حلول التمارين من ١ حتى ١٤ وهي بمثابة مراجعة عامة لأبحاث الكتاب وسنكمل الحل في المرة القادمة

١- نعيد تعريف الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+١] - \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right]$$

$$[\text{س}+١] = \begin{cases} ٢ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right] = \begin{cases} -١ & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٠ & ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+١] - \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right] = \begin{cases} ٣ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+١] - \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right] = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \begin{cases} ٣ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases} = ٣$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = [\text{س}+١] - \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right] = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \begin{cases} ٣ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases} = ٣$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٣ = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$$

نهاية الاقتران عند ال ٢ موجودة وتساوي ٣

٢ - اوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - [\text{س}]}{|\text{س}|}$

$$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{س} - [\text{س}]}{|\text{س}|} = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{س} - (-١)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{س}+١}{\text{س}} = -\infty$$ لا يوجد نهاية عند الصفر من اليسار

نهاية غير محدودة

$$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{س} - [\text{س}]}{|\text{س}|} = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{س} - (٠)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$$

النهاية عند الصفر غير موجودة لان

٣- $$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س}} = \frac{٠}{\frac{\pi}{٤}} = ٠$$

٤- اوجد $\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١}$

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١} = \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)^{٢}} = \lim_{س\to ١} \frac{(س^{٢}+س+١)}{س-١} = \frac{٣}{\pm ٠} = \pm\infty$$

لا يوجد نهاية للاقتران عند الصفر

٥ - عين أ بحيث لا يكون للاقتران نهاية $\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{س^{٢}+١}{أس^{٢}+٣س+١}$

البسط غير قابل للتحليل وبالتالي لن يكون لهذا الاقتران نهاية عندما يكون للمقام جذور (اصفار)

وهذا يتحقق عندما $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ \geq ٠ \Leftrightarrow \Delta = ٩ - ٤(أ)(١) \geq ٠ \Leftrightarrow أ \leq \dfrac{٩}{٤}$

ولكن $\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{س^{٢}+١}{أس^{٢}+٣س+١} = \dfrac{٢}{أ+٤}$ نهاية غير موجودة عندما $أ = -٤$ وهي مقبولة لانها

$-٤ \in \left(-\infty ، \dfrac{٩}{٤}\right)$

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢}+١}{-٤س^{٢}+٣س+١} = \lim_{س\to ١} \frac{س^{٢}+١}{(س-١)(-٤س-١)}$$ نهاية غير موجودة

٦ - $\lim\limits_{س\to ٢} \dfrac{جا(س^{٢}-٤)}{(س-٢)}$

$$\lim_{س\to ٢} \frac{جا(س^{٢}-٤)}{(س-٢)} = \lim_{س\to ٢} (س+٢)\frac{جا(س^{٢}-٤)}{(س^{٢}-٤)} = ٤\times ١ = ٤$$

٧ - $\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{(س+١)\sqrt[٣]{س} - ٢}{س-١}$

$$\lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt[٣]{س} - ٢}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt[٣]{س} - ٢ \quad \sqrt[٣]{س} + ٢ \quad \sqrt[٣]{س} - ٢}{س-١} =$$

$$\lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt[٣]{س} - ٢ \quad \sqrt[٣]{س} + ٢ \quad \sqrt[٣]{س} - ٢}{س-١} =$$

$$\lim_{س\to ١} \frac{\sqrt[٣]{س}(س-١) + ٢\left(\sqrt[٣]{س} - ١\right)}{س-١} = \lim_{س\to ١} \sqrt[٣]{س} + \frac{٢\left(\sqrt[٣]{س} - ١\right)}{س-١} =$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١}\ \sqrt[3]{\text{س}} + \frac{٢\left(\sqrt[3]{\text{س}} - ١\right)}{\left(\sqrt[3]{\text{س}} - ١\right)\left(\sqrt[3]{\text{س}^{٢}} + \sqrt[3]{\text{س}} + ١\right)} =$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١}\ \sqrt[3]{\text{س}} + \frac{٢}{\left(\sqrt[3]{\text{س}^{٢}} + \sqrt[3]{\text{س}} + ١\right)} = ١ + \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٣}$$

٨ -عين أ،ب ليكون الاقتران متصل عند الواحد $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أس} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} > ١ \\ \text{ب س} - ٥ & \text{س} \le ١ \end{cases}$

شرط الاتصال عند الواحد $\text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{-}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{+}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١)$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{-}}\ \text{ب س} - ٥ = \text{ب} - ٥$$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{+}}\ \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أس} + ٣}{\text{س} - ١}$ شرط وجود النهاية ان يكون الواحد صفرا للبسط

بمعنى $١ - \text{أ} + ٣ = ٠ \Leftrightarrow \text{أ} = ٤$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{+}}\ \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ١^{+}}\ \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ١} = -٢$$

لكن $\text{ب} - ٥ = -٢ \Leftrightarrow \text{ب} = ٣$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} > ١ \\ ٣\text{س} - ٥ & \text{س} \le ١ \end{cases}$$

٩- اذا كانت $\text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}) + ٥}{\text{س} + ٢} = ٩$ اوجد

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}\right) \quad \text{و} \quad \text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\text{ق}^{٢}(\text{س}) + ٢\text{س}\right)$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}\right) = \text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\text{ق}(\text{س}) + ٥ + ٢\text{س} - ٥\right) = \text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\ \frac{\left(\text{ق}(\text{س}) + ٥ + ٢\text{س} - ٥\right)}{\text{س} + ٢} \times (\text{س} + ٢)$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\frac{\left(\text{ق}(\text{س}) + ٥\right)}{\text{س} + ٢} + \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س} + ٢}\right) \times (\text{س} + ٢)$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to -٢}\left(\frac{\left(\text{ق}(\text{س}) + ٥\right)}{\text{س} + ٢}\right)(\text{س} + ٢) + (٢\text{س} - ٥) = ٩ \times ٠ + (-٩) = -٩$$

$$\lim_{س\to-٢}\left(ق^{٢}(س)+٢س\right)=\lim_{س\to-٢}\left(ق^{٢}(س)-٢٥+٢س+٢٥\right)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\frac{\left(ق^{٢}(س)-٢٥+٢س+٢٥\right)}{(س+٢)}(س+٢)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\frac{\left(ق^{٢}(س)-٢٥\right)}{(س+٢)}(س+٢)+\lim_{س\to-٢}\frac{٢س+٢٥}{س+٢}(س+٢)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\frac{(ق(س)+٥)}{(س+٢)}(ق(س)-٥)(س+٢)+\lim_{س\to-٢}(٢س+٢٥)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\frac{(ق(س)+٥)}{(س+٢)}(ق(س)-٥)(س+٢)+\lim_{س\to-٢}(٢س+٢٥)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\frac{(ق(س)+٥)}{(س+٢)}(ق(س)+٢س-٢س-٥)(س+٢)+\lim_{س\to-٢}(٢س+٢٥)$$

$$=\lim_{س\to-٢}\left\{\frac{(ق(س)+٥)}{(س+٢)}\left((ق(س)+٢س)-(٢س+٥)\right)\right\}(س+٢)+\lim_{س\to-٢}(٢س+٢٥)$$

$$=٩(-٩-١)\times٠+(-٤+٢٥)=٢١$$

ملاحظة يستطيع الطالب ان يحل السؤال بالشكل التالي $\lim_{س\to-٢}\frac{ق(س)+٥}{س+٢}=٩$

بما ان النهاية موجودة ونهاية المقام عند -٢ هي الصفر اذا يجب ان تكون نهاية البسط هي صفر ايضا $\lim_{س\to-٢}ق(س)+٥=٠\Leftrightarrow\lim_{س\to-٢}ق(س)=-٥$ ونكمل التمرين

-١٠

$$\lim_{س\to٠}\frac{س-جا٣س+ظا٥س}{٢س-ظا^{٢}س}$$

$$\lim_{س\to٠}\frac{١-\frac{جا٣س}{س}+\frac{ظا٥س}{س}}{٢-\frac{ظا^{٢}س}{س}}=\lim_{س\to٠}\frac{١-٣\frac{جا٣س}{٣س}+٥\frac{ظا٥س}{٥س}}{٢-\frac{ظاس}{س}ظاس}$$

ولما كانت $\lim_{س\to٠}\frac{جاس}{س}=٠،\lim_{س\to٠}\frac{ظاس}{س}=٠،\lim_{س\to٠}\frac{ظا٥س}{٥س}=٠$ كانت

$$\lim_{س\to٠}ق(س)=\frac{١-٣+٥}{٢-١\times٠}=٣$$

١١ $\lim_{س\to٢\pi}\frac{\left(\frac{١}{٢}س-\pi\right)}{جاس}$

بفرض

$$\frac{١}{٢}\text{س} - \pi = \text{ص} \Leftrightarrow \frac{١}{٢}\text{س} = \text{ص} + \pi \Leftrightarrow \text{س} = ٢\text{ص} + ٢\pi$$

$$\text{س} \to ٢\pi \Rightarrow \text{ص} \to ٠$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢\pi} \frac{\left(\frac{١}{٢}\text{س} - \pi\right)}{\text{جاس}} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{ص}}{\text{جا}(٢\text{ص} + ٢\pi)} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{٢\text{ص}}{\text{جا}٢\text{ص}} \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$$

١٢-ابحث في اتصال الاقتران على مجاله $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+١] & |\text{س}| \le ٢ \\ |\text{س}-٣| & |\text{س}| > ٢ \end{cases}$

نعيد التعريف على فترات

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+١] & |\text{س}| \le ٢ \\ |\text{س}-٣| & |\text{س}| > ٢ \end{cases}$$

$$|\text{س}| \le ٢ \Leftrightarrow -٢ \le \text{س} \le ٢ \Leftrightarrow \text{س} \in [-٢،٢]$$

$$|\text{س}| > ٢ \Leftrightarrow \text{س} < -٢ \vee \text{س} > ٢ \Leftrightarrow \text{س} \in (-\infty،-٢) \cup (٢،\infty)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}+١] & -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ |\text{س}-٣| & \text{س} \in (-\infty،-٢) \cup (٢،\infty) \end{cases}$$

$$[\text{س}+١] = \begin{cases} -١ & -٢ \le \text{س} < -١ \\ ٠ & -١ \le \text{س} < ٠ \\ ١ & ٠ \le \text{س} < +١ \\ ٢ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

$$|\text{س}-٣| = \begin{cases} -\text{س}+٣ & \text{س} \in (-\infty،-٢) \cup (٢،٣) \\ \text{س}-٣ & \text{س} \in [٣،\infty) \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -١ & -٢ \le \text{س} < -١ \\ ٠ & -١ \le \text{س} < ٠ \\ ١ & ٠ \le \text{س} < +١ \\ ٢ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & \text{س} = ٢ \\ -\text{س}+٣ & \text{س} \in (-\infty،-٢) \cup (٢،٣) \\ \text{س}-٣ & \text{س} \in [٣،\infty) \end{cases}$$

كل من هذه الاقترانات أصبح مقصور اقتران كثير حدود على فترة مفتوحة فهو متصل على الفترة المفتوحة المقابلة له

لندرس الاتصال عند نقط التفرع

عند -٢ $\underset{س\leftarrow -٢^-}{نهــا} -س+٣=٥، \underset{س\leftarrow -٢^+}{نهــا} -١=-١=-٢$ غير متصل عند -٢ نهايتين غي متساويتين

كذلك غير متصل عند -١، ٠، ١ النهايتان غير متساويتان (نتحقق من ذلك)

عند ٢ $\underset{س\leftarrow ٢^-}{نهــا}(-س+٣)=١، \underset{س\leftarrow ٢^+}{نهــا} ق(س)=٢، ق(٢)=٣$ غير متصل عند ٢ لم يتحقق شرط الاتصال

عند ال ٣

$$\underset{س\leftarrow ٣^-}{نهــا} -س+٣=\underset{س\leftarrow ٣^+}{نهــا} س-٣=٠=ق(٣)$$ محقق

الاقتران متصل على كل من الفترات التالية $(-\infty، -٢)، (-٢، -١)، (-١، ٠)، (٠، ١)، (١، ٢)، (٢، \infty)$

١٣-اذا كان الاقتران متصل على ح اوجد جـ

$$ق(س)=\begin{cases} \dfrac{س^٣-(٣-٢جـ)س-٦جـ}{س-٣} & س\neq ٣ \\ ٤س-١ & س=٣ \end{cases}$$

بما ان الاقتران متصل على ح يجب ان يكون متصل عند ال ٣ وبالتالي يتحقق

$$\underset{س\leftarrow ٣^-}{نهــا} ق(س)=\underset{س\leftarrow ٣^+}{نهــا} ق(س)=ق(٣)$$

$\dfrac{س^٣-(٣-٢جـ)س-٦جـ}{س-٣}$ بما ان نهاية الاقتران موجودة اذا ال٣ هي صفر للبسط

$$٣^٣-(٣-٢جـ)\times٣-٦جـ=٠ \Leftrightarrow ٢٧-٩+٦جـ-٦جـ=٠$$

$٢٧=٩$ وهذا مستحيل اذا الاقتران لا يمكن ان يكون متصل عند ال٣ وطبعا هذا الخطأ سببه ان احد الاشارات يجب ان تكون موجبة وليس سالبة

ملاحظة هامة كنت سأكتب $٢٧-٩+٦جـ-٦جـ=٠ \Longrightarrow ٢٧\neq ٩$ هل هذه الكتابة صحيحة واين الخطأ في ذلك

١٤ابحث في اتصال الاقتران $ق(س)=\begin{cases} [٢س-١]-[س] & س\prec ١ \\ س+\left|\frac{١}{٢}س\right| & ١\leq س\leq ٣ \end{cases}$ عند الواحد فقط

نعيد التعريف

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ - ٠ & \frac{١}{٢} \leq س < ١ \\ س + \frac{١}{٢}س & ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ & \frac{١}{٢} \leq س < ١ \\ \frac{٣}{٢}س & ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٠ \neq \lim_{س \to ١^+} ق(س) = \frac{٣}{٢}$ لا يوجد نهاية اذا غير متصل عند الواحد