تلخيص تفاضل وتكامل 1

CS FAMILY

تلخيص لمادة الكالكولاس 1

مقدم من :

CS FAMILY

تلخيص: المعتز بالله بني يونس
ينال العضايلة

$F(x) = \sqrt{x+1}$ find $f(x)^{-1}$

طريقة الحل

① $y = f(x)^{-1}$

② $f(y) = X$

③ نعوض X

① $y = f(x)^{-1}$

② $f(y) = x$

$\sqrt{y+1} = x$

$y+1 = x^2$

$y = x^2 - 1 = f(x)^{-1}$

domain $f(x)$ = Range $f(x)^{-1}$

Range $f(x)$ = Domain $f(x)^{-1}$

تدريب

$f(x) = x^3 + 1$ جواب $\Rightarrow$ $y = \sqrt[3]{x-1}$

تدريب

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ جواب $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

~~Limits~~

~~① اذا كان النهاية موجودة من اليمين و موجودة من اليسار ومساوية لبعض اذن نهاية موجودة~~

~~② -- -- -- --~~

Limits

① اذا كانت النهاية من اليمين = النهاية من اليسار $\Longleftarrow$ نهاية موجودة

② -- -- -- -- $\neq$ -- -- -- -- $\Longleftarrow$ النهاية غير موجودة

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$$

① find $\lim_{x \to 0} f(x)$ ② $\lim_{x \to 5} f(x)$ ③ $\lim_{x \to 2} f(x)$

① $0 + 3 = 3$

② $2 * 5 + 3 = 13$

③ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

Indeterminant Forms $\left\{ \frac{0}{0} \ , \ \frac{\infty}{\infty} \right\}$

مثال $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow \frac{0}{0}$ $\xrightarrow{\text{نحلل}}$ $\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$

خصائص النهايات

نهاية الثابت = الثابت $\lim_{x \to a} c = c$

① اذا كان $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x))$ يجوز فصلهما $\Leftarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

② $\lim (f(x) \ast \div \ g(x))$ $\Leftarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) \ \ast \div \ \lim_{x \to a} g(x)$

③ عند وجود ثابت c داخل النهاية يجوز اخراجه $\lim c f(x) \Leftarrow c \lim f(x)$

④ $\lim [f(x)]^n \Leftarrow [\lim f(x)]^n$ ، $\lim \sqrt{f(x)} \Leftarrow \sqrt{\lim f(x)}$

مثال $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 2x - 5}{4x + 1} \overset{\text{نعوض}}{=} \frac{11}{9}$

مثال $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 0$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}\,x} = \frac{3}{1} = 3$$

تدريب $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x + 8}$ جواب $\Longrightarrow \frac{-1}{6}$

مثال $\lim_{H \to 0} \frac{2(-3+H)^2 - 18}{H} \Longrightarrow \frac{2(9 - 6H + H^2) - 18}{H}$

$$\frac{\cancel{18} - 12H + 2H^2 \cancel{-18}}{H} = \frac{-12\cancel{H} + 2H^2}{\cancel{H}} = \lim_{h \to 0} (-12 + 2H) = -12$$

تدريب

$$\lim_{t\to 4} \frac{t-\sqrt{3t+4}}{t-4} \Rightarrow \frac{0}{0}$$

جواب $\Rightarrow \frac{5}{8}$

$\Downarrow$

$\frac{5}{8}$

حل تدريب

$$\frac{t-\sqrt{3t+4}}{t-4} * \frac{t+\sqrt{3t+4}}{t+\sqrt{3t+4}}$$

مرافق

$$\frac{t^2-(3t+4)}{(t-4)(t+\sqrt{3t+4})} = \frac{\cancel{(t-4)}(t+1)}{\cancel{(t-4)}(t+\sqrt{3t+4}}$$

$$\lim_{t\to 4} \frac{(t+1)}{t+\sqrt{3t+4}} = \frac{5}{8}$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} = \infty^+ \\ \lim_{x\to 0^-} = \infty^- \end{array}\right\} \text{D.N.E}$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} = \infty^+ \\ \lim_{x\to 0^-} = \infty^+ \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty^+$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \infty^-$$

مثال

$$\lim_{x\to a} = \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

مثال

عند وجود $\infty \leftarrow x$ نأخذ أعلى أس لنجد الاشارة

① $\lim_{x\to\infty^+} 2x^3+3x-5 = \infty^+$

② $\lim_{x\to\infty^-} 5x^4+3x-6 = \infty^+$

③ $\lim_{x\to-\infty} 5x^3+45x^2+x = -\infty^-$

~~④ $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+5x-5}{x-5} = \infty$~~

مثال $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-4} = \frac{\infty}{\infty}$

أي عدد تقسيم ∞ = صفر
$\frac{5}{\infty}$ = صفر

$\Downarrow$

$\frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{5}{x}}{\frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{4}{x}} = \frac{3+\text{صفر}}{6-\text{صفر}} = \frac{1}{2}$

نقسم على أعلى أس في السؤال ⟸ لا يجوز وجود x في البسط

[redacted] تدريب $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{9x^3+4x^2-2} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

نقسم على (x^3) جواب ⟹ صفر

مثال $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x+3}{8x-5}} \Rightarrow \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{5}{x}}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

$= \frac{1}{2}$

مثال $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+6} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{(x+6)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+12x+36}}$

نقسم على x^2 $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$

تدريب $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^6+5} - x^3$

حل ⟸ مرافق $= \frac{5}{\infty}$ = صفر

مثال $\lim_{x\to1} \frac{|x-1|}{x^2+x-2} = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & x\ge1 \longrightarrow \lim_{x\to1^+} \\ \frac{1-x}{x^2+x-2} & x<1 \longrightarrow \lim_{x\to1^-} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{1}{3} \\ \frac{\cancel{(1-x)}^{-1}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{-1}{3} \end{cases}$ D.N.E

مثال: If $\lim\limits_{x \to 1} 5f(x+2) = 20$ then find $\lim\limits_{x \to 3} \left(4f(6-x)+x^2+2\right)$

$\{f(3) = 4\}$

$A = x+2$, $x \to 1$, $A \to 3$ $\Rightarrow \lim\limits_{A \to 3} f(A) = 4 \Rightarrow 4f(3) + 9 + 2 = 27$

نظرية

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

مثال: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$

تدريب: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

حل $\Rightarrow$
① مرافق
② نحول $1-\cos^2 \to \sin^2$
③ نطبق النظرية

جواب $\leftarrow 0$

الإتصال

* نقول أن الاقتران متصل اذا تحققت الشروط التالية
1) f معرف عند $x = a$ (موجودة $f(a)$)
2) النهاية لـ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة
3) النهاية تساوي الصورة $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال: حدد اذا كان $f(x)$ متصل عند $x=4$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & x > 4 \\[2ex] \dfrac{4x-8}{1} & x \le 4 \end{cases}$$

جواب: نجد النهاية من اليمين واليسار وصورة الـ (4)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 8 \\ f(4) = 8 \end{array}\right) \Longrightarrow f(x) \text{ is cont. at } x=4$$

نظريات في الاتصال

إذا (f) متصل و (g) متصل إذن ⇐ (fog) متصل ⇐ ①

جميع الاقترانات الكسرية radianal functions متصلة عند جميع النقاط عدا أصفار المقام ⇐ ②

مثال $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ⟶ $x = (2)$ متصل على كلشي عدا

مثال $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} * \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

تدريب $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$ حل ⇐ نضرب في 2 ← جواب 2

مثال $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{\infty} = \cos(0) = 1$

سؤال علي $\lim_{x \to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x} = \frac{x}{\sin 2x \cdot \cos 5x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 5x}$ — نفصل النهايات

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{1}$ — نضرب في 2

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$

مثال $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|} \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$

D.N.E

تدريب $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{5\sqrt{x}}$ جواب ⇐ 0 | $\lim_{h \to 0} \frac{h}{\tan h}$ جواب ⇐ 1

مثال determind that if $F(x)$ is cont. at $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = 0 \end{array}\right\} \text{Not cont. at } x = 2$$

مثال $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ تحقق من اتصال (f) على $[-3, 3]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 0 \\ f(-3) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ cont. from right}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0 \\ f(3) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ cont. from Left}$$

then (f) is cont. on $[-3, 3]$

MOHTAZ

B. younes

مادة سكند

الاشتقاق
Derivative

① تعريف المشتقة ⟸ صيغة تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال: $f(x) = 3x^2 + 1$ find $f'(x)$ using the def. of derivative

المشتقة من التعريف

طريقة الحل :-

① نكتب الصيغة

② نعوض في $f(x)$.

* مكان كل (x) نضع $(x+h)$

③ نحلل لنختصر (h) في المقام

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2 + 2hx + h^2) + 1 - 3x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(2hx + h^2)}{h} = \frac{3\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 6x$$

ملاحظات في الاشتقاق

* $f(x) = k\, h(x) \Longrightarrow f'(x) = k\, h'(x)$

* $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Longrightarrow f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x)\, g'(x)$

  الأول في مشتقة الثاني + الثاني في مشتقة الاول

* $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{h(x)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)}{(h(x))^2}$

  المقام في مشتقة البسط - البسط في مشتقة المقام على المقام تربيع

* $f(x) = [g(x)]^n \Longrightarrow f'(x) = n\,[g(x)]^{n-1}\, g'(x)$

  اذا كان ما داخل القوس قابل للاشتقاق نشتقه

* $f(x) = \sqrt{x^3+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

  مشتقة ما داخل الجذر على (2) في الجذر

$f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2-5}}$ Find $\grave{f}(x)$

حل $\grave{f}(x) = \dfrac{[redacted](\sqrt{x^2-5})\,3 - (3x+4)\,\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}}{x^2-5}$

$f(x)$	$\grave{f}(x)$
sin	cos
cos	- sin
tan	sec^2
sec	sec. tan
cot	$- csc^2$

مثال $\sin\sqrt{2x} \Rightarrow \cos\sqrt{2x} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}}$

مثال $y = \tan(\sin(x)^2)$

$\dfrac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(x)^2)\,(\cos(x)^2)\,(2x)\ 2$

مثال $y = \sqrt{\cos 5x}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sin(5x)\,(5)}{2\sqrt{\cos(5x)}}$

تدريب ② أثبت أن مشتقة $\tan x$ تساوي $\sec^2 x$

تدريب ① $y = x^2 \cdot \cos\sqrt{x}$

قاعدة السلسلة Chain Rule

مثال If $y = 3u^2 + 2u$, $u = x^2 - 5$

Find $\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$= (6u+2)(2x)$

$= (6(x^2-5)+2)(2x)$

$= (6x^2-28)\,2x$

$= 12x^3 - 56x$

Use the chain Rule to find

مثال $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = (g(x))^n$

Let $u = g(x)$

$y = u^n$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = n(u)^{n-1} \cdot \grave{g}(x)$

$= n(g(x))^{n-1} \cdot \grave{g}(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = x^2 \cdot \left(-\sin(\sqrt{x})\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\cos\sqrt{x})\,2x$

حل تدريب ①

$y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\cos x)\cos(x) - (\sin(x))(-\sin x)}{(\cos(x))^2}$

$= \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sec^2 x}$

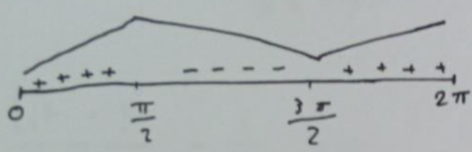
حل تدريب ②

صح

$f(x) = \sin x$ on $[0, 2\pi]$ find 1) Max. and min. values 2) inc. and dec. intervals

$f'(x) = \cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$



inc. on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

dec. on $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

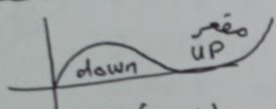
Min. value at $x = \frac{3\pi}{2}$ $f(x) = -1$

Max. value at $x = \frac{\pi}{2}$ $f(x) = 1$

تدريب $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ find 1) critical points → $f'(x) = 0$ 2) Inc. and dec. intervals

---

التقعر



نظرية : اذا كان $f(x)$ معرف وقابل للاشتقاق مرتين اذن :-

1) اذا كان $f''(x) > 0$ ⟸ f مقعر للأعلى (conc. up) على (a, b)

2) اذا كان $f''(x) < 0$ ⟸ f مقعر للأسفل (conc. down) على (a, b)

3) اذا كان يوجد نقطة c تنتمي إلى (a, b) وكان $f''(c) = 0$ اذن $(c, f(c))$ نقطة انقلاب inflection point

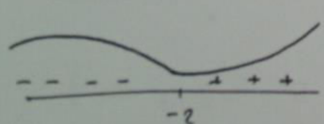
---

حل $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7$ find 1) inflection point 2) Intervals of Conc.

$f'(x) = 3x^2 + 12x$

$f''(x) = 6x + 12 = 0$

$x = -2$ ⟶ inflection point at $x = -2$



⟶ conc up at $(-2, \infty)$

conc down at $(-\infty, -2)$

ملاحظات

1) نستخدم مشتقة أولى مع Max. و Min. و inc. و dec.

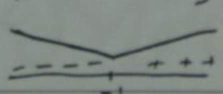
2) -- -- -- ثانية مع inflecti و conc

3) -- -- -- -- -- الاولى مع نقاط حرجة

حل تدريب

$f'(x) = 4x + 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$



inc. on $[-1, \infty)$

dec. on $(-\infty, -1]$

critical point at $x = -1$

	cos	sin
٠	١	٠
٩٠	٠	١
١٨٠	١-	٠
٢٧٠	٠	١-
٣٦٠	١	٠

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \qquad x \geq 0 \qquad \text{find critical points}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = 0$$

$$\frac{(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \times 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \longrightarrow$$ critical point at $x = 0$

تدريب $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ find:-

1) critical points
2) Max and Min
3) inc. and dec
4) inflection points
5) conc. intervals

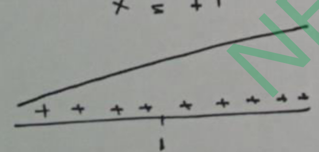
حل تدريب

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)(x - 1) = 0$

$x = +1$



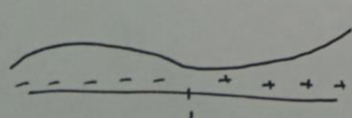
1) critical at $x = +1$

2) No Max. No min.

3) inc. on $(-\infty, \infty)$ No dec.

$\acute{\acute{f}}(x) = 2x - 2 = 0$

$x = 1$



4) inflection point at $x = 1$ $\longrightarrow (1, 0)$

5) conc up $(1, \infty)$

& conc down $(-\infty, 1)$

MOHTAZ

b.younes

What you look a?

حمادة الفاينل

نظرية المشتقة الثانية test

اذا كان (f) قابل للإشتقاق مرتين عند $(x=c)$ وكان $f'(c)=0$ اذن :-

1) اذا كان $f''(c) > 0 \Longleftarrow f(c)$ قيمة صغرى (Min.)

2) اذا كان $f''(c) < 0 \Longleftarrow f(c)$ قيمة عظمى (Max.)

3) اذا كان $f''(c) = 0 \Longleftarrow$ الاختبار فاشل

مثال $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ use second derevative test to find 1) Max. and Min. points

① نجد $f'(x)$

② نجد قيمة (x) التي تجعل $f'(x) =$ صفر

③ نجد $f''(x)$

④ نعوض قيم (x) في $f''(x)$

⑤ نطبق نظرية المشتقة الثانية

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \quad , \quad x = 3$$

$$f''(x) = 2x - 5$$

$$f''(3) = 1 > 0 \Longrightarrow f(3) \quad \text{Min. Value}$$

$$f''(2) = -1 < 0 \Longrightarrow f(2) \quad \text{Max. Value}$$

نظرية Rolle

اذا كان (f) متصل على $[a,b]$ وقابل للإشتقاق عند (a,b) و $f(b)=f(a)$ اذن يوجد نقطة (c) تنتمي إلى (a,b) حيث $(f'(c) =$ صفر$)$

مثال $f(x) = x^2+5$ on $[-2,2]$ find (c) that satisfies Rolle's theorem.

f cont. and diff. because f is $\underbrace{\text{poly.}}_{\text{كثير حدود}}$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 9 \\ f(2) = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{there exist } c \in \overset{(-2,2)}{(a,b)} \text{ such that}$$

$$f'(c) = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(c) = 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

صالح

مثال $f(x) = \sin(x)$ on $[0, \pi]$ find (c) that satisfies Ro...

تدريب

cont. and diff because .....

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$ there exist $c \in (0,\pi)$ such that

$f'(c) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(c) = \cos(c) = 0 \Longrightarrow c = \frac{\pi}{2}$

نظرية : Mean Value

اذا كان (f) متصل على $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على (a,b) فإنه يوجد (c) $\Longleftarrow$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

مثال $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad x \in [1, 8]$ show that f satisfies M.V.T

cont. and diff. $\Longrightarrow \exists\ \underbrace{c \in (1,8)}$ such that

الجواب يجب أن يكون من هون؟

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$f'(c) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{f(8) - f(1)}{8-1} = \frac{3}{7} \Longrightarrow c = \left(\frac{14}{9}\right)^3 = 3.75$

FINAL التكامل

1) $\int \cos(x) = \sin(x) + c$

2) $\int \sin(x) = -\cos(x) + c$

3) $\int \sec^2(x) = \tan(x) + c$

4) $\int \csc^2(x) = -\cot(x) + c$

5) $\int \sec(x).\tan(x) = \sec(x) + c$

6) $\int \csc(x).\cot(x) = -\csc(x) + c$

Definite Integral التكامل المحدود

Area $= A = \int_a^b f(x).dx$

مثال evaluat $\int_2^4 3x^2.d(x) = x^3\Big]_2^4 = (4)^3 - (2)^3 = 64 - 8 = 56$

---

① $\int_a^b K.dx = K(b-a)$

② $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

③ $\int_a^b f(x).dx = \int_a^{c_n} f(x).dx + \int_{c_n}^b f(x).dx$

④ if $f(x) \geq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x).dx \geq \int_a^b g(x).dx$

⑤ $\int_a^a f(x).dx = 0$

⑥ If m is the min. value of $f(x)$ and M " " Max " " "

then

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x).dx \leq M(b-a)$

حمد

مثال evaluate $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 5).dx$

$x^3 - x^2 + 5x \Big]_0^1 \Rightarrow (1-1+5) - (0) = 5$

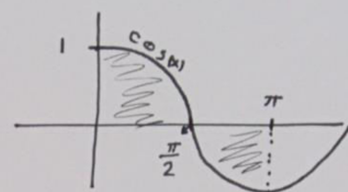
مثال evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} co$

$\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0$

مثال $\int_0^{\pi} \cos(x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x).dx\right|$

$= \sin\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + |-1|$

$= 2$



تدريب ① evaluate $\int_{-3}^{3} x^3.dx$

تدريب ② evaluate $\int_{-3}^{3} x^2.dx$

التكامل بالتعويض

$\int f'(x).f(x).dx$

let $u = f(x) \Rightarrow d(u) = f'(x).dx \Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$

$\int \cancel{f'(x)}\, u \frac{du}{\cancel{f'(x)}} = \int u.du = \frac{u^2}{2} + c$

$= \frac{(f(x))^2}{2} + c$

مثال $\int 2x\cos(x^2+5).dx$ $\quad u = x^2 + 5 \quad du = 2x.dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \cancel{2x}\cos(u)\frac{du}{\cancel{2x}} = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + c$

$= \sin(x^2+5) + c$

حل تدريب ①

$x^3 = 0$

$- - - \quad + + +$

$-3 \quad 0 \quad 3$

$\left|\int_{-3}^{0} x^3.dx\right| + \int_0^3 x^3.d(x) \Rightarrow \left|\frac{x^4}{4}\Big]_{-3}^{0}\right| + \frac{x^4}{4}\Big]_0^3 = \left|-\frac{81}{4}\right| + \frac{81}{4} = 40.5$

$\cancel{-27} \quad \cancel{27-0}$

القيمة المطلقة

① $|x| \leq a \implies -a \leq x \leq a$

② $|x-a| \leq b \implies -b \leq x-a \leq b$

③ $|x| \geq a \implies x \geq a$ OR $x \leq -a$

④ $|x| = a \implies x = a$ OR $x = -a$

مثال $|x| = 2$ أوجد مجموعة الحل

$x = \{-2 , 2\}$

معادلة المماس $y - y_0 = M(x - x_0)$	معادلة Normal $y - y_0 = \frac{-1}{M}(x - x_0)$	ميل $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

مثال Find equation of tangent and Normal (2,1) (4,3)

① نجد الميل $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{3-1}{4-2} = 1$

② نعوض في معادلة المماس أي نقطة

$y - 1 = 1(x-2) \Leftarrow$ معادلة مماس

$y - 1 = \frac{-1}{1}(x-2) \Leftarrow$ معادلة Normal

مثال Find " " " " " " " " " for a line passing throw (1,3) and paraller to $2x + 4y = 6$

$4y = 6 - 2x$

$y = \frac{-2}{4}(x-3)$

ميل $= \frac{-1}{2}$

① بما أنه يوازي $(2x + 4y = 6)$ إذن له نفس الميل

② نوجد الميل ونعوض في معادلة المماس

$y - 3 = \frac{-1}{2}(x-1) \Leftarrow$ معادلة المماس

$y - 3 = 2(x-1) \Leftarrow$ معادلة Normal

معادلة الدائرة

Center (a , b) المركز

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Longrightarrow$$ radias (R) نصف القطر

مثال Find center and radias for $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 10 = 0$

① نضع x لحال و y لحال

② ⇄ إكمال المربع ⇐ نطرح ونجمع 1

$$(x^2 + 2x) + (y^2 + 2y) = 10$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 10$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 10$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 12 \Longrightarrow$$

center $(+1, +1)$

radias $= \sqrt{12}$

المسافة بين نقطتين

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = x - 1 \Longrightarrow (f \circ g)(x) = (x-1)^2 + 1$

$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow \Longrightarrow (f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

$\sin = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{1}{\csc}$

$\cos = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{1}{\sec}$

$\tan = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{1}{\cot}$

odd