل$

② $\lim_{س \to ب} (د(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to ب} د(س) \pm \lim_{س \to ب} هـ(س)$

$= ل \pm م$

③ $\lim_{س \to ب} (د(س) \times هـ(س))$

$= \lim_{س \to ب} د(س) \times \lim_{س \to ب} هـ(س)$

$= ل \times م$

④ $\lim_{س \to ب} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ب} د(س)}{\lim_{س \to ب} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، $م \neq ٠$

⑤ $\lim_{س \to ب} د(س)^{ن} = \left(\lim_{س \to ب} د(س)\right)^{ن}$

$= ل^{ن}$

⑥ $\lim_{س \to ب} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to ب} د(س)}$

$= \sqrt[ن]{ل}$

ملاحظة :- نظرية ⑤ و ⑥ يمكن ان تطبق على الثوابت اقترانات .

تمارين :-

① اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٨$

و $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٢$ جد :

أ) $\lim_{س \to ٣} (٤ د(س) + ٢ هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٣} (د(س) - ٢ هـ(س))$

ج) $\lim_{س \to ٣} (٢ د(س) + ٣ هـ(س) + ٤)$

د) $\lim_{س \to ٣} ((هـ(س))^{٣} \times (٣ د(س) - ١))$

Scanned by CamScanner

③ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٨$

جد $\lim_{س \to ٢} (ق(س) + س^{٢} - ٤)$

④ اذا كانت $\lim_{س \to -١} س^{٣} م(س) = -١٢$

فجد $\lim_{س \to -١} \left(\frac{٤م(س)}{٦} + ٢س \right)$

④ اذا كانت $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٤$

وكانت $\lim_{س \to ٥} \frac{هـ(س) + ٢}{٣هـ(س)} = ١$

جد $\lim_{س \to ٥} هـ(س)$

⑤ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٢$

و $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٩$ فجد

$$\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) + ١}{هـ(س) + ٢س - ٥}$$

Scanned by CamScanner

(٩) اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٦٤$ فجد :

أ) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{ق(س)}$

ب) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{ق(س)}$

ج) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٣]{ق(س)} + س^٤ + ٥س - ٣)$

د) $\lim_{س \to ٣} (\frac{\sqrt[٥]{ق(س)}}{٢} + س - ٥)$

Scanned by CamScanner

أسئلة إيجاد المجاهيل :-

① اذا كانت $\lim_{س \to ١} (س - ٢) = ٩$ جد قيمة ٢ .

② اذا كانت $\lim_{س \to ٢} (٣س^{٤} + ٢س) = ١٦$ جد قيمة ٢

③ اذا كانت $\lim_{س \to ٣} (م س^{٤} + ٥س + ١) = ٥٢$ جد قيمة م

④ اذا كانت $\lim_{س \to ٠} (س^{٤} + هـ) = ٩$

جد قيمة هـ .

⑤ اذا كان $ق(س) = \frac{ق(س) - ٥س}{س + ٣}$ جد $\lim_{س \to ٣}$

Scanned by CamScanner

⑥ اذا كان $هـ(س) = \frac{1}{س - ٤}$

جد بالتعريف $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢}$

$\left(أ : \frac{-١}{(س - ٤)^{٢}} \right)$

⑦ اذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{أ س + ٥}{س + ١} = ٤$

جد قيمة أ.

$(أ : أ = ٣)$

⑧ اذا كان $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س - ٤}$ موجودة

جد قيمة أ

$(أ : أ = ٤)$

⑨ اذا كان $\lim_{س \to ٣} (س - ٣) = ٦$

جد قيمة أ

$(أ : أ = ٩)$

⑩ اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٣ & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ أ س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ موجودة فما قيمة أ ؟

⑪ اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٣ & ، س < أ \\ ٤ & ، س = أ \\ ٥ & ، س > أ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ موجودة جد قيمة أ.

Scanned by CamScanner

(١٢) اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & ، س \leq ١ \\ ٥س^{٤} + ٧ & ، س > ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة و $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٦$

جد قيمة كل من $أ$ و $ب$.

(١٣) اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} أس + ٤ & ، س \leq ٢ \\ ٥س + أ & ، س > ٢ \end{cases}$

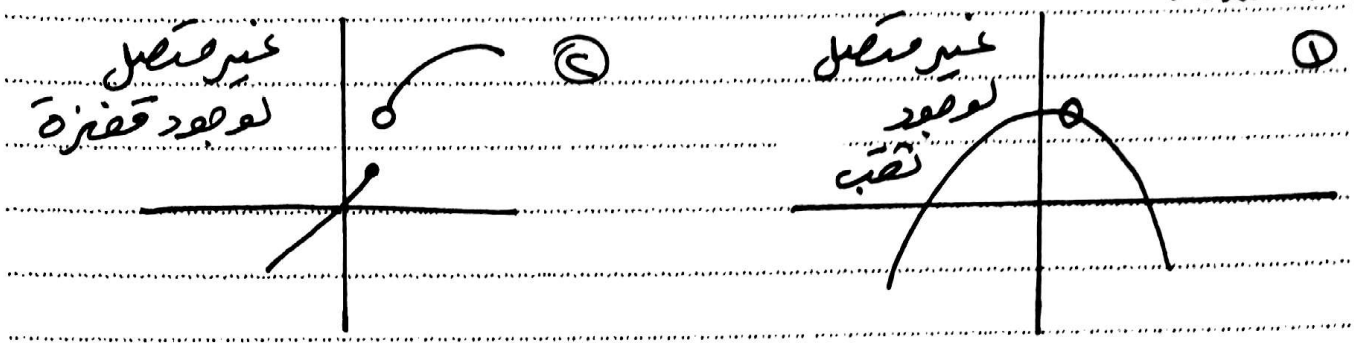
وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة فما قيمة $أ$.

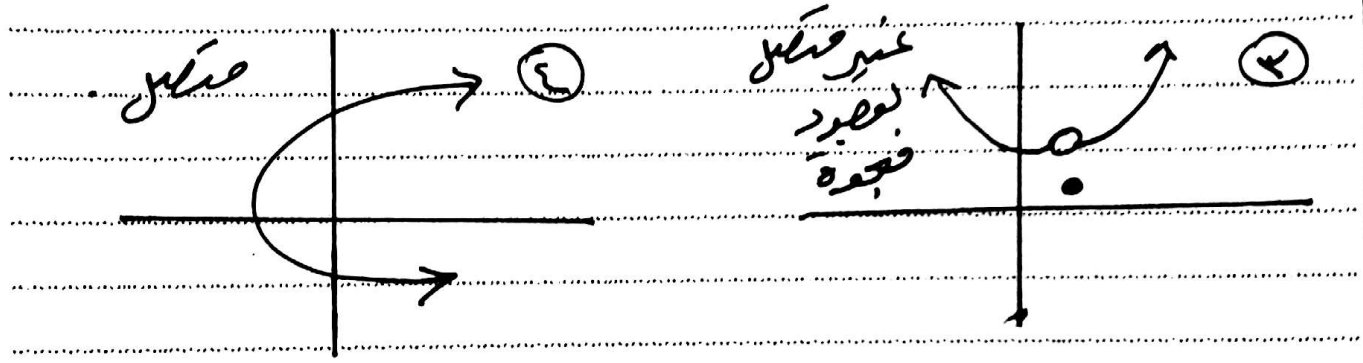
Scanned by CamScanner

١- الاتصال :- (الاتصال عند نقطة)

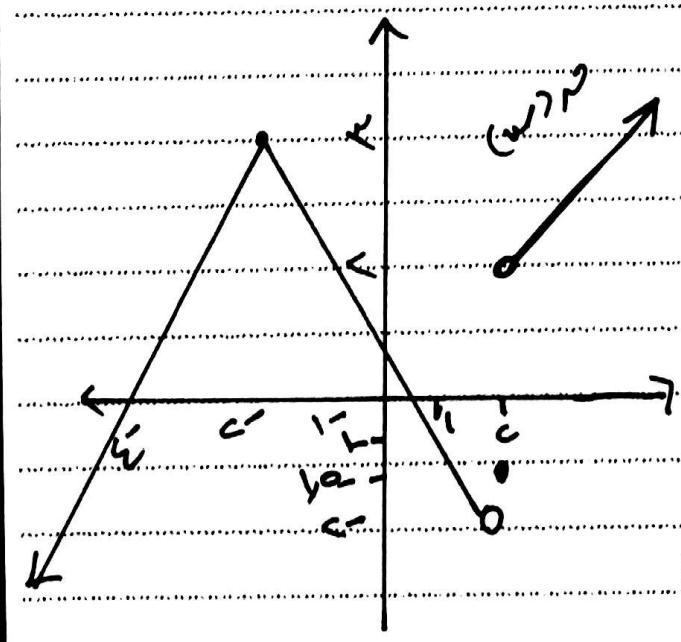
* الاتصال من خلال الرسم :-
هو عدم وجود أي تقطع أو قفزة أو مجوة .

أمثلة :-





مثال :-



① ق(٢) =

② نهـا ق(س) = ١-
س ← ٢

③ نهـا ق(س) =
س ← ٢

④ قيم س التي تكون عندها ق(س) غير متصل .

Scanned by CamScanner

الاتصال عند نقطة :-

يكون الاقتران $ق(س)$ متصل عند النقطة $س = P$ اذا حققت الشروط التالية:

① $ق(س)$ معرف عند $س = P$ ($ق(P)$ = عدد حقيقي).

② $\lim_{س \to P} ق(س)$ موجودة

($\lim_{س \to P^+} ق(س) = \lim_{س \to P^-} ق(س)$)

③ $\lim_{س \to P} ق(س) = ق(P)$

اذا اختل شرط من هذه الشروط يكون الاقتران غير متصل.

أمثلة :-

* ابحث هل $ق(س) = س^2 + 1$ متصل عند $س = 0$ ؟

① $ق(0) = (0)^2 + 1 = 1$

② $\lim_{س \to 0} (س^2 + 1) = (0)^2 + 1 = 1$

③ $\lim_{س \to 0} ق(س) = ق(0) = 1$

$\Leftarrow$ $ق(س)$ متصل عند $س = 0$

ملاحظة :-

اذا كان $ق(س)$ كثير حدود فهو متصل لمنتهي نقطة.

* $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & ، س < 1 \\ 3س & ، 1 \le س < 3 \\ س^2 - 18 & ، س > 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الاقتران عند $س = 1$ و $س = 3$

① عند $س = 1$

$ق(1) = 3 \times 1 = 3$

$\lim_{س \to 1^+} 3س = 3 \times 1 = 3$

$\lim_{س \to 1^-} س^2 + 2 = (1)^2 + 2 = 3$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} ق(س) = 3$

* $\Leftarrow \lim_{س \to 1} ق(س) = 3$

* $\lim_{س \to 1} ق(س) = ق(1) = 3$

$\Leftarrow$ $ق(س)$ متصل عند $س = 1$

② عند $س = 3$

$ق(3)$ غير معرفة

(لا يوجد مساواة للتعويض)

$\Leftarrow$ $ق(س)$ غير متصل عند $س = 3$

Scanned by CamScanner

* اذا كان $د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \geq 1 \\ 2س & ، س < 1 \end{cases}$

ابحث باتصال $د(س)$ عند $س = 1$

* $د(1) = 2 \times 1 = 2$

* $\lim_{س \to 1^+} س^2 - 1 = (1)^2 - 1 = 0$

* $\lim_{س \to 1^-} 2س = 2 \times 1 = 2$

$\therefore \lim_{س \to 1} د(س)$ غير موجودة

$\therefore د(س)$ غير متصل عند $س = 1$

* اذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 2 & ، س = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $د(س)$ عند $س = 1$.

* $د(1) = 2$

* $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)}$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore \lim_{س \to 1} د(س) = د(1)$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = 1$

* اذا كان: $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 2س + ج}{س - ج} & ، س \neq ج \\ 7 & ، س = ج \end{cases}$

ابحث في اتصال $د(س)$ عند:

① $س = ج$ ، ② $س = 3$

① عند $س = ج$

$د(ج) = 7$

$\lim_{س \to ج} \frac{س^2 - 2س + ج}{س - ج}$

$\lim_{س \to ج} \frac{(س - ج)(س - 1)}{(س - ج)} = ج - 1 = 7$

$\therefore \lim_{س \to ج} د(س) = د(ج)$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = ج$

② عند $س = 3$ (واجب).

* اذا كان $د(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \geq 2 \\ 3 & ، 0 < س < 2 \\ س^3 & ، س \leq 0 \end{cases}$

ابحث في الاتصال عند

① $س = 0$

② $س = 2$

③ $س = 0$

Scanned by CamScanner

* الاتصال للاقتران النسبي :-

الاقتران النسبي = $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$

ملاحظة :-
الاقتران النسبي هو اقتران متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية جميع القيم باستثناء أصفار المقام .

مثال :-
$$\text{جا}(س) = \frac{س^{٤} - ٣س + ١}{س - ٢}$$

ما نقطة عدم الاتصال

جا (س) ؟

جا (س) ← نسبي

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

جا (س) متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء ٢ .

جا (س) متصل على ح $- \{٢\}$

مثال :- $\text{جا}(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٥}$

$س^{٢} - ٥ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٥$

$س = \pm\sqrt{٥} \Leftarrow س = \pm ٥$

جا (س) متصل على ح $- \{\pm ٥\}$

سؤال :-
ما نقاط عدم الاتصال لكل من :

① $\text{جا}(س) = س^{٣} + ١$

② $\text{هـ}(س) = \frac{س - ٣}{س^{٤} - ٥س + ٦}$

③ $\text{ل}(س) = \frac{س + ٢}{س^{٤} - ١} + \frac{٥}{س}$

④ $\text{م}(س) = \frac{٥ - س}{س^{٢} - ١}$

⑤ $\text{جا}(س) = \frac{١}{س} + \frac{س - ٣}{س^{٤} - ٢س}$

Scanned by CamScanner

* نظريات الاتصال :-

اذا كان ، الاقترانان $ق$ ، $ه$ متصلين عند $س = أ$ فإن :

① $ق + ه$ متصل عند $س = أ$
② $ق - ه$ متصل عند $س = أ$
③ $ق \times ه$ متصل عند $س = أ$
④ $\frac{ق}{ه}$ متصل عند $س = أ$ بشرط $(ه(أ) \neq 0)$

مثال :-

اذا كان $ق(س) = س^2 + 2$

$ه(س) = \begin{cases} 3س - 1 & ، س \geq 2 \\ 5 - س & ، س < 2 \end{cases}$

اثبت باتصال $(ق + ه)$ عند $س = 2$

$ق(س)$ كثير حدود ⇐ متصل عند $س = 2$

$ه(2) = 3 - 1 = 2$

$\lim_{س \to 2^-} = 3س - 1 = 3 - 1 = 2$

$\lim_{س \to 2^+} = 5 - س = 5 - 2 = 3$

⇐ $\lim_{س \to 2}$ غير موجودة

⇐ $ه(س)$ متصل عند $س = 2$

⇐ $(ق + ه)(س)$ متصل عند $س = 2$

مثال :-

اذا كان $ق(س) = س^2 + 10$

$ه(س) = \begin{cases} 5س & ، س \geq 0 \\ س^2 & ، س < 0 \end{cases}$

وكان $ل(س) = (ق \times ه)(س)$

اثبت باتصال $ل(س)$ عند $س = 0$

* $ق(س)$ كثير حدود ⇐ متصل عند $س = 0$

* $ه(س)$

$ه(0) = 5 \times 0 = 0$

$\lim_{س \to 0^-} = 5س = 5 \times 0 = 0$

$\lim_{س \to 0^+} = س^2 = (0)^2 = 0$

⇐ $\lim_{س \to 0}$ موجودة $= 0$

⇐ $\lim_{س \to 0} ه(س) = ه(0)$

⇐ $ه(س)$ متصل عند $س = 0$

⇐ $ل(س)$ متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

Scanned by CamScanner

ملاحظة :-
لا يمكن استخدام نظريات الاتصال اذا كان احد الاقترانين (او كلاهما) غير متصل عند س = P او تضمنهم باجراء العملية الجبرية على الاقتران اولاً ثم نبحث بالاتصال.
(مثال التالي يوضح المقصود)

مثال :-
اذا كان $ق(س) = س^2 - 4س + 4$
و $هـ(س) = \begin{cases} -3 & س \leq 2 \\ 3 & س > 2 \end{cases}$
ابحث باتصال $م(س) = ق(س) \times هـ(س)$ عند $س = 2$

$ق(س)$ متصل عند $س = 2$
لانه كثير حدود.

$هـ(س)$
$هـ(2) = -3$
$\lim_{س \to 2^-} هـ(س) = -3$
$\lim_{س \to 2^+} هـ(س) = 3$
$\therefore \lim_{س \to 2^-} هـ(س) \neq \lim_{س \to 2^+} هـ(س)$
$\therefore هـ(س)$ غير متصلة عند $س = 2$

$\therefore ق(س)$ غير متصل عند $س = 2$

$\therefore$ لا نستطيع تطبيق نظريات

$م(س) = \begin{cases} -3(س^2 - 4س + 4) & س \leq 2 \\ 3(س^2 - 4س + 4) & س > 2 \end{cases}$

$م(2) = -3(2^2 - 4 \times 2 + 4) = -3 \times 0 = 0$

$\lim_{س \to 2^-} -3(س^2 - 4س + 4)$
$= -3(2^2 - 4 \times 2 + 4) = -3 \times 0 = 0$

$\lim_{س \to 2^+} 3(س^2 - 4س + 4)$
$= 3(2^2 - 4 \times 2 + 4)$
$= 3 \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{س \to 2} م(س) = 0$

$\lim_{س \to 2} م(س) = م(2) = 0$

$\therefore م(س)$ متصل عند $س = 2$

تمرين :-

اذا كان $ق(س) = س + 3$
$هـ(س) = \frac{س - 3}{س^2 - 9}$ وكان
$ل(س) = (ق \times هـ)(س)$ ابحث باتصال $ل$ عند $س = 3$

Scanned by CamScanner

تمارين :-

① اذا كان المقران $ق$ متصلاً عند $س = ٢$ وكانت $\lim_{س \to ٢} (٥ ق(س) + ٣س) = ١١$

جد قيمة $ق(٢)$

② اذا كان $ص(س)$ متصل عند $س = ٢$ وكان

$$ص(س) = \begin{cases} س + ٩ & ، س < ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ٦ + ب س & ، س > ٢ \end{cases}$$

③ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \leq ١ \\ ٥ + ٢ب & ، ١ < س < ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ٢ب + ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان $ق(س)$ متصل عند $س = ٢$

جد قيمة $ب$.

Scanned by CamScanner

④ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٢} + ٥س - ١ & ، س < ٢ \\ ٩ + س & ، ٢ \leq س < ٤ \\ ١٤٥ & ، س \geq ٤ \end{cases}$ ، $هـ(س) = \begin{cases} ٥س^{٢} + ٥س - ١ & ، س < ٢ \\ ٩ + س & ، ٢ \leq س < ٤ \\ ١٤٥ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$ اثبت بالتعريف ان $ل$ متصلة عند $س = ٢$

⑤ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥ - س & ، س \geq ٥ \\ س - ٥ & ، ٥ < س \end{cases}$ ، $هـ(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥}$

اثبت بالتعريف $(ق \times هـ)(س)$ متصلة عند $س = ٥$

Scanned by CamScanner