عصام محمد الشيخ)
ماجستير رياضيات

نظريات النهايات

رياضيات (الأولي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (نظريات النهايات) ماجستير رياضيات

(١) إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد

فإن $\lim_{س \to ا} ق(س) = جـ$

أي أن $\lim_{س \to ا} جـ = جـ$

"نهاية الثابت تساوي الثابت نفسه."

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ٣ = ٣$

مثال

$\lim_{س \to ٣} جـ$

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ٣ = ٣$

(٢) إذا كان ق(س) كثير حدود فإن

$\lim_{س \to ا} ق(س) = ق(ا)$

مثال

$\lim_{س \to -٢} ٣$

الحل:

$\lim_{س \to -٢} ٣ = ٣$

(٣) إذا كانت $\lim_{س \to ا} ق(س) = ل$

فإن

$\lim_{س \to ا} جـ ق(س) = جـ \times ل$

مثال

$\lim_{س \to ٠} س$

الحل:

$\lim_{س \to ٠} س = ٠$

(٤)

$\lim_{س \to ا} (ق(س) \pm \times و(س) \pm ع(س))$

$= \lim_{س \to ا} ق(س) \pm \times \lim_{س \to ا} و(س) \pm \lim_{س \to ا} ع(س)$

مثال

$\lim_{س \to ٢} س$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} س = ٢$

(٥) $\lim_{س \to ا} (ق(س))^{ن}$

$= \left(\lim_{س \to ا} ق(س)\right)^{ن}$

مثال

$\lim_{س \to ٢} س^{٣}$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} س = ٢$

ملاحظة: لإيجاد النهاية في الاقتران المتشعب عند العدد المتشعب يجب ايجاد النهاية من اليمين واليسار ثم الحكم على قيمة النهاية.

مثال

$\lim_{س \to ٢} ٣$

مثال

$\lim_{س \to -٢^{+}} س$

الحل:

$\lim_{س \to -٢} س = -٢$

مثال

$\lim_{س \to ٢} (س - ١)$

الحل:

$= ٢ - ١ = ١$

مثال

جد $\lim_{س \to ٢} (س + ١)$

الحل:

$= ٢ + ١ = ٣$

مثال

جد $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ١)$

الحل:

$= (٢)^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣$

مثال

جد $\lim_{س \to ٢} ٣س^{٢}$

الحل:

$= ٣ \times ٢^{٢} = ٣ \times ٤ = ١٢$

مثال

جد $\lim_{س \to ٣} س^{٣}$

الحل:

$= (٣)^{٣} = ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$

مثال

جد $\lim_{س \to ٢} (س^{٣} + ٤س^{٢} - ٥س - ٧)$

الحل:

$= (٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} - ٥(٢) - ٧$

$= ٨ + ١٦ - ١٠ - ٧ = ٧$

مثال

جد $\lim_{س \to ١} (٣س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧)$

الحل:

$= ٣(١)^{٣} + ٥(١) + ٧$

$= ٣ + ٥ + ٧ = ١٥$

مثال

جد $\lim_{س \to -٢} (٣س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س - ٧)$

الحل:

$= ٣(-٢)^{٤} - ٥(-٢)^{٣} + ٦(-٢) - ٧$

$= ٣ \times ١٦ - ٥(-٨) - ١٢ - ٧$

$= ٤٨ + ٤٠ - ١٢ - ٧ = ٦٩$

مثال

جد $\lim_{س \to -١} (س^{٦} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩)$

الحل:

$= (-١)^{٦} - ٥(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٩$

$= ١ - ٥ - ٤ + ٩ = ١$

مثال

جد $\lim_{س \to -١} (س^{٢} + ٥س)^{٣}$

الحل:

$= (-١)^{٢} + ٥(-١))^{٣}$

$= (١ - ٥)^{٣}$

$= (-٤)^{٣}$

$= -٦٤$

مثال

جد $\lim_{س \to -١} (س^٣ + ٢)^٥$

الحل:

$(-(-١)^٣ + ٢)^٥$

$(-(-١) + ٢)^٥ = (١)^٥ = ١$

مثال

جد $\lim_{س \to ١} (س^٢ + ١)(س^٣ + ٥س - ٢)$

الحل:

$(١^٢ + ١)(١^٣ + ٥ \times ١ - ٢)$

$(٢)(١ + ٥ - ٢)$

$(٢)(٤) = ٨$

مثال

جد $\lim_{س \to -١} (٧س^٢ + ٥س)(س^٢ + س - ١٠)$

الحل:

$(٧(-١)^٢ + ٥(-١))((-١)^٢ + (-١) - ١٠)$

$(٧ - ٥)(١ - ١ - ١٠)$

$٢ \times -١٠ = -٢٠$

٢٠١٨ صيفي قديم

جد عتمة

$\lim_{س \to ١} (س^٣ + ٣س - ٦)$

الحل:

$\lim_{س \to ١} س^٣ + \lim_{س \to ١} ٣س - \lim_{س \to ١} ٦$

$١^٣ + ١ \times ٣ - ٦$

$١ + ٣ - ٦$

$٤ - ٦$

$= -٢$

رياضيات ( ) الوحدة ( ) عصام محمد الشيخ

الفصل ( ) العنوان ( ) ماجستير رياضيات

*** النهاية مع الاقترانات أو الاقترانات والسينات**

مثال

إذا كانت $\lim_{س \to 1} ق(س) = 9$ ، $\lim_{س \to 1} هـ(س) = -3$

فجد ما يلي

1) $\lim_{س \to 1} (ق(س) + هـ(س))$

الحل:

$\lim_{س \to 1} ق(س) + \lim_{س \to 1} هـ(س)$

$9 + (-3) = 6$

2) $\lim_{س \to 1} (ق(س) \times هـ(س))$

الحل:

$\lim_{س \to 1} ق(س) \times \lim_{س \to 1} هـ(س)$

$= 9 \times -3 = -27$

مثال

إذا كانت $\lim_{س \to 3} ق(س) = 8$ ، $\lim_{س \to 3} هـ(س) = -2$

فجد ما يلي :

1) $\lim_{س \to 3} (٤ ق(س) + ٢ هـ(س))$

الحل:

$٤ \lim_{س \to 3} ق(س) + ٢ \lim_{س \to 3} هـ(س)$

$= ٤ \times ٨ + ٢ \times -٢$

$= ٣٢ - ٤ = ٢٨$

2) $\lim_{س \to 3} (ق(س) - ٢ هـ(س))$

الحل:

$\lim_{س \to 3} ق(س) - ٢ \times \lim_{س \to 3} هـ(س)$

$٨ - ٢ \times -٢$

$٨ + ٤ = ١٢$

3) $\lim_{س \to 3} (ق(س) \times هـ(س))$

الحل:

$\lim_{س \to 3} ق(س) \times \lim_{س \to 3} هـ(س)$

$٨ \times -٢ = -١٦$

4) $\lim_{س \to 3} ٥ ق(س)$

الحل:

$٥ \times \lim_{س \to 3} ق(س)$

$= ٥ \times ٨ = ٤٠$

5) $\lim_{س \to 3} (٢ ق(س) + ١)$

الحل:

$٢ \times \lim_{س \to 3} ق(س) + \lim_{س \to 3} ١$

$٢ \times ٨ + ١$

$١٦ + ١ = ١٧$

٦) نهـا $\underset{س \leftarrow ٣}{}$ $((هـ س))^{٣} + ٣س - ٧)$

الحل:

$(\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} هـ س)^{٣} + \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ٣س - \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ٧$

$= (-٣)^{٣} + ٣ \times ٣ - ٧$

$= -٨ + ٩ - ٧$

$= -٦$

مثال

إذا علمت أن

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (ق(س) + س + ١) = ٩$

فجد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (ق(س))^{٢}$

الحل:

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س) + \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} س + \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ١ = ٩$

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س) + ٢ + ١ = ٩$

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س) + ٣ = ٩$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س) = ٦$

الآن

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (ق(س))^{٢}$

$= (\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س))^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦$

مثال

إذا كانت

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} (ق(س) + س^{٣} - ٣) = ٥$

فجد $\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ٣ (ق(س))^{٢}$

الحل:

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س) + \underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} س^{٣} - \underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ٣ = ٥$

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س) + (-١)^{٣} - ٣ = ٥$

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س) - ١ - ٣ = ٥$

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س) - ٤ = ٥$

$\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س) = ٩$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ٣ (ق(س))^{٢}$

$= ٣ \times (\underset{س \leftarrow ١-}{نهـا} ق(س))^{٢}$

$= ٣ \times (٩)^{٢}$

$= ٣ \times ٨١ = ٢٤٣$

مثال

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} (٣ ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧$

فجد $\lim_{س \to ٢} (ق(س))^{٣}$

الحل:

$٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٢س + \lim_{س \to ٢} ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) + (٢ \times ٢) + ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) + ٤ + ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) - ٣ = ٢٧$

$٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣٠$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١٠$

الآن ٣

$\lim_{س \to ٢} (ق(س))$

$= (\lim_{س \to ٢} ق(س))^{٣}$

$= ١٠^{٣} = ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ١٠٠٠$

الأسئلة الوزارية:

٢٠٠٩ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ، فجد

$\lim_{س \to ٢} (٦س ق(س) + ٣)$.

الحل:

$\lim_{س \to ٢} ٦س \times \lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٣$

$٦ \times ٢ \times ٥ + ٣$

$١٢ \times ٥ + ٣$

$٦٠ + ٣ = ٦٣$

٢٠١٠ شتوي

إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$ فإن

$\lim_{س \to ٢} (س ق(س) - ٣) =$

أ) ١ ب) ٢ ج) ٥ د) ١٣

الحل:

$\lim_{س \to ٢} س ق(س) - \lim_{س \to ٢} ٣$

$٢ \times ٤ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

رياضيات ( ) الوحدة ( ) عصام محمد الشيخ

الفصل ( ) العنوان ( ) ماجستير رياضيات

٢٠١٠ صيفي

إذا كانت $\lim_{س \to ٦} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٣$

فإن قيمة $\lim_{س \to ٦} (٣ ق(س) + هـ(س)) =$

أ) ٢٤ ب) ١٨ ج) ٧ د) ١٥

الحل:

$٣ \lim_{س \to ٦} ق(س) + \lim_{س \to ٦} هـ(س)$

$٣ \times ٤ + ٣$

$= ١٢ + ٣ = ١٥$

٢٠١١ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٥} ل(س) = -١$

فإن $\lim_{س \to ٥} (ق(س) + ل(س))$ تساوي

أ) ٢ ب) ٤ ج) -٢ د) -٤

الحل:

$\lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} ل(س)$

$٣ + (-١)$

$= ٢$

٢٠١١ صيفي

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ فإن

$\lim_{س \to ٣} س\, ق(س)$ تساوي

أ) ٧ ب) ٩ ج) ١٢ د) ١٦

الحل:

$\lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} ق(س)$

$٣ \times ٤ = ١٢$

٢٠١٢ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١$

فإن $\lim_{س \to ٣} (س ق(س) + هـ^٢(س))$ تساوي

أ) ٧ ب) ١٠ ج) ٥ د) ٣

الحل:

$\lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} ق(س) + (\lim_{س \to ٣} هـ(س))^٢$

$= ٣ \times ٢ + (١)^٢$

$= ٦ + ١ = ٧$

٢٠١٢ صيفي

إذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = -٣$

فما قيمة $\lim_{س \to ٥} (ق(س) - هـ(س))$

أ) ٧ ب) ١ ج) ٥ د) -٥

الحل:

$\lim_{س \to ٥} ق(س) - \lim_{س \to ٥} هـ(س)$

$٤ - (-٣) = ٤ + ٣ = ٧$

٣.١٣ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to -٢} ق(س) = ٧$ ، $\lim_{س \to -٢} هـ(س) = -٣$

فجد

$\lim_{س \to -٢} (٢ ق(س) + (هـ(س))^{٢} - س)$

الحل:

$٢ \times \lim_{س \to -٢} ق(س) + (\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٢} - \lim_{س \to -٢} س$

$٢ \times ٧ + (-٣)^{٢} - (-٢)$

$١٤ + ٩ + ٢$

$= ٢٥$

٣.١٣ صيفي

إذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س) = -٦$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٤$

فجد $\lim_{س \to ٥} (ق(س) - ٢ هـ(س) - س)$

الحل:

$(\lim_{س \to ٥} ق(س))^{٢} - ٢ \lim_{س \to ٥} هـ(س) - \lim_{س \to ٥} س$

$(-٦)^{٢} - ٢ \times ٤ - ٥$

$٣٦ - ٨ - ٥ = ١٩$

٢٠١٤ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٦$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$

فجد $\lim_{س \to ٣} (ق(س) + (هـ(س)+١)^٢ - ٣س)$

الحل :

$\lim_{س \to ٣} ق(س) + (\lim_{س \to ٣} هـ(س) + ١)^٢ - \lim_{س \to ٣} ٣س$

$-٦ + (٤ + ١)^٢ - ٣ \times ٢$

$-٦ + ٢٥ - ٦$

$١٣ = ٦ - ١٩$

٢٠١٥ شتوي

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٨$

فجد $\lim_{س \to ٣} (\sqrt{٢ ق(س) - هـ(س)} + س هـ(س))$

الحل :

$\sqrt{٢ \times \lim_{س \to ٣} ق(س) - \lim_{س \to ٣} هـ(س)} + \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

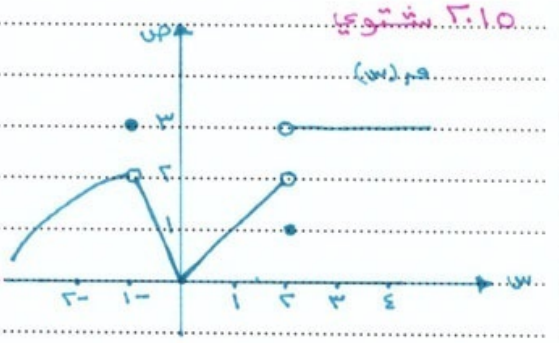
$\sqrt{٢ \times ٤ - (-٨)} + ٣ \times -٨$

$\sqrt{٨ + ٨} + ٣ \times -٨$

$\sqrt{١٦} - ٢٤$

$٤ - ٢٤ = -٢٠$

٣.١٥ مشتوحي



بالاعتماد على الشكل جد

$$\text{نهـا}_{س \to -١} \left(ق(س) \right)^{٢} - \frac{١}{٤} (س - ٧)$$

الحل:

$$\left(\text{نهـا}_{س \to -١} ق(س) \right)^{٢} - \frac{١}{٤} \text{نهـا}_{س \to -١} (س - ٧)$$

$$(٢)^{٢} - \frac{١}{٤} \times (-١ - ٧)$$

$$٤ - \frac{-٨}{٤}$$

$$٤ + ٢ = ٦$$

٣.١٥

إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ٢} (ق(س) - ٣) = ٢$

$\text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س) = ٦$ أجب عما يلي :

جد $\text{نهـا}_{س \to ٢} (س^{٢} ق(س) - ٣(هـ(س))^{٢} + ٥)$

الحل:

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} س^{٢} \times \text{نهـا}_{س \to ٢} ق(س) - ٣ (\text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س))^{٢} + \text{نهـا}_{س \to ٢} ٥$$

$$٤ \times ٥ - ٣ \times (٦)^{٢} + ٥$$

$$٢٠ - ٣ \times ٣٦ + ٥$$

$$٢٠ - ١٠٨ + ٥$$

$$= ٥ + ٨٨ - = -٨٣$$

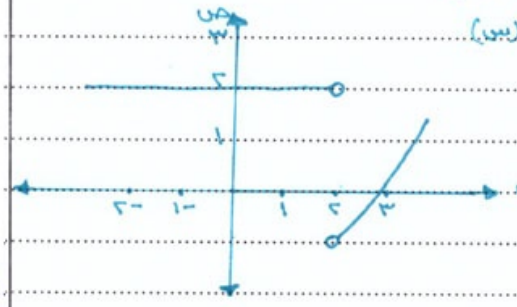
من المعطيات :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} ق(س) - \text{نهـا}_{س \to ٢} ٣ = ٢$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} ق(س) - ٣ = ٢$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} ق(س) = ٥$$

٢٠١٦ شتوي



إعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد

$$\text{نها}_{س \to -٢} \left(\sqrt[٣]{٤ ق(س)} + \frac{١}{٤} س^{٢} \right)$$

الحل:

$$\sqrt[٣]{\text{نها}_{س \to -٢} ٤ ق(س)} + \frac{١}{٤} \text{نها}_{س \to -٢} س^{٢}$$

$$\sqrt[٣]{٤ \times ٢} + \frac{١}{٤} \times ٤$$

$$\sqrt[٣]{٨} + \frac{٤}{٤}$$

$$٢ + ١$$

$$٣ =$$

٢٠١٦ شتوي

إذا كان ق(س)، و(س) كثيرتي حدود وكانت

$\text{نها}_{س \to ٣}$ ق(س) = ١٢ ، $\text{نها}_{س \to ٣}$ س و(س) = ١٠

أجب عما يأتي:

جد قيمة الثابت م التي تجعل

$$\text{نها}_{س \to ٣} \left(م (و(س))^{٢} - ٦ ق(س) \right) = ٢٨$$

الحل:

من المعطيات

$\text{نها}_{س \to ٣}$ س و(س) = ١٠

$\text{نها}_{س \to ٣}$ و(س) = ١٠

$\text{نها}_{س \to ٣}$ و(س) = ٥

$$م (\text{نها}_{س \to ٣} و(س))^{٢} - ٦ \text{نها}_{س \to ٣} ق(س) = ٢٨$$

$$م (٥)^{٢} - ٦ \times ١٢ = ٢٨$$

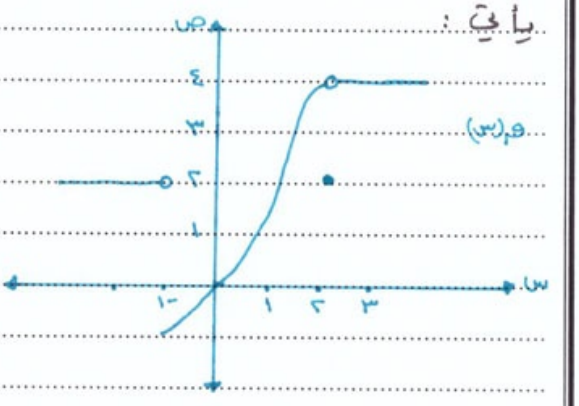
$$٢٥ م - ٧٢ = ٢٨$$

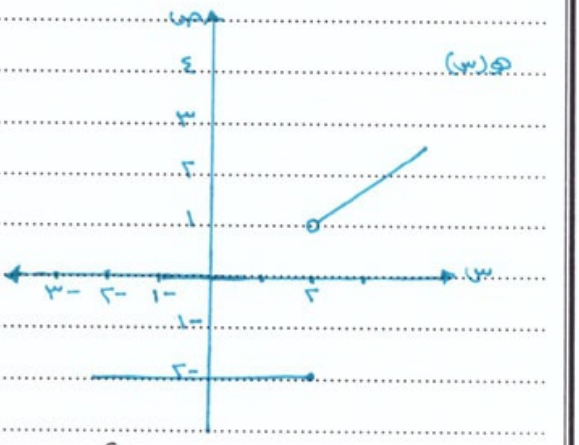
$$٢٥ م = ١٠٠$$

$$م = ٤$$

٢٠١٧ شتوي

اعتماداً على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى الاقتران f، g أجب عما يأتي :





١) جد $\lim_{س \to ١} (٥ ف(س) - (هـ(س))^{٢} + ٦ س)$

الحل:

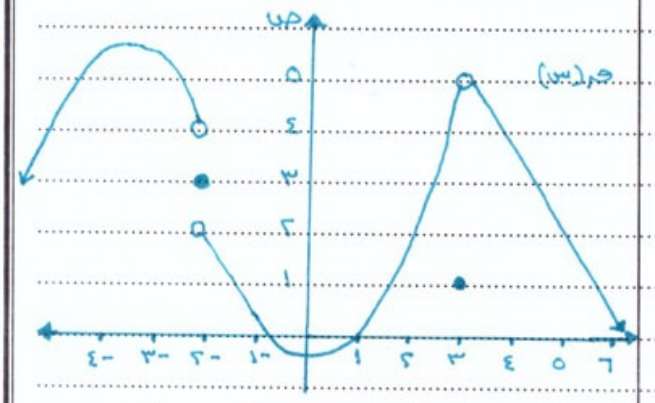
$٥ \lim_{س \to ١} ف(س) - (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٢} + \lim_{س \to ١} ٦ س$

$٥ \times ٢ - (-٢)^{٢} + ٦ \times ١$

$١٠ - ٤ + ٦$

$٦ + ٦ = ١٢$

٢٠١٧ صيفي



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى $ه$ جد

① $\lim_{س \to -٢}$ $(ف(س) + ٣ س)$ ② $\lim_{س \to ٣}$ $\sqrt{ف(س)}$

الحل:

① $\lim_{س \to -٢} ف(س) + \lim_{س \to -٢} ٣ س$

$= ٤ + ٣ \times -٢$

$= ٤ - ٦ = -٢$

② $\sqrt{\lim_{س \to ٣} ف(س)}$

$= \sqrt{٥}$

٢٠١٨ شتوي قديم

إذا كانت $\lim_{س \to -٢} ف(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -٢} هـ(س) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to -٢} (\sqrt{ف(س)} - ٢ هـ(س) + س هـ(س))$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} [ق(س) - ٢ هـ(س) + س \times هـ(س)]$

$= ٥ - ٢ \times ١٠ - + ٢ \times ١٠ -$

$= ٥ + ٢٠ + (-٢٠)$

$= ٢٥ - ٢٠ - ٥ = ١٥ -$

٢٠١٨ شتوي جديد

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٧$

فجد

$\lim_{س \to ٣} (٣ ق(س) - هـ(س) + س^{٢} هـ(س))$

الحل:

$٣ \lim_{س \to ٣} ق(س) - \lim_{س \to ٣} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} س^{٢} هـ(س)$

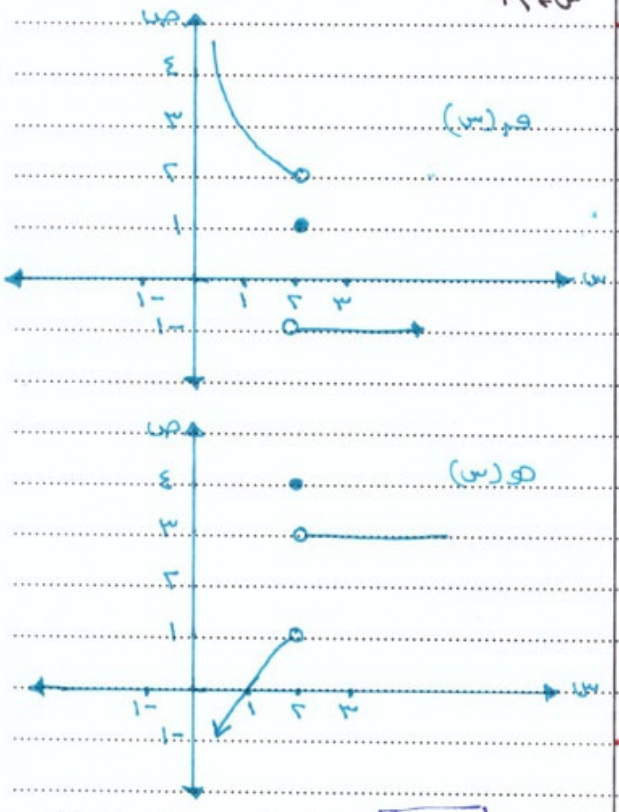
$٣ \times ٦ - (-٧) + ٤ \times -٧$

$١٨ + ٧ - ٢٨$

$= ٢٥ - ٢٨ = -٣$

٢٠١٨ صيفي قديم

معتمداً الشكل الآتي الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق ، هـ ما $\lim_{س \to ٣} (ق(س) + هـ(س))$ ؟



أ) ٤ ب) ٣ ج) غير موجودة د) ٢

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ق(س) + \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ١ - + ٣ = ٢$

٢٠١٨ صيفي جديد

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ٢ ق(س) = ١٢$ فإن

$\lim_{س \to ٣} (ق(س))^{٢}$ تساوي :

أ) ٤٢ ب) ١٤٤ ج) ٣٦ د) ١٠٠

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٦$

$= \lim_{س \to ٣} (ق(س))^{٢}$

$= \left(\lim_{س \to ٣} ق(س)\right)^{٢}$

$= (٦)^{٢} = ٣٦$

٢٠١٨ صيفي جديد

إذا كان ق ، ل كثيري حدود وكان

$ق(٢) = ٣$ ، $ل(٢) = ٨$ فجد

$\lim_{س \to ٢} (٥ ق(س) + \sqrt[٣]{ل(س)} - س^{٢})$

الحل:

$٥ \lim_{س \to ٢} ق(س) + \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٢} ل(س)} - \lim_{س \to ٢} س^{٢}$

$٥ \times ق(٢) + \sqrt[٣]{ل(٢)} - (٢)^{٢}$

$٥ \times ٣ + \sqrt[٣]{٨} - ٤$

$١٥ + ٢ - ٤$

$١٧ - ٤$

$= ١٣$

رياضيات ( ) الوحدة ( ) عصام محمد الشيخ

الفصل ( ) العنوان ( ) ماجستير رياضيات

■ ايجاد النهاية والصورة في الاقتران المتشعب :

مثال

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٥س + ١ & س > ٢ \\ س^٢ & س \leq ٢ \end{cases}$$

جد

١) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ٤) $ق(٢)$

الحل:

١) $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} (٥س + ١) = ٥ + ١ = ٦$

٢) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} س^٢ = ٣^٢ = ٩$

٣)

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٢ = ٢^٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س + ١) = ٥ \times ٢ + ١ = ١٠ + ١ = ١١$

$\therefore \lim_{س \to ٢^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة .

٤) $ق(٢) = (٢)^٢ = ٤$

مثال

إذا كان

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & س \geq 3 \\ 4س - 2 & س < 3 \end{cases}$$

فجد

١) نهـا ق(س) ، ٢) نهـا ق(س)
$س \to 1$ ، $س \to 4$

٣) نهـا ق(س) ، ٤) ق(٣)
$س \to 3$

الحل:

١) نهـا ق(س) = نهـا $(س^2 + 1)$
$س \to 1$ $س \to 1$

$= 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

٣) نهـا ق(س) = نهـا $(4س - 2)$
$س \to 4$ $س \to 4$

$= 4 \times 4 - 2 = 16 - 2 = 14$

٣) نهـا ق(س) = نهـا $(4س - 2)$
$س \to 3^+$ $س \to 3^+$

$= 4 \times 3 - 2 = 12 - 2 = 10$

نهـا ق(س) = نهـا $(س^2 + 1)$
$س \to 3^-$ $س \to 3^-$

$= 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

∴ نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
$س \to 3^+$ $س \to 3^-$

∴ نهـا ق(س) = 10
$س \to 3$

٤) ق(٣) $= 3^2 + 1$

$= 9 + 1 = 10$

مثال

إذا كان

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} 4س + 1 & س \geq 0 \\ 5 - س^2 & س < 0 \end{cases}$$

فجد

١) نهـا ق(س) ، ٢) نهـا ق(س)
$س \to 1$ ، $س \to -2$

٣) نهـا ق(س)
$س \to 0$

الحل :

١) نهـا ق(س) = نهـا $(5 - س^2)$
$س \to 1$ $س \to 1$

$= 5 - (1)^2 = 5 - 1 = 4$

٢) نهـا ق(س) = نهـا $(4س + 1)$
$س \to -2$ $س \to -2$

$= 4 \times -2 + 1 = -8 + 1 = -7$

٣) نهـا ق(س) = نهـا $(5 - س^2)$
$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

$= 5 - (0)^2 = 5 - 0 = 5$

نهـا ق(س) = نهـا $(4س + 1)$
$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

$= 4 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

∴ نهـا ق(س) ≠ نهـا ق(س)
$س \to 0^+$ $س \to 0^-$

∴ نهـا ق(س) غير موجودة
$س \to 0$

مثال

إذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \neq ٣ \\ ٨ & س = ٣ \end{cases}$$

فجد

١) $\lim_{س \to ٥} هـ(س)$ ٢) $هـ(٣)$

٣) $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

الحل :

١) $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = \lim_{س \to ٥} (س^٢ + ١)$

$= ٥^٢ + ١ = ٢٥ + ١ = ٢٦$

٢) $هـ(٣) = ٨$

٣) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \lim_{س \to ٣} (س^٢ + ١)$

$= ٣^٢ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

مثال

إذا كان $مـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س < ٢ \\ ٥ س & ٢ \leq س \leq ٦ \\ س^٢ - ٦ & س > ٦ \end{cases}$

فجد

١) $\lim_{س \to ٠} مـ(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٤} مـ(س)$

٣) $\lim_{س \to ٢} مـ(س)$ ٤) $\lim_{س \to ٦} مـ(س)$

الحل :

١) $\lim_{س \to ٠} مـ(س) = \lim_{س \to ٠} (س^٢ + ١)$

$= ٠^٢ + ١ = ٠ + ١ = ١$

٢) $\lim_{س \to ٤} مـ(س) = \lim_{س \to ٤} ٥ س$

$= ٥ \times ٤ = ٢٠$

٣) $\lim_{س \to ٢} مـ(س) = \lim_{س \to ٢} ٥ س$

$= ٥ \times ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^-} مـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ + ١)$

$= ٢^٢ + ١ = ٤ + ١ = ٥$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} مـ(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} مـ(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} مـ(س)$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٦^+} مـ(س) = \lim_{س \to ٦^+} (س^٢ - ٦)$

$= ٦^٢ - ٦ = ٣٦ - ٦ = ٣٠$

$\lim_{س \to ٦^-} مـ(س) = \lim_{س \to ٦^-} (٥ س)$

$= ٥ \times ٦ = ٣٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٦^+} مـ(س) = \lim_{س \to ٦^-} مـ(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٦} مـ(س) = ٣٠$

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & س \geq صـ \\ ٣س + ١ & س < صـ \end{cases}$

حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ نهـا

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} (٣س + ١)$ نهـا

$= ٣ \times ٤ + ١ = ١٢ + ١ = ١٣$

٢٠١٠ صيفي

إذا كانت

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٧ & س < ٣ \\ ٥ & س > ٣ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ نهـا تساوي

أ) ٥ ب) ٣٢ جـ) ٣ د) غير موجودة

الحل:

$\lim_{س \to ٣} (س^{٢} + ٧)$ نهـا

$= ٥^{٢} + ٧ = ٢٥ + ٧ = ٣٢$

٢٠١١ صيفي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٧ & س = ٠ \\ ٥ & س = ٠ \\ ٣ & س > ٠ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ نهـا =

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٧ د) غير موجودة

الحل:

$\lim_{س \to ٠^{-}} ق(س) = ٧$ نهـا

$\lim_{س \to ٠^{+}} ق(س) = ٣$ نهـا

$\lim_{س \to ٠} ق(س)$ نهـا غير موجودة $\Leftarrow$

رياضيات ( ) الوحدة ( ) عصام محمد الشيخ

الفصل ( ) العنوان ( ) ماجستير رياضيات

■ ايجاد الثابت

مثال

إذا كانت

$\lim_{س \to ٣} (م س^{٢} + ٥ س + ١) = ٢٥$

فجد قيمة الثابت م ؟

الحل :

$م \times (٣)^{٢} + ٥ \times ٣ + ١ = ٢٥$

$٩ م + ١٥ + ١ = ٢٥$

$٩ م + ١٦ = ٢٥$

$٩ م = ٩$

$م = ١$ ⇐

ملاحظة

$\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة

يعني

$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} ق(س)$

مثال

إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} ٣ س - م & س > ٢ \\ ١٠ & س < ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة فما قيمة م ؟

الحل :

بما أن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ⇐

$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$٣ \times ٢ - م = ١٠$

$٦ - م = ١٠$

$م = ١٠ - ٦$ ⇐ $م = -٤$

مثال

إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & س > ٣ \\ ٢٠ & س = ٣ \\ ٣ م س + ١ & س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة فما قيمة م ؟

الحل :

بما أن $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة ⇐

$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} ق(س)$

$(٣)^{٣} + ١ = ٣ \times م + ١$

$٢٧ + ١ = ٣ م + ١$

$٣ م + ١ = ٢٨$

$٣ م = ٢٧$ ⇐ $م = ٩$

مثال

إذا كان

$$\text{د}(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & س > ٢ \\ ٥س^{٢} + ب & س \leq ٢ \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to ٢}$ د(س) موجودة فما قيمة ب ؟

الحل:

بما أن $\text{نها}_{س \to ٢}$ د(س) موجودة ⇐

$\text{نها}_{س \to ٢^{-}}$ د(س) = $\text{نها}_{س \to ٢^{+}}$ د(س)

ب + ٥ × (٢)^{٢} = ٣ × ٢ + ٤

ب + ٢٠ = ٦ + ٤

ب = ١٠ - ٤

ب = ١٦

مثال

إذا كان

$$\text{د}(س) = \begin{cases} ٥س - ب & س > ١ \\ ب س^{٢} + ٧ & س \leq ١ \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to ٣}$ د(س) = ١٦ وكانت

$\text{نها}_{س \to ١}$ د(س) موجودة فما قيمة ب ، ب ؟

الحل:

$\text{نها}_{س \to ٣}$ د(س) = ١٦

⇐ $\text{نها}_{س \to ٣}$ (ب س^{٢} + ٧) = ١٦

٩ب + ٧ = ١٦

٩ب = ٩ ⇐ ب = ١

مثال

إذا كان

$$\text{د}(س) = \begin{cases} ٥س^{٣} & س > ب \\ ٤٠ & س \leq ب \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to ب}$ د(س) موجودة فما قيمة ب ؟

الحل:

بما أن $\text{نها}_{س \to ب}$ د(س) موجودة ⇐

$\text{نها}_{س \to ب^{-}}$ د(س) = $\text{نها}_{س \to ب^{+}}$ د(س)

٥ × (ب)^{٣} = ٤٠

٥ ب^{٣} = ٤٠

ب^{٣} = ٨ ⇐ ب = ٢

$\text{نها}_{س \to ١}$ د(س) موجودة ⇐

$\text{نها}_{س \to ١^{-}}$ د(س) = $\text{نها}_{س \to ١^{+}}$ د(س)

٥ × (١)^{٢} - ب = ٧ + ١

٥ - ب = ١ + ٧

ب = ٨ - ٥

ب = ٣

رياضيات ( ) الوحدة ( ) عصام محمد الشيخ

الفصل ( ) العنوان ( ) ماجستير رياضيات

٢٠١٨ صيفي قديم

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (ك + س) = ٢$ فما قيمة الثابت ك ؟

أ) -٥ ب) ١ ج) -١ د) ٥

الحل:

$\lim_{س \to ٣} ك + \lim_{س \to ٣} س = ٢$

$ك + ٣ = ٢$

$\Leftarrow ك = -١$

٢٠١٨ صيفي قديم

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥م & س > ٤ \\ ٣م - ٤ & س \leq ٤ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ موجودة فجد قيمة الثابت م .

الحل:

بما أن $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = \lim_{س \to ٤^+} ق(س)$

$(٤)^{٢} + ٥م = ٣م \times ٤ - ٤$

$١٦ + ٥م = ١٢م - ٤$

$٥م - ١٢م = -١٦ - ٤$

$م = -٢٠$

٣.١٢ شتوي

إذا كان ق(س) = { م س^٢ - ٥ ، س < ٣
٢٠ ، س = ٣
٣ س + ٥ ، س > ٣

فما قيمة الثابت م التي تجعل نهـا ق(س) موجودة.
٣

الحل:

لتكون نهـا ق(س) موجودة فإن
٣

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
٣+ ٣-

م × ٥^٢ - ٥ = ٣ × ٨ + ٥

٢٥ م - ٥ = ٤٥

٢٥ م = ٥٠ ⇐ م = ٢

٢.١٢ صيغي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & س \leq ٢ \\ م س & س > ٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت م التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة.

الحل:

لتكون $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة فإن

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

$(٢)^{٣} = م \times ٢$

$٨ = ٢م$

$\Leftarrow م = ٤$

٢.١٣ صيغي

إذا كان ك عددًا ثابتًا وكانت $\lim_{س \to ١} (٨س + ٢ك) = ٦$ فإن

قيمة ك =

أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د) ٦

الحل:

$\lim_{س \to ١} ٨س + \lim_{س \to ١} ٢ك = ٦$

$١ \times ٨ + ٢ك = ٦$

$٨ + ٢ك = ٦$

$٢ك = -٢ \Leftarrow ك = -١$

٢.١٣ بنتوي

إذا كانت $\lim_{س \to -١} (ل س^{٢} + ٣) = ٧$

فإن قيمة الثابت ل تساوي

أ) ٤ ب) -٤ ج) -١٠ د) ١٠

الحل:

$ل \times \lim_{س \to -١} س^{٢} + \lim_{س \to -١} ٣ = ٧$

$ل \times ١ + ٣ = ٧$

$ل + ٣ = ٧$

$ل = ٤$